Tema 1

Límite Funcional

Estudiamos en este tema el concepto de límite para funciones reales de variable real, que guarda una estrecha relación con la continuidad.

1.1. Puntos de acumulación

Pretendemos estudiar la noción de límite de una función en un punto, que permite describir el comportamiento de una función al acercarnos a un punto de la recta real. A diferencia de la continuidad, no será preciso trabajar en un punto donde la función esté definida y, aunque lo esté, no tendremos en cuenta el valor que toma la función en el punto considerado. Sí será necesario que efectivamente podamos acercarnos desde el conjunto de definición de la función al punto en el que pretendemos estudiarla. Esto motiva la siguiente definición.

Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$, decimos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es un *punto de acumulación* de A, cuando existe una sucesión de puntos de A, distintos de α, que converge a α, es decir, existe una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \in A \setminus \{\alpha\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to \alpha$. Es costumbre denotar por A' al conjunto de los puntos de acumulación de A.

Observamos que si $\alpha \in A'$ tenemos puntos de A arbitrariamente próximos a α pero distintos de α. De forma más concreta, para cada $\delta > 0$ tenemos que $]\alpha-\delta, \alpha+\delta[\, \cap (A \setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset$, es decir, podemos encontrar $x \in A$ tal que $0 < |x-\alpha| < \delta$. En efecto, si $\{x_n\} \to \alpha$ con $x_n \in A \setminus \{\alpha\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por definición de límite de una sucesión existirá $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \alpha| < \delta$ para $n \geqslant m$, en particular $x_m \in A$ y $0 < |x_m - \alpha| < \delta$.

Recíprocamente, si para cada $\delta > 0$ se tiene que $]\alpha-\delta, \alpha+\delta[\, \cap (A \setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $\delta = 1/n$ y existirá $x_n \in A$ tal que $0 < |x_n - \alpha| < 1/n$. Obtenemos así una sucesión $\{x_n\}$ que evidentemente verifica $\{x_n\} \to \alpha$ con $x_n \in A \setminus \{\alpha\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Simbólicamente, para $A \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos:

$$\alpha \in A' \iff]\alpha-\delta, \alpha+\delta[\, \cap (A \setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0$$

Consideremos por ejemplo el conjunto $A = [0,1[\cup \{2\}$. La intuición nos indica rápidamente que $A' = [0,1]$, pero vamos a demostrar con detalle esta igualdad, para ilustrar las distintas formas de decidir si un número real es o no punto de acumulación de un conjunto.

En primer lugar, es fácil ver que $[0,1[\subset A'$. En efecto, si $x \in [0,1[$, para cualquier $\delta > 0$ podemos tomar $y \in \mathbb{R}$ verificando que $x < y < \min\{x+\delta, 1\}$ y tenemos evidentemente que $y \in A$, así como que $0 < |y-x| < \delta$, luego $x \in A'$. Alternativamente, definiendo $x_n = \dfrac{nx+1}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos evidentemente que $x < x_n < 1$, luego $x_n \in A \setminus \{x\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y es claro que $\{x_n\} \to x$.

En segundo lugar tenemos que $1 \in A'$, puesto que $\{1 - 1/n\}$ es una sucesión de puntos de A, distintos de 1, que converge a 1.

Tenemos por ahora que $[0,1] \subset A'$ y vamos a comprobar que se da la igualdad. Sea $\alpha \in A'$ y $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de A verificando que $x_n \neq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to \alpha$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos entonces que $0 \leqslant x_n < 1$, o bien $x_n = 2$. La segunda posibilidad no puede ser muy frecuente, concretamente el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n = 2\}$ ha de ser finito, pues de lo contrario tendríamos una sucesión parcial de $\{x_n\}$ constantemente igual a 2, lo que implicaría $\alpha = 2$, contradiciendo el hecho de que $x_n \neq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant m$ se tiene $x_n \neq 2$, luego $0 \leqslant x_n < 1$. Usando que $\{x_{m+n}\} \to \alpha$ con $0 \leqslant x_{m+n} < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Hemos comprobado así que $A' \subset [0,1]$, como queríamos.

