Tema 3

# Cálculo de límites

El presente tema tiene un interés eminentemente práctico, pues su principal finalidad es aportar los ejemplos que se echaban de menos en el tema anterior.

Empezaremos estableciendo las reglas básicas para el estudio de límites y divergencia para sumas, productos o cocientes de funciones reales de variable real. Se trata de trasladar, de forma bastante mecánica, las reglas ya conocidas para sucesiones y, lógicamente, se reproducen las indeterminaciones que ya teníamos.

Precisamente para salvar esas indeterminaciones, presentamos algunos métodos nuevos para estudiar el carácter de ciertas sucesiones, entre los que destaca el criterio de Stolz con sus muchas aplicaciones. También estudiamos sucesiones de potencias, prestando especial atención a algunos límites relacionados con el número $e$, tanto límites de sucesiones como de funciones. En particular tendremos un estudio, más amplio que el hecho hasta ahora, de la principales funciones conocidas: racionales, exponenciales, logarítmicas y funciones potencia.

En resumen, tendremos una amplia gama de ejemplos para ilustrar las nociones de límite y divergencia, junto con una serie de métodos prácticos para resolver indeterminaciones.

## 3.1. Sumas, productos y cocientes

Las reglas conocidas para el estudio de la convergencia o divergencia de sucesiones se trasladan fácilmente a funciones reales de variable real, obteniendo las reglas básicas para el estudio de límites de funciones y funciones divergentes. Trabajaremos solamente con límites o divergencias en un punto de la recta real, por ser el caso más general. Los resultados se trasladan automáticamente a los demás casos, límites o divergencias laterales y límites o divergencias en el infinito, prestando la debida atención al cambio de función que en cada caso se requiera.

Empezamos estudiando el comportamiento de la suma de dos funciones que tienen límite o divergen en un punto, con dos observaciones clave:

- *Sean $f,g : A \to \mathbb{R}$ funciones reales de variable real y $\alpha \in A'$.*

   $(i)$ *Si $f$ y $g$ tienen límite en $\alpha$, entonces $f+g$ tiene límite en $\alpha$, verificándose que*

$$\lim_{x\to\alpha} \big(f+g\big)(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) + \lim_{x\to\alpha} g(x)$$

   $(ii)$ *Supongamos que $f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha)$ y que $g$ verifica la siguiente condición:*

$$\exists \delta > 0 \ \exists M \in \mathbb{R} \ : \ x \in A\,,\ 0 < |x-\alpha| < \delta \implies g(x) \geqslant M \qquad (1)$$

   *es decir, $g$ está minorada en la intersección de $A \setminus \{\alpha\}$ con un intervalo abierto de centro $\alpha$. Entonces:*

$$\big(f+g\big)(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha)$$

Para probarlo, sea $\{x_n\} \to \alpha$, con $x_n \in A \setminus \{\alpha\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En el caso $(i)$ tenemos que $\{f(x_n)\} \to \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ y $\{g(x_n)\} \to \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$, luego

$$\big\{\big(f+g\big)(x_n)\big\} = \{f(x_n)+g(x_n)\} \to \lim_{x\to\alpha} f(x) + \lim_{x\to\alpha} g(x)$$

En el caso $(ii)$ tenemos $\{f(x_n)\} \to +\infty$ y usando $(1)$ vemos que $\{g(x_n)\}$ está minorada, puesto que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, se tiene $0 < |x_n - \alpha| < \delta$, luego $g(x_n) \geqslant M$. Deducimos que $\big\{\big(f+g\big)(x_n)\big\} \to +\infty$, como se quería. ■

Observamos ahora que, tanto si $g$ tiene límite en el punto $\alpha$, digamos $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = L$, como si $g(x) \to +\infty \ (x \to \alpha)$, podemos asegurar que $g$ verifica la condición $(1)$. En el primer caso sabemos que existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$ con $0 < |x-\alpha| < \delta$, se tiene $|g(x) - L| < 1$, luego $g(x) > L-1$ y basta tomar $M = L-1$. En el segundo caso sabemos que para cualquier $M \in \mathbb{R}$ podemos encontrar $\delta > 0$ de forma que se verifique $(1)$. Podemos así obtener las siguientes consecuencias:

(a) *Si $f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha)$ y $g$ tiene límite o diverge positivamente en $\alpha$, entonces $f+g$ diverge positivamente en $\alpha$.*
(b) *Si $f(x) \to -\infty \ (x \to \alpha)$ y $g$ tiene límite o diverge negativamente en $\alpha$, entonces $f+g$ diverge negativamente en $\alpha$.*
(c) *Si $f$ diverge en el punto $\alpha$ y $g$ tiene límite en $\alpha$, entonces $f+g$ diverge en $\alpha$.*

Nada se puede afirmar sobre el comportamiento en un punto de la suma de dos funciones, cuando una diverge positivamente y otra negativamente en dicho punto. Por tanto, tampoco podemos afirmar nada, si solo sabemos que ambas funciones divergen en el punto en cuestión. Reaparece aquí, para funciones, la indeterminación del tipo $[\infty - \infty]$.

Con respecto al producto de funciones, las observaciones básicas son ahora tres:

- *Sean $f,g : A \to \mathbb{R}$ funciones reales de variable real y $\alpha \in A'$.*

   $(i)$ *Si $f$ y $g$ tienen límite en el punto $\alpha$, entonces $fg$ tiene límite en $\alpha$, dado por*

$$\lim_{x\to\alpha} \big(f\,g\big)(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) \, \lim_{x\to\alpha} g(x)$$

$(ii)$ *Supongamos que* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$ *y que* $g$ *está acotada en la intersección de* $A \setminus \{\alpha\}$ *con un cierto intervalo abierto de centro* $\alpha$, *es decir,*

$$\exists \delta > 0 \ \ \exists M > 0 \ : \ x \in A\,,\ 0 < |x-\alpha| < \delta \implies |g(x)| \leqslant M \tag{2}$$

*Entonces:* $\lim_{x\to\alpha} \big(f\,g\big)(x) = 0.$

$(iii)$ *Supongamos que* $f(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha)$ *y que* $g$ *verifica la condición* $(1)$ *con* $M > 0$, *es decir:*

$$\exists \delta > 0 \ \ \exists M > 0 \ : \ x \in A\,,\ 0 < |x-\alpha| < \delta \implies g(x) \geqslant M \tag{3}$$

*Entonces:* $\big(f\,g\big)(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha).$

Para comprobar estas afirmaciones, tomamos una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $A$ distintos de $\alpha$, con $\{x_n\} \to \alpha$. En el caso $(i)$ tenemos que $\{f(x_n)\} \to \lim_{x\to\alpha} f(x)$ y $\{g(x_n)\} \to \lim_{x\to\alpha} g(x)$, luego

$$\big\{\big(f\,g\big)(x_n)\big\} = \{f(x_n)\,g(x_n)\} \to \lim_{x\to\alpha} f(x)\ \lim_{x\to\alpha} g(x)$$

En el caso $(ii)$ tenemos $\{f(x_n)\} \to 0$, y usando $(2)$ vemos que $\{g(x_n)\}$ está acotada, puesto que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, se tiene $0 < |x_n - \alpha| < \delta$, luego $|g(x_n)| \leqslant M$. Por tanto, $\big\{\big(f\,g\big)(x_n)\big\} \to 0$. Finalmente, en el caso $(iii)$ tenemos que $\{f(x_n)\} \to +\infty$ y, si $\delta, M$ vienen dados por $(3)$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ es $0 < |x_n - \alpha| < \delta$, luego $g(x_n) \geqslant M$. Entonces, $\big\{\big(f\,g\big)(x_n)\big\} \to +\infty$, como se quería. ■

Para obtener las consecuencias que siguen conviene observar que si $g$ tiene límite en $\alpha$ verificará $(2)$, mientras que si $g$ es divergente, la función $|g|$ verificará $(3)$.

