# Tema 11

# Integración

El concepto de integral se remonta a los orígenes del Cálculo Infinitesimal, cuando Newton y Leibniz descubren que el problema del cálculo de áreas puede abordarse mediante la operación inversa de la derivación, el cálculo de primitivas, consistente en obtener una función a partir de su derivada. De esta forma, dos problemas geométricos clásicos, el cálculo de la recta tangente a una curva y el cálculo de áreas, pueden verse cada uno como inverso del otro.

La primera definición rigurosa de integral, sin basarse en la resbaladiza idea de infinitésimo, se debe a Cauchy, y es exactamente la que aquí vamos a estudiar, limitándonos a considerar la integral de una función continua en un intervalo cerrado y acotado, aunque Cauchy consideraba casos algo más generales. Durante todo el siglo XIX se estudiaron diversas generalizaciones de la integral definida por Cauchy, sin llegar a una teoría de la integración que pudiera considerarse acabada.

En 1902, el matemático francés H. Lebesgue (1875-1941) hizo ver, con su tesis doctoral, que los métodos usados hasta entonces no eran los más adecuados, e interpretando de otra forma las ideas de Leibniz, consiguió un concepto de integral mucho más general y efectivo que cualquiera de los anteriores, dando lugar a una teoría de la integración plenamente satisfactoria. Sentó así las bases para el desarrollo del Análisis Matemático, y de otras muchas disciplinas, a todo lo largo del siglo XX.

Para estudiar la integral de Cauchy, necesitamos la noción de *continuidad uniforme*, que discutiremos previamente. En realidad Cauchy no distinguía entre continuidad y continuidad uniforme, sin que ello le condujera a error, por razones que enseguida entenderemos. Aclarada la idea de continuidad uniforme, podremos definir cómodamente la integral de una función continua en un intervalo cerrado y acotado, deduciendo fácilmente sus propiedades básicas. Como principal resultado de este tema probaremos el *Teorema Fundamental del Cálculo*, cuyo nombre da ya idea de su importancia. Establece precisamente la relación entre los conceptos de derivada y de integral.

## 11.1. Continuidad uniforme

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y supongamos que $f$ es continua en $A$. Usando la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de la continuidad, tenemos:

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; : \; y \in A, \; |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon \tag{1}$$

Ni que decir tiene, $\delta$ depende de $\varepsilon$, pero también del punto $x \in A$ considerado. Fijado $\varepsilon > 0$, unos puntos de $A$ pueden obligarnos a tomar $\delta$ mucho más pequeño que otros dependiendo, dicho intuitivamente, de la rapidez con que varía la función $f$ cerca del punto que consideremos. Pues bien, cuando podamos conseguir que un mismo $\delta$, que dependerá sólo de $\varepsilon$, sirva para todos los puntos del conjunto $A$, diremos que la función $f$ es uniformemente continua en $A$.

Así pues una función $f : A \to \mathbb{R}$ es *uniformemente continua* en $A$ cuando verifica:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; : \; x, y \in A, \; |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon \tag{2}$$

Obsérvese la sutil diferencia entre (1) y (2): como ya hemos explicado, en (1) permitimos que $\delta$ dependa de $x$ y de $\varepsilon$, mientras que en (2) sólo puede depender de $\varepsilon$. Por supuesto, si $f$ es uniformemente continua en $A$, podemos asegurar que $f$ es continua en $A$, pero vemos enseguida que el recíproco no es cierto, con un contraejemplo nada rebuscado.

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Si lo fuese, usando (2) con $\varepsilon = 1$, existiría $\delta > 0$ verificando que

$$x, y \in \mathbb{R}, \; |y - x| < \delta \implies |y^2 - x^2| < 1$$

pero esto no es posible, pues para todo $n \in \mathbb{N}$, tomando $x = n$, $y = n + (\delta/2)$, obtendríamos que $n\delta + (\delta^2/4) < 1$, flagrante contradicción. Puesto que la función identidad es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, vemos que el producto de dos funciones uniformemente continuas puede no serlo.

El razonamiento usado en el ejemplo anterior nos da la pista para caracterizar la continuidad uniforme mediante sucesiones:

- *Para una función real de variable real $f : A \to \mathbb{R}$, equivalen las siguientes afirmaciones:*
  - $(i)$ *$f$ es uniformemente continua en $A$.*
  - $(ii)$ *Si $\{y_n\}$ y $\{x_n\}$ son sucesiones de puntos de $A$ tales que $\{y_n - x_n\} \to 0$, entonces $\{f(y_n) - f(x_n)\} \to 0$.*

$(i) \Rightarrow (ii)$. Esta implicación es bastante evidente. Sean $\{y_n\}$ y $\{x_n\}$ sucesiones de puntos de $A$ tales que $\{y_n - x_n\} \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$, la continuidad uniforme nos proporciona un $\delta > 0$ tal que, para $x, y \in A$ con $|y - x| < \delta$, se tiene $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Existirá entonces $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tenga $|y_n - x_n| < \delta$, luego $|f(y_n) - f(x_n)| < \varepsilon$. Así pues, $\{f(y_n) - f(x_n)\} \to 0$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Supongamos que $f$ no es uniformemente continua en $A$ para probar que no se verifica $(ii)$. Existe entonces un $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para cada $\delta > 0$ pueden encontrarse puntos $x, y \in A$ con $|y - x| < \delta$ pero $|f(y) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ usamos lo anterior con $\delta = 1/n$, obtenemos dos sucesiones $\{y_n\}$ y $\{x_n\}$ de puntos de $A$ que verifican $|y_n - x_n| < 1/n$ y $|f(y_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Es evidente que $\{y_n - x_n\} \to 0$ pero $\{f(y_n) - f(x_n)\}$ no converge a cero, luego no se verifica $(ii)$. ■

## 11.2. Funciones lipschitzianas

Veamos ahora una propiedad que claramente implica la continuidad uniforme. Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es *lipschitziana* cuando existe una constante $M \geqslant 0$ verificando que:

$$|f(y) - f(x)| \leqslant M\,|y - x| \quad \forall x, y \in A \tag{3}$$

Claramente, existe una mínima constante $M_0 \geqslant 0$ que verifica la desigualdad anterior,

$$M_0 = \sup \left\{ \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} : x, y \in A\,, \;\; x \neq y \right\}$$

y se dice que $M_0$ es la *constante de Lipschitz* de $f$, que toma su nombre del matemático alemán R. Lipschitz (1832-1903).