Resaltamos que en el ejemplo anterior no se verifica que $A' \subset A$, pues $1 \in A' \setminus A$, y tampoco que $A \subset A'$, ya que $2 \in A \setminus A'$. En general, no existe relación entre ser punto de acumulación de un conjunto y pertenecer al conjunto.

Dado un conjunto cualquiera $A \subset \mathbb{R}$, los puntos de A que no son puntos de acumulación reciben el nombre de puntos aislados. Así pues, a es un *punto aislado* de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ cuando $a \in A \setminus A'$. La caracterización de los puntos de acumulación comentada anteriormente nos da un fácil criterio para detectar los puntos aislados. Concretamente, a es un punto aislado de un conjunto A cuando existe $\delta > 0$ tal que $]a-\delta, a+\delta[\cap A = \{a\}$.

Por ejemplo, para el conjunto $A = [0,1[\cup \{2\}$ estudiado anteriormente, sabemos que 2 es un punto aislado de A. De hecho, para $0 < \delta \leqslant 1$ es evidente que $]2-\delta, 2+\delta[\cap A = \{2\}$.

Para estudiar otro ejemplo interesante, pensemos en el caso de un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Cuando el intervalo se reduce a un punto, $I = \{a\}$ con $a \in \mathbb{R}$, es evidente que a es un punto aislado de I. Pero si I tiene al menos dos puntos, entonces I no tiene puntos aislados, es decir, $I \subset I'$. En efecto, fijado $a \in I$, sea $b \in I \setminus \{a\}$ y supongamos de momento que $a < b$. Entonces, para $\delta > 0$ arbitrario, tomando $x = \min\{a+\delta, b\}$ tenemos que $]a,x[\subset [a,b] \subset I$ y $]a,x[\subset]a-\delta, a+\delta[$, de donde concluimos que $]a-\delta, a+\delta[\cap (I \setminus \{a\}) \neq \emptyset$. En el caso $b < a$ hubiésemos tomado $x = \max\{a-\delta, b\}$ para tener $\emptyset \neq]x,a[\subset]a-\delta, a+\delta[\cap (I \setminus \{a\})$. En cualquier caso tenemos $a \in I'$ como queríamos.

Para cada tipo de intervalo es fácil ya adivinar el conjunto de sus puntos de acumulación. En concreto, si I es un intervalo acotado de extremos $\alpha = \inf I$, $\beta = \sup I$, tenemos claramente $I' = [\alpha, \beta]$, mientras que si I es una semirrecta, entonces I' será la correspondiente semirrecta cerrada.

1.2. Concepto de límite funcional

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y $\alpha \in A'$. Se dice que f *tiene límite en el punto* α cuando existe $L \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A distintos de α, que converja a α, se tiene que $\{f(x_n)\} \to L$. En tal caso, puesto que una sucesión de números reales no puede tener dos límites distintos, podemos asegurar que L es único, decimos que L es el *límite de la función* f *en el punto* α y escribimos $L = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$. Así pues, simbólicamente,

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\, x_n \in A\setminus\{\alpha\} \;\; \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \{x_n\} \to \alpha \implies \{f(x_n)\} \to L \,\right]$$

Nótese que la condición $\alpha \in A'$ es justo la que hace que la definición anterior tenga sentido.

Puesto que puede ocurrir que $\alpha \notin A$, resaltamos que puede tener sentido discutir la posible existencia de límite de una función en puntos que no pertenezcan a su conjunto de definición. Por otra parte, si a es un punto aislado de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, no tiene sentido hablar de la existencia de límite en el punto a para funciones definidas en A. Finalmente, cuando $a \in A \cap A'$, el valor de $f(a)$ no afecta para nada a la existencia de límite en el punto a para una función $f : A \to \mathbb{R}$. Tampoco afecta al valor de dicho límite, caso de que exista.

