Tema 5

Derivación

Iniciamos el estudio del Cálculo Diferencial, introduciendo el concepto de *derivada* para funciones reales de variable real, que se basa en la noción de límite funcional. Analizamos la relación entre derivabilidad y continuidad, y constatamos el carácter local del concepto de derivada, prestando también atención a las derivadas laterales. Seguidamente explicamos la interpretación geométrica de la derivada (pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función) y su interpretación física más elemental (velocidad o razón de cambio).

Para el estudio de las funciones derivables seguiremos un esquema similar al utilizado con la funciones continuas. Demostramos que la familia de las funciones derivables es estable por las operaciones usuales: suma, producto, cociente, composición y función inversa. Probamos la derivabilidad de diversas funciones conocidas: funciones racionales, exponencial, logaritmo y funciones potencia. Quedará para más adelante la derivación de las funciones trigonométricas y sus inversas.

5.1. Concepto de derivada

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Dado un punto $a \in A \cap A'$, consideramos la función $f_a : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \forall x \in A \setminus \{a\}$$

Puesto que $a \in \big(A \setminus \{a\}\big)'$, tiene sentido preguntarse por la existencia de límite en el punto a para la función f_a. Pues bien, se dice que f es *derivable* en el punto a cuando la función f_a tiene límite en el punto a. Dicho límite recibe el nombre de *derivada* de la función f en el punto a y se denota por $f'(a)$. Simbólicamente:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} f_a(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dado un conjunto $B \subset A \cap A'$, diremos que f es derivable en B cuando sea derivable en todo punto de B.

Sea ahora A_1 el conjunto de puntos de $A \cap A'$ en los que f sea derivable. Si A_1 no es vacío, podemos considerar la función $x \mapsto f'(x)$ que a cada punto de A_1 hace corresponder la derivada de f en dicho punto. Se obtiene así la *función derivada* de f, que se denota por f'. Simbólicamente:

$$f' : A_1 \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \qquad \forall x \in A_1$$

Obsérvese que con la notación usada para la derivada en un punto no hacíamos otra cosa que anticipar la definición de la función derivada. Debemos siempre distinguir claramente entre la derivada de una función en un punto, que es un número real, y la función derivada, que es una función real de variable real.

Resaltamos que no tiene sentido discutir la derivabilidad de una función en puntos donde no esté definida ni en puntos aislados de su conjunto de definición. El caso más interesante se presenta cuando el conjunto de definición es un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que contenga al menos dos puntos. Se tiene entonces $I \subset I'$, luego para funciones definidas en I tiene sentido plantear su posible derivabilidad en todo punto de I. Vamos con la primera observación importante sobre el concepto de derivada:

- *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y $a \in A \cap A'$. Si f es derivable en el punto a, entonces f es continua en a.*

En efecto, basta observar que $\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} (x - a) \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$. ■

El carácter local del concepto de límite funcional se transmite a la noción de derivada. La comprobación del siguiente enunciado es obvia.

- *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real, $B \subset A$ y $b \in B \cap B' \subset A \cap A'$.*
  - (i) *Si f es derivable en b, entonces $f|_B$ es derivable en b, con $(f|_B)'(b) = f'(b)$.*
  - (ii) *Si $f|_B$ es derivable en b y existe $\delta > 0$ tal que $A \cap]b - \delta, b + \delta[\subset B$, entonces f es derivable en b.*

Como en otras situaciones previas, el carácter local del concepto de derivada suele aplicarse fijando un $\delta > 0$ conveniente y tomando $B = A \cap]b - \delta, b + \delta[$ con lo que la derivabilidad de f en b equivale a la de $f|_B$, en cuyo caso las dos derivadas coinciden.

El concepto de límite lateral nos lleva lógicamente a las derivadas laterales. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real, fijemos un punto $a \in A \cap A'$, consideremos la función f_a utilizada en la definición de derivada y recordemos la notación que usamos para los límites laterales: $A_a^- = \{x \in A : x < a\}$, $A_a^+ = \{x \in A : x > a\}$ y sabemos que $A' = (A_a^-)' \cup (A_a^+)'$.

Suponiendo que $a \in (A_a^-)'$, diremos que f es *derivable por la izquierda* en a cuando la función f_a tenga límite por la izquierda en a, límite que recibe el nombre de *derivada por la izquierda* de f en a y se denota por $f'(a-)$. Análogamente, si $a \in (A_a^+)'$, f será *derivable por la derecha* en a cuando f_a tenga límite por la derecha en a, que será la *derivada por la derecha* de f en a y se denotará por $f'(a+)$. Simbólicamente:

$$f'(a-) = \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{y} \qquad f'(a+) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La relación entre el límite ordinario y los límites laterales nos da directamente la relación entre derivada y derivadas laterales, que recogemos en el siguiente resultado, cuya demostración es evidente. Para que podamos hacer un enunciado breve sin crear malentendidos, debe quedar claro que, cuando para $L \in \mathbb{R}$ escribimos $f'(a) = L$, estamos afirmando que f es derivable en el punto a con derivada L. La misma aclaración se aplica a las derivadas laterales.