(a) *Si* $f$ *y* $g$ *divergen en el punto* $\alpha$, *entonces* $f\,g$ *diverge en* $\alpha$. *Además, si ambas divergen positivamente o ambas negativamente tenemos* $\big(f\,g\big)(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha)$, *mientras que si una diverge positivamente y otra negativamente, entonces* $\big(f\,g\big)(x) \to -\infty \ \ (x \to \alpha)$.

(b) *Si* $f$ *diverge en el punto* $\alpha$ *y* $g$ *tiene límite no nulo en* $\alpha$, *digamos* $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \lambda \in \mathbb{R}^*$, *entonces* $f\,g$ *diverge en* $\alpha$. *Además, si* $f$ *diverge positivamente y* $\lambda > 0$, *o bien* $f$ *diverge negativamente y* $\lambda < 0$, *entonces* $f\,g$ *diverge positivamente. Si* $f$ *diverge positivamente y* $\lambda < 0$, *o bien* $f$ *diverge negativamente y* $\lambda > 0$, *entonces* $f\,g$ *diverge negativamente.*

Nada se puede afirmar sobre el comportamiento en un punto del producto de dos funciones, cuando una tiene límite 0 y la otra diverge en dicho punto. Reaparece la indeterminación del tipo $[0 \cdot \infty]$.

Para estudiar el cociente de dos funciones, bastará ahora ver lo que ocurre con la función $1/f$, dependiendo del comportamiento de $f$, cosa nada difícil:

- *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función real de variable real, no idénticamente nula, consideremos el conjunto* $B = \{x \in A \, : \, f(x) \neq 0\}$ *y la función* $1/f : B \to \mathbb{R}$. *Para* $\alpha \in A'$ *se tiene:*

  $(i)$ *Si* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \in \mathbb{R}^*$, *entonces* $\alpha \in B'$ *y* $\lim_{x\to\alpha} \big(1/f\big)(x) = 1/L$.

  $(ii)$ *Si* $f$ *diverge en el punto* $\alpha$, *entonces también* $\alpha \in B'$ *y* $\lim_{x\to\alpha} \big(1/f\big)(x) = 0$.

  $(iii)$ *Si* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$ *y* $\alpha \in B'$, *entonces* $1/f$ *diverge en el punto* $\alpha$.

La comprobación de las tres afirmaciones es inmediata. En el caso $(i)$ podemos asegurar que existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$ con $0 < |x - \alpha| < \delta$ se tiene $|f(x) - L| < |L|$ y, en particular, $f(x) \neq 0$. Esto prueba ya que $\alpha \in B'$. Si ahora tomamos una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $B$ distintos de $\alpha$, con $\{x_n\} \to \alpha$, se tendrá $\{f(x_n)\} \to L$, luego $\{1/f(x_n)\} \to 1/L$. En el caso $(ii)$ el razonamiento es bastante análogo, existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$ con $0 < |x - \alpha| < \delta$, se tiene $|f(x)| > 1$, luego $f(x) \neq 0$ y $\alpha \in B'$. Tomando la sucesión $\{x_n\}$ como antes, tenemos que $\{f(x_n)\}$ es divergente, luego $\{1/f(x_n)\} \to 0$. Obsérvese que en el caso $(iii)$ no podemos asegurar que $\alpha \in B'$, de ahí que se suponga como hipótesis. Tomando la sucesión $\{x_n\}$ como antes, tenemos $\{f(x_n)\} \to 0$, luego $\{1/f(x_n)\}$ es divergente. ■

## 3.2. Funciones racionales

Las reglas básicas desarrolladas hasta ahora permiten estudiar fácilmente los límites y la divergencia de cualquier función racional, lo que nos da la oportunidad de ilustrar muy bien dichas reglas. Para evitar repeticiones introducimos una notación que se mantendrá fija en toda la presente sección.

*Notación.* En lo que sigue $P, Q$ serán dos polinomios no idénticamente nulos de grados respectivos $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Puesto que pretendemos estudiar el cociente $P/Q$, supondremos sin pérdida de generalidad que $P$ y $Q$ no tienen divisores comunes. Consideramos entonces el conjunto $Z_Q = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$ de los ceros del polinomio $Q$, y sabemos que $P(x) \neq 0$ para todo $x \in Z_Q$. Tomamos $A = \mathbb{R} \setminus Z_Q$ y, puesto que $Z_Q$ es finito, tenemos $A' = \mathbb{R}$, en particular $A$ no está mayorado ni minorado. Pretendemos estudiar la función racional $f : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \forall x \in A$$

Debe quedar claro que *toda* función racional es la restricción a su conjunto de definición de una función $f$ del tipo considerado. Cuando $q = 0$, tenemos $A = \mathbb{R}$ y $f$ es una función polinómica.

En primer lugar, sabemos que $f$ es continua en $A$, es decir:

- $\lim_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha) \quad \forall \alpha \in A$

Estudiemos el comportamiento de $f$ en $+\infty$ y $-\infty$, que parece plantear indeterminaciones. Empezando por algunos casos fáciles, para $n \in \mathbb{N}$ tenemos evidentemente

$$x^n \to +\infty \ (x \to +\infty); \qquad \lim_{x \to +\infty} x^{-n} = \lim_{x \to -\infty} x^{-n} = 0$$
$$x^n \to +\infty \ (x \to -\infty) \text{ si } n \text{ es par}; \quad x^n \to -\infty \ (x \to -\infty) \text{ si } n \text{ es impar}$$

Para el caso general, destacamos los coeficientes principales de $P$ y $Q$ escribiendo

$$P(x) = a x^p + R(x), \quad Q(x) = b x^q + S(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}^*$ y $R, S$ son polinomios de grados menores que $p$ y $q$ respectivamente. Puede ocurrir que $P$ sea constante, es decir, $p = 0$, en cuyo caso $R$ es idénticamente nulo, y también $S$ es idénticamente nulo cuando $Q$ es constante.

La observación clave es la siguiente:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-p}R(x) = \lim_{x\to-\infty} x^{-p}R(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{-q}S(x) = \lim_{x\to-\infty} x^{-q}S(x) = 0 \qquad (4)$$

Basta comprobar las dos afirmaciones sobre $R$, las referentes a $S$ son análogas. Suponemos $p > 0$, pues en otro caso no hay nada que comprobar, escribimos

$$x^{-p}R(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^{k-p} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ son los coeficientes de $R$, y basta usar que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{k-p} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^{k-p} = 0$, para $k = 1, 2, \ldots, p-1$.