Probamos a continuación una caracterización $(\varepsilon - \delta)$ del límite de una función:

- *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función real de variable real y sean* $\alpha \in A'$, $L \in \mathbb{R}$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = L$
  - (ii) *Si* $\{x_n\}$ *es una sucesión monótona de puntos de A distintos de* α, *con* $\{x_n\} \to \alpha$, *entonces* $\{f(x_n)\} \to L$
  - (iii) *Para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que, si* $x \in A$ *verifica que* $0 < |x-\alpha| < \delta$, *entonces* $|f(x) - L| < \varepsilon$. *En símbolos:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;:\; x \in A\,, \;\; 0 < |x-\alpha| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

La demostración es idéntica a la que se hizo en su momento para caracterizar la continuidad en un punto:

$(i) \Rightarrow (ii)$. Es evidente, lo que se verifica para cualquier sucesión de puntos de A distintos de α que converja a α, será cierto en particular para sucesiones monótonas.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Si no se verifica (iii), existirá $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para cada $\delta > 0$ existe $x \in A$ verificando que $0 < |x-\alpha| < \delta$ y $|f(x) - L| \geqslant \varepsilon_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos entonces $\delta = 1/n$ para obtener $x_n \in A$ verificando que $0 < |x_n - \alpha| < 1/n$ y $|f(x_n) - L| \geqslant \varepsilon_0$. La sucesión $\{x_n\}$ así construida admitirá una sucesión parcial monótona $\{x_{\sigma(n)}\}$. Entonces $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión monótona de puntos de A distintos de α que converge a α, pero la sucesión $\{f(x_{\sigma(n)})\}$ no converge a L, ya que $|f(x_{\sigma(n)}) - L| \geqslant \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego no se cumple (ii).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión verificando que $\{x_n\} \to \alpha$ con $x_n \in A\setminus\{\alpha\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta > 0$ dado por la afirmación (iii) y encontramos $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, se tenga $|x_n - \alpha| < \delta$. Entonces, también para $n \geqslant m$, de $x_n \in A$ con $0 < |x_n - \alpha| < \delta$ deducimos que $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Esto prueba que $\{f(x_n)\} \to L$, como queríamos. ■

1.3. Relación con la continuidad

La similitud entre la definición de límite de una función y la continuidad no ha podido pasar desapercibida. Vamos a aclarar la relación entre ambas nociones, empezando por ponernos en situación de que ambas tengan sentido:

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y $a \in A \cap A'$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  (i) *f es continua en el punto a*

  (ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

La comprobación es inmediata. Para $(i) \Rightarrow (ii)$ basta observar que si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de A distintos de a, con $\{x_n\} \to a$, la continuidad de f en el punto a nos asegura que $\{f(x_n)\} \to f(a)$. Para $(ii) \Rightarrow (i)$ usamos la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de ambas afirmaciones: dado $\varepsilon > 0$, usando (ii) conseguimos un $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$ con $0 < |x - a| < \delta$, se tiene $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Pero si $x = a$ la última desigualdad es obvia, luego dicha desigualdad es cierta para todo $x \in A$ que verifique $|x - a| < \delta$ y tenemos la continuidad de f en a. ∎

La equivalencia anterior nos permite distinguir un primer tipo de discontinuidad que una función puede tener en un punto. Si una función $f : A \to \mathbb{R}$ tiene límite en un punto $a \in A \cap A'$ pero ocurre que $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, decimos que f tiene una *discontinuidad evitable* en el punto a. La razón de esta nomenclatura es bastante clara: podríamos haber conseguido la continuidad en el punto a definiendo $f(a)$ de forma adecuada. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$ y $f(0) = 1$, tiene una discontinuidad evitable en el origen.