De la desigualdad $(3)$, sin necesidad de que $M$ sea exactamente la constante de Lipschitz, deducimos que basta tomar $\delta = \varepsilon / M$ para conseguir $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, siempre que $x, y \in A$ verifiquen $|y - x| < \delta$. Tenemos por tanto:

- *Toda función lipschitziana es uniformemente continua.*

El Teorema del Valor Medio nos proporciona un criterio bien sencillo para dilucidar si una función derivable en un intervalo es lipschitziana o no, basta ver si la función derivada está o no acotada:

- *Sea $I$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en $I$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  $(i)$ *$f$ es lipschitziana.*
  $(ii)$ *$f'$ está acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$.*

  *Caso de que se verifiquen $(i)$ y $(ii)$, la constante de Lipschitz de $f$ viene dada por*

$$M_0 = \sup\{|f'(x)| \,:\, x \in I\} \tag{4}$$

$(i) \Rightarrow (ii)$. Si $M_0$ es la constante de Lipschitz de $f$, tenemos

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leqslant M_0 \quad \forall x \in I\,, \;\; \forall y \in I \setminus \{x\}$$

de donde deducimos claramente que $|f'(x)| \leqslant M_0$ para todo $x \in I$. Por tanto $f'$ está acotada y, con vistas a (4), tenemos ya una desigualdad: $\sup\{|f'(x)| \,:\, x \in I\} \leqslant M_0$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Pongamos $M = \sup\{|f'(x)| \,:\, x \in I\}$. Dados $x, y \in I$, el Teorema del Valor Medio nos proporciona un punto $c \in I$ que nos permite escribir

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)|\,|y - x| \leqslant M\,|y - x|$$

Esto prueba que $f$ es lipschitziana con constante de Lipschitz $M_0 \leqslant M$, la otra desigualdad que necesitábamos para probar $(4)$. ■

Como casos particulares tenemos, por ejemplo:

- *Las funciones seno, coseno y arco tangente son lipschitzianas con constante de Lipschitz* $1$ *y, por tanto, son uniformemente continuas en* $\mathbb{R}$.

En general, adivinamos una forma fácil de asegurarse la acotación de la derivada, basta suponer que la derivada es continua y trabajar en un intervalo cerrado y acotado, para poder aplicar el Teorema de Weierstrass:

- *Toda función de clase* $C^1$ *en un intervalo cerrado y acotado es lipschitziana en dicho intervalo.*

Para concluir esta breve discusión de las funciones lipschitzianas, vemos un ejemplo de una función uniformemente continua que no es lipschitziana.

- *La función raíz cuadrada es uniformemente continua, pero no lipschitziana, en* $\mathbb{R}_0^+$.

Para probar la continuidad uniforme, tomamos $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ y, suponiendo por ejemplo que $x < y$, tenemos

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| = \frac{y-x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \leqslant \frac{y-x}{\sqrt{y-x}} = \sqrt{|y-x|}$$

Luego para que sea $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| < \varepsilon$, basta que se tenga $|y-x| < \varepsilon^2$. Por otra parte la función raíz cuadrada es derivable en $\mathbb{R}^+$ pero su derivada no está acotada, luego no es lipschitziana en $\mathbb{R}^+$, menos aún en $\mathbb{R}_0^+$. ■

## 11.3. Teorema de Heine

Hemos visto anteriormente que una función de clase $C^1$ en un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua en dicho intervalo. Pero tenemos un resultado mucho mejor:

**Teorema.** *Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua en dicho intervalo.*

**Demostración.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, y supongamos que $f$ no es uniformemente continua, para llegar a una contradicción. Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para cada $\delta > 0$ podemos encontrar $x, y \in [a,b]$ verificando que $|y-x| < \delta$ pero $|f(y) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$. Como ya hemos hecho anteriormente, tomamos $\delta = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$ para encontrar dos sucesiones $\{y_n\}$ y $\{x_n\}$ de puntos de $[a,b]$ tales que $|y_n - x_n| < 1/n$ y $|f(y_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, $\{y_n\}$ admite una sucesión parcial $\{y_{\sigma(n)}\}$ que converge a un punto $x \in [a,b]$. Puesto que $\{y_n - x_n\} \to 0$, tenemos también que $\{y_{\sigma(n)} - x_{\sigma(n)}\} \to 0$, luego $\{x_{\sigma(n)}\} \to x$. Aplicando que $f$ es continua en el punto $x$ obtenemos $\{f(y_{\sigma(n)})\} \to f(x)$ y también $\{f(x_{\sigma(n)})\} \to f(x)$, luego $\{f(y_{\sigma(n)}) - f(x_{\sigma(n)})\} \to 0$. Esto es una contradicción, ya que $|f(y_{\sigma(n)}) - f(x_{\sigma(n)})| \geqslant \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Queda ahora claro porqué Cauchy no se equivocaba al no distinguir entre continuidad y continuidad uniforme: trabajaba con funciones definidas en intervalos cerrados y acotados, para las que la continuidad y la continuidad uniforme son propiedades equivalentes. La distinción clara entre ambas propiedades, así como el teorema anterior, que se atribuye al matemático alemán H. Heine (1821-1881), son posteriores al trabajo de Cauchy.