- *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real, $a \in A \cap A'$ y $L \in \mathbb{R}$.*
  - (i) *Si $a \in (A_a^-)' \setminus (A_a^+)'$ se tiene: $f'(a) = L \iff f'(a-) = L$*
  - (ii) *Si $a \in (A_a^+)' \setminus (A_a^-)'$ se tiene: $f'(a) = L \iff f'(a+) = L$*
  - (iii) *Si $a \in (A_a^-)' \cap (A_a^+)'$ se tiene: $f'(a) = L \iff f'(a-) = f'(a+) = L$*

Las derivadas laterales permiten precisar mejor la relación entre derivabilidad y continuidad, como muestra el siguiente enunciado, cuya demostración es evidente:

- *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y $a \in A \cap A'$.*
  - (i) *Si $a \in (A_a^-)'$ y f es derivable por la izquierda en a, entonces $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$.*
  - (ii) *Si $a \in (A_a^+)'$ y f es derivable por la derecha en a, entonces $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$.*
  - (iii) *Como consecuencia, si $a \in (A_a^-)' \cap (A_a^+)'$ y f es derivable por la izquierda y por la derecha en a, entonces f es continua en a, aunque puede ocurrir que las derivadas laterales no coincidan.*

Veamos ya algunos ejemplos muy sencillos de funciones derivables y no derivables. Fijados $a, b, c \in \mathbb{R}$, consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para $x, y \in \mathbb{R}$, con $y \neq x$, tenemos claramente

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{a(y^2 - x^2) + b(y - x)}{y - x} = a(y + x) + b$$

luego f es derivable en $\mathbb{R}$ con $f'(x) = 2ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular:

- *Toda función constante en $\mathbb{R}$ es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada idénticamente nula. La función identidad es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada constantemente igual a 1.*

Obviamente, para tener ejemplos de funciones no derivables basta pensar en funciones que no sean continuas. Veamos un ejemplo de una función que admite derivadas laterales, y en particular es continua en un punto, pero no es derivable en ese punto.

Consideremos la función valor absoluto: $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $V(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. El carácter local del concepto de derivada nos dice claramente que $V'(a) = 1$ para todo $a \in \mathbb{R}^+$, y que $V'(a) = -1$ para todo $a \in \mathbb{R}^-$. Para $a = 0$ tenemos claramente

$$\lim_{x \to 0-} V_0(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = -1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0+} V_0(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = 1$$

luego $V'(0-) = -1$, $V'(0+) = 1$ y V no es derivable en 0. La función derivada es:

$$V' : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \qquad V'(x) = \operatorname{sgn} x = \frac{|x|}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

5.2. Aproximación por polinomios de primer grado

Vamos a caracterizar el concepto de derivada de una forma que clarifica su significado y resulta útil para futuras generalizaciones.

Si una función $f : A \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto $a \in A \cap A'$, tenemos evidentemente

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0 \tag{1}$$

Por tanto, el polinomio de primer grado P dado por

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

verifica que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{x-a} = 0 \tag{3}$$

es decir, la diferencia $f - P$ tiende a cero “rápidamente” al acercarnos al punto a. Por tanto, P es una buena aproximación de la función f cerca del punto a. De hecho veremos enseguida que ningún otro polinomio de primer grado puede cumplir la condición (3), luego podemos decir que P es el polinomio de primer grado que mejor aproxima a la función f cerca del punto a.

Sea pues Q un polinomio de primer grado verificando que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - Q(x)}{x-a} = 0$, y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $Q(x) = \alpha + \beta(x-a)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponiendo solo que f es continua en a, probaremos que f es derivable en a y que $Q = P$, es decir, $\alpha = f(a)$ y $\beta = f'(a)$.

De la hipótesis sobre Q se sigue claramente que $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) - Q(x)\big) = 0$, con lo que la continuidad de f en a nos da directamente $f(a) = \alpha$. Para $x \in A \setminus \{a\}$, tenemos entonces

$$\frac{f(x) - Q(x)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a) - \beta(x-a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - \beta$$

y aplicando de nuevo la hipótesis sobre Q obtenemos que f es derivable en el punto a con $f'(a) = \beta$, como se quería. Podemos resumir los razonamientos anteriores como sigue:

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y supongamos que f es continua en un punto $a \in A \cap A'$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  (i) *La función f es derivable en a.*

  (ii) *Existe un polinomio P, de primer grado, que verifica* (3).

  En caso de que se cumplan (i) y (ii), el polinomio P es único y viene dado por (2), *equivalentemente, verifica que $P(a) = f(a)$ y $P'(a) = f'(a)$.*

Resumiendo, para una función continua en un punto, la derivabilidad equivale a que la función pueda aproximarse cerca de ese punto mediante un polinomio de primer grado, que queda determinado por el valor de la función y la derivada en el punto en cuestión.

5.3. La diferencial de una función

Volvemos a la igualdad (1), que verificaba la derivada de una función en un punto. Usando la caracterización $(\varepsilon-\delta)$ del límite que en ella aparece, la reformulamos como sigue:

- *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función derivable en un punto* $a \in A \cap A'$. *Para cada* $\varepsilon > 0$*, puede encontrarse un* $\delta > 0$ *que verifica lo siguiente:*

$$x \in A\,, \quad |x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)| \leqslant \varepsilon\,|x-a| \tag{4}$$

Obsérvese que al final de (4) usamos una desigualdad no estricta, para admitir que pueda ser $x = a$. Tenemos pues, escrita en forma cómoda, una caracterización $(\varepsilon-\delta)$ de la derivada. Su interpretación no es ninguna sorpresa: el número $f'(a)(x-a)$ es una buena aproximación de la diferencia $f(x)-f(a)$ cuando x está cerca de a. Lo interesante es que $f'(a)(x-a)$ depende *linealmente* de $x-a$.

Recordemos algunas ideas sobre aplicaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que son bien conocidas. Fijado $\alpha \in \mathbb{R}$, definiendo $g(x) = \alpha x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ obtenemos una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es una aplicación *lineal* cuando vemos a $\mathbb{R}$ como espacio vectorial (de dimensión 1) sobre sí mismo, puesto que evidentemente se tiene $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ y $g(x+y) = g(x) + g(y)$ para cualesquiera $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$. Recíprocamente, si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal, basta tomar $\alpha = g(1)$ para tener $g(x) = \alpha x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos por tanto ver cada número real como aplicación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, consistente en multiplicar por él, y obtenemos así todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Al usar esta idea para la derivada de una función en un punto aparece el concepto de diferencial.

Si una función $f : A \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto $a \in A \cap A'$ llamamos *diferencial* de f en el punto a a la aplicación lineal $df(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$df(a)(h) = f'(a)\,h \quad \forall\, h \in \mathbb{R} \tag{5}$$

y decimos también que f es *diferenciable* en el punto a. Por ejemplo, tomando $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, sabemos que f es diferenciable en $\mathbb{R}$, con $df(x)(h) = 2xh$ para $h, x \in \mathbb{R}$.