Veamos ahora qué ocurre cuando eliminamos una de las condiciones, $a \in A'$ y $a \in A$, que hemos supuesto en el último resultado. Si eliminamos la primera condición, es decir, si a es un punto aislado del conjunto A, no tiene sentido hablar de límite en el punto a, pero sabemos que la continuidad es automática:

- *Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función real de variable real, entonces f es continua en todo punto aislado de A.*

En efecto, si $a \in A \setminus A'$, tenemos $\delta > 0$ tal que $]a - \delta, a + \delta[\, \cap A = \{a\}$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, para $x \in A$ con $|x - a| < \delta$, tenemos obligadamente $x = a$, luego $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$.

El límite de una función en un punto donde no esté definida, también se relaciona con la continuidad. Concretamente, la existencia del límite equivale a la posibilidad de extender la función, dándole un valor apropiado en el punto en cuestión, para obtener una función continua en dicho punto:

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y $\alpha \in A' \setminus A$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  (i) *f tiene límite en el punto α*

  (ii) *Existe una función $\widetilde{f} : A \cup \{\alpha\} \to \mathbb{R}$, continua en el punto α, que es una extensión de f, es decir, $\widetilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in A$*

  Además, caso de que se verifiquen (i) y (ii), se tiene $\widetilde{f}(\alpha) = \lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$.

De nuevo la demostración es inmediata. Para ver que $(i) \Rightarrow (ii)$ basta definir $\widetilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in A$ y $\widetilde{f}(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} f(x)$. Entonces, la continuidad de $\widetilde{f}$ en el punto α es evidente, ya que $\lim_{x\to\alpha} \widetilde{f}(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) = \widetilde{f}(\alpha)$. Por tanto $\widetilde{f}$ es la extensión requerida en (ii). La implicación recíproca es aún más clara: si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de A tal que $\{x_n\} \to \alpha$, se tiene evidentemente que $\{f(x_n)\} = \{\widetilde{f}(x_n)\} \to \widetilde{f}(\alpha)$, luego $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \widetilde{f}(\alpha)$. La última afirmación del enunciado ha quedado claramente de manifiesto. ■

1.4. Carácter local

A la vista de la íntima relación con la continuidad en un punto, no resultará sorprendente que el límite de una función en un punto sea también una propiedad local. Observamos previamente lo que ocurre en general al restringir una función, que es bastante evidente:

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real, sea B un subconjunto de A y $\beta \in B'$. Si f tiene límite en el punto β, entonces lo mismo le ocurre a la restricción $f|_B$ y se verifica que* $\lim_{x\to\beta} f|_B(x) = \lim_{x\to\beta} f(x)$.

La comprobación de este hecho casi no merece comentario. Basta pensar que toda sucesión de puntos de B distintos de β, que converja a β, es también una sucesión de puntos de A distintos de β, que converge a β. De paso ha quedado también claro que $B' \subset A'$, de forma que ambos límites tengan sentido.

Pero lo más interesante es la condición que podemos pedir al subconjunto B para conseguir la afirmación recíproca:

- *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real, $B \subset A$ y $\beta \in B'$. Supongamos que existe $r > 0$ tal que $]\beta - r, \beta + r[\, \cap (A \setminus \{\beta\}) \subset B$. Entonces, si $f|_B$ tiene límite en el punto β, lo mismo le ocurre a f, y se verifica que* $\lim_{x\to\beta} f(x) = \lim_{x\to\beta} f|_B(x)$.

La demostración es inmediata tanto mediante sucesiones como usando la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de ambos límites. Optamos por la segunda posibilidad. Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis existe un $\eta > 0$ tal que, para $x \in B$ con $0 < |x - \beta| < \eta$, se tiene $\big|f|_B(x) - L\big| < \varepsilon$, donde $L = \lim_{x\to\beta} f|_B(x)$. Si tomamos ahora $\delta = \min\{\eta, r\}$ es claro que, para $x \in A$ con $0 < |x - \beta| < \delta$, se tiene $x \in B$ y $\big|f(x) - L\big| = \big|f|_B(x) - L\big| < \varepsilon$. ■

Queda de manifiesto el carácter local del límite de una función en un punto. Para una función $f : A \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in A'$, siempre podemos tomar $B =]\alpha - r, \alpha + r[\, \cap A$, con $r > 0$ arbitrario, y obtenemos que f tiene límite en el punto α si, y sólo si, $f|_B$ tiene límite en el punto α, en cuyo caso ambos límites coinciden. Por tanto, por muy pequeño que sea $r > 0$, la existencia del límite de la función f en el punto α, y el valor de dicho límite caso de que exista, sólo dependen de los valores de f en el conjunto $]\alpha - r, \alpha + r[\, \cap A$.

