CAPÍTULO 2

LAS CURVAS DE LORENZ Y EL SISTEMA DE PEARSON

RAFAEL HERRERÍAS PLEGUEZUELO
FEDERICO PALACIOS GONZÁLEZ
JOSÉ CALLEJÓN CÉSPEDES

Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Granada

1. INTRODUCCIÓN

A partir de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria de tipo continuo, finita no negativa, X, se puede obtener la curva de Lorenz correspondiente, que viene dada por, Casas y Núñez, (1991),

$$L(p) = \frac{\int_0^{F^{-1}(p)} t\, dF(t)}{E[x]}, \text{ para } 0 \le p \le 1 \tag{1}$$

siendo F(x) la función de distribución y E(x) el valor esperado de dicha variable.

Por tanto, para obtener una curva de Lorenz a partir de una función generadora, g(x), en principio, se podría buscar primero la función de distribución de la variable aleatoria generada por g(x) y, a partir de ella, mediante la expresión dada en (1), encontrar la expresión de la curva correspondiente.

Sin embargo la vía recogida en este trabajo no corresponde a la anteriormente expuesta, sino más bien por aquella que permita obtener una curva de Lorenz a partir de una función, mediante la integración adecuada. Es decir se pretende, por una parte, encontrar las condiciones que debe una función para que, a partir de ella, se pueda obtener una curva de Lorenz, y por otra parte encontrar la forma funcional de algunas curvas de Lorenz, por este método obtenidas.

Precedentes de esta vía se pueden encontrar en Casas, Herrerías y Núñez, (1990), en cuyo trabajo presentan dos formas de obtención de funciones que modelizan la curva de Lorenz: una mediante combinaciones lineales convexas de formas funcionales utilizadas en la estimación de dicha curva por otros autores y otra, utilizando la ecuación diferencial que genera la familia de distribuciones continuas univariantes de Pearson e iniciando el estudio de la relación entre una función que verifica la ecuación diferencial que define la familia de Pearson y la curva de Lorenz

Es precisamente la utilización de la ecuación diferencial que define la familia de Pearson, la que permite, en su generalización más amplia para el caso de una sola variable, llegar al concepto de función generadora de una curva de Lorenz.

El concepto de función generadora de una distribución continua univariante de probabilidad surgió al considerar el segundo miembro de la ecuación

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x-a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \tag{2}$$

igual a una función real de variable real,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g(x) \tag{3}$$

por tanto, de igual forma, se puede considerar que una función generadora, g(x), de una curva de Lorenz, en principio, ha de verificar (3), para todo x comprendido entre cero y uno. Las condiciones necesarias y suficientes para que una función que verifica (3) sea generadora de una curva de Lorenz se estudian en el epígrafe siguiente.

Lafuente (1994) utiliza distintos casos particulares de funciones generadoras de curvas de Lorenz. Todas ellas obedecen a alguna de las siguientes expresiones:

$$\forall x > 0,\ g(x) = ax + b\ln x + c + \frac{d}{x}, \quad \text{con } a \geq 0, b \leq 0, c \geq 0, d > 0$$

$$\forall x > 0,\ g(x) = \frac{c}{x} + \frac{a(1-x)^{a-1}}{b\left(1-(1-x)^a\right)}, \quad \text{con } 0 \leq a \leq 1; 0 < b \leq 1, c \geq 0,$$

a y c no son cero a la vez

$$\forall x > 0,\ g(x) = \frac{k\,e^{kx}}{e^{kx}-1}, \quad \text{con } k > 0$$

2. FUNCIÓN GENERADORA DE UNA CURVA DE LORENZ

En la siguiente proposición se obtienen las condiciones que debe cumplir una función real de variable real, g(x) para que, a partir de (3), se pueda obtener una curva de Lorenz, *f*(*x*).

Sea *g*(*x*) una función real de variable real, entonces, a partir de

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g(x)$$

se obtiene

$$f(x) = K\, e^{\int g(x)dx} \tag{4}$$

donde K es la constante de integración, cuyo valor se determinará al considerar las condiciones necesarias para que f(x) sea una curva de Lorenz.