Finalmente escribimos

$$f(x) = x^{p-q}\,\frac{a + x^{-p}R(x)}{b + x^{-q}S(x)} = x^{p-q}g(x) \;\; \forall x \in A \setminus \{0\}$$

donde la función racional $g : A \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ se define por esta misma igualdad y, en vista de (4), verifica que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = a/b$. Hemos evitado así cualquier indeterminación y la descripción del comportamiento de $f$ en $+\infty$ y $-\infty$ queda como sigue:

- *Si $p < q$, se tiene* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- *Si $p = q$, tenemos* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a/b$
- *Si $p > q$, entonces $f$ diverge tanto en $+\infty$ como en $-\infty$. Más concretamente diverge:*
  (a) *Positivamente en $+\infty$ y en $-\infty$, cuando $p-q$ es par y $a/b > 0$*
  (b) *Negativamente en $+\infty$ y en $-\infty$, cuando $p-q$ es par y $a/b < 0$*
  (c) *Positivamente en $+\infty$ y negativamente en $-\infty$, cuando $p-q$ es impar y $a/b > 0$*
  (d) *Negativamente en $+\infty$ y positivamente en $-\infty$, cuando $p-q$ es impar y $a/b < 0$*

Conviene observar que, para estudiar el comportamiento de $f$ en $+\infty$ y $-\infty$, no se ha usado la hipótesis de que los polinomios $P$ y $Q$ sean primos relativos.

Veamos finalmente el comportamiento de $f$ en cualquiera de los ceros de $Q$. Sea pues $\alpha \in \mathbb{R}$ con $Q(\alpha) = 0$ y escribamos

$$Q(x) = (x-\alpha)^m Q_\alpha(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $m \in \mathbb{N}$ es el orden del cero de $Q$ en el punto $\alpha$ y el polinomio $Q_\alpha$ verifica que $Q_\alpha(\alpha) \neq 0$. Tenemos entonces

$$f(x) = \frac{1}{(x-\alpha)^m}\,\frac{P(x)}{Q_\alpha(x)} \quad \forall x \in A$$

y existe el límite

$$y_\alpha = \lim_{x\to\alpha}(x-\alpha)^m f(x) = \lim_{x\to\alpha}\frac{P(x)}{Q_\alpha(x)} = \frac{P(\alpha)}{Q_\alpha(\alpha)}$$

Por ser $P(\alpha) \neq 0$, tenemos $y_\alpha \neq 0$, mientras que el comportamiento en el punto $\alpha$ de la función $x \to (x-\alpha)^{-m}$ no ofrece dificultad. Podemos por tanto enunciar:

- *La función racional $f = P/Q$, donde los polinomios $P$ y $Q$ son primos relativos, diverge en todo punto $\alpha \in \mathbb{R}$ que verifique $Q(\alpha) = 0$ (y por tanto $P(\alpha) \neq 0$).*

  *Más concretamente, si $Q$ tiene un cero de orden $m$ en el punto $\alpha$, entonces existe el límite $y_\alpha = \lim_{x\to\alpha}(x-\alpha)^m f(x) \in \mathbb{R}^*$ y pueden darse cuatro casos:*

  (a) $y_\alpha > 0$ *y $m$ par:* $f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha)$
  (b) $y_\alpha < 0$ *y $m$ par:* $f(x) \to -\infty \ (x \to \alpha)$
  (c) $y_\alpha > 0$ *y $m$ impar:* $f(x) \to -\infty \ (x \to \alpha-)$ *y* $f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha+)$
  (d) $y_\alpha < 0$ *y $m$ impar:* $f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha-)$ *y* $f(x) \to -\infty \ (x \to \alpha+)$

## 3.3. Sucesiones de potencias

Pasamos ahora a discutir el comportamiento de funciones que involucran las potencias de exponente real. En general, podemos estudiar funciones del siguiente tipo: si $A$ es un conjunto no vacío de números reales, consideramos la función $h : A \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$h(x) = f(x)^{g(x)} \quad \forall x \in A$$

donde $f : A \to \mathbb{R}^+$ y $g : A \to \mathbb{R}$ son funciones cualesquiera. Buscamos información sobre el comportamiento de la función $h$ en un punto $\alpha \in A'$, en $+\infty$ cuando $A$ no esté mayorado, o en $-\infty$ cuando $A$ no esté minorado, suponiendo que conocemos el comportamiento de $f$ y $g$ en cada caso. Para ello podemos analizar el carácter de la sucesión $\{f(a_n)^{g(a_n)}\}$, donde $\{a_n\}$ es una sucesión de puntos de $A$, convergente o divergente, según el caso. Así pues, nuestro problema consiste en analizar el carácter de una sucesión del tipo $\{x_n^{y_n}\}$, donde $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones de números reales, con $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y se conoce el carácter de ambas sucesiones. Para ello podemos escribir

$$x_n^{y_n} = \exp\big(y_n \log x_n\big) \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

y aprovechar las propiedades de la función exponencial y del logaritmo, que vamos a resumir.

En primer lugar sabemos ya que la función exponencial es continua en $\mathbb{R}$ y el logaritmo es continua en $\mathbb{R}^+$. Por otra parte, sabiendo que ambas funciones son estrictamente crecientes y conociendo su imagen, deducimos fácilmente el comportamiento de ambas en $+\infty$, el de la exponencial en $-\infty$ y el del logaritmo en 0:

- $\lim_{x\to\alpha} e^x = e^\alpha \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}; \quad \lim_{x\to\alpha} \log x = \log \alpha \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0; \quad e^x \to +\infty \ (x \to +\infty)$
- $\log x \to -\infty \ (x \to 0); \quad \log x \to +\infty \ (x \to +\infty)$

Para comprobarlo, fijado $\lambda > 0$, podemos tomar $u = \log \lambda$ y el crecimiento de la exponencial nos dice que para $x < u$ se tiene $e^x < \lambda$, y para $x > u$ será $e^x > \lambda$. Hemos probado que

$$\forall \lambda > 0 \ \exists u \in \mathbb{R} : \begin{cases} x \in \mathbb{R},\ x < u \ \Rightarrow \ |e^x - 0| < \lambda, & \text{luego } \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ x \in \mathbb{R},\ x > u \ \Rightarrow \ e^x > \lambda, & \text{luego } e^x \to +\infty \ (x \to +\infty) \end{cases}$$

Análogamente, dado $K \in \mathbb{R}$, tomando $u = e^K > 0$ tenemos claramente que para $0 < x < u$ es $\log x < K$, y para $x > u$ será $\log x > K$:

$$\forall K \in \mathbb{R} \;\; \exists u \in \mathbb{R}^+ : \begin{cases} x \in \mathbb{R}^+ ,\; x < u \;\Rightarrow\; \log x < K, & \text{luego } \log x \to -\infty \;\; (x \to 0) \\ x \in \mathbb{R}^+ ,\; x > u \;\Rightarrow\; \log x > K, & \text{luego } \log x \to +\infty \;\; (x \to +\infty) \end{cases} \quad \blacksquare$$

Podemos ya conseguir abundante información sobre sucesiones de potencias. En vista de (5), aplicando directamente las anteriores propiedades de la exponencial y el logaritmo, junto con las reglas referentes al producto de dos sucesiones convergentes o divergentes obtenemos lo siguiente:

- *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales positivos e $\{y_n\}$ una sucesión de números reales cualesquiera.*

  $(i)$ *Supongamos que $\{x_n\} \to 0$*
  - (a) *Si $\{y_n\} \to -\infty$ o $\{y_n\} \to y \in \mathbb{R}^-$, entonces $\{x_n^{y_n}\} \to +\infty$*
  - (b) *Si $\{y_n\} \to y \in \mathbb{R}^+$ o $\{y_n\} \to +\infty$, entonces $\{x_n^{y_n}\} \to 0$*

  $(ii)$ *Supongamos que $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}^+$*
  - (a) *Si $\{y_n\} \to y \in \mathbb{R}$, entonces $\{x_n^{y_n}\} \to x^y$*
  - (b) *Si $\{y_n\} \to +\infty$ y $x > 1$, o $\{y_n\} \to -\infty$ y $x < 1$, entonces $\{x_n^{y_n}\} \to +\infty$*
  - (c) *Si $\{y_n\} \to +\infty$ y $x < 1$, o $\{y_n\} \to -\infty$ y $x > 1$, entonces $\{x_n^{y_n}\} \to 0$*