Obsérvese que decir que una función es diferenciable equivale a decir que es derivable. La relación entre derivada y diferencial es una cuestión de matiz: la derivada de una función en un punto es un número, mientras que la diferencial es la aplicación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que consiste en multiplicar por dicho número. Al hablar de la diferencial, simplemente estamos resaltando que al aplicar dicha función a la diferencia $x-a$ obtenemos $df(a)(x-a)$ que aproxima la diferencia $f(x)-f(a)$. Para reforzar esta idea de que la diferencial de una función en un punto permite en cierto modo controlar una relación entre diferencias, podemos razonar como sigue.

Siempre bajo la hipótesis de que $f : A \to \mathbb{R}$ sea derivable en $a \in A \cap A'$, dado $\varepsilon > 0$ tenemos $\delta > 0$ verificando (4). Para $x, y \in A$, con $a - \delta < x \leqslant a \leqslant y < a + \delta$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\big|f(y) - f(x) - df(a)(y-x)\big| &= \big|f(y) - f(x) - df(a)[(y-a) - (x-a)]\big| \\
&= \big|\big(f(y) - f(a) - df(a)(y-a)\big) - \big(f(x) - f(a) - df(a)(x-a)\big)\big| \\
&\leqslant \varepsilon\,|y-a| + \varepsilon\,|x-a| = \varepsilon\,(y-x)
\end{aligned}$$

donde hemos resaltado la linealidad de la diferencial. Hemos probado lo siguiente:

- *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable en un punto* $a \in A \cap A'$*. Entonces, para cada* $\varepsilon > 0$ *puede encontrarse* $\delta > 0$ *tal que:*

$$x, y \in A\,, \;\; a - \delta < x \leqslant a \leqslant y < a + \delta \implies |f(y) - f(x) - df(a)(y - x)| \leqslant \varepsilon\,(y - x) \tag{6}$$

De nuevo la diferencia $f(y) - f(x)$ se aproxima por $df(a)(y-x)$ pero ahora puede ser $x \neq a$ e $y \neq a$, siempre que el conjunto A lo permita. En el caso no trivial $y - x \neq 0$ podemos dividir ambos miembros de la última desigualdad por $y - x$ y escribir

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(a) \right| \leqslant \varepsilon$$

Expliquemos un formalismo que a veces se usa al trabajar con la diferencial. Para recordar que la aproximación antes mencionada sólo es útil cuando $x - a$ es suficientemente pequeño, es costumbre sustituir la variable h que hemos usado en (5) por el símbolo dx (léase diferencial de x) y ver $df(a)$ como una "variable" que depende de dx, escribiendo $df(a) = f'(a)\,dx$. Llevando el formalismo un poco más lejos, podemos escribir

$$\frac{df(a)}{dx} = f'(a) \qquad \text{o incluso} \qquad \frac{df}{dx} = f'$$

Se recupera así la notación que clásicamente se usaba para la derivada en un punto o para la función derivada, basada en una justificación heurística que más adelante comentaremos.

5.4. Interpretación geométrica de la derivada

Para hacer esta interpretación nos pondremos en una situación más intuitiva que la que hasta ahora venimos manejando. Consideramos un intervalo cerrado y acotado $I \subset \mathbb{R}$ que no se reduzca a un punto, y una función $f : I \to \mathbb{R}$ que suponemos continua en I, con lo que la gráfica de f es la imagen de una curva plana. El mismo estudio podría hacerse para cualquier función real de variable real, pero la intuición geométrica no sería tan clara.

Dado un punto $x_0 \in I$, escribimos $y_0 = f(x_0)$ y sabemos que la derivabilidad de f en x_0 equivale a la existencia de un polinomio de primer grado P que es el que mejor aproxima a la función f cerca del punto x_0, en el sentido de que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - P(x)}{x - x_0} = 0$. De hecho sabemos que P viene dado por $P(x) - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. La gráfica de la función P es por tanto la recta de ecuación

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0) \tag{7}$$

única recta que pasa por el punto (x_0, y_0) con *pendiente* $f'(x_0)$. Podemos decir que la recta dada por la ecuación (7) se aproxima "rápidamente" a la gráfica de la función f cerca del punto (x_0, y_0). La llamamos *recta tangente* a la gráfica de f en el punto (x_0, y_0). Tenemos así la interpretación geométrica de la derivada $f'(x_0)$: es la *pendiente de la recta tangente* a la gráfica de f en el punto (x_0, y_0).

Esta definición de recta tangente enfatiza su principal característica: aproximamos la gráfica de la función f mediante la recta tangente de una forma muy concreta. No obstante, conviene hacer algunas consideraciones para poner de manifiesto que la definición está de acuerdo con nuestra idea intuitiva de recta tangente. Los resultados relacionados con la diferencial de la función f nos permitirán hacerlo de forma muy general.

Consideremos dos puntos distintos $x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 \leqslant x_0 \leqslant x_2$ y pongamos $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Nótese que en el caso $x_0 = \text{mín}\, I$, será obligadamente $x_1 = x_0$, y si $x_0 = \text{máx}\, I$ sólo podremos tomar $x_2 = x_0$, pero en los demás casos puede ser $x_1 < x_0 < x_2$. La recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) tiene ecuación

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

y puede verse como una recta *secante* a la gráfica de f. Ahora bien, sabemos que la pendiente de esta recta tiende a coincidir con $f'(x_0)$ cuando x_1 y x_2 se acercan a x_0. Más concretamente, sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $x_0 - \delta < x_1$ y $x_2 < x_0 + \delta$ se tiene

$$\left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - f'(x_0) \right| = \left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

Esta afirmación se corresponde perfectamente con nuestra idea de la recta tangente como "límite" de las rectas secantes al acercarnos al punto (x_0, y_0).

