Tema 2

Sucesiones y funciones divergentes

Nuestro próximo objetivo es ampliar el estudio de los dos tipos de convergencia, o de las dos nociones de límite, que hasta ahora conocemos: el límite de una sucesión de números reales y el límite en un punto de una función real de variable real.

Empezamos prestando atención a determinadas sucesiones no acotadas de números reales, que llamaremos "sucesiones divergentes". Adaptaremos las reglas sobre cálculo de límites de sucesiones, para contemplar también la posibilidad de manejar sucesiones divergentes.

Podremos entonces ampliar el conocimiento del límite funcional en dos sentidos. Por una parte, analizaremos el tipo de comportamiento que puede tener una función cuando la variable crece o decrece indefinidamente, mediante la noción de "límites en el infinito". Por otra, en claro paralelismo con las sucesiones divergentes, estudiaremos también la divergencia de funciones, explicando este nuevo tipo de comportamiento que una función puede presentar, tanto en un punto de la recta real como en el infinito.

2.1. Sucesiones divergentes

Hasta ahora, el estudio de las sucesiones de números reales se ha reducido prácticamente a considerar sucesiones acotadas, que ciertamente son las más útiles. Sin embargo, hay preguntas sobre sucesiones acotadas, o incluso sobre sucesiones convergentes, que no tienen aún respuesta satisfactoria, precisamente porque no hemos prestado más atención a las sucesiones no acotadas.

Para ver una pregunta concreta del tipo indicado, recordemos que si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales no nulos tal que $\{x_n\} \to 0$, entonces la sucesión $\{y_n\} = \{1/x_n\}$ no está acotada, pero el recíproco no es cierto. Por ejemplo, tomando

$$y_n = n + (-1)^n\, n + 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \text{es decir,} \qquad x_n = \frac{1}{n + (-1)^n\, n + 1} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

tenemos claramente que la sucesión $\{y_n\}$ no está acotada, ya que $\{y_{2n}\} = \{4n+1\}$, pero $\{x_n\}$ no converge a cero, ya que $x_{2n-1} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es razonable por tanto la siguiente pregunta: ¿qué condición necesaria y suficiente debe cumplir $\{y_n\}$ para tener $\{x_n\} \to 0$? Pues bien, esta pregunta, y otras más complicadas que podríamos plantear, encontrarán una respuesta satisfactoria con el estudio de las sucesiones divergentes que ahora vamos a iniciar.

Tomemos como guía la sucesión $\{n\}$ de los números naturales, la sucesión $\{-n\}$ de sus opuestos y la sucesión alternante $\{(-1)^n n\}$. Las tres son sucesiones no acotadas, pero muestran comportamientos especiales que ahora vamos a catalogar.

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de números reales *diverge positivamente*, cuando para todo $K \in \mathbb{R}$ puede encontrarse $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, se tiene $x_n > K$. En tal caso, decimos también que $\{x_n\}$ *tiende a* $+\infty$ y escribimos $\{x_n\} \to +\infty$. Simbólicamente:

$$\{x_n\} \to +\infty \iff \big[\, \forall K \in \mathbb{R} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \; : \; n \geqslant m \;\Rightarrow x_n > K \,\big]$$

Equivalentemente, $\{x_n\} \to +\infty$ cuando para todo $K \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant K\}$ es finito.

De forma análoga, decimos que la sucesión $\{x_n\}$ *diverge negativamente*, o que *tiende a* $-\infty$, y escribimos $\{x_n\} \to -\infty$, cuando para todo $K \in \mathbb{R}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene $x_n < K$:

$$\{x_n\} \to -\infty \iff \big[\, \forall K \in \mathbb{R} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \; : \; n \geqslant m \;\Rightarrow x_n < K \,\big]$$

Equivalentemente, $\{x_n\} \to -\infty$ cuando para todo $K \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \geqslant K\}$ es finito.

Por ejemplo, es evidente que $\{n\} \to +\infty$ mientras que $\{-n\} \to -\infty$. De hecho, para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de números reales, es claro que

$$\{x_n\} \to -\infty \iff \{-x_n\} \to +\infty$$

Decimos finalmente que una sucesión $\{x_n\}$ es *divergente* cuando la sucesión $\{|x_n|\}$ diverge positivamente. Es claro que si $\{x_n\} \to +\infty$ o $\{x_n\} \to -\infty$, entonces $\{x_n\}$ es divergente, pero el recíproco no es cierto. Por ejemplo la sucesión $\{x_n\} = \{(-1)^n n\}$ es divergente, puesto que $\{|x_n|\} = \{n\}$, pero $\{x_n\}$ no diverge positivamente, porque el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant 0\}$ es infinito, y tampoco diverge negativamente, porque $\{n \in \mathbb{N} : x_n \geqslant 0\}$ también es infinito.