  $(iii)$ *Supongamos finalmente que $\{x_n\} \to +\infty$*
  - (a) *Si $\{y_n\} \to -\infty$ o $\{y_n\} \to y \in \mathbb{R}^-$, entonces $\{x_n^{y_n}\} \to 0$*
  - (b) *Si $\{y_n\} \to y \in \mathbb{R}^+$ o $\{y_n\} \to +\infty$, entonces $\{x_n^{y_n}\} \to +\infty$*

Destaquemos los tres casos que no quedan cubiertos por la discusión anterior, debido a que para la sucesión $\{y_n \log x_n\}$ se presenta una indeterminación del tipo $[0 \cdot \infty]$:

- $\{x_n\} \to 0$ e $\{y_n\} \to 0$: *Indeterminación del tipo* $[0^0]$
- $\{x_n\} \to 1$ e $\{y_n\} \to +\infty$ o $\{y_n\} \to -\infty$: *Indeterminación del tipo* $[1^\infty]$
- $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\} \to 0$: *Indeterminación del tipo* $[(+\infty)^0]$

En cualquiera de los tres casos, nada se puede afirmar, en general, sobre la sucesión $\{x_n^{y_n}\}$. Es fácil comprobar que *toda* sucesión $\{z_n\}$ de números reales positivos puede expresarse como $\{x_n^{y_n}\}$ de forma que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ se encuentren en cualquiera de los tres casos anteriores.

Resumiendo, podemos ya enumerar todos los tipos de indeterminación. En esencia sólo hay dos, $[\infty - \infty]$ y $[0 \cdot \infty]$, que ya aparecieron al estudiar el comportamiento de sumas y productos, respectivamente, de sucesiones o de funciones. La segunda puede tomar además dos aspectos, $[0/0]$ y $[\infty/\infty]$ que aparecen al estudiar cocientes, y tres aspectos más, $[0^0]$, $[(+\infty)^0]$ y $[1^\infty]$, que surgen al estudiar potencias. En lo que sigue presentaremos métodos que, lógicamente bajo ciertas hipótesis, permiten resolver estas indeterminaciones.

## 3.4. Criterio de Stolz

Para indeterminaciones del tipo $[\infty/\infty]$ es útil el método ideado por el matemático austriaco O. Stolz (1842-1905), basánsose en trabajos previos del italiano E. Cesàro (1859-1906):

**Criterio de Stolz.** *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y sea $\{\rho_n\}$ una sucesión de números reales positivos, estrictamente creciente y no mayorada. Para $L \in \mathbb{R}$, se tiene:*

$$\left\{ \frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n} \right\} \to L \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \frac{x_n}{\rho_n} \right\} \to L$$

*La misma implicación es cierta, sustituyendo en ambos miembros $L$ por $+\infty$ o por $-\infty$.*

**Demostración.** Partimos de una igualdad de fácil comprobación. Para $m, n \in \mathbb{N}$ con $n > m$, tenemos claramente:

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{\rho_n} &= \frac{x_m}{\rho_n} + \frac{x_n - x_m}{\rho_n} = \frac{x_m}{\rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \sum_{k=m}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \\ &= \frac{x_m}{\rho_n} + \sum_{k=m}^{n-1} \left[ \frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{\rho_n} \, \frac{x_{k+1} - x_k}{\rho_{k+1} - \rho_k} \right] \end{aligned} \tag{6}$$

Dado ahora $L \in \mathbb{R}$, lo escribimos también en la forma

$$L = \frac{\rho_m L}{\rho_n} + \sum_{k=m}^{n-1} \frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{\rho_n} L$$

Restando ambas igualdades y tomando valores absolutos, tenemos

$$\left| \frac{x_n}{\rho_n} - L \right| \leqslant \frac{1}{\rho_n} |x_m - \rho_m L| + \sum_{k=m}^{n-1} \left[ \frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{\rho_n} \left| \frac{x_{k+1} - x_k}{\rho_{k+1} - \rho_k} - L \right| \right] \tag{7}$$

donde hemos usado que $\{\rho_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente de números positivos. Tenemos pues que la desigualdad (7) es válida para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, y para demostrar ya la implicación buscada, fijamos $\varepsilon > 0$.

La hipótesis nos permite encontrar encontrar $m \in \mathbb{N}$ de forma que, para $k \geqslant m$ se tenga $\left| \frac{x_{k+1} - x_k}{\rho_{k+1} - \rho_k} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, para $n > m$, aplicando (7) tenemos

$$\left| \frac{x_n}{\rho_n} - L \right| \leqslant \frac{1}{\rho_n} |x_m - \rho_m L| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{\rho_n} < \frac{1}{\rho_n} |x_m - \rho_m L| + \frac{\varepsilon}{2} \tag{8}$$

Como por hipótesis $\{1/\rho_n\} \to 0$, podemos encontrar $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \in \mathbb{N}, \ \ n \geqslant q \implies \frac{1}{\rho_n} |x_m - \rho_m L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Esta desigualdad, junto con (8), nos permite concluir que, para $n \geqslant \max\{m+1, q\}$, se tiene $\left|\dfrac{x_n}{\rho_n} - L\right| < \varepsilon$, como se quería.

Veamos ahora lo que ocurre al sustituir $L$ por $+\infty$, en cuyo caso el razonamiento anterior obviamente no es válido. Dado $C \in \mathbb{R}^+$, usando que $\left\{\dfrac{x_{n+1}-x_n}{\rho_{n+1}-\rho_n}\right\} \to +\infty$ podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ de forma que, para $k \geqslant m$, se tenga $\dfrac{x_{k+1}-x_k}{\rho_{k+1}-\rho_k} > 2C$. Para $n > m$ podemos entonces usar la igualdad (6) para obtener

$$\frac{x_n}{\rho_n} > \frac{x_m}{\rho_n} + 2C\sum_{k=m}^{n-1}\frac{\rho_{k+1}-\rho_k}{\rho_n} = \frac{x_m - 2\rho_m C}{\rho_n} + 2C \tag{9}$$

Ahora, por ser $\{1/\rho_n\} \to 0$, podemos encontrar $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant q \implies \frac{x_m - 2\rho_m K}{\rho_n} > -C$$

Esta desigualdad, junto con (9) nos permite concluir que para $n \geqslant \max\{m+1, q\}$ se tiene $x_n/\rho_n > C$, luego $\{x_n/\rho_n\} \to +\infty$, como se quería.

Finalmente, para ver lo que ocurre al sustituir $L$ por $-\infty$ basta aplicar lo recién demostrado sustituyendo la sucesión $\{x_n\}$ por $\{-x_n\}$:

$$\left\{\frac{x_{n+1}-x_n}{\rho_{n+1}-\rho_n}\right\} \to -\infty \Rightarrow \left\{\frac{x_n-x_{n+1}}{\rho_{n+1}-\rho_n}\right\} \to +\infty \Rightarrow \left\{\frac{-x_n}{\rho_n}\right\} \to +\infty \Rightarrow \left\{\frac{x_n}{\rho_n}\right\} \to -\infty \qquad \blacksquare$$

Para ver un primer ejemplo de aplicación del criterio de Stolz, consideremos la sucesión $\left\{\frac{\log n}{n}\right\}$, que presenta una indeterminación del tipo $[\infty/\infty]$. Tomando $x_n = \log n$ y $\rho_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ciertamente $\{\rho_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente y no mayorada de números reales positivos. Como quiera que $\left\{\frac{x_{n+1}-x_n}{\rho_{n+1}-\rho_n}\right\} = \left\{\log\frac{n+1}{n}\right\} \to 0$, el criterio de Stolz nos dice que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log n}{n} = 0$. Deducimos que $\{\sqrt[n]{n}\} = \left\{\exp\left(\frac{\log n}{n}\right)\right\} \to 1$, con lo que hemos resuelto una indeterminación del tipo $[(+\infty)^0]$.