La situación es muy sencilla cuando $y_0 = x_0 = 0$, pues entonces la recta tangente pasa por el origen de coordenadas y su ecuación es simplemente $y = f'(0)x$, luego es precisamente la gráfica de la diferencial de f en 0. Geométricamente, la hipótesis $y_0 = x_0 = 0$ no resta generalidad, pues siempre podemos conseguir que se verifique, tomando el punto (x_0, y_0) como origen de coordenadas. Dicho de otra forma, salvo una traslación, siempre podemos situarnos en el caso más favorable. Tiene interés observar como se concreta analíticamente dicha traslación.

Consideramos el intervalo $J = \{x - x_0 : x \in I\}$ y la función

$$g : J \to \mathbb{R}, \quad g(h) = f(x_0 + h) - y_0 \qquad \forall h \in J$$

que claramente verifican $0 \in J$ y $g(0) = 0$. Recíprocamente, a partir de g podemos obtener f puesto que $f(x) = g(x - x_0) + g(0)$, para todo $x \in I$. En particular, se tiene claramente

$$(x, y) \in \text{Gr}\, f \;\Leftrightarrow\; y = f(x) \;\Leftrightarrow\; y - y_0 = g(x - x_0) \;\Leftrightarrow\; (x - x_0, y - y_0) \in \text{Gr}\, g$$

así que la gráfica de g se obtiene trasladando la gráfica de f, de forma que el punto (x_0, y_0) se convierta en el origen.

Si para $h \in \mathbb{R}$ escribimos $x = x_0 + h$, es claro que $h \in J \setminus \{0\}$ si, y sólo si, $x \in I \setminus \{x_0\}$, verificándose entonces que

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Deducimos inmediatamente que f es derivable en x_0 si, y sólo si, g es derivable en 0, en cuyo caso se tiene

$$f'(x_0) = g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Esta expresión de $f'(x_0)$ como un límite en cero en lugar de un límite en el punto x_0 resulta a veces útil para el cálculo de derivadas.

Sean ahora S la recta tangente a la gráfica de g en el origen y T la recta tangente a la gráfica de f en (x_0, y_0). Observamos que S se obtiene a partir T mediante la misma traslación que convirtió la gráfica de f en la de g:

$$(x,y) \in T \Leftrightarrow y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = g'(0)(x - x_0) \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0) \in S$$

5.5. Interpretación física de la derivada

Razonamos de forma muy similar a como lo hemos hecho para la interpretación geométrica. Consideramos de nuevo un intervalo cerrado y acotado $I \subset \mathbb{R}$ y una función $f : I \to \mathbb{R}$, que ahora suponemos derivable en I.

Podemos pensar que f describe un movimiento sobre la recta, así que I es un intervalo de tiempo y, para cada $t \in I$, $f(t)$ nos da la posición del móvil en el instante t. Vamos a ver que la derivada $f'(t)$ puede interpretarse como la *velocidad instantánea* del móvil, o simplemente la *velocidad*, en el instante t. La función derivada f' describirá por tanto la velocidad del móvil como función del tiempo.

Para justificar esta afirmación, fijado $t \in I$ tomamos dos instantes distintos $t_0, t_1 \in I$, tales que $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, es decir $t \in [t_0, t_1] \subset I$. Entonces el cociente $\dfrac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$ se interpreta como la velocidad media del móvil durante el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$. Pero sabemos que este cociente tiende a coincidir con $f'(t)$ cuando t_0 y t_1 se acercan a t y esto explica que $f'(t)$ pueda y deba entenderse como la velocidad en el instante t.

La forma en que la velocidad media en el intervalo $[t_0, t_1]$ tiende a $f'(t)$ se expresa como ya hemos hecho en situaciones análogas. De nuevo, dado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que, si $t - \delta < t_0$ y $t_1 < t + \delta$ se tiene

$$\left| \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} - f'(t) \right| < \varepsilon$$

Naturalmente, se puede hacer una interpretación análoga cuando la función f describe la dependencia entre dos magnitudes físicas, P y Q, de forma que cada valor $x \in I$ de la magnitud P, determina el valor $f(x)$ de la magnitud Q. Cuando P es el tiempo, para cada $t \in I$, la derivada $f'(t)$ se sigue interpretando como la velocidad de variación de la magnitud Q en el instante t. En general, para cada $x \in I$, $f'(x)$ puede llamarse *razón de cambio* de la magnitud Q, con respecto a la magnitud P, para el valor x de esta última.

Aprovechando la interpretación que acabamos de hacer, veamos ahora la forma en que históricamente se llegó al concepto de derivada y su interpretación física como velocidad o razón de cambio. Tras no poca controversia histórica sobre a quién habría que dar prioridad, hoy se considera que tales ideas fueron descubiertas independientemente por dos eminentes científicos: el inglés Isaac Newton (1643-1727) y el alemán Gottfried Leibniz (1646-1716).

En lo que sigue, olvidamos la naturaleza de las magnitudes físicas P y Q y representamos simplemente a P mediante una variable "independiente" x, que toma valores en el intervalo I, y a Q con otra variable "dependiente" y, que toma valores reales, ligadas por la ecuación $y = f(x)$. Al fin y al cabo, la gráfica de la función f no es otra cosa que el conjunto de puntos $(x,y) \in I \times \mathbb{R}$ que verifican dicha ecuación. También sustituimos a veces la variable dependiente y por la función f que determina sus valores.

Representemos por Δx, la diferencia entre dos valores $x_0, x \in I$ de la variable independiente, con $x \neq x_0$, es decir, $\Delta x = x - x_0$. Aunque la expresión Δx se lee "incremento" de x, no se excluye la posibilidad de que sea $\Delta x < 0$. Sean $y_0 = f(x_0)$ e $y = f(x)$ los correspondientes valores de la variable dependiente y pongamos también $\Delta f = \Delta y = y - y_0$, con lo que la razón de cambio media será el cociente de incrementos

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Podemos escribir por tanto,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

igualdades que no son más que la definición de derivada con una notación intuitiva, pero no muy conveniente, pues en los límites no se especifica el punto x_0 en el que se calcula la derivada. Con esta notación, la continuidad de la función f en el punto x_0 se escribiría en la forma $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, que tiene el mismo inconveniente.