PROPOSICIÓN

Sea g(x) una función real de variable real, y sea $G(x) = \int g(x)dx$ *. Para que la función f(x) definida en (4)sea una curva de Lorenz, es condición necesaria y suficiente que se verifique*

1) $K = e^{-G(1)}$

2) $\lim_{x \to o^+} G(x) = -\infty$

3) $g(x) > 0, \quad \forall x \,/\, 0 < x \leq 1$

4) $\left(g(x)\right)^2 + g'(x) > 0, \quad \forall x \,/\, 0 < x \leq 1$

En efecto, son condiciones necesarias puesto que si f(x) es una función que modeliza una curva de Lorenz, entonces es posible definir

$$g(x) = \frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = G'(x) \tag{5}$$

de donde, al integral resulta:

$$f(x) = K\, e^{G(x)}$$

y puesto que $f(x)$ es una curva de Lorenz, se verifica

a) $f(1) = 1$ luego $K\, e^{G(1)} = 1$, de donde $K = e^{-G(1)}$

b) $f(0) = 0$ lo que implica que se verifique $\lim_{x \to 0^+} e^{G(x) - G(1)} = 0$, de donde $\lim_{x \to 0^+} G(x) = -\infty$

c) En el intervalo (0,1], es *f(x)>0*, y además $f(x)$ es creciente, $f'(x) > 0$, entonces $g(x) > 0$

d) Por la concavidad de la función *f, la segunda derivada es positiva ,* $f''(x) \geq 0$. Derivando en (3) resulta, $f''(x) = f(x)\left[\left(g(x)\right)^2 + g'(x)\right]$, y puesto que *f(x)>0* queda probado entonces que $\left(g(x)\right)^2 + g'(x) > 0$.

Recíprocamente, dada una función real de variable real, g(x), que verifica las condiciones impuestas en 1) 2), 3) y 4), entonces, a partir de (4), y la condición 1) se puede definir, para todo x comprendido entre cero y uno, la función

$$f(x) = e^{G(x)-G(1)}, \text{ siendo, } G(x) = \int g(x)dx \tag{6}$$

cuya gráfica verifica los requisitos necesarios para ser considerada una curva de Lorenz, puesto que

i) Esta función *f* es definida positiva y además *f(1)=1*

ii) Puesto que, según 2), $\lim_{x \to o^+} G(x) = -\infty$, entonces $\lim_{x \to o^+} f(x) = 0$

iii) Si *g* es definida positiva, es decir verifica la condición 3), el crecimiento de la función *f* se observa sin más que comprobar el signo de su derivada primera: derivando en (6), $f'(x) = f(x)g(x)$, y puesto que tanto *f* como *g* son definidas positivas, la derivada *f'(x)* también es positiva.

iv) Del hecho de que *f* sea definida positiva y de la condición 4) se deduce la concavidad de la función *f.* A partir de (6) se obtiene $f''(x) = f(x)\left[(g(x))^2 + g'(x)\right]$, y si además $f(x) > 0$ y $(g(x))^2 + g'(x) > 0$ entonces $f''(x) > 0$.

Obsérvese que i), ii) iii) y iv) , junto a la necesaria existencia de G(1), pues sin ello no sería posible la definición (6) se obtiene una función que modeliza una curva de Lorenz..

EJEMPLO 1

Si *g(x)* es una función polinómica, a partir de ella no se puede generar una curva de Lorenz, pues su integral, *G(x)*, también es un polinomio, lo que hace imposible que $\lim_{x \to o^+} G(x) = -\infty$.

EJEMPLO 2

La función definida por

$$\forall x > 0, \quad g(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} \quad \text{con} \quad a_0 > 0, a_1 > 1$$

verifica las condiciones necesarias y suficientes para que, a partir de ella, se pueda obtener una curva de Lorenz, utilizando la definición (6). En efecto

$$G(x) = \int g(x)dx = a_0 x + a_1 \ln x$$

siendo $G(1) = a_0$ y se verifica que

1) $\lim\limits_{n\to 0^+} G(x) = -\infty$

2) $g(x) > 0 \quad \forall x \in (0,1]$

3) $\left(g(x)\right)^2 + g'(x) = a_0^2 + \dfrac{2a_0a_1}{x} + \dfrac{a_1(a_1-1)}{x^2}$

y puesto que $a_0 > 0, a_1 > 1$, la suma $\left(g(x)\right)^2 + g'(x)$ es positiva, $\forall x \in (0,1]$.

Por tanto, se puede generar una curva de Lorenz, cuya forma funcional es:

$$f(x) = e^{G(x)-G(1)} = x^{a_1} e^{a_0(x-1)} \tag{7}$$

EJEMPLO 3

La función definida por

$$\forall x > 0, \quad g(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} \quad \text{con} \quad a_0 > 0, a_1 > 1, a_2 > 0$$

verifica las condiciones necesarias y suficientes para que, a partir de ella, se pueda obtener una curva de Lorenz, utilizando la definición (6). En efecto

$G(x) = \int g(x)dx = a_0 x + a_1 \ln x - \dfrac{a_2}{x}$ siendo $G(1) = a_0 - a_2$ y se verifica que