## 11.4. Breve reseña histórica

Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f$ una función continua en $[a,b]$. Para explicar la forma en que Leibniz entendía la integral, supongamos para simplificar que $f$ no toma valores negativos y pensemos cómo calcular el área limitada por el eje de abscisas, la gráfica de la función $f$ y las rectas verticales de ecuaciones $x = a$ y $x = b$. Buscamos pues el área del conjunto

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

que será la interpretación geométrica de la integral de $f$.

Leibniz consideraba, para cada punto $x \in [a,b]$ un intervalo de longitud “infinitesimal” $dx$, de forma que entre $x$ y $x + dx$ puede admitirse que la función $f$ se mantiene constantemente igual a $f(x)$. Por tanto, el infinitésimo $f(x)dx$ es el área de un rectángulo, precisamente la parte del conjunto $T$ contenido entre las rectas verticales de abscisas $x$ y $x+dx$. “Sumando” las áreas de todos los rectángulos que se obtienen cuando $x$ recorre el intervalo $[a,b]$, debemos obtener el área del conjunto $T$, de modo que Leibniz entendía la integral como una “suma infinita de infinitésimos”. En su tiempo se usaba la letra $S$ en lugar de la actual $\Sigma$ para representar una suma, de modo que para indicar que su integral era una suma bastante peculiar, Leibniz propone alargar la $S$ y denotar su integral por $\int_a^b f(x)dx$, que es la notación que hoy seguimos usando.

Nos preguntamos entonces cual es la relación entre la integral así entendida y el concepto de derivada. Supongamos que disponemos de una *primitiva* de $f$, es decir, que $f$ es la derivada de otra función $F$. Con la notación de Leibniz, escribiríamos $f(x)dx = dF(x) = F(x+dx) - F(x)$. Entonces, al sumar todos estos infinitésimos, como si de una suma finita se tratara, podemos pensar que las diferencias consecutivas se van cancelando y la suma resulta ser

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Esta fórmula básica del cálculo integral permite calcular áreas con sorprendente facilidad. También la conocía Newton, que la justificaba con argumentos no menos esotéricos y la atribuía a su maestro I. Barrow (1630-1677), por lo que suele conocerse como *regla de Barrow.*

Es fácil ahora adivinar el método usado por Cauchy para formalizar rigurosamente las ideas de Newton y Leibniz: igual que con la derivada, sustituir los infinitésimos por cantidades reales que se hacen tender a cero, de forma que la integral se obtiene, no como una misteriosa suma de infinitos infinitésimos sino como límite de sumas finitas de números reales.

Para entender toda la discusión que sigue, aunque no podemos basarnos en una noción de área de la que no disponemos, conviene tener presente la interpretación intuitiva de la integral como un área, con una salvedad: permitimos que nuestra función tome valores negativos y entendemos que las áreas de regiones situadas por debajo del eje de abscisas son negativas y pueden compensarse con las áreas positivas de regiones situadas en el semiplano superior.

## 11.5. Definición de integral

En todo lo que sigue, fijamos $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Nuestro objetivo es definir la integral de $f$, un número real que responda a nuestra idea intuitiva de área, explicada anteriormente.

Tomemos una partición $P \in \mathcal{F}[a,b]$, que recordamos es un subconjunto finito de $[a,b]$ con $a,b \in P$, cuyos elementos numeramos siempre de menor a mayor:

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\} \tag{5}$$

Tenemos claramente una estimación por defecto y otra por exceso del área en la que estamos pensando:

$$\begin{aligned} I(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} \big(\text{mín}\, f([t_{k-1},t_k])\big)\,(t_k - t_{k-1}) \\ S(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} \big(\text{máx}\, f([t_{k-1},t_k])\big)\,(t_k - t_{k-1}) \end{aligned}$$

Decimos que $I(f,P)$ es la *suma inferior* y $S(f,P)$ la *suma superior* de $f$ para la partición $P$.

También podemos, para $k = 1,2,\ldots,n$, elegir un punto $x_k \in [t_{k-1},t_k]$ y considerar la suma

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,(t_k - t_{k-1})$$

Decimos que $\alpha$ es *una suma integral* de $f$ con respecto a la partición $P$. Observamos que las sumas superior e inferior son sumas integrales determinadas de manera única, de hecho son respectivamente la máxima y la mínima sumas integrales, pues evidentemente se tiene

$$I(f,P) \leqslant \alpha \leqslant S(f,P)$$

para cualquier suma integral $\alpha$.

Como ya se ha dicho, el área que buscamos debe mayorar a todas las sumas inferiores y minorar a todas las sumas superiores que se obtienen al variar la partición $P$. Procede ver lo que ocurre al cambiar la partición, empezando por añadirle un solo punto.

Sean pues $P$ una partición del intervalo $[a,b]$ dada por (5), $c \in ]a,b[ \setminus P$ y $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ tal que $t_{k-1} < c < t_k$. Al pasar de $P$ a $P' = P \cup \{c\}$, todos los sumandos de $I(f,P)$ o $S(f,P)$ se mantienen salvo el $k$-ésimo, que se sustituye por la suma de dos, con lo que tenemos:

$$\begin{aligned} I(f,P') - I(f,P) &= \big(\text{mín}\, f([t_{k-1},c])\big)\,(c - t_{k-1}) + \big(\text{mín}\, f([c,t_k])\big)\,(t_k - c) \\ &\quad - \big(\text{mín}\, f[t_{k-1},t_k]\big)\,(t_k - t_{k-1}) \\ &\geqslant \big(\text{mín}\, f[t_{k-1},t_k]\big)\,\big[(c - t_{k-1}) + (t_k - c) - (t_k - t_{k-1})\big] = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $I(f,P) \leqslant I(f,P')$ y análogamente comprobaríamos que $S(f,P) \geqslant S(f,P')$. Así que la suma inferior no disminuye, y la superior no aumenta, al añadir un punto a la partición considerada. El siguiente paso es una obvia inducción: lo mismo ocurrirá al añadir un conjunto finito de puntos. Para $P, P' \in \mathcal{F}[a,b]$ tenemos por tanto:

$$P \subset P' \implies I(f,P) \leqslant I(f,P') \leqslant S(f,P') \leqslant S(f,P)$$