Cuando nacía el cálculo diferencial, la noción de límite no estaba disponible y se acudía a la idea intuitiva de "infinitésimo", hoy en desuso, aunque quede cierta nostalgia. Un infinitésimo sería algo así como un número real cuyo valor absoluto es menor que toda constante positiva, pero que puede ser distinto de 0, lo que es claramente incompatible con el concepto actual de número real y su interpretación como punto de una recta.

Newton y Leibniz, el primero con distinta notación y terminología, consideraban un cambio "infinitesimal" (no nulo) en la variable x, que se representa por dx, y se denomina "diferencial" de x. Ello produce un cambio también "infinitesimal" $df = dy$ en la variable y. Suponiendo que dx es tan pequeño como para admitir que la razón de cambio es constante, podemos pensar que dicha razón de cambio en el punto x_0 viene dada por el cociente $df/dx = dy/dx$.

Así pues, Newton y Leibniz no entendían la derivada como el límite de un cociente, no podían hacerlo, la veían como un "cociente de infinitésimos". La derivada no era el límite de un cociente entre diferencias, sino un "cociente de diferenciales". El cálculo de derivadas era un cálculo puramente formal con "infinitésimos", que sólo los expertos podían practicar sin cometer errores. Veamos como ejemplo el cálculo de la derivada de la función $y = x^2$:

$$y + dy = (x + dx)^2 = x^2 + 2x\,dx + (dx)^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x + dx \sim 2x$$

Obsérvese que dx se desprecia o no, sin un criterio claro.

De todo lo dicho, se conserva hoy día la idea intuitiva, que por supuesto no ha cambiado, junto con la interpretación geométrica y física. En ocasiones se sigue usando la notación de Leibniz: $df(a)/dx$ para la derivada en un punto, o df/dx para la función derivada.

La notación hoy más habitual, $f'(a)$ o f', se debe a J. L. de Lagrange (1736-1813), que hizo brillantes aportaciones al Cálculo Diferencial. La formalización definitiva, tal como hoy la conocemos, del concepto de límite, y por tanto de derivada, debe reconocerse al matemático francés A. L. Cauchy (1789-1857).

5.6. Primeras reglas de derivación

Aclarado el concepto de derivada, su significado analítico y sus interpretaciones geométrica y física, pasamos a desarrollar las reglas básicas para el cálculo de derivadas o, lo que viene a ser lo mismo, a analizar la estabilidad de las funciones derivables por las operaciones usuales. Empezamos con sumas y productos:

- *Sean $f,g : A \to \mathbb{R}$ funciones derivables en un punto $a \in A \cap A'$. Entonces:*
  (i) *La función $f+g$ es derivable en a, con $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$.*
  (ii) *La función fg es derivable en a con $(fg)'(a) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.*
  (iii) *Para $\lambda \in \mathbb{R}$, la función λf es derivable en a con $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.*

(i). Para $x \in A \setminus \{a\}$ tenemos claramente

$$\frac{\big(f+g\big)(x) - \big(f+g\big)(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \qquad \text{de donde}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{\big(f+g\big)(x) - \big(f+g\big)(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a)$$

(ii). De nuevo para $x \in A \setminus \{a\}$ tenemos

$$\frac{\big(fg\big)(x) - \big(fg\big)(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\, g(x) + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

Puesto que g es continua en a sabemos que $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$, luego

$$\lim_{x\to a} \frac{\big(fg\big)(x) - \big(fg\big)(a)}{x-a} = f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

(iii). Basta aplicar (ii), tomando $g(x) = \lambda$ para todo $x \in A$, que sabemos verifica $g'(a) = 0$. ■

Pasamos a calcular la derivada de un cociente:

- *Sean $f,g : A \to \mathbb{R}$ funciones derivables en un punto $a \in A \cap A'$. Supongamos $g(a) \neq 0$ y sea $B = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$. Entonces $a \in B'$ y la función $f/g : B \to \mathbb{R}$ es derivable en a con*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}$$

Para demostrarlo, observamos primeramente que por ser g continua en a y $g(a) \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$ con $|x-a| < \delta$, se tiene $|g(x) - g(a)| < |g(a)|$, y en particular $g(x) \neq 0$. Así pues $]a-\delta, a+\delta[\cap A \subset B$, lo que implica claramente que $a \in B'$. Para $x \in B \setminus \{a\}$ escribimos entonces

$$\frac{\big(f/g\big)(x) - \big(f/g\big)(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)} = \frac{\big(f(x) - f(a)\big)g(a) - f(a)\big(g(x) - g(a)\big)}{g(x)g(a)(x-a)}$$

Usando que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$, junto con la derivabilidad de f y g en el punto a, concluimos:

$$\lim_{x\to a} \frac{\big(f/g\big)(x) - \big(f/g\big)(a)}{x-a} = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2} \qquad \blacksquare$$

Los resultados anteriores permiten probar que cualquier función racional es derivable y calcular su derivada. Fijado $n \in \mathbb{N}$, empezamos con la función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probaremos por inducción que f_n es derivable en $\mathbb{R}$ con $f_n'(x) = n x^{n-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para $n = 1$ este hecho ya es conocido y, supuesto cierto para n, la regla para la derivación de un producto nos dice que $f_{n+1} = f_n f_1$ es derivable en $\mathbb{R}$ con

$$f_{n+1}'(x) = f_n'(x)\, f_1(x) + f_n(x)\, f_1'(x) = n x^{n-1} x + x^n = (n+1) x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Consideremos ahora una función polinómica no constante