Como segundo ejemplo, fijado $p \in \mathbb{N}$ podemos tomar $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^p$ y $\rho_n = n^{p+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De nuevo $\{\rho_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente y no mayorada de números reales positivos. Usando la fórmula del binomio de Newton podemos escribir

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{\rho_{n+1}-\rho_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} = \frac{n^p + R(n)}{(p+1)n^p + S(n)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

donde $R$ y $S$ son polinomios de grado menor que $p$. Tenemos por tanto $\left\{\frac{x_{n+1}-x_n}{\rho_{n+1}-\rho_n}\right\} \to \frac{1}{p+1}$ y el criterio de Stolz nos dice que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{p+1}}\sum\limits_{k=1}^{n} k^p = \dfrac{1}{p+1}$.

Antes de pasar a estudiar otras interesantes aplicaciones del criterio de Stolz, conviene aclarar algunos aspectos del mismo. Es importante observar que la implicación que aparece en el criterio no es reversible, en ninguno de los casos. Para comprobarlo, dado $L \in \mathbb{R}$, tomamos $x_n = (-1)^n + nL$ y $\rho_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ciertamente $\{\rho_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente y no mayorada de números reales positivos, se tiene obviamente que $\{x_n/\rho_n\} \to L$, pero la sucesión $\left\{\frac{x_{n+1}-x_n}{\rho_{n+1}-\rho_n}\right\} = \{2\,(-1)^{n+1} + L\}$ no es convergente.

Alternativamente podemos tomar $x_{2n-1} = x_{2n} = n^2$ y $\rho_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{x_n/\rho_n\} \to +\infty$, de hecho se comprueba sin dificultad que $x_n/\rho_n \geqslant n/4$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero la sucesión $\left\{\frac{x_{n+1}-x_n}{\rho_{n+1}-\rho_n}\right\} = \{x_{n+1} - x_n\}$ no es divergente, pues para $n$ impar se tiene $x_{n+1} = x_n$.

Así pues, si al intentar aplicar el Criterio de Stolz nos encontramos con que la sucesión $\left\{\frac{x_{n+1}-x_n}{\rho_{n+1}-\rho_n}\right\}$ no es convergente ni divergente, nada podemos deducir sobre $\{x_n/\rho_n\}$.

Finalmente conviene también aclarar que cuando la sucesión $\left\{\frac{x_{n+1}-x_n}{\rho_{n+1}-\rho_n}\right\}$ es divergente, pero no diverge positiva ni negativamente, no podemos asegurar que $\{x_n/\rho_n\}$ sea divergente. En efecto, tomando $x_n = (-1)^n n$ y $\rho_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión

$$\left\{\frac{x_{n+1}-x_n}{\rho_{n+1}-\rho_n}\right\} = \{(-1)^{n+1}(2n+1)\}$$

es divergente, pero $\{x_n/\rho_n\} = \{(-1)^n\}$ no lo es.

## 3.5. Consecuencias del criterio de Stolz

Como ya se ha visto en algún ejemplo, el criterio de Stolz es especialmente útil cuando una de las sucesiones que en él aparecen, o incluso ambas, viene dada en forma de serie. El caso particular más sencillo se presenta cuando tomamos $\rho_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y escribimos la sucesión $\{x_n\}$ en forma de serie, cosa que siempre podemos hacer. Obtenemos entonces el siguiente resultado:

**Criterio de la media aritmética.** *Sea $\{y_n\}$ una sucesión de números reales y consideremos la sucesión de sus medias aritméticas, definida por*

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

*Para $L \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$\{y_n\} \to L \implies \{\sigma_n\} \to L$$

*y la misma implicación es cierta sustituyendo $L$ por $+\infty$ o $-\infty$.*

En efecto, basta aplicar el criterio de Stolz con $x_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$ y $\rho_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo cual se tiene $\left\{\frac{x_{n+1}-x_n}{\rho_{n+1}-\rho_n}\right\} = \{y_{n+1}\}$ y $\{x_n/\rho_n\} = \{\sigma_n\}$. ■

Por ejemplo, tomando $\{y_n\} = \{1/n\} \to 0$ y denotando por $H_n$ a la $n$-ésima suma parcial de la serie armónica, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 0$$

Cabe hacer aquí una discusión análoga a la que hicimos con el Criterio de Stolz. Por una parte, la implicación que aparece en el criterio de la media aritmética no es reversible en ninguno de los casos, puede ocurrir que $\{\sigma_n\}$ sea convergente o divergente sin que $\{y_n\}$ lo sea. Por otra, si la sucesión $\{y_n\}$ es divergente, pero no diverge positiva ni negativamente, no podemos asegurar que $\{\sigma_n\}$ sea divergente. Los ejemplos para comprobar estas afirmaciones son esencialmente los mismos que se usaron para el Criterio de Stolz, ya que en todos ellos se tenía $\rho_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para obtener la sucesión $\{y_n\}$ que ahora necesitamos basta escribir en forma de serie la sucesión $\{x_n\}$ que sirvió para el criterio de Stolz, es decir, tomar $y_n = x_n - x_{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, con el convenio $x_0 = 0$.

Usando logaritmos obtenemos fácilmente la siguiente consecuencia del criterio de la media aritmética:

**Criterio de la media geométrica.** *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales positivos y consideremos la sucesión de medias geométricas definida por*

$$\mu_n = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} = \sqrt[n]{a_1\, a_2 \ldots a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

*Si $\{a_n\} \to L \in \mathbb{R}_0^+$, se tiene $\{\mu_n\} \to L$, y si $\{a_n\} \to +\infty$, entonces $\{\mu_n\} \to +\infty$.*

En efecto, basta observar que

$$\log \mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log a_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y aplicar el criterio de la media aritmética a la sucesión $\{\log a_n\}$. Si $\{a_n\} \to L \in \mathbb{R}^+$ tenemos $\{\log a_n\} \to \log L$, y el criterio de la media aritmética nos dice que $\{\log \mu_n\} \to \log L$, de donde $\{\mu_n\} \to L$. Si $\{a_n\} \to 0$, tenemos que $\{\log a_n\} \to -\infty$, luego $\{\log \mu_n\} \to -\infty$ y $\{\mu_n\} \to 0$. Finalmente, si $\{a_n\} \to +\infty$, también $\{\log a_n\} \to +\infty$, luego $\{\log \mu_n\} \to +\infty$ y $\{\mu_n\} \to +\infty$. ■

Por ejemplo, para $\{a_n\} = \{n\}$, el criterio de la media geométrica nos dice que $\{\sqrt[n]{n!}\} \to +\infty$. Obsérvese que los criterios de la media aritmética y geométrica son equivalentes. Igual que hemos deducido el segundo del primero tomando $\{y_n\} = \{\log a_n\}$, podemos deducir el primero del segundo tomando $\{a_n\} = \{e^{y_n}\}$. Del criterio de la media geométrica se deduce fácilmente otro muy útil:

**Criterio de la raíz para sucesiones.** *Sea $\{b_n\}$ una sucesión de números reales positivos. Si $\{b_{n+1}/b_n\} \to L \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene $\{\sqrt[n]{b_n}\} \to L$, y si $\{b_{n+1}/b_n\} \to +\infty$, entonces $\{\sqrt[n]{b_n}\} \to +\infty$.*

En efecto, basta tomar $a_1 = b_1$ y $a_{n+1} = b_{n+1}/b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente, para las medias geométricas de la sucesión $\{a_n\}$ tenemos entonces $\mu_n = \sqrt[n]{b_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que basta aplicar el criterio de la media geométrica. ■

Por ejemplo, para $x \in \mathbb{R}^+$ consideremos la sucesión $\{\sqrt[n]{1+x^n}\}$. El criterio de la raíz nos lleva a pensar en la sucesión $\left\{\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right\}$. Para $x \leqslant 1$ tenemos claramente $\left\{\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right\} \to 1$, mientras que si $x > 1$, es $\left\{\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right\} = \left\{x\,\frac{x^{-n-1}+1}{x^{-n}+1}\right\} \to x$. En general, $\left\{\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right\} \to \max\{1,x\}$. El criterio de la raíz nos dice que también $\{\sqrt[n]{1+x^n}\} \to \max\{1,x\}$. Dados ahora $y,z \in \mathbb{R}^+$, podemos tomar $x = z/y$ para obtener: $\left\{\sqrt[n]{y^n+z^n}\right\} = \left\{y\,\sqrt[n]{1+(z/y)^n}\right\} \to y\,\max\{1,z/y\} = \max\{y,z\}$.

Del criterio de la raíz se deduce fácilmente el de la media geométrica, con lo que tenemos de nuevo criterios equivalentes. En efecto, dada una sucesión $\{a_n\}$ de números reales positivos, basta tomar $b_n = a_1 a_2 \ldots a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que $\{b_{n+1}/b_n\} = \{a_{n+1}\}$ y las medias geométricas de la sucesión $\{a_n\}$ son $\{\mu_n\} = \{\sqrt[n]{b_n}\}$.

## 3.6. Criterio de la raíz para series

Hacemos un breve paréntesis en el cálculo de límites, viendo un criterio de convergencia para series de números positivos, muy relacionado con el del cociente, como se verá. Dada una serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ con $x_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la forma más directa de compararla con una serie geométrica consiste en considerar la sucesión $\{\sqrt[n]{x_n}\}$. Aplicando el criterio de comparación obtenemos lo siguiente:

**Criterio de la raíz para series.** *Sea $x_n \in \mathbb{R}_0^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si la sucesión $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ está mayorada y* $\limsup\{\sqrt[n]{x_n}\} < 1$, *entonces la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente.*

En efecto, tomando $\lambda \in \mathbb{R}$ de forma que $\limsup\{\sqrt[n]{x_n}\} < \lambda < 1$, la definición de límite superior nos dice que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sup\{\sqrt[n]{x_n} : n \geqslant m\} < \lambda$, con lo cual, para $n \geqslant m$ se tiene $x_n < \lambda^n$. Puesto que $\lambda < 1$, la serie geométrica $\sum\limits_{n\geqslant 0} \lambda^n$ es convergente y basta aplicar el criterio de comparación para series de números positivos. ■

Puesto que, cuando $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, el comportamiento de la sucesión $\{x_{n+1}/x_n\}$ nos da importante información sobre $\{\sqrt[n]{x_n}\}$, la relación entre el criterio recién probado, que también se conoce como *criterio de Cauchy*, y el del cociente o de D'Alembert, no puede pasar desapercibida. Merece la pena discutir con detalle esa relación, que se puede resumir diciendo que el criterio de la raíz "mejora estrictamente" al del cociente.

Supongamos que queremos dilucidar si una serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$, con $x_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es convergente o divergente y veamos cual de los dos criterios es más efectivo. En primer lugar, el criterio del cociente sólo se aplica cuando $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, para que podamos considerar la sucesión $\{x_{n+1}/x_n\}$, mientras el criterio de la raíz no tiene esa limitación. Ciertamente esta mayor generalidad del criterio de la raíz es sólo una cuestión de forma, un sencillo artificio permitiría "suprimir" los términos nulos de la sucesión $\{x_n\}$ para trabajar sólo con los sumandos no nulos, sin alterar el carácter de la serie. Sin embargo, en la práctica puede no ser fácil decidir para qué valores de $n$ es $x_n = 0$.

Pero supongamos que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, para que los dos criterios estén disponibles. La comparación entre ambos se basa en la siguiente desigualdad, que especifica muy bien la relación entre las sucesiones $\{x_{n+1}/x_n\}$ y $\{\sqrt[n]{x_n}\}$.

- *Sea $x_n \in \mathbb{R}^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que la sucesión $\{x_{n+1}/x_n\}$ está acotada. Entonces la sucesión $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ también está acotada y se verifica que*

$$\liminf\{x_{n+1}/x_n\} \leqslant \liminf\{\sqrt[n]{x_n}\} \leqslant \limsup\{\sqrt[n]{x_n}\} \leqslant \limsup\{x_{n+1}/x_n\} \tag{10}$$

Para demostrarlo, supondremos de momento que $\liminf\{x_{n+1}/x_n\} > 0$. Al final quedará claro que basta trabajar en este caso. Fijamos entonces $\rho, \lambda \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$\rho < \liminf\{x_{n+1}/x_n\} \leqslant \limsup\{x_{n+1}/x_n\} < \lambda$$

La definición de límite inferior y superior nos dicen que podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho < \inf\{x_{n+1}/x_n : n \geqslant m\} \leqslant \sup\{x_{n+1}/x_n : n \geqslant m\} < \lambda$$

con lo cual, para $n \geqslant m$ tenemos $\rho x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \lambda x_n$.

De $\rho x_m \leqslant x_{m+1} \leqslant \lambda x_m$ deducimos $\rho^2 x_m \leqslant \rho x_{m+1} \leqslant x_{m+2} \leqslant \lambda x_{m+1} \leqslant \lambda^2 x_m$, y una obvia inducción nos dice que $\rho^k x_m \leqslant x_{m+k} \leqslant \lambda^k x_m$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Equivalentemente, para $n \geqslant m$ podemos escribir $\rho^{n-m} x_m \leqslant x_n \leqslant \lambda^{n-m} x_m$, es decir,

$$\rho \sqrt[n]{x_m \rho^{-m}} \leqslant \sqrt[n]{x_n} \leqslant \lambda \sqrt[n]{x_m \lambda^{-m}}$$

Puesto que $\{\sqrt[n]{a}\} \to 1$ para todo $a \in \mathbb{R}^+$, las sucesiones que aparecen en el primer y último miembro de la desigualdad anterior convergen a $\rho$ y $\lambda$ respectivamente. En particular, dicha desigualdad prueba que la sucesión $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ está mayorada, pero también nos dice que

$$\rho \leqslant \liminf\{\sqrt[n]{x_n}\} \leqslant \limsup\{\sqrt[n]{x_n}\} \leqslant \lambda$$

Las desigualdades buscadas se deducen claramente de la libertad que tuvimos para elegir $\rho$ y $\lambda$. Si fuese $\liminf\{\sqrt[n]{x_n}\} < \liminf\{x_{n+1}/x_n\}$ se tendría en particular $\liminf\{x_{n+1}/x_n\} > 0$, que es la suposición que hicimos al principio de la demostración, y podríamos haber elegido $\rho$ de forma que $\liminf\{\sqrt[n]{x_n}\} < \rho$, llegando a una contradicción. Análogamente, suponiendo $\limsup\{x_{n+1}/x_n\} < \limsup\{\sqrt[n]{x_n}\}$, habríamos podido elegir $\lambda < \limsup\{\sqrt[n]{x_n}\}$ para llegar también a contradicción. ■

Volvamos ahora a la relación entre los dos criterios. El del cociente asegura que la serie de término general $\{x_n\}$ converge cuando $\{x_{n+1}/x_n\}$ está mayorada con $\limsup\{x_{n+1}/x_n\} < 1$. Pero entonces, $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ también está mayorada y de $(10)$ deducimos que $\limsup\{\sqrt[n]{x_n}\} < 1$, luego el criterio de la raíz también nos permite concluir que la serie es convergente.