Si ahora tomamos dos particiones cualesquiera $P_1, P_2 \in \mathcal{F}[a,b]$ tendremos:

$$I(f,P_1) \leqslant I(f,P_1 \cup P_2) \leqslant S(f,P_1 \cup P_2) \leqslant S(f,P_2)$$

así que toda suma inferior es menor o igual que cualquier suma superior. Nos vamos acercando a nuestro objetivo, pues el axioma del continuo ya nos asegura la existencia de números reales que cumplen lo esperado para el área que buscamos. De forma más precisa, tenemos:

$$\sup\left\{I(f,P) : P \in \mathcal{F}[a,b]\right\} \leqslant \inf\left\{S(f,P) : P \in \mathcal{F}[a,b]\right\} \tag{6}$$

Pero, a poco que se piense, esta desigualdad no es suficiente, necesitamos la igualdad para que el número real que buscamos esté determinado de manera única.

Merece la pena detenerse un momento a observar que en realidad, en los razonamientos anteriores no se ha usado la continuidad de $f$. Ciertamente hemos usado máximos y mínimos de $f$ en diferentes intervalos, pero todo el razonamiento se mantiene si los sustituimos por los correspondientes supremos e ínfimos, suponiendo solamente que $f$ está acotada en $[a,b]$. Se obtiene pues la desigualdad (6) pero no se puede asegurar que se dé la igualdad, de modo que podríamos decir que la función $f$ es *integrable* cuando se tenga dicha igualdad. El problema es que haciendo eso, habría funciones muy sencillas que no serían integrables y, lo que es más importante, se tendría una teoría de la integración muy poco satisfactoria, como se fue comprobando a lo largo del siglo XIX, hasta que Lebesgue dio con un planteamiento mucho más efectivo. Aquí nos limitaremos a probar que cuando $f$ es continua, (6) es una igualdad, y a trabajar con la integral que así se obtiene.

Volvemos pues a suponer que $f$ es continua en $[a,b]$. La idea es probar que, tomando una partición suficientemente "fina", podemos conseguir que la diferencia entre las sumas superior e inferior sea tan pequeña como se quiera, lo que claramente implica que (6) es una igualdad. Llamaremos *anchura* de la partición $P$ dada por (5) al número positivo definido por

$$\Delta P = \max\{t_k - t_{k-1} : k = 1,2,\ldots,n\}$$

e intuitivamente, la partición será tanto más "fina" cuanto más pequeña sea su anchura.

Dado $\varepsilon > 0$, por ser $f$ uniformemente continua en $[a,b]$ (Teorema de Heine), existe $\delta > 0$ tal que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/(b-a)$ para $x,y \in [a,b]$ con $|y-x| < \delta$. Supongamos entonces que la partición $P$ verifica que $\Delta P < \delta$ y, para $k = 1,2,\ldots,n$, sean $x_k, y_k \in [t_{k-1}, t_k]$ tales que $f(x_k) = \min f([t_{k-1},t_k])$ y $f(y_k) = \max f([t_{k-1},t_k])$. Tenemos entonces

$$|y_k - x_k| \leqslant t_k - t_{k-1} \leqslant \Delta P < \delta, \quad \text{luego} \quad f(y_k) - f(x_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Deducimos inmediatamente que

$$S(f,P) - I(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \big(f(y_k) - f(x_k)\big)(t_k - t_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = \varepsilon$$

y hemos demostrado lo siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ P \in \mathcal{F}[a,b], \ \Delta P < \delta \implies S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon \tag{7}$$

Para deducir que se da la igualdad en (6) sólo queda asegurarse de que existen particiones con anchura arbitrariamente pequeña, lo cual es bien obvio, podemos por ejemplo subdividir el intervalo $[a,b]$ en un número suficiente de intervalos de igual longitud. Más concretamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, la partición $P_n$ dada por

$$P_n = \{\, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b \} \qquad \text{con} \qquad t_k = a + \frac{k(b-a)}{n} \quad \text{para } k = 0,1,\ldots,n \tag{8}$$

verifica evidentemente que $\Delta P_n = (b-a)/n$.

Sea pues $\{P_n\}$ cualquier sucesión de particiones de $[a,b]$ que, como la que acabamos de presentar, verifique $\{\Delta P_n\} \to 0$. Para cada $\varepsilon > 0$ tenemos $\delta > 0$ dado por (7), y encontramos $m \in \mathbb{N}$ de forma que para $n \geqslant m$ se tenga $\Delta P_n < \delta$, y por tanto, $S(f,P_n) - I(f,P_n) < \varepsilon$. Esto prueba que $\{S(f,P_n) - I(f,P_n)\} \to 0$. Puesto que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos también

$$\text{ínf}\{S(f,P) : P \in \mathcal{F}[a,b]\} - \sup\{I(f,P) : P \in \mathcal{F}[a,b]\} \leqslant S(f,P_n) - I(f,P_n)$$

el primer miembro de esta desigualdad se anula y tenemos la tan deseada igualdad.