Merece la pena hacer un par de observaciones sobre las nociones recién introducidas, para aclarar su significado y evitar malentendidos.

En primer lugar, debe quedar claro una vez más que $+\infty$ y $-\infty$ son meros símbolos. Cuando escribimos $\{x_n\} \to +\infty$ no estamos diciendo que la sucesión $\{x_n\}$ sea convergente (nada más lejos de la realidad) ni que $\{x_n\}$ tenga límite $+\infty$. Las sucesiones convergentes siguen siendo las mismas que hasta ahora y el concepto de límite de una sucesión tampoco debe cambiar. Por tanto, expresiones que a veces se usan, como decir que $\{x_n\}$ converge a $+\infty$, o notaciones que a veces también se usan, como $\lim\{x_n\} = +\infty$ pueden crear confusión y deben evitarse, pues no aportan ninguna utilidad o comodidad.

En segundo lugar, debe quedar claro que para una sucesión de números reales, ser divergente no es lo contrario de ser convergente. Cierto que una sucesión divergente no es convergente, pero hay sucesiones que no son convergentes ni divergentes, como $\{(-1)^n\}$, sin ir más lejos.

2.2. Relación con otros tipos de sucesiones

Vamos ahora a discutir brevemente la relación entre las sucesiones divergentes y otros tipos de sucesiones manejadas anteriormente. Conviene empezar observando lo que ocurre con las sucesiones parciales de sucesiones divergentes:

- *Sea $\{x_{\sigma(n)}\}$ una sucesión parcial de una sucesión de números reales $\{x_n\}$. Entonces:*

  (i) $\{x_n\} \to +\infty \implies \{x_{\sigma(n)}\} \to +\infty$
  (ii) $\{x_n\} \to -\infty \implies \{x_{\sigma(n)}\} \to -\infty$
  (iii) *Si $\{x_n\}$ es divergente, lo mismo le ocurre a $\{x_{\sigma(n)}\}$*

La comprobación de estos hechos es bastante inmediata. Si $\{x_n\} \to +\infty$, para todo $K \in \mathbb{R}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ es $x_n > K$. Entonces, también para $n \geqslant m$, por ser $\sigma(n) \geqslant n \geqslant m$, tenemos $x_{\sigma(n)} > K$. Para obtener (ii) basta aplicar (i) a la sucesión $\{-x_n\}$. Finalmente, si $\{x_n\}$ es divergente, tenemos $\{|x_n|\} \to +\infty$ luego $\{|x_{\sigma(n)}|\} \to +\infty$ y $\{x_{\sigma(n)}\}$ también es divergente. ■

Como consecuencia de lo anterior, usando el Teorema de Bolzano-Weierstrass, obtenemos una caracterización de las sucesiones divergentes que explica por qué las llamamos así:

- *Para una sucesión $\{x_n\}$ de números reales, son equivalentes:*

  (i) $\{x_n\}$ *no es divergente*
  (ii) $\{x_n\}$ *admite una sucesión parcial acotada*
  (iii) $\{x_n\}$ *admite una sucesión parcial convergente*

$(i) \Rightarrow (ii)$. Si $\{x_n\}$ no es divergente, sabemos que $\{|x_n|\}$ no tiende a $+\infty$, luego existe $K \in \mathbb{R}$ tal que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : |x_n| \leqslant K\}$ es infinito. Por tanto existe una aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to A$, con lo que $\{y_n\} = \{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$ que está acotada, ya que $|y_n| \leqslant K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Si $\{y_n\} = \{x_{\sigma(n)}\}$ está acotada, el Teorema de Bolzano-Weierstrass nos dice que $\{y_n\}$ admite a su vez una sucesión parcial $\{z_n\} = \{y_{\tau(n)}\}$ que es convergente. Pero $\{z_n\}$ también es una sucesión parcial de $\{x_n\}$, ya que $z_n = y_{\tau(n)} = x_{\sigma(\tau(n))} = x_{\sigma\circ\tau(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la aplicación $\sigma \circ \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, por serlo σ y τ.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Hemos visto anteriormente que una sucesión parcial de una sucesión divergente también es divergente. ■

Así pues, una sucesión de números reales es divergente si, y sólo si, no admite ninguna sucesión parcial convergente. Pero completemos la relación entre divergencia y acotación.

Es claro que una sucesión que diverge positivamente está minorada pero no mayorada. El recíproco no es cierto, como muestra la sucesión $\{x_n\}$ dada por

$$x_n = \frac{n}{4}\left[1 + (-1)^n\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Está minorada, ya que $x_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y no está mayorada, porque $x_{2n} = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero no es divergente, pues $x_{2n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Análogamente, si una sucesión diverge negativamente, está mayorada pero no minorada y tampoco es cierto el recíproco, basta pensar en la sucesión $\{-x_n\}$ donde $\{x_n\}$ se define como antes.