1.5. Límites laterales

Intuitivamente, para estudiar el comportamiento de una función al acercarnos a un punto de la recta real, podemos analizar solamente lo que ocurre cuando nos acercamos a dicho punto por la izquierda o cuando nos acercamos por la derecha. Aparece así la noción de límite lateral que, como vamos a ver, es en realidad caso particular del concepto de límite (ordinario) que hasta ahora hemos considerado. Para desarrollar esta idea conviene introducir una notación adecuada, aunque pueda parecer algo artificiosa.

Dados un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, consideraremos los conjuntos

$$A_\alpha^- = \{x \in A : x < \alpha\} \qquad \text{y} \qquad A_\alpha^+ = \{x \in A : x > \alpha\}$$

Sea ahora $f : A \to \mathbb{R}$ una función y supongamos que $\alpha \in (A_\alpha^-)'$, es decir, existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, tal que $x_n < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to \alpha$. Ello equivale también a que, para todo $\delta > 0$, se tenga $]\alpha - \delta, \alpha[\, \cap A \neq \emptyset$. Entonces, decimos que f *tiene límite por la izquierda* en el punto α cuando existe $L \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, verificando que $x_n < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to \alpha$, se tiene que $\{f(x_n)\} \to L$. En tal caso, L es único, le llamamos *límite por la izquierda* de f en α y escribimos $L = \lim\limits_{x \to \alpha-} f(x)$.

Análogamente, supongamos que $\alpha \in (A_\alpha^+)'$, es decir, que existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A verificando que $x_n > \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to \alpha$. Ello equivale a que, para todo $\delta > 0$, se tenga $]\alpha, \alpha + \delta[\, \cap A \neq \emptyset$. Diremos que f *tiene límite por la derecha* en el punto α cuando exista $L \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, verificando que $x_n > \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to \alpha$, se tiene que $\{f(x_n)\} \to L$. De nuevo L es único, le llamamos *límite por la derecha* de f en α y escribimos $L = \lim\limits_{x \to \alpha+} f(x)$.

Observemos que los *límites laterales* que acabamos de definir son casos particulares del límite ordinario que hasta ahora veníamos manejando. En efecto, si $\alpha \in (A_\alpha^-)'$ y llamamos g a la restricción de f al conjunto A_α^-, se deduce directamente de las definiciones que, para cualquier $L \in \mathbb{R}$, se tiene: $\lim\limits_{x \to \alpha-} f(x) = L \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = L$. Análogamente, si $\alpha \in (A_\alpha^+)'$ y h es la restricción de f al conjunto A_α^+, para $L \in \mathbb{R}$, se tiene: $\lim\limits_{x \to \alpha+} f(x) = L \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = L$.

Así pues, cada límite lateral de una función es el límite ordinario de una restricción de la función. Las propiedades que hasta ahora conocemos para el límite ordinario, y cualesquiera otras que podamos obtener más adelante, se aplican automáticamente a los límites laterales, prestando la debida atención al cambio de función que se requiere para pasar de un tipo de límite a otro. Ejemplificamos este hecho con una caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de los límites laterales.

- *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y $\alpha \in \mathbb{R}$. Supongamos que $\alpha \in (A_\alpha^-)'$ y sea $L \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) $\lim\limits_{x \to \alpha-} f(x) = L$
  - (ii) *Para toda sucesión creciente $\{x_n\}$ de puntos de A distintos de α, tal que $\{x_n\} \to \alpha$, se tiene que $\{f(x_n)\} \to L$*
  - (iii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x \in A,\ \alpha - \delta < x < \alpha \implies |f(x) - L| < \varepsilon$

La caracterización análoga del límite por la derecha se consigue obviamente usando en (ii) sucesiones decrecientes en vez de crecientes y sustituyendo en (iii) la condición $\alpha - \delta < x < \alpha$ por $\alpha < x < \alpha + \delta$.