**Definición.** *Si $f$ es una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, la integral de $f$ en dicho intervalo es, por definición, el número real dado por*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup\{I(f,P) : P \in \mathcal{F}[a,b]\} = \text{ínf}\{S(f,P) : P \in \mathcal{F}[a,b]\}$$

Para obtener descripciones más cómodas de la integral que las dadas por esta definición, volvamos a nuestra sucesión $\{P_n\}$ de particiones que verifique $\{\Delta P_n\} \to 0$. Entonces

$$I(f,P_n) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant S(f,P_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

y sabemos que $\{S(f,P_n) - I(f,P_n)\} \to 0$, luego deducimos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n)$$

Estas expresiones de la integral como un límite pueden ser más cómodas que la definición como un supremo o un ínfimo, máxime teniendo en cuenta la libertad para elegir la sucesión $\{P_n\}$, sin más restricción que $\{\Delta P_n\} \to 0$. Sin embargo, las sumas superiores e inferiores todavía involucran cálculos de valores máximos y mínimos de la función en numerosos intervalos, de modo que conviene hacer algo aún mejor. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos una suma integral $\alpha_n$ de la función $f$ para la partición $P_n$, tenemos

$$I(f,P_n) \leqslant \alpha_n \leqslant S(f,P_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde deducimos que la sucesión $\{\alpha_n\}$ también converge a la integral, cualquiera que haya sido la forma de elegir las sumas integrales. Podemos pues hacer el siguiente enunciado, que da ya una cómoda descripción de la integral.

- *Sea $f$ una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, sea $\{P_n\}$ una sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que $\{\Delta P_n\} \to 0$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\alpha_n$ cualquier suma integral de $f$ para la partición $P_n$. Entonces:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$$

Tenemos así la integral expresada como límite de sumas integrales en las que sólo aparecen los valores de la función en ciertos puntos del intervalo, que además se pueden elegir con bastante libertad. Por ejemplo, usando la sucesión de particiones definida en $(8)$ tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

Merece la pena un breve comentario sobre la notación que usamos para la integral. Aparte de respetar el simbolismo de Leibniz, permite referirse de forma rápida a la integral de una función sin detenerse a definirla por separado, pues indica el valor de dicha función en un punto genérico $x \in [a,b]$. Por ejemplo, podemos escribir $\int_0^1 x^2 dx$ para referirnos a la integral en el intervalo $[0,1]$ de la función definida por $f(x) = x^2$ para todo $x \in [0,1]$. En ocasiones, incluso debemos adivinar el valor de la función que se integra en algún punto $x \in [a,b]$ para el que la expresión $f(x)$ no tiene en principio sentido, quedando dicho valor determinado por el requerimiento de que $f$ sea continua. Por ejemplo, podemos escribir

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

para referirnos a la integral en el intervalo $[0,1]$ de la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \forall x \in ]0,1], \quad f(0) = 1$$

El símbolo $dx$ tiene también su papel, indica la *variable de integración* $x$, que como hemos visto representa un punto genérico del intervalo $[a,b]$. Puede ocurrir que la expresión de $f(x)$ involucre otras variables, que se suelen llamar *parámetros*. Claramente la integral dependerá del valor de tales parámetros, pues al cambiar dicho valor cambia la función que se integra, pero no dependerá obviamente de $x$, por lo que suele decirse que la variable de integración es una *variable muda*, no tiene nada que decir. Consideremos por ejemplo las integrales:

$$\int_1^2 x^y\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_1^2 x^y\,dy$$

En la primera $x$ es la variable de integración, mientras que $y$ es un parámetro, nos estamos refiriendo a la integral en el intervalo $[1,2]$ de la función potencia de exponente $y$, que desde luego dependerá de $y$. La segunda es la integral en el mismo intervalo de la función exponencial de base $x$, que depende obviamente del parámetro $x$. Más adelante veremos también que el símbolo $dx$ ayuda a recordar la fórmula de cambio de variable, un método muy útil para calcular integrales.

## 11.6. Propiedades de la integral.

Vamos a probar tres propiedades básicas de la integral recién definida, las dos primeras describen su dependencia respecto de la función que se integra (integrando) y la tercera alude a lo que ocurre al variar el intervalo de integración.

**Linealidad.** *Si $f$ y $g$ son funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, y $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, se tiene:*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx \tag{9}$$

La comprobación es casi evidente teniendo en cuenta la descripción de la integral como límite de sumas integrales. Si $\{P_n\}$ es una sucesión de particiones de $[a,b]$ con $\{\Delta P_n\} \to 0$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n$ es una suma integral de la función $\lambda f + \mu g$ para la partición $P_n$, es claro que $\gamma_n = \lambda\alpha_n + \mu\beta_n$ donde $\alpha_n$ es una suma integral de $f$ y $\beta_n$ un suma integral de $g$, en ambos casos para la partición $P_n$. Por tanto, la sucesión $\{\alpha_n\}$ converge a la integral de $f$ y $\{\beta_n\}$ converge a la integral de $g$, de donde

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lambda \lim_{n\to\infty} \alpha_n + \mu \lim_{n\to\infty} \beta_n \\ &= \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

■

Podemos ver la integración como un proceso mediante el cual, a cada función continua en un intervalo fijo $[a,b]$, asignamos un número real, la integral de dicha función. Tenemos así una aplicación definida en el conjunto $C[a,b]$ de todas las funciones continuas en $[a,b]$, que toma valores en $\mathbb{R}$. Simbólicamente:

$$\mathcal{I} : C[a,b] \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \forall f \in C[a,b]$$

Para manejar con facilidad las propiedades de la integral con respecto al integrando, conviene tener presente la aplicación $\mathcal{I}$. Por ejemplo, recordando que $C[a,b]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, la propiedad recién demostrada nos dice que $\mathcal{I}$ es una aplicación *lineal*. Las aplicaciones lineales de un espacio vectorial $X$ en el cuerpo sobre el que está construido suelen llamarse *funcionales lineales* en $X$. La integración define por tanto un funcional lineal en $C[a,b]$ y no es exagerado afirmar que estamos ante un "prototipo" de funcional lineal.