Es claro que una sucesión divergente nunca está acotada, puede estar minorada, como le ocurre a $\{n\}$, mayorada como le ocurre a $\{-n\}$, y puede no estar mayorada ni minorada, como le ocurre a la sucesión $\{(-1)^n n\}$. Completamos la discusión con un ejemplo de una sucesión que no está mayorada, tampoco está minorada, pero no es divergente. Basta considerar la sucesión $\{y_n\}$ definida por $y_{3k-2} = k\,,\ y_{3k-1} = -k\,,\ y_{3k} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Intuitivamente, se trata de la sucesión: $1\,, -1\,, 0\,, 2\,, -2\,, 0\,, 3\,, -3\,, 0\ldots$

La situación se clarifica enormemente si consideramos sucesiones monótonas:

- *Toda sucesión de números reales creciente y no mayorada diverge positivamente. Toda sucesión decreciente y no minorada diverge negativamente.*

En efecto, si $\{x_n\}$ es creciente y no mayorada, dado $K \in \mathbb{R}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m > K$, pero entonces, para $n \geqslant m$ tenemos $x_n \geqslant x_m > K$, luego $\{x_n\} \to +\infty$. Si $\{x_n\}$ es decreciente y no minorada, entonces $\{-x_n\}$ es creciente y no mayorada, luego $\{-x_n\} \to +\infty$ y $\{x_n\} \to -\infty$. ■

Queda claro por tanto que toda sucesión monótona es convergente o divergente. La versión para series del último resultado merece ser destacada:

- *Toda serie de números positivos es convergente o diverge positivamente.*

2.3. Sumas con sucesiones divergentes

En lo que sigue vamos a revisar las reglas de cálculo de límites, involucrando sucesiones divergentes. En primer lugar, anotemos criterios de comparación bastante obvios:

- *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones de números reales y supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geqslant m$, se tiene $x_n \leqslant y_n$. Entonces:*

$$\{x_n\} \to +\infty \implies \{y_n\} \to +\infty \quad ; \quad \{y_n\} \to -\infty \implies \{x_n\} \to -\infty$$

Veamos ya lo que ocurre al sumar dos sucesiones convergentes o divergentes. Partimos claro está del hecho conocido de que si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones convergentes, entonces $\{x_n + y_n\}$ es convergente. Se trata de considerar las restantes posibilidades y todo se deducirá de la siguiente observación:

- *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones de números reales.*
  (i) *Si $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\}$ está minorada, entonces $\{x_n + y_n\} \to +\infty$*
  (ii) *Si $\{x_n\} \to -\infty$ e $\{y_n\}$ está mayorada, entonces $\{x_n + y_n\} \to -\infty$.*

La comprobación es inmediata. En el caso (i), existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $y_n \leqslant \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, dado $K \in \mathbb{R}$, existirá $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, se tiene $x_n > K - \alpha$, luego $x_n + y_n > K$. Para (ii) basta aplicar (i) a las sucesiones $\{-x_n\}$ y $\{-y_n\}$. ■

Conviene observar que si la sucesión $\{y_n\}$ es convergente, podemos aplicar (i) y (ii). Por tanto, para cualquier sucesión convergente $\{y_n\}$, tenemos que $\{x_n + y_n\} \to +\infty$ si $\{x_n\} \to +\infty$ y que $\{x_n + y_n\} \to -\infty$ si $\{x_n\} \to -\infty$.

Por otra parte, si $\{y_n\} \to +\infty$ también podemos aplicar (i), luego si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ divergen positivamente, lo mismo le ocurre a $\{x_n + y_n\}$. Análogamente, si $\{y_n\} \to -\infty$ podemos aplicar (ii), obteniendo que $\{x_n + y_n\} \to -\infty$ siempre que $\{x_n\} \to -\infty$ e $\{y_n\} \to -\infty$.

Cuando tenemos información menos precisa, el resultado anterior sigue siendo útil. Más concretamente, si $\{x_n\}$ es divergente e $\{y_n\}$ está acotada, entonces $\{x_n + y_n\}$ es divergente. Basta observar que $|x_n + y_n| \geqslant |x_n| - |y_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego como $\{|x_n|\} \to +\infty$ y $\{-|y_n|\}$ está acotada, deducimos que $\{|x_n| - |y_n|\} \to +\infty$ y, por comparación, $\{|x_n + y_n|\} \to +\infty$.

Hay una posibilidad que no está contemplada en la discusión anterior: nada hemos dicho sobre lo que ocurre con $\{x_n + y_n\}$ cuando $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\} \to -\infty$. Planteada de forma más genérica, la pregunta sería si podemos afirmar algo sobre la suma de dos sucesiones divergentes. Vamos a ver que, en general, nada se puede afirmar, puede ocurrir de todo.