Comentábamos también en su momento que cuando $\liminf\{x_{n+1}/x_n\} > 1$, la sucesión $\{x_n\}$ no converge a cero, luego la serie diverge, lo cual puede verse ahora casi con más claridad: según $(10)$ tenemos $\liminf\{\sqrt[n]{x_n} > 1$, con lo que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene $\sqrt[n]{x_n} > 1$, luego $x_n > 1$, y $\{x_n\}$ no converge a cero.

En resumen, cuando el estudio de la sucesión $\{x_{n+1}/x_n\}$ (criterio del cociente) permite decidir si la serie de término general $\{x_n\}$ converge o diverge, el estudio de la sucesión $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ (criterio de la raíz) también lo permite. La discusión se completa con un ejemplo en el que el criterio del cociente no decide pero el de la raíz sí. Para ello basta tomar $x_n = (3+(-1)^n)^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es evidente que $\limsup\{\sqrt[n]{x_n}\} = 1/2$, luego el criterio de la raíz nos dice que la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente. Sin embargo, el criterio del cociente no decide, de hecho la sucesión $\{x_{n+1}/x_n\}$ no está acotada, pues para $n$ par se comprueba fácilmente que $x_{n+1}/x_n = 2^{n-1}$.

## 3.7. Límites relacionados con el número $e$

De vuelta al problema de resolver ciertas indeterminaciones, vamos a ver ahora algunos límites de sucesiones y de funciones que guardan relación directa con el número $e$. Obtendremos un método bastante general para resolver indeterminaciones del tipo $[1^\infty]$. Empezamos con un ejemplo muy concreto, probando lo siguiente:

- *Se verifica que* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$

Para abreviar, llamemos $\{u_n\}$ a la sucesión cuyo límite queremos calcular. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la fórmula del binomio de Newton nos permite escribir

$$u_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!\,n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) \tag{11}$$

En cada sumando de la última expresión aparece un producto de $k$ factores positivos, cada uno de los cuales aumenta al sustituir $n$ por $n+1$, y esta sustitución añade un sumando positivo más, con lo que la suma aumenta, es decir,

$$u_n \leqslant \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n+1}\right) = u_{n+1}$$

lo que prueba que $\{u_n\}$ es una sucesión creciente. Para ver que está mayorada observamos que en el último miembro de $(11)$ los productos que aparecen son menores o iguales que 1, luego

$$u_n \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leqslant e \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Así pues, $\{u_n\}$ es convergente y llamando $L$ a su límite, tenemos $L \leqslant e$. Para conseguir la otra desigualdad, dados $n,p \in \mathbb{N}$, volvemos a trabajar con la igualdad $(11)$:

$$u_{n+p} = \sum_{k=0}^{n+p}\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n+p}\right) \geqslant \sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n+p}\right) \tag{12}$$

Fijando por un momento $p$, tenemos $\{u_{n+p}\} \to L$, mientras la sucesión que aparece al final de $(12)$ es una suma finita de productos finitos de sucesiones convergentes. Por tanto,

$$L \geqslant \sum_{k=0}^{p} \lim_{n\to\infty} \left[ \frac{1}{k\,!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n+p}\right)\right] = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k\,!} \prod_{j=0}^{k-1} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{j}{n+p}\right) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k\,!}$$

Puesto que esta desigualdad es válida para todo $p \in \mathbb{N}$, deducimos finalmente que

$$L \geqslant \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k\,!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k\,!} = e \qquad \blacksquare$$

Pasamos ahora a generalizar el resultado anterior, calculando dos límites funcionales:

- *Se verifica que* $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$

Obsérvese que la función $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$, cuyos límites en $+\infty$ y $-\infty$ queremos calcular, puede considerarse definida en $]-\infty, -1[\, \cup \mathbb{R}^{+}$, un conjunto que no está mayorado ni minorado, así que tiene sentido estudiar ambos límites. Empezamos la demostración con otras dos sucesiones convergentes:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}} = e$$

Por tanto, fijado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene

$$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon$$

Entonces, para $x \in \mathbb{R}$ con $x \geqslant m$, consideramos su parte entera $n = E(x) \in \mathbb{N}$. Es claro que $m \leqslant n \leqslant x < n+1$, de donde obtenemos

$$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon$$

Así pues, hemos probado que

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}, \;\; x \geqslant m \;\Rightarrow\; \left| \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} - e \right| < \varepsilon,$$

y tenemos uno de los límites buscados. Para conseguir el otro, observamos previamente que, para $x \geqslant m+1$, en la última desigualdad podemos sustituir $x$ por $x-1$. Esto demuestra que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1} = e, \quad \text{luego} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x} = e$$

Podemos ya calcular el límite en $-\infty$ que buscamos, convirtiéndolo en un límite en $+\infty$, como ya sabemos:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x} = e \qquad \blacksquare$$

Nuestro próximo paso es convertir los dos límites recién calculados en la continuidad de una función que nos será muy útil:

- *Sea* $I = ]-1,+\infty[$ *y* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *la función definida por*

  $$\varphi(x) = (1+x)^{1/x} \quad \forall x \in I\setminus\{0\}, \quad \varphi(0) = e$$

  *Entonces* $\varphi$ *es continua en* $0$*. Equivalentemente:*

  $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e\,, \quad \textit{o bien,} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

  *Además, se tiene* $\varphi(x) \neq 1$ *para todo* $x \in I$.

En efecto, dada una sucesión monótona $\{x_n\}$ de puntos de $I$ distintos de cero, con $\{x_n\}\to 0$, la sucesión $\{y_n\} = \{1/x_n\}$ diverge positiva o negativamente. En cualquier caso,

$$\left\{(1+x_n)^{1/x_n}\right\} = \left\{\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n}\right\} \to e$$

y por tanto tenemos también

$$\left\{\frac{\log(1+x_n)}{x_n}\right\} = \left\{\log(1+x_n)^{1/x_n}\right\} \to \log e = 1$$

Finalmente, para $x \in I\setminus\{0\}$, es claro que $(1+x)^{1/x} \neq 1$, mientras que $\varphi(0) = e \neq 1$. $\blacksquare$

Podemos ya obtener un método útil para abordar indeterminaciones del tipo $[1^\infty]$:

- *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión de números reales positivos tal que* $\{x_n\}\to 1$ *y sea* $\{y_n\}$ *cualquier sucesión de números reales.*
  - $(i)$ *Para* $L\in\mathbb{R}$ *se tiene:* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x_n-1) = L \iff \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = e^L$
  - $(ii)$ $\{y_n(x_n-1)\}\to+\infty \iff \{x_n^{y_n}\}\to+\infty$
  - $(iii)$ $\{y_n(x_n-1)\}\to-\infty \iff \{x_n^{y_n}\}\to 0$

La demostración es inmediata, usando la función $\varphi$ cuya continuidad en $0$ acabamos de obtener. Comprobamos fácilmente que

$$x_n^{y_n} = \left[\varphi(x_n-1)\right]^{y_n(x_n-1)} \quad \forall n\in\mathbb{N} \tag{13}$$

En efecto, si $x_n = 1$ esta igualdad es obvia, y si $x_n \neq 1$, se deduce de la definición de $\varphi$. Nótese que $x_n - 1$ siempre pertenece al conjunto de definición de $\varphi$, pues $x_n - 1 > -1$.