Pero la principal utilidad de los límites laterales de una función estriba en su relación con el límite ordinario de *la misma* función. Para explicarla, empezaremos aclarando la relación entre las condiciones que permiten hablar de los tres tipos de límite.

Observemos primeramente que si B y C son subconjuntos de $\mathbb{R}$, se tiene:

$$(B \cup C)' = B' \cup C' \tag{1}$$

Una inclusión es evidente: por ser $B \subset B \cup C$ tenemos obviamente $B' \subset (B \cup C)'$ y análogamente $C' \subset (B \cup C)'$, luego $B' \cup C' \subset (B \cup C)'$. Para la otra inclusión, fijado $x \in \mathbb{R}$ y suponiendo que $x \notin B' \cup C'$, comprobamos que $x \notin (B \cup C)'$. En efecto, existen números positivos δ_1 y δ_2 verificando que $]x - \delta_1, x + \delta_1[\, \cap \big(B \setminus \{x\}\big) = \emptyset =]x - \delta_2, x + \delta_2[\, \cap \big(C \setminus \{x\}\big)$. Entonces, tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ tenemos claramente $]x - \delta, x + \delta[\, \cap \big[(B \cup C) \setminus \{x\}\big] = \emptyset$, luego $x \notin (B \cup C)'$ como queríamos.

Como consecuencia de (1), para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, comprobamos enseguida que

$$A' = (A_\alpha^-)' \, \cup \, (A_\alpha^+)' \tag{2}$$

Para ello empezamos observando que $A' = \big(A \setminus \{\alpha\}\big)'$, igualdad que es obvia si $\alpha \notin A$, mientras que, si $\alpha \in A$, usando (1) llegamos a la misma conclusión:

$$A' = \big[(A \setminus \{\alpha\}) \cup \{\alpha\}\big]' = \big(A \setminus \{\alpha\}\big)' \cup \{\alpha\}' = \big(A \setminus \{\alpha\}\big)'$$

Finalmente usando nuevamente (1) tenemos

$$A' = (A \setminus \{\alpha\})' = (A_\alpha^- \cup A_\alpha^+)' = (A_\alpha^-)' \cup (A_\alpha^+)'$$

De la igualdad (2) deducimos que tiene sentido hablar del límite ordinario de una función en un punto si, y sólo si, tiene sentido hablar de al menos uno de los límites laterales.

Podemos ya explicar la relación entre límites laterales y límite ordinario. A la vista de la discusión anterior debemos considerar tres casos y, en cualquiera de ellos, la relación buscada es bastante clara:

- *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real, $\alpha \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$.*
  (a) *Supongamos que $\alpha \in (A_\alpha^-)'$ pero $\alpha \notin (A_\alpha^+)'$. Entonces:*

  $$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \iff \lim_{x \to \alpha-} f(x) = L$$

  (b) *Supongamos que $\alpha \in (A_\alpha^+)'$ pero $\alpha \notin (A_\alpha^-)'$. Entonces:*

  $$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \iff \lim_{x \to \alpha+} f(x) = L$$

  (c) *Supongamos finalmente que $\alpha \in (A_\alpha^-)' \, \cap \, (A_\alpha^+)'$. Entonces:*

  $$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \iff \lim_{x \to \alpha-} f(x) = \lim_{x \to \alpha+} f(x) = L$$