De hecho, *toda* sucesión $\{z_n\}$ de números reales puede escribirse en la forma $\{x_n + y_n\}$ con $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to -\infty$. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $x_n = z_n + |z_n| + n$ y, lógicamente, $y_n = z_n - x_n$, con lo que tenemos $x_n \geqslant n$, $y_n = -|z_n| - n \leqslant -n$. Deducimos que $\{x_n\} \to +\infty$ y que $\{y_n\} \to -\infty$, como se quería. En particular, queda claro que toda sucesión de números reales se expresa como suma de dos sucesiones divergentes.

En una situación como la anterior, se dice que tenemos una *indeterminación*. En el caso que nos ocupa, decimos que la indeterminación es del *tipo* $[\infty - \infty]$. Se trata solo de una forma de hablar: cuando decimos que tenemos una indeterminación del tipo $[\infty - \infty]$ solo estamos recordando que no existe (no puede existir) ningún resultado general que nos dé información sobre la suma de una sucesión que diverge positivamente con otra que diverge negativamente. Por supuesto, ello no quiere decir que en cada caso concreto no podamos describir con toda precisión el comportamiento de tal sucesión. De hecho, más adelante estudiaremos métodos bastante generales para evitar, bajo ciertas hipótesis, esta y otras indeterminaciones.

2.4. Productos y cocientes

Para poder discutir lo que ocurre con un producto de sucesiones, al menos una de las cuales es divergente, la observación básica es la siguiente:

- *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones de números reales. Supongamos que $\{x_n\} \to +\infty$ y que existen $\alpha > 0$ y $p \in \mathbb{N}$ tales que para $n \geqslant p$ se tiene $y_n > \alpha$. Entonces $\{x_n y_n\} \to +\infty$*

En efecto, dado $K \in \mathbb{R}^+$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, se tiene $x_n > K/\alpha$ y, por tanto, $x_n y_n > K$, lo que prueba que $\{x_n y_n\} \to +\infty$. ■

Las hipótesis del resultado anterior parecen muy restrictivas, pero es fácil aplicarlo para obtener interesantes consecuencias:

(a) *Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones divergentes, entonces $\{x_n y_n\}$ también es divergente.* En efecto, basta usar que $\{|x_n|\} \to +\infty$ y que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n| > 1$ para $n \geqslant p$.

(b) De hecho, aplicando el resultado anterior a $\{x_n\}$ o $\{-x_n\}$, así como a $\{y_n\}$ o $\{-y_n\}$ según convenga, obtenemos lo siguiente: *Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ divergen ambas positivamente o ambas negativamente, entonces $\{x_n y_n\} \to +\infty$, mientras que si una diverge positivamente y otra diverge negativamente, entonces $\{x_n y_n\} \to -\infty$.*

(c) *Si $\{x_n\}$ es divergente e $\{y_n\}$ converge a un número real no nulo, $\{y_n\} \to \lambda \in \mathbb{R}^*$, entonces $\{x_n y_n\}$ es divergente.* En efecto, basta observar que tomando $0 < \alpha < |\lambda|$, existirá $p \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant p$ se tenga $|y_n| > \alpha$.

(d) Seguimos suponiendo que $\{y_n\} \to \lambda \in \mathbb{R}^*$. Usando otra vez las sucesiones $\{-x_n\}$ y $\{-y_n\}$ cuando convenga, tenemos: *Si $\{x_n\} \to +\infty$ y $\lambda > 0$ o $\{x_n\} \to -\infty$ y $\lambda < 0$, entonces $\{x_n y_n\} \to +\infty$. Si $\{x_n\} \to +\infty$ y $\lambda < 0$ o $\{x_n\} \to -\infty$ y $\lambda > 0$, entonces $\{x_n y_n\} \to -\infty$.*

Nada hemos dicho aún sobre el producto de una sucesión divergente por una sucesión que converja a cero. Nada se puede afirmar, tenemos aquí la *indeterminación del tipo* $[0 \cdot \infty]$. De nuevo vemos que toda sucesión $\{z_n\}$ se escribe en la forma $\{x_n y_n\}$, con $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to 0$. Basta tomar, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = n(|z_n| + 1)$ y, lógicamente, $y_n = z_n / x_n$, con lo que se tiene claramente $x_n \geqslant n$, $|y_n| \leqslant 1/n$. Así pues, $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to 0$, como queríamos.