**Positividad.** *Si $f$ es una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, se tiene:*

$$f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a,b] \implies \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$$

Esta segunda propiedad de la integral es aún más evidente, pues todas las sumas integrales de $f$, para cualquier partición, son números reales no negativos, luego el límite de una sucesión de sumas integrales no puede ser negativo. ■

Pensemos que en el espacio vectorial $C[a,b]$ tenemos una relación de orden muy natural: para $f,g \in C[a,b]$ basta definir

$$g \leqslant f \iff g(x) \leqslant f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Pues bien, denotando por $0$ a la función constantemente igual a cero en $[a,b]$, es decir, el vector cero en el espacio vectorial $C[a,b]$, acabamos de observar que para $f \in C[a,b]$ con $f \geqslant 0$, se tiene $\mathcal{I}(f) \geqslant 0$, por lo que suele decirse que el funcional lineal $\mathcal{I}$ es *positivo*.

La positividad de la integral, junto con la linealidad, produce interesantes consecuencias que vamos a desgranar. Si $f,g \in C[a,b]$ verifican que $g \leqslant f$ tenemos evidentemente $f-g \geqslant 0$, luego $\mathcal{I}(f-g) \geqslant 0$, es decir, $\mathcal{I}(g) \leqslant \mathcal{I}(f)$. Vemos que la integral *preserva el orden*:

$$f,g \in C[a,b], \ g \leqslant f \implies \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx$$

Para cualquier $f \in C[a,b]$ tenemos evidentemente $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, luego la preservación del orden nos dice que $-\mathcal{I}(|f|) \leqslant \mathcal{I}(f) \leqslant \mathcal{I}(|f|)$, es decir, $|\mathcal{I}(f)| \leqslant \mathcal{I}(|f|)$. Más explícitamente, tenemos

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad \forall f \in C[a,b]$$

Esta desigualdad se usa muy frecuentemente cuando se quieren obtener acotaciones de ciertas integrales.

Para $f \in C[a,b]$, pongamos $m = \text{mín}\, f([a,b])$ y $M = \text{máx}\, f([a,b])$. Directamente de la definición de integral, o bien comparando $f$ con funciones constantes, cuya integral es bien fácil de adivinar, deducimos

$$m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\,(b-a)$$

Dividiendo por $b-a$ y aplicando el Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas, obtenemos la que se conoce como *propiedad de la media*:

$$f \in C[a,b] \implies \exists c \in [a,b] \ : \ \int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$$

Nótese que el cociente $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ puede verse como un *promedio* de los valores de $f$ en el intervalo $[a,b]$. La propiedad de la media nos dice que este promedio es efectivamente un valor de la función $f$.

Combinando resultados anteriores tenemos

$$f \in C[a,b] \implies \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \big(\text{máx}\,\{|f(x)| : x \in [a,b]\}\big)\,(b-a) \tag{10}$$

propiedad que puede entenderse como una *continuidad* de la integral con respecto al integrando. Para explicarlo, conviene aplicarla a la diferencia entre dos funciones "cercanas":

$$f,g \in C[a,b], \ |f(x)-g(x)| < \varepsilon \ \ \forall x \in [a,b] \implies \left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \right| < \varepsilon\,(b-a)$$

Cuando $\varepsilon$ es pequeño, la condición $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$ para todo $x\in[a,b]$ indica que la función $g$ está "muy próxima" a $f$ y vemos que entonces la integral de $g$ está también "muy próxima" a la integral de $f$. De hecho podemos decir que la integral de $g$ tiende a coincidir con la integral de $f$ cuando $g$ tiende a coincidir con $f$, lo que evoca claramente la idea de continuidad.

Veamos ya la tercera propiedad básica de la integral, referente al intervalo de integración.

**Aditividad.** *Si $f$ es una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, para todo $c\in[a,b]$ se tiene:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{11}$$

Para comprobarlo tomamos una partición $P\in\mathcal{P}[a,b]$ y escribimos $P\cup\{c\}=P_1\cup P_2$ donde $P_1\in\mathcal{P}[a,c]$ y $P_2\in\mathcal{P}[c,b]$. Tenemos claramente

$$I(f,P)\leqslant I(f,P\cup\{c\})=I(f,P_1)+I(f,P_2)\leqslant \int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

donde hemos usado que las integrales de $f$ en los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$ son mayorantes de los respectivos conjuntos de sumas inferiores. Puesto que la desigualdad anterior es válida para toda partición $P\in\mathcal{P}[a,b]$, usando ahora la definición de la integral en el intervalo $[a,b]$ como supremo del conjunto de las sumas inferiores, obtenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Análogamente tenemos también

$$S(f,P)\geqslant S(f,P\cup\{c\})=S(f,P_1)+S(f,P_2)\geqslant \int_a^c f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx$$

de donde deducimos la otra desigualdad:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

En el principal resultado de este tema, que abordaremos enseguida, usamos integrales cuyos límites de integración pueden ser dos puntos arbitrarios de un intervalo. Con más precisión, conviene que la expresión $\int_u^v f(x)\,dx$, que hasta ahora solo hemos manejado con $u<v$, tenga también un significado cuando $u\geqslant v$.

Para ello, dados $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$, si $f$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$, definimos

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

En realidad, para la primera de estas definiciones, que son más bien convenios de notación, la función $f$ puede ser perfectamente arbitraria. Nótese que ahora, si $I$ es un intervalo y $f:I\to\mathbb{R}$ es continua en $I$, la expresión $\int_u^v f(x)\,dx$ tiene sentido para cualesquiera $u,v\in I$.

Observemos lo que ocurre con las propiedades de la integral en esta situación más general, empezando por la aditividad con respecto al intervalo de integración. La igualdad $(11)$ sigue siendo cierta, cualquiera que sea la relación entre los puntos $a$, $b$ y $c$, siempre que las tres integrales que en ella aparecen tengan sentido.