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $p \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ con $a_p \neq 0$. Los resultados anteriores nos dicen que P es derivable en $\mathbb{R}$ con

$$P'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + p\, a_p x^{p-1} = \sum_{k=1}^{p} k\, a_k x^{k-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

de forma que la función derivada de P es también una función polinómica en $\mathbb{R}$, definida por un polinomio de grado $p-1$. Sean finalmente P y Q polinomios, $A = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$, que sabemos verifica $A' = \mathbb{R}$, y consideremos la función racional $f : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \forall x \in A$$

La regla de derivación de un cociente nos dice que f es derivable en A con

$$f'(x) = \frac{P'(x)\, Q(x) - P(x)\, Q'(x)}{Q(x)^2} \quad \forall x \in A$$

Puesto que la restricción de cualquier función derivable sigue siendo derivable en todo punto donde ello tenga sentido, podemos enunciar:

- *Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función racional. Entonces f es derivable en $A \cap A'$ y $f' : A \cap A' \to \mathbb{R}$ es también una función racional.*

5.7. Regla de la cadena

Antes de presentar nuevos ejemplos de funciones derivables, estudiamos la derivabilidad de una composición de dos funciones:

- *Sean* $f : A \to \mathbb{R}$ *y* $g : B \to \mathbb{R}$ *funciones reales de variable real verificando que* $f(A) \subset B$. *Supongamos que* f *es derivable en un punto* $a \in A \cap A'$, *que* $f(a) \in B'$ *y que* g *es derivable en el punto* $f(a)$. *Entonces la composición* $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ *es derivable en* a *y se tiene*
$$\big(g \circ f\big)'(a) = g'\big(f(a)\big)\, f'(a)$$

Para la demostración, pongamos $b = f(a) \in B'$ y consideremos la función $\Phi : B \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi(y) = \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \quad \forall y \in B \setminus \{b\}, \quad \Phi(b) = g'(b)$$

La derivabilidad de g en el punto b, aparte de permitir la definición anterior, nos asegura que Φ es continua en b. Además tenemos evidentemente

$$g(y) - g(b) = \Phi(y)\,(y - b) \quad \forall y \in B$$

igualdad que se deduce de la definición de Φ cuando $y \neq b$, y es evidente cuando $y = b$. Para $x \in A \setminus \{a\}$, tomando $y = f(x) \in f(A) \subset B$, tenemos

$$\frac{\big(g \circ f\big)(x) - \big(g \circ f\big)(a)}{x - a} = \frac{g(y) - g(b)}{x - a} = \Phi(y)\,\frac{y - b}{x - a} = \big(\Phi \circ f\big)(x)\,\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Puesto que f es continua en a y Φ es continua en $b = f(a)$ deducimos que $\Phi \circ f$ es continua en a, es decir, $\lim_{x \to a} \big(\Phi \circ f\big)(x) = \big(\Phi \circ f\big)(a) = \Phi(b) = g'(b) = g'\big(f(a)\big)$. Deducimos entonces claramente que

$$\lim_{x \to a} \frac{\big(g \circ f\big)(x) - \big(g \circ f\big)(a)}{x - a} = g'\big(f(a)\big)\, f'(a) \qquad \blacksquare$$

Las hipótesis del resultado anterior son muy naturales, salvo exigir que $b = f(a)$ sea punto de acumulación de B. Aunque en la práctica esta hipótesis se suele verificar sin problema, conviene aclarar lo que ocurre cuando b es un punto aislado de B, con lo que no tiene sentido hablar de la derivabilidad de g en b. En tal caso, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\cap B = \{b\}$. Entonces, usando solamente la continuidad de f en a tenemos

$$\exists \delta > 0 : x \in A, \ |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon \implies f(x) = f(a)$$

Así pues, f es constante en el conjunto $]a - \delta, a + \delta[\cap A$ y, como consecuencia, lo mismo le ocurre a $g \circ f$. El carácter local del concepto de derivada nos dice que, sin ninguna hipótesis sobre g, la composición $g \circ f$ es derivable en a con $\big(g \circ f\big)'(a) = 0$. Este hecho ni siquiera merece ser destacado, puesto que en esencia estamos calculando la derivada de una función constante.

La regla obtenida para la derivación de una composición de dos funciones se conoce como *regla de la cadena*, lo que se comprende muy bien si, con las hipótesis adecuadas que son fáciles de adivinar, escribimos la derivada de una composición de tres funciones, que claramente indica un proceso de derivación "en cadena":

$$\big(h\circ g\circ f\big)'(a) = h'\big(g\big(f(a)\big)\big)\, g'\big(f(a)\big)\, f'(a)$$

Enseguida veremos ejemplos interesantes de aplicación de la regla de la cadena.

5.8. Derivación de la función inversa

Veamos la última regla básica para el cálculo de derivadas:

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función inyectiva, sea $B = f(A)$ y consideremos la función inversa $f^{-1} : B \to \mathbb{R}$. Supongamos que f es derivable en un punto $a \in A \cap A'$ y sea $b = f(a)$. Entonces $b \in B'$ y las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  (i) *$f'(a) \neq 0$ y f^{-1} es continua en b.*
  (ii) *f^{-1} es derivable en b.*

  Además, caso de que se cumplan (i) y (ii), se tiene: $\big(f^{-1}\big)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Para comprobar que $b \in B'$ tomamos una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $A \setminus \{a\}$ tal que $\{x_n\} \to a$. Por la continuidad de f en a tenemos que $\{f(x_n)\} \to b$ y por su inyectividad podemos asegurar que $f(x_n) \neq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego tenemos una sucesión de puntos de B distintos de b que converge a b, es decir, $b \in B'$. Pasamos a probar la equivalencia del enunciado.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Sea $\{b_n\}$ una sucesión de puntos de B distintos de b, con $\{b_n\} \to b$. Tomando $a_n = f^{-1}(b_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos una sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A distintos de a y la continuidad de f^{-1} en el punto b nos dice que $\{a_n\} \to f^{-1}(b) = a$. Por la derivabilidad de f en a obtenemos que

$$\left\{\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}\right\} \to f'(a), \quad \text{es decir,} \quad \left\{\frac{b_n - b}{f^{-1}(b_n) - f^{-1}(b)}\right\} \to f'(a)$$