Puesto que $\varphi$ es continua en 0, tenemos $\{\varphi(x_n - 1)\} \to e$, con lo que la igualdad (13), junto con las reglas básicas sobre el comportamiento de las sucesiones de potencias, nos permiten obtener las tres implicaciones hacia la derecha que aparecen en el enunciado.

Tomamos ahora logaritmos en la igualdad (13) y recordamos que la función $\varphi$ no toma el valor 1, por lo que su logaritmo no puede anularse. Así pues,

$$y_n(x_n - 1) = \frac{\log x_n^{y_n}}{\log \varphi(x_n - 1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Puesto que, de nuevo por la continuidad de $\varphi$ en cero, tenemos $\{\log \varphi(x_n - 1)\} \to 1$, las propiedades del logaritmo nos permiten obtener inmediatamente las tres implicaciones hacia la izquierda que queríamos probar. ■

Aunque el enunciado no lo exige, es claro que el resultado anterior tiene interés cuando la sucesión $\{y_n\}$ es divergente. Las implicaciones hacia la derecha se usan, como se ha dicho, para intentar resolver una indeterminación del tipo $[1^\infty]$, resolviendo una del tipo $[0 \cdot \infty]$. La igualdad $x^{y_n} = \exp(y_n \log x_n)$ permite hacer lo mismo, pero frecuentemente la sucesión $\{y_n(x_n - 1)\}$ es más fácil de manejar que $\{y_n \log x_n\}$.

Consideremos por ejemplo la sucesión $\left\{\left(\frac{n^2}{n^2-n+1}\right)^n\right\} = \{x_n^{y_n}\}$, con $x_n = \frac{n^2}{n^2-n+1}$, $y_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales positivos convergente a 1 y tenemos claramente $\{y_n(x_n - 1)\} = \left\{\frac{n^2-n}{n^2-n+1}\right\} \to 1$, luego $\{x_n^{y_n}\} \to e$.

Aunque una sucesión de potencias es usualmente más complicada que un producto de dos sucesiones, las implicaciones hacia la izquierda del resultado anterior también son útiles. Por ejemplo, puesto que evidentemente $\{(\sqrt[n]{x})^n\} \to x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, deducimos que

$$\log x = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

## 3.8. Otros límites funcionales

Veamos ahora un par de ejemplos de límites de funciones que presentan indeterminaciones del tipo $[(+\infty)^0]$ y $[0^0]$:

- *Se verifica que:* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1 = \lim\limits_{x\to 0} x^{x}$

Para obtener el primero de estos límites usamos un argumento que ya fue útil anteriormente. Partiendo del hecho conocido $\{\sqrt[n]{n}\} \to 1$, consideramos otras dos sucesiones convergentes:

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} (n+1)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} = 1$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene

$$1 - \varepsilon < n^{1/(n+1)} < (n+1)^{1/n} < 1 + \varepsilon$$

Ahora, para $x \in \mathbb{R}$ con $x \geqslant m$, tomando $n = E(x)$ tenemos $m \leqslant n \leqslant x < n+1$ y, por tanto,

$$1 - \varepsilon < n^{1/(n+1)} < x^{1/x} < (n+1)^{1/n} < 1 + \varepsilon$$

Esto prueba que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{1/x} = 1$. Para calcular el otro límite basta recordar la forma de convertir un límite en $+\infty$ en un límite en 0. Concretamente se tiene

$$\lim_{x \to 0} x^{\,x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{1/x}} = 1 \qquad \blacksquare$$

Finalmente probamos un resultado que a veces se conoce como "escala de infinitos", pues se trata de estudiar el cociente entre funciones que divergen positivamente en $+\infty$ y se observa como unos tipos de funciones van dominando a otros:

- *Para todo* $\rho \in \mathbb{R}^+$ *se tiene:* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log x}{x^{\rho}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\rho}}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^x} = 0$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales positivos que diverja positivamente. Tenemos entonces $\{e/x_n\} \to 0$ y, por tanto,

$$\left\{\frac{e^{\,x_n}}{x_n^{\,x_n}}\right\} = \left\{\left(\frac{e}{x_n}\right)^{x_n}\right\} \to 0\,, \qquad \text{luego} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^x} = 0$$

Por otra parte, usando uno de los límites funcionales recién calculados, tenemos $\left\{x_n^{1/x_n}\right\} \to 1$ y deducimos que

$$\left\{\frac{x_n^{\rho}}{e^{x_n}}\right\} = \left\{\left[\frac{1}{e}\left(x_n^{1/x_n}\right)^{\rho}\right]^{x_n}\right\} \to 0\,, \qquad \text{luego} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\rho}}{e^x} = 0$$

En particular será $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\exp x} = 0$ y, puesto que $\{\rho \log x_n\} \to +\infty$, deducimos que

$$\left\{\frac{\log x_n}{x_n^{\rho}}\right\} = \left\{\frac{1}{\rho}\,\frac{\rho \log x_n}{\exp(\rho \log x_n)}\right\} \to 0\,, \qquad \text{luego} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^{\rho}} = 0 \qquad \blacksquare$$

## 3.9. Ejercicios

1. Calcular la imagen de la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{(2x^2+3)\,\log x}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

2. Estudiar la existencia de límite en $+\infty$ de las siguientes funciones y, en su caso, calcularlo:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad g(x) = \sqrt{x - E(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\,, \quad h(x) = \frac{\sqrt[6]{x^5} + \sqrt[4]{x^2+1}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x}+2)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$
$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad \varphi(x) = \frac{e^{2x+1} - e^x}{2e^{2x} + e^x + 1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

3. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\exp\big(-1/x^2\big)\quad \forall x\in\mathbb{R}^*,\quad f(0)=0$$

Probar que $f$ es continua en $\mathbb{R}$. Calcular $f(\mathbb{R})$ y $f\big([0,1]\big)$.

4. Probar que existe $x\in\mathbb{R}^+$ tal que $\log x+\sqrt{x}=0$

5. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones y, cuando exista, calcular su límite:

(a) $\left\{\dfrac{n^2\sqrt{n}}{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\ldots+n\sqrt{n}}\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}k!\right\}$

(c) $\left\{\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}\right\}$

(d) $\left\{\left(\dfrac{\alpha\sqrt[n]{a}+\beta\sqrt[n]{b}}{\alpha+\beta}\right)^n\right\}$ donde $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha+\beta\neq 0,\ a,b\in\mathbb{R}^+$

6. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$\text{(a)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{n^n}\qquad \text{(b)}\ \sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\qquad \text{(c)}\ \sum_{n\geqslant 1}\left(1-e^{-1/n}\right)^2$$

$$\text{(d)}\ \sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}\quad \text{donde}\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

7. Se considera la función $f:\mathbb{R}\setminus\{e\}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)\,=\,x^{1/(\log x-1)}\quad \forall x\in\mathbb{R}^+\setminus\{e\}$$

Estudiar el comportamiento de $f$ en $0,e,+\infty$.