Más concretamente, dados $a,b,c \in \mathbb{R}$, sean $\alpha = \text{mín}\{a,b,c\}$, $\beta = \text{máx}\{a,b,c\}$ y notemos que cuando $\alpha = \beta$ no hay nada que comprobar, las tres integrales que aparecen en $(11)$ son $0$. Si $\alpha < \beta$ y $f$ es una función continua en el intervalo $[\alpha,\beta]$, las tres integrales que aparecen en $(11)$ tienen sentido y queremos comprobar que la igualdad sigue siendo cierta. Para ello conviene expresarla en forma cíclica:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0$$

Observamos que el primer miembro siempre cambia de signo, luego la igualdad se mantiene, cuando permutamos dos de los puntos $a,b,c$. Usando las permutaciones que sean necesarias, bastará que la igualdad sea cierta cuando $a \leqslant c \leqslant b$. Si $a = c$ o $c = b$ la igualdad es evidente, mientras que si $a < c < b$ tenemos el caso ya conocido.

De forma todavía más clara, la igualdad $(9)$, que nos daba la linealidad de la integral, sigue siendo cierta con $a > b$, siempre que $f$ y $g$ sean ahora funciones continuas en el intervalo $[b,a]$, pues sus dos miembros cambian de signo al permutar $a$ y $b$. El caso $a = b$ no merece comentario.

Finalmente, la igualdad $(10)$ que nos dio la continuidad de la integral, sigue siendo cierta con sólo tener en cuenta el signo del segundo miembro. Más concretamente, para $a,b \in \mathbb{R}$, con $a \neq b$, si $J$ es el intervalo cerrado de extremos $a$ y $b$, y $f$ es una función continua en $J$, se tiene claramente que

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \text{máx}\{|f(x)| : x \in J\}\ |b-a| \tag{12}$$

## 11.7. Teorema Fundamental del Cálculo

Ha llegado el momento de relacionar los conceptos de derivada e integral.

**Teorema.** *Sea $I$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en $I$. Fijado un punto $a \in I$, consideremos la función $F : I \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in I$$

*Entonces $F$ es derivable en $I$ con $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

**Demostración.** Fijado $x \in I$, deberemos probar que

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(x) \tag{13}$$

Para $y \in I \setminus \{x\}$, la aditividad de la integral nos dice que

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt$$

Por otra parte, si $J_y$ es el intervalo de extremos $x$ e $y$, integrando en dicho intervalo la función constantemente igual a $f(x)$ tenemos claramente que

$$f(x)\,(y-x) = \int_x^y f(x)\,dt$$

Restando las dos igualdades anteriores y usando la linealidad de la integral, obtenemos

$$F(y) - F(x) - f(x)\,(y-x) = \int_x^y \big(f(t) - f(x)\big)\,dt \tag{14}$$

Acotamos la integral del segundo miembro usando la desigualdad (12) y obtenemos:

$$\left| \int_x^y \big(f(t) - f(x)\big)\,dt \right| \leqslant \text{máx}\,\big\{ |f(t) - f(x)| \,:\, t \in J_y \big\}\,|y-x|$$

Enlazando con (14), y dividiendo por $|y-x| \neq 0$, concluimos que

$$\left| \frac{F(y) - F(x)}{y-x} - f(x) \right| \leqslant \text{máx}\,\big\{ |f(t) - f(x)| \,:\, t \in J_y \big\} \tag{15}$$

El final de la demostración puede ya adivinarse: la continuidad de $f$ en el punto $x$ hace que, tomando $y$ suficientemente próximo a $x$, podamos conseguir que todos los valores de $f$ en el intervalo $J_y$ estén tan cerca de $f(x)$ como se quiera.

Más concretamente, dado $\varepsilon > 0$, por ser $f$ continua en $x$ existe $\delta > 0$ tal que, para $t \in I$ con $|t-x| < \delta$ se tiene $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Entonces, si $y \in I$ verifica que $0 < |y-x| < \delta$, para todo $t \in J_y$ será también $|t-x| < \delta$, luego $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$, y el máximo que aparece en el segundo miembro de (15) será menor que $\varepsilon$. Hemos probado que

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \,:\, y \in I,\;\; 0 < |y-x| < \delta \implies \left| \frac{F(y) - F(x)}{y-x} - f(x) \right| < \varepsilon$$

de donde la igualdad (13) buscada. ■

Como primera consecuencia obvia del teorema anterior, la integración nos ha permitido probar un resultado varias veces anunciado: *toda función continua en un intervalo es la derivada de otra función,* que será de clase $C^1$ en dicho intervalo. Vemos por tanto que el Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas queda como caso particular del Teorema del Valor Intermedio para las derivadas.

Una obvia inducción permite expresar cualquier función continua en un intervalo como derivada *n*-ésima de otra función:

- *Sea $I$ un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en $I$ y $n \in \mathbb{N}$. Existe una función $H \in C^n(I)$ tal que $H^{(n)} = f$.*

Podemos ahora probar fácilmente, como también se anunció en su momento, la existencia de funciones con propiedades de derivabilidad concretas.

En primer lugar, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos aplicar el resultado anterior a la función valor absoluto, obteniendo una función $H \in C^n(\mathbb{R})$ tal que $H^{(n)}(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es evidente entonces que $H \notin D^{n+1}(\mathbb{R})$. Con cualquier otro intervalo haríamos un razonamiento similar.