Puesto que $f'(a) \neq 0$, tenemos

$$\left\{\frac{f^{-1}(b_n) - f^{-1}(b)}{b_n - b}\right\} \to \frac{1}{f'(a)}, \quad \text{de donde} \quad \lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Desde luego, si f^{-1} es derivable en b, también será continua. Para probar que $f'(a) \neq 0$, usamos la regla de la cadena, teniendo en cuenta la igualdad $\big(f^{-1}\circ f\big)(x) = x$ para todo $x \in A$. Obtenemos $1 = \big(f^{-1}\circ f\big)'(a) = \big(f^{-1}\big)'(b)\, f'(a)$, lo que claramente implica que $f'(a) \neq 0$, como queríamos. ∎

5.9. Derivadas de la exponencial y el logaritmo

Vamos a encontrarnos con la grata sorpresa de que, en realidad, ya hemos calculado la derivada de la función exponencial:

- *La función exponencial es derivable en* $\mathbb{R}$ *y su función derivada es ella misma.*

Empezamos probando la derivabilidad en 0. Sea pues $\{z_n\} \to 0$ con $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $x_n = e^{z_n}$ e $y_n = 1/z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos claramente que $\{x_n\} \to 1$ y $x_n^{y_n} = e$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La regla estudiada en su momento para resolver indeterminaciones del tipo $[1^\infty]$ nos dice que $\{y_n(x_n - 1)\} \to 1$. Tenemos por tanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \text{es decir,} \qquad \exp'(0) = 1$$

La derivada en cualquier otro punto se deduce de la fórmula de adición. Para $x, h \in \mathbb{R}$ con $h \neq 0$ tenemos:

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \, \frac{e^h - 1}{h}$$

de donde

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

donde hemos usado la derivada en 0, ya calculada. Tenemos por tanto $\exp'(x) = \exp(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, como queríamos. ■

Usando ahora la regla de derivación de la función inversa, probamos la derivabilidad del logaritmo:

- *La función logaritmo es derivable en* $\mathbb{R}^+$*, con* $\log'(x) = \dfrac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

La demostración es inmediata, puesto que la exponencial es derivable, su derivada no se anula nunca y su inversa es continua. La hacemos con detalle para ilustrar como se aplica la regla de derivación de la función inversa. Sea $x \in \mathbb{R}^+$ y pongamos $y = \log x \in \mathbb{R}$. Sabemos que la función exponencial es derivable en y con $\exp'(y) = \exp(y) \neq 0$. También sabemos que el logaritmo, $\log = \exp^{-1}$, es una función continua en el punto $x = \exp(y)$. Por tanto el logaritmo es derivable en x con

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{x}$$ ■

Consideremos la función exponencial de base a: $g(x) = a^x = \exp(x \log a)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Observamos que $g = \exp \circ f$ donde $f(x) = x \log a$ para todo $x \in \mathbb{R}$. La regla de la cadena, cuyas hipótesis se cumplen evidentemente, nos dice que g es derivable en $\mathbb{R}$ con

$$g'(x) = \exp'\big(f(x)\big)\, f'(x) = \exp(x \log a) \log a = a^x \log a$$

Encontramos aquí la explicación de que se elija la función exponencial de base e como función exponencial de referencia: de todas las funciones exponenciales, la de base e es la única que coincide con su derivada.

La derivada de la función logarítmica de base $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ es aún más fácil:

$$\log_a(x) = \frac{\log x}{\log a} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \Longrightarrow \quad \log_a'(x) = \frac{1}{x \log a} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

5.10. Derivadas de potencias

Con los resultados anteriores sobre la exponencial y el logaritmo, probar la derivabilidad y calcular la derivada de funciones definidas como potencias, en las que base y exponente son funciones derivables, puede considerarse un sencillo ejercicio. El caso particular en que la base es constante está ya esencialmente resuelto, basta usar las derivadas de las funciones exponenciales y la regla de la cadena. Vemos ahora un caso en que el exponente es constante, hacemos algunas observaciones adicionales y concluimos con el planteamiento general que engloba todos los casos.

- *Consideremos la función potencia de exponente $b \in \mathbb{R}$:*

$$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad h(x) = x^b = \exp(b \log x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Entonces h es derivable en $\mathbb{R}^+$ con $h'(x) = b x^{b-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$

En efecto, en vista de la definición de h, basta aplicar la regla de la cadena para obtener que h es derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}^+$ con

$$h'(x) = \exp'(b \log x)\, b\, \log'(x) = b x^b \,\frac{1}{x} = b x^{b-1} \qquad \blacksquare$$

Todavía con exponente constante, conviene comentar lo que ocurre en ciertas situaciones que no están recogidas en el resultado anterior. En primer lugar, si $b \in \mathbb{Z}$, conocíamos ya un resultado más general que el recién obtenido, pues estamos hablando de una función racional.

Si $b \in \mathbb{R}^+$, la función potencia de exponente b, que de momento seguimos denotando por h, puede extenderse a $\mathbb{R}_0^+$ definiendo $h(0) = \lim\limits_{x \to 0} x^b = 0$, para obtener una función continua en $\mathbb{R}_0^+$, que seguimos llamando función potencia de exponente b. Para estudiar su derivabilidad en 0 basta pensar que $\big(h(x) - h(0)\big)/x = x^{b-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Por tanto

- *Para $b \in \mathbb{R}$, con $b > 1$, la función potencia de exponente b es derivable en cero con derivada 0. Para $0 < b < 1$ dicha función no es derivable en 0.*

Consideremos ahora el caso $b = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$. Si n es par, nada nuevo podemos decir. Por ejemplo, la función raíz cuadrada es derivable en $\mathbb{R}^+$ pero no es derivable en 0.