Pasemos ahora a considerar el cociente de dos sucesiones. Discutido ya el comportamiento de un producto, basta pensar lo que ocurre con la sucesión $\{1/y_n\}$ donde $\{y_n\}$ es una sucesión convergente o divergente de números reales no nulos. La observación clave es la siguiente, que contesta una pregunta planteada como motivación al principio del tema:

- *Sea $y_n \in \mathbb{R}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{y_n\} \to 0$ si, y sólo si, $\{1/y_n\}$ es divergente.*

La demostración de ambas implicaciones es inmediata. Si $\{y_n\} \to 0$, dado $K \in \mathbb{R}^+$ podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ de forma que, para $n \geqslant m$, se tenga $|y_n| < 1/K$ y, por tanto, $|1/y_n| > K$, luego $\{|1/y_n|\} \to +\infty$. Recíprocamente, dado $\varepsilon > 0$, la divergencia de $\{1/y_n\}$ nos proporciona un $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, se tiene $|1/y_n| > 1/\varepsilon$, luego $|y_n| < \varepsilon$. ■

Naturalmente, dadas dos sucesiones convergentes o divergentes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, con $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, para obtener información sobre la sucesión cociente $\{x_n/y_n\}$ podemos verla como producto de $\{x_n\}$ con $\{1/y_n\}$. Entonces podemos encontrarnos con la indeterminación $[0 \cdot \infty]$. Más concretamente, ello ocurre cuando $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergen a cero, y también cuando ambas son divergentes. Por ello se habla a veces de indeterminaciones del tipo $[0/0]$ o $[\infty/\infty]$. No se trata en realidad de nuevos tipos de indeterminación, solo son diferentes aspectos que puede tomar la indeterminación $[0 \cdot \infty]$.

2.5. Límites en el infinito

Las sucesiones divergentes nos van a permitir ahora analizar el comportamiento de una función cuando la variable crece o decrece sin límite, o dicho de forma más intuitiva, cuando nos alejamos indefinidamente sobre la recta real hacia la derecha o hacia la izquierda.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y supongamos que el conjunto A no está mayorado, con lo cual existen sucesiones de puntos de A que divergen positivamente. Pues bien, decimos que *f tiene límite en $+\infty$* cuando existe $L \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A que tienda a $+\infty$, se tiene que $\{f(x_n)\} \to L$. Naturalmente L es único, le llamamos *límite en $+\infty$* de la función f y escribimos $L = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Simbólicamente:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \left[\, x_n \in A \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \;\; \{x_n\} \to +\infty \;\Rightarrow\; \{f(x_n)\} \to L \,\right]$$

Nótese que en la definición anterior podemos tomar $A = \mathbb{N}$, un conjunto no mayorado, y entonces f es una sucesión de números reales. Podemos comprobar sin dificultad que la noción recién introducida de límite en $+\infty$ para la función f coincide con la noción de límite de la sucesión $\{f(n)\}$. Más concretamente, para cualquier función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \{f(n)\} \to L$$

La implicación hacia la derecha es evidente, puesto que $\{n\}$ es un sucesión de puntos de $\mathbb{N}$ que diverge positivamente. Recíprocamente, supongamos que $\{f(n)\} \to L$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de $\mathbb{N}$ que diverge positivamente. Dado $\varepsilon > 0$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \in \mathbb{N}$ con $k \geqslant p$ se tiene $|f(k) - L| < \varepsilon$. Por ser $\{x_n\} \to +\infty$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant m$ se tiene $x_n > p$ y por tanto $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Queda claro que la noción de límite en el infinito de una función generaliza ampliamente la noción de límite de una sucesión de números reales.

La noción de límite en $-\infty$ se define de forma enteramente análoga al caso de $+\infty$: si A es un conjunto no minorado de números reales, se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ *tiene límite en* $-\infty$ cuando existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\{f(x_n)\} \to L$ para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A que diverja negativamente. Entonces L es único, le llamamos *límite en* $-\infty$ de la función f y escribimos $L = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Así pues,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \iff \big[\, x_n \in A \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \{x_n\} \to -\infty \ \Rightarrow \ \{f(x_n)\} \to L \,\big]$$

Las nociones de límite en el infinito se transforman una en otra fácilmente:

- *Sea A un conjunto de números reales no minorado y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Consideremos el conjunto no mayorado $B = \{-x : x \in A\}$ y la función $g : B \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(-x)$, para todo $x \in B$. Entonces, para cualquier $L \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \iff \lim_{x \to +\infty} g(x) = L$$

Para comprobar esta equivalencia, basta observar que las sucesiones de puntos de A que divergen negativamente son exactamente las sucesiones de la forma $\{-x_n\}$ donde $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de B que diverge positivamente, y decir que $\{f(-x_n)\} \to L$ es tanto como decir que $\{g(x_n)\} \to L$. Obsérvese que, teniendo en cuenta la definición de g, la equivalencia probada puede escribirse de forma intuitivamente muy clara: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = L$. ■

En realidad el límite en $+\infty$ de una función, y por tanto también el límite en $-\infty$, pueden reducirse al estudio del límite ordinario en 0 de otra función. Los detalles son como sigue:

- *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no mayorado y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Consideremos el conjunto $B = \{1/x : x \in A \cap \mathbb{R}^+\}$ y la función $h : B \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(1/x)$ para todo $x \in B$. Entonces $0 \in B'$ y para $L \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \lim_{x \to 0} h(x) = L$$