La comprobación de las tres afirmaciones anteriores es inmediata. Observamos primeramente que las tres implicaciones hacia la derecha son obvias: lo que se cumple para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A distintos de α que converja a α, se cumplirá en particular, tanto cuando sea $x_n < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como cuando sea $x_n > \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para la implicaciones hacia la izquierda usamos la caracterización del límite ordinario mediante sucesiones monótonas. Sea $\{x_n\}$ una sucesión monótona de puntos de A distintos de α con $\{x_n\} \to \alpha$. En el caso (c), si $\{x_n\}$ es creciente tendremos $x_n < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la definición de límite por la izquierda nos dice que $\{f(x_n)\} \to L$, como se quería. Si $\{x_n\}$ fuese decreciente tendríamos $x_n > \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y usaríamos el límite por la derecha para llegar a la misma conclusión. En el caso (a), basta observar que $\{x_n\}$ no puede ser decreciente, pues entonces se tendría $\alpha \in (A_\alpha^+)'$ contra la hipótesis, luego $\{x_n\}$ es creciente. Entonces $x_n < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la definición de límite por la izquierda nos lleva también a $\{f(x_n)\} \to L$. Análogamente, en el caso (b) tenemos que $\{x_n\}$ es decreciente y usamos la definición de límite por la derecha. ■

El apartado (c) del resultado anterior sugiere claramente la posibilidad de considerar un nuevo tipo de discontinuidad.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $\alpha \in A$ tal que $\alpha \in (A_\alpha^-)' \cap (A_\alpha^+)'$, de forma que tenga sentido hablar de ambos límites laterales de f en el punto α. Pues bien, si f tiene límite por la izquierda y también por la derecha en el punto α, pero ocurre que

$$\lim_{x\to\alpha-} f(x) \neq \lim_{x\to\alpha+} f(x)$$

entonces f no tiene límite ordinario en el punto α, luego no puede ser continua en dicho punto. Decimos que f tiene una *discontinuidad de salto* en el punto α, nomenclatura cuyo significado es muy intuitivo.

Como ejemplo ilustrativo tenemos las discontinuidades de la función parte entera. Sabemos que dicha función es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ pero no es continua en ningún punto de $\mathbb{Z}$. De hecho, fijado $k \in \mathbb{Z}$, es claro que para $k \leqslant x < k+1$ se tiene $E(x) = k$, luego $\lim\limits_{x\to k+} E(x) = k$. Por otra parte, para $k-1 \leqslant x < k$ tenemos $E(x) = k-1$, luego $\lim\limits_{x\to k-} E(x) = k-1$. Por tanto, la función parte entera tiene una discontinuidad de salto en cada punto $k \in \mathbb{Z}$.

1.6. Ejercicios

1. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in A'$. Probar que existe una sucesión estrictamente monótona de puntos de A que converge a α. Comprobar también que para todo $\delta > 0$, el conjunto $]\alpha-\delta, \alpha+\delta[\cap A$ es infinito.

2. Determinar los puntos de acumulación de cada uno de los siguientes conjuntos:

$$\emptyset, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{N}, \quad \mathbb{Q}, \quad \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x| < 1\}, \quad \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$$

3. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y $\alpha \in A'$. Supongamos que, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para $x, y \in A$ con $0 < |x-\alpha| < \delta$ y $0 < |y-\alpha| < \delta$, se tiene $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Probar que f tiene límite en el punto α.

4. Se define una función $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ como sigue, donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante:

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{-1} & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ c & \text{si} \quad x = 0 \\ 1+x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

   ¿Tiene f límite en 0? ¿Para qué valores de c es f continua en 0? ¿Puede extenderse f para obtener una función continua en el intervalo $]-1,1]$? ¿Y en el intervalo $[-1,1]$?

5. Sea $A =]-\infty,-1] \cup \{0\} \cup [1,2[\cup [3,5]$ y $f : A \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{-1} & \text{si} \quad x < -1 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \sqrt{x-1} & \text{si} \quad 1 \leqslant x < 2 \\ E(x) & \text{si} \quad 3 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$$

   Estudiar la existencia de límite ordinario y de límites laterales de la función f en todos los puntos donde ello tenga sentido. Estudiar también la continuidad de f y clasificar sus discontinuidades.