Por otra parte, conocemos una función $f$ que es derivable en $\mathbb{R}$ pero no de clase $\mathrm{C}^1$ en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(0) = 0$$

Para $n > 1$, podemos ahora asegurar que existe una función $H \in D^{n-1}(\mathbb{R})$ tal que $H^{(n-1)} = f$, luego $H \in D^n(\mathbb{R})$ pero $H \notin C^n(\mathbb{R})$. De nuevo este razonamiento se puede trasladar a cualquier otro intervalo y podemos enunciar:

- *Para cualquier intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se tiene que*

$$D^n(I) \neq C^n(I) \neq D^{n+1}(I)$$

Veamos ahora principal aplicación práctica del Teorema Fundamental del Cálculo:

**Regla de Barrow.** *Sea $I$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en $I$. Sea $G$ una primitiva de $f$, esto es, una función $G : I \to \mathbb{R}$ derivable en $I$, tal que $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$. Entonces, para cualesquiera $a, b \in I$ se tiene:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

**Demostración.** Nótese que puede perfectamente ser $a \geqslant b$. En cualquier caso, fijado $a \in I$, sea $F : I \to \mathbb{R}$ la función que aparece en el Teorema Fundamental del Cálculo. Puesto que $F$ y $G$ tienen la misma derivada, existirá una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + C$ para todo $x \in I$. Por ser $F(a) = 0$, tenemos $C = -G(a)$ de donde, para todo $b \in I$, deducimos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) = G(b) + C = G(b) - G(a) \qquad \blacksquare$$

Como casos particulares interesantes destacamos los siguientes:

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \,; \qquad \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para comprender la utilidad de estas igualdades, imaginemos por un momento que todavía no conociésemos las funciones exponenciales y logarítmicas, ni las funciones trigonométricas y sus inversas. La gama de funciones conocidas se reduciría entonces, prácticamente a las funciones racionales, pero sabríamos que la función $t \mapsto 1/t$ es continua en $\mathbb{R}^+$ y que $t \mapsto 1/(1+t^2)$ es continua en $\mathbb{R}$, pues en ambos casos se trata de funciones racionales. Podríamos entonces definir el logaritmo y el arco tangente mediante las igualdades anteriores. Lejos de tratarse de una simple curiosidad, este es el procedimiento más cómodo y elegante para estudiar la función logaritmo, y a partir de ella la exponencial y las potencias, así como la función arco tangente, y a partir de ella la tangente y el resto de las funciones trigonométricas. Recorrer todo este camino, probando todas las propiedades ya conocidas de estas familias de funciones, es un trabajo que realmente puede merecer la pena.

## 11.8. Cambio de variable

Mezclando la regla de Barrow con la regla de la cadena, obtenemos fácilmente una fórmula también muy útil para el cálculo de integrales.

**Fórmula de cambio de variable.** *Sean $I,J$ intervalos, $\varphi : J \to I$ una función de clase* $C^1$ *en $J$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en $I$. Para cualesquiera $c,d \in J$, tomando $a = \varphi(c)$ y $b = \varphi(d)$ se tiene:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt \tag{16}$$

La demostración es inmediata, aplicando la regla de la cadena y dos veces la regla de Barrow. Sea $F : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en $I$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$, cuya existencia viene asegurada por el Teorema Fundamental del Cálculo. Aplicando la regla de la cadena sabemos que $F \circ \varphi$ es derivable en $J$ con

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) \qquad \forall t \in J$$

Aplicando dos veces la regla de Barrow, tenemos:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)\\ &= F\big(\varphi(d)\big) - F\big(\varphi(c)\big) = \int_c^d (F \circ \varphi)'(t)\,dt = \int_c^d f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ■

Obsérvese cómo la notación que usamos para la integral permite recordar muy fácilmente la fórmula de cambio de variable, pensando que la igualdad (16) se obtiene sustituyendo la variable de integración $x$ por una nueva variable $t$, ligadas por la igualdad $x = \varphi(t)$. Claro está que debemos entonces sustituir $f(x)$ por $f\big(\varphi(t)\big)$, pero si recordamos el concepto de diferencial de una función, también resulta coherente sustituir $dx$ por $\varphi'(t)\,dt$, que podríamos decir es la diferencial de $x$ vista como función de $t$. Finalmente, el cambio en los límites de integración es igualmente razonable, basta pensar que $a$ y $b$ son los valores de la variable $x$ que corresponden a los valores $c$ y $d$ de la variable $t$, respectivamente.

Como ejemplo de aplicación de la fórmula de cambio de variable, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ vamos a calcular el número real

$$A = \frac{4\beta}{\alpha} \int_0^\alpha \sqrt{\alpha^2 - x^2}\,dx$$

que se interpreta claramente como el área encerrada por la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$. Para usar la fórmula de cambio de variable, podemos tomar $I = [0,\alpha]$ y $f : I \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \sqrt{\alpha^2 - x^2}$ para todo $x \in I$, que claramente es una función continua en $I$. Tomamos $J = [0,\pi/2]$ y $\varphi(t) = \alpha \operatorname{sen} t$ para todo $t \in J$, con lo que claramente $\varphi \in C^\infty(J)$ y $\varphi(J) \subset I$. Además, y aquí se explica la elección de $\varphi$, tenemos

$$f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) = (\alpha^2 - \alpha^2 \operatorname{sen}^2 t)^{1/2}\,\alpha \cos t = \alpha^2 \cos^2 t \qquad \forall t \in J$$

Finalmente, tenemos $0 = \varphi(0)$ y $\alpha = \varphi(\pi/2)$, luego la fórmula de cambio de variable nos permite escribir

$$\int_0^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}\, dx = \alpha^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{\alpha^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt$$

donde también hemos usado una identidad trigonométrica conocida. La integral resultante es fácil de calcular, puesto que tomando

$$G(t) = t + (1/2)\operatorname{sen} 2t \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{tenemos} \quad G'(t) = 1 + \cos 2t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

y la regla de Barrow nos da

$$\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt = G(\pi/2) - G(0) = \pi/2$$

Encadenando las sucesivas igualdades obtenidas concluimos finalmente que $A = \pi\alpha\beta$.