La demostración no ofrece dificultad. Tomamos una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A que diverja positivamente y $m \in \mathbb{N}$ de forma que para $n \geqslant m$ se tenga $x_n \neq 0$. Entonces $\{y_n\} = \{1/x_{m+n}\}$ es una sucesión de puntos de B que converge a cero. Esto prueba que $0 \in B'$, pero además, suponiendo que $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = L$, tendremos $\{h(y_n)\} \to L$, es decir, $\{f(x_{m+n})\} \to L$, con lo que $\{f(x_n)\} \to L$ y hemos probado que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$. Finalmente, para la implicación hacia la derecha, si $\{y_n\} \to 0$ con $y_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es claro que $\{1/y_n\} \to +\infty$ con $1/y_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{f(1/y_n)\} \to L$ es decir, $\{h(y_n)\} \to L$. ■

Nótese que la forma de definir el conjunto B, más concretamente el hecho de que $B \subset \mathbb{R}^+$, ha jugado un papel clave en la demostración anterior. Si queremos escribir la equivalencia recién probada omitiendo la función h para que sólo aparezca f, debemos hacerlo como sigue

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \lim_{x \to 0+} f(1/x) = L$$

En cierto modo, el límite en $+\infty$ debe entenderse como un límite "lateral".

Queda claro en cualquier caso que los resultados sobre el límite de una función en un punto pueden aplicarse a los límites en el infinito, prestando atención al cambio de función requerido. Por ejemplo, usando esta idea, junto con la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ del límite en un punto, se consigue una caracterización análoga para el límite en el infinito. El enunciado es el que sigue y se puede probar también usando directamente la definición de límite en $+\infty$.

- *Sea A un conjunto no mayorado de números reales, $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $L \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$
  - (ii) *Si $\{x_n\}$ es una sucesión creciente y no mayorada de elementos de A, entonces $\{f(x_n)\} \to L$*
  - (iii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{R} : x \in A,\, x > K \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon$

Veamos finalmente cómo el carácter local del límite de una función tiene también su versión para límites en el infinito. La demostración del siguiente hecho es inmediata:

- *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no mayorado y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Sea $\rho > 0$ arbitrario y consideremos el conjunto $B = \{x \in A : x > \rho\}$. Entonces, para cualquier $L \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \lim_{x \to +\infty} f|_B(x) = L$$

2.6. Funciones divergentes en un punto

Del mismo modo que hemos estudiado las sucesiones divergentes, podemos ahora analizar la divergencia para funciones reales de variable real. Haremos primero este análisis en un punto de la recta real, para pasar después al caso de $+\infty$ o $-\infty$.

Diremos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ *diverge positivamente en un punto* $\alpha \in A'$ cuando, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A distintos de α, con $\{x_n\} \to \alpha$, se tenga que $\{f(x_n)\} \to +\infty$. Podemos decir también que f *tiende a* $+\infty$ en el punto α y escribimos: $f(x) \to +\infty \ (x \to \alpha)$.

Diremos que f *diverge negativamente en el punto* α, o que f *tiende a* $-\infty$ *en* α, cuando la función $-f$ diverja positivamente en α, en cuyo caso escribimos: $f(x) \to -\infty \ (x \to \alpha)$.

Finalmente, diremos que f *diverge en el punto* α cuando la función $|f|$ diverja positivamente en α, en cuyo caso escribimos lógicamente $|f(x)| \to +\infty \ (x \to \alpha)$.

Cabe hacer aquí comentarios similares a los que hicimos para sucesiones, la divergencia de una función en un punto es incompatible con la existencia de límite en dicho punto. No se debe decir que una función tiene límite $+\infty$ en un punto, ni usar notaciones como $\lim_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$.

La divergencia, de cualquier tipo, de una función en un punto, admite dos reformulaciones equivalentes, en clara analogía con la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ del límite funcional. Damos el enunciado para la divergencia positiva, a la que se reducen las otras dos. La demostración a estas alturas debería ser un ejercicio bien sencillo.

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y $\alpha \in A'$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) $f(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha)$
  - (ii) *Si $\{x_n\}$ es una sucesión monótona de puntos de A distintos de α, con $\{x_n\} \to \alpha$, entonces $\{f(x_n)\} \to +\infty$*
  - (iii) $\forall K \in \mathbb{R} \ \ \exists \delta > 0 : x \in A, \ \ 0 < |x - \alpha| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) > K$

Finalmente, también es claro que cualquier tipo de divergencia de una función en un punto es una propiedad local. Para una función $f : A \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in A'$, podemos fijar $r > 0$ arbitrario y considerar el conjunto $B = \{x \in A : |x - \alpha| < r\}$. Entonces f diverge positivamente, diverge negativamente o simplemente diverge en el punto α si, y sólo si, lo mismo le ocurre a $f|_B$.