Pero si n es impar, con $n > 1$, la función raíz n-ésima está definida en todo $\mathbb{R}$, como la inversa de la función $x \mapsto x^n$ que es una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}$ sobre sí mismo, derivable en $\mathbb{R}$. Pongamos por tanto,

$$h(x) = \sqrt[n]{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para $x \in \mathbb{R}^+$, usamos el carácter local de la derivada y lo ya sabido sobre la función potencia de exponente $1/n$. Obtenemos que h es derivable en $\mathbb{R}^+$ con

$$h'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

También sabemos, por la misma razón que cuando n era par, que h no es derivable por la derecha en 0, luego no es derivable en 0. En $\mathbb{R}^-$ podemos usar la igualdad $h(x) = -(-x)^{1/n}$, que es evidentemente válida para todo $x \in \mathbb{R}^-$, junto con la regla de la cadena y el carácter local de la derivada. Concluimos que h es derivable en $\mathbb{R}^-$ con

$$h'(x) = \frac{1}{n} (-x)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx} \quad \forall x \in \mathbb{R}^-$$

Obsérvese que se obtiene la misma expresión de la derivada que en el caso $x \in \mathbb{R}^+$. Hemos probado:

- *Si $n > 1$ es un número natural impar, la función raíz n-ésima es derivable en $\mathbb{R}^*$ y no es derivable en cero. Su función derivada $h' : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ viene dada por*

$$h'(x) = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Tenemos aquí un buen ejemplo para ilustrar la regla de derivación de la función inversa. La función definida por $f(x) = x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es inyectiva y derivable en $\mathbb{R}$, con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$ pero $f'(0) = 0$. De ahí que su función inversa sea derivable en $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*$ pero no sea derivable en $f(0) = 0$.

Vamos ya con la derivada de una potencia cuya base y exponente son funciones derivables.

- *Sean $f : A \to \mathbb{R}^+$ y $g : A \to \mathbb{R}$ funciones reales de variable real, derivables en un punto $a \in A \cap A'$. Consideremos la función $h : A \to \mathbb{R}^+$ definida por*

$$h(x) = f(x)^{g(x)} = \exp\big(g(x) \log f(x)\big) \quad \forall x \in A$$

Entonces h es derivable en a con

$$h'(a) = f(a)^{g(a)} g'(a) \log f(a) + g(a) f(a)^{g(a)-1} f'(a)$$

Para comprobarlo definimos funciones $\varphi, \psi : A \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = \log f(x), \quad \psi(x) = g(x)\,\varphi(x) \quad \forall x \in A$$

Usando la regla de la cadena y la derivada del logaritmo tenemos que φ es derivable en a con $\varphi'(a) = f'(a)/f(a)$. La regla para la derivada de un producto nos dice entonces que ψ es derivable en a con

$$\psi'(a) = g'(a)\log f(a) + g(a)\,\frac{f'(a)}{f(a)}$$

Finalmente, puesto que $h = \exp\circ\psi$, aplicando de nuevo la regla de la cadena obtenemos el resultado deseado:

$$\begin{aligned} h'(a) &= \exp'\big(\psi(a)\big)\,\psi'(a) = h(a)\,\psi'(a) \\ &= f(a)^{g(a)}g'(a)\log f(a) + g(a)f(a)^{g(a)-1}f'(a) \end{aligned}$$

5.11. Ejercicios

1. Para una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $a\in\mathbb{R}$, se considera la función $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ dada por

$$g(h) = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

Probar que, si f es derivable en a, g tiene límite en 0. ¿Es cierto el recíproco?

2. Probar que, si $f:A\to\mathbb{R}$ es derivable en $a\in A\cap A'$, existen $M,\delta\in\mathbb{R}^+$ tales que

$$x\in A,\ |x-a|<\delta \implies |f(x)-f(a)| \leqslant M\,|x-a|$$

¿Es cierta esta afirmación suponiendo solamente que f es continua en el punto a?

3. Sean $a,b,c\in\mathbb{R}$ y $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = x^2+ax+b,\quad g(x) = x^3-c \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Determinar los valores de a,b,c que hacen que las gráficas de f y g pasen por el punto $(1,2)$ y tengan la misma recta tangente en dicho punto.

4. Dado $\alpha\in\mathbb{R}$, estudiar la derivabilidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}_0^-,\quad f(x) = x^\alpha \quad \forall x\in\mathbb{R}^+$$

5. Estudiar la derivabilidad de la función $f:A\to\mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $A = [-1,1]$, $\quad f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \forall x\in A$

(b) $A = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \sqrt[3]{|x|} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

(c) $A = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{2x}{1+|x|} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

(d) $A = \mathbb{R}_0^+$, $\quad f(x) = x^x \quad \forall x\in\mathbb{R}^+,\ f(0)=1$

(e) $A = [0,1]$, $\quad f(x) = \text{máx}\{x,\,1-x\} \quad \forall x\in A$

6. Dadas dos funciones $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, derivables en $\mathbb{R}$, estudiar la derivabilidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = g(x) \quad \forall x\in\mathbb{Q}, \qquad f(x) = h(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$$

7. Probar que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = x \quad \forall x\in\mathbb{R}_0^-, \qquad f(x) = \log(1+x) \quad \forall x\in\mathbb{R}^+$$
es derivable en $\mathbb{R}$ y calcular la función derivada.

8. Dado $k\in\mathbb{Z}$, estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = x^k \log|x| \quad \forall x\in\mathbb{R}^*, \quad f(0)=0$$

9. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x + e^x$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Probar que f es biyectiva y que f^{-1} es derivable en $\mathbb{R}$. Calcular $(f^{-1})'(1)$ y $(f^{-1})'(1+e)$.

10. Dar un ejemplo de una función inyectiva $f:A\to\mathbb{R}$, derivable en un punto $a\in A\cap A'$ con $f'(a)\neq 0$, y tal que f^{-1} no sea derivable en el punto $f(a)$.