2.7. Divergencia lateral

En paralelismo con las nociones de límite lateral podemos considerar la posibilidad de que una función diverja al aproximarnos a un punto de la recta real, por la izquierda o por la derecha. De nuevo las definiciones se adivinan fácilmente.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real, sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y consideremos los conjuntos definidos por $A_\alpha^- = \{x \in A : x < \alpha\}$, $A_\alpha^+ = \{x \in A : x > \alpha\}$. Suponiendo $\alpha \in (A_\alpha^-)'$, diremos que f *diverge positivamente por la izquierda* en el punto α cuando para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A verificando que $x_n < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to \alpha$, se tenga que $\{f(x_n)\} \to +\infty$. En tal caso decimos también que f *tiende a $+\infty$ por la izquierda* en el punto α y escribimos $f(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha-)$. Se comprueba fácilmente que la definición anterior no cambia si se exige que la sucesión $\{x_n\}$ sea creciente, así como la siguiente caracterización:

$$f(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha+) \iff \left[\forall K \in \mathbb{R} \ \ \exists \delta > 0 : x \in A, \ \ \alpha - \delta < \alpha < \delta \ \Rightarrow \ f(x) > K\right]$$

Cuando $-f(x) \to +\infty \ \ (x \to \alpha-)$ decimos que f *diverge negativamente por la izquierda* en el punto α o *tiende a $-\infty$ por la izquierda* en el punto α y escribimos $f(x) \to -\infty \ \ (x \to \alpha-)$. Finalmente, si $|f(x)| \to +\infty \ \ (x \to \alpha-)$ decimos que f *diverge por la izquierda* en el punto α.

Suponiendo que $\alpha \in (A_\alpha^+)'$, podemos definir análogamente las tres nociones de *divergencia por la derecha* de la función f en el punto α. Para ello se usan lógicamente sucesiones $\{x_n\}$ de puntos de A_α^+ que converjan a α o, si se quiere, sólo sucesiones decrecientes.

Como ocurría con los límites laterales, cada tipo de *divergencia lateral* de una función $f : A \to \mathbb{R}$ en un punto $\alpha \in A'$, equivale a la divergencia (ordinaria) en α, del mismo tipo, para una conveniente restricción de la función, concretamente la restricción a A_α^- cuando estamos trabajando con divergencias por la izquierda o a A_α^+ cuando trabajamos por la derecha.

Finalmente, la relación entre divergencia en un punto y divergencia lateral para la misma función, sigue un esquema análogo al que vimos en su momento para la relación entre límite ordinario y límites laterales. Lo enunciamos con detalle para la divergencia positiva y omitimos la demostración, que no encierra dificultad alguna.

- *Sean* $f : A \to \mathbb{R}$ *y* $\alpha \in A'$.
  (a) *Si* $\alpha \in (A_\alpha^-)'$ *pero* $\alpha \notin (A_\alpha^+)'$, *entonces*
  $$f(x) \to +\infty \;\; (x \to \alpha) \iff f(x) \to +\infty \;\; (x \to \alpha-)$$
  (b) *Si* $\alpha \in (A_\alpha^+)'$ *pero* $\alpha \notin (A_\alpha^-)'$, *entonces*
  $$f(x) \to +\infty \;\; (x \to \alpha) \iff f(x) \to +\infty \;\; (x \to \alpha+)$$
  (c) *Finalmente, si* $\alpha \in (A_\alpha^+)' \cap (A_\alpha^+)'$, *entonces*
  $$f(x) \to +\infty \;\; (x \to \alpha) \iff \begin{cases} f(x) \to +\infty \;\; (x \to \alpha-) \quad \text{y} \\ f(x) \to +\infty \;\; (x \to \alpha+) \end{cases}$$

Naturalmente, podemos sustituir $+\infty$ por $-\infty$ en todas la afirmaciones anteriores, obteniendo la relación entre divergencia negativa ordinaria y las laterales que tengan sentido, pero es tanto como aplicar el resultado anterior a la función $-f$.

Igualmente aplicando el último resultado a la función $|f|$ relacionamos la divergencia de f con las laterales. Merece la pena comentar que en el caso más interesante, $\alpha \in (A_\alpha^+)' \cap (A_\alpha^+)'$, puede ocurrir que que $f(x) \to +\infty \;\; (x \to \alpha-)$ y $f(x) \to -\infty \;\; (x \to \alpha+)$. Entonces f diverge en el punto α, es decir, $|f(x)| \to +\infty \;\; (x \to \alpha)$, pero f no diverge positivamente ni negativamente en el punto α.

Para ver un ejemplo concreto, consideremos la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Observamos claramente que $1/x \to +\infty \;\; (x \to 0+)$ y $1/x \to -\infty \;\; (x \to 0-)$, así que f diverge en el origen pero no lo hace ni positiva ni negativamente.

2.8. Divergencia en el infinito

Para completar todo el esquema que hemos venido desarrollando, discutimos brevemente la divergencia de una función en $+\infty$ o en $-\infty$.

Si $A \subset \mathbb{R}$ no está mayorado, una función $f : A \to \mathbb{R}$ *diverge positivamente en* $+\infty$ cuando, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A que tienda a $+\infty$, se tiene también que $\{f(x_n)\} \to +\infty$. En tal caso escribimos $f(x) \to +\infty \;\; (x \to +\infty)$. Si $-f$ diverge positivamente en $+\infty$ decimos que f *diverge negativamente en* $+\infty$ y escribimos $f(x) \to -\infty \;\; (x \to +\infty)$. Finalmente, cuando $|f(x)| \to +\infty \;\; (x \to +\infty)$ decimos que f *diverge en* $+\infty$.

La divergencia en $-\infty$ se define análogamente. Para un conjunto no minorado $A \subset \mathbb{R}$, una función $f : A \to \mathbb{R}$ *diverge positivamente en* $-\infty$ cuando, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A que tienda a $-\infty$, se tiene que $\{f(x_n)\} \to +\infty$, y escribimos $f(x) \to +\infty \;\; (x \to -\infty)$. Si $-f$ diverge positivamente en $-\infty$ decimos que f *diverge negativamente en* $-\infty$ y escribimos $f(x) \to -\infty \;\; (x \to -\infty)$. Finalmente, cuando $|f(x)| \to +\infty \;\; (x \to +\infty)$ decimos que f *diverge en* $+\infty$.

Como ocurría con los límites en el infinito, la divergencia en $-\infty$ se reduce a la divergencia en $+\infty$ mediante el apropiado cambio de función.

- *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no minorado y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Consideremos el conjunto no mayorado $B = \{-x : x \in A\}$ y la función $g : B \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(-x)$ para todo $x \in B$. Entonces, cada tipo de divergencia de f en $-\infty$ equivale al mismo tipo de divergencia de g en $+\infty$.*

El resultado anterior puede expresarse de la siguiente forma, que resulta más intuitiva:

$$\begin{aligned} f(x) \to +\infty \ \ (x \to -\infty) &\iff f(-x) \to +\infty \ \ (x \to +\infty) \\ f(x) \to -\infty \ \ (x \to -\infty) &\iff f(-x) \to -\infty \ \ (x \to +\infty) \\ |f(x)| \to +\infty \ \ (x \to -\infty) &\iff |f(-x)| \to +\infty \ \ (x \to +\infty) \end{aligned}$$

La divergencia en $+\infty$, y por tanto también en $-\infty$, puede reducirse a la divergencia en un punto de la recta real:

- *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no mayorado y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Consideremos el conjunto $B = \{1/x : x \in A \cap \mathbb{R}^+\}$, que verifica $0 \in B'$, y sea $g : B \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = f(1/x)$ para todo $x \in B$. Entonces, cada tipo de divergencia de f en $+\infty$ equivale al mismo tipo de divergencia de g en 0.*

De forma más intuitiva, pero sin olvidar que la inclusión $B \subset \mathbb{R}^+$ juega un papel esencial, podemos escribir

$$\begin{aligned} f(x) \to +\infty \ \ (x \to +\infty) &\iff f(1/x) \to +\infty \ \ (x \to 0+) \\ f(x) \to -\infty \ \ (x \to +\infty) &\iff f(1/x) \to -\infty \ \ (x \to 0+) \\ |f(x)| \to +\infty \ \ (x \to +\infty) &\iff |f(1/x)| \to +\infty \ \ (x \to 0+) \end{aligned}$$

De cualquier forma que se exprese, queda claro que la divergencia de una función en $+\infty$ o en $-\infty$ puede verse como la divergencia en 0 de otra función. Esta idea puede usarse por ejemplo, para obtener caracterizaciones de la divergencia en $+\infty$ o en $-\infty$ mediante sucesiones monótonas, o sin usar sucesiones. Enunciamos una caracterización de este tipo que también puede probarse directamente:

- *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no mayorado y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) $f(x) \to +\infty \ \ (x \to +\infty)$
  - (ii) *Para toda sucesión creciente y no mayorada $\{x_n\}$ de puntos de A, se tiene que $\{f(x_n)\} \to +\infty$*
  - (iii) $\forall K \in \mathbb{R} \ \exists M \in \mathbb{R} : x \in A\,, \ x > M \ \Rightarrow \ f(x) > K$

En general, toda la discusión desarrollada en este tema adolece claramente de una ausencia de ejemplos ilustrativos de las diferentes situaciones que se han ido analizando. El próximo tema se dedica específicamente a rellenar esa laguna.