1) $\lim\limits_{n\to 0^+} G(x) = -\infty$

2) $g(x) > 0 \quad \forall x \in (0,1]$

3) $\left(g(x)\right)^2 + g'(x) = a_0^2 + \dfrac{2a_1a_2}{x} + \dfrac{2a_0a_2 + a_1(a_1-1)}{x^2} + \dfrac{2a_2(a_1-1)}{x^3} + \dfrac{a_2^2}{x^4}$

y puesto que $a_0 > 0, a_1 > 1, a_2 > 0$, la suma $\left(g(x)\right)^2 + g'(x)$ es positiva, $\forall x \in (0,1]$

Por tanto, se puede generar una curva de Lorenz, cuya forma funcional es:

$$f(x) = e^{G(x)-G(1)} = x^{a_1} e^{a_0(x-1)+a_2\left(1-\frac{1}{x}\right)} \tag{8}$$

En el anexo I se representan las gráficas obtenidas en (7) y (8), con el objetivo de observar, las distintas posiciones que ocupa, (área del recinto que delimita con la bisectriz del primer cuadrante), en función del valor de sus parámetros a_0, a_1 y a_2. En ambos casos la mayor concentración corresponde a valores mayores de sus parámetros.

Puede modelizarse desde una casi nula concentración hasta una concentración muy alta.

En el anexo II se recogen, sobre los mismos ejes, dos gráficas de la función (8), para distintos valores de sus parámetros. En este caso el objetivo consiste en observar que se cortan en un punto y, por tanto, pudieran utilizarse para una misma modelización.

3. FUNCIÓN GENERADORA DE UNA CURVA DE LORENZ Y EL SITEMA UNIVARIANTE CONTINUO DE PEARSON

La curva de Lorenz (7), obtenida a partir de la función generadora del ejemplo 2, verifica la ecuación diferencial que define el sistema de Pearson univariante continuo. Sin embargo la obtenida en (8), ejemplo 3, sólo la verifica si a_0 es cero. El método de los momentos, utilizado para estimar la función de densidad de una distribución continua univariante, que pertenece a la familia de Pearson, también puede utilizarse para, obtener la correspondiente curva de Lorenz. Por ello, resulta interesante conocer qué funciones de las que verifican la ecuación diferencia de Pearson, pueden ser generadoras de una curva de Lorenz. Casas, Herrerías y Núñez, (1990), manifestaron el deseo de conocer si todas las curvas que satisfacen la ecuación diferencial que define la familia de Pearson cumplen la condición necesaria de las curvas de Lorenz.

La proposición anterior permite estudiar las condiciones que deben cumplir los coeficientes de la función que verifica la ecuación diferencial de Pearson para que sea función generadora de una curva de Lorenz.

A continuación se hace un estudio completo de las condiciones que se han de cumplir para que una función definida de la forma

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x-a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

permita construir una curva de Lorenz.

PRIMER CASO $b_1 = b_2 = 0$

Entonces la función $g(x) = \dfrac{x-a}{b_0}$ es polinómica y no permite generar una curva de Lorenz.

SEGUNDO CASO $b_1 \neq 0; b_2 = 0$

Para que la función $g(x) = \dfrac{x-a}{b_0 + b_1 x}$ *sea generadora de una curva de Lorenz., es condición necesaria y suficiente que*

1) $a < 0$

2) $b_0 = 0$

3) $0 < b_1 < -a$

En efecto, es condición necesaria puesto que si g(x) es una función generadora de una curva de Lorenz, entonces

$$G(x) = \int g(x)dx = \frac{x}{b_1} - \frac{ab_1 + b_0}{b_1^2}\ln(b_0 + b_1 x)\,,$$

y de la condición $\lim\limits_{x \to 0^+} G(x) = -\infty$ se desprende, como única solución, que

$$b_0 = 0; \quad b_1 > 0; \quad \frac{a}{b_1} < 0\,.$$

De estas dos últimas desigualdades se desprende que *a* ha de ser negativo. Sustituyendo estos valores en *g* y G queda,

$$g(x) = \frac{x-a}{b_1 x}$$

y

$$G(x) = \frac{x - a\ln(b_1 x)}{b_1}\,.$$

Por otra parte, al ser g(x) generadora de curva de Lorenz, se verifica que

$$(g(x))^2 + g'(x) > 0, \quad \forall x / 0 < x \le 1\,,$$

en este caso,

$$(g(x))^2 + g'(x) = \frac{(x-a)^2 + ab_1}{b_1^2 x^2} > 0$$

de donde

$$(x-a)^2 + ab_1 > 0$$

Dado que *a* es negativo y x está comprendido entre cero y uno, el caso extremo se produce para x=0, siendo $a^2 > -ab_1$ de donde $-a > b_1$

La suficiencia se prueba a partir de las condiciones de los coeficientes siguiendo los mismos pasos en orden inverso, y la función que modeliza la curva de Lorenz es:

$$f(x) = x^{\frac{-a}{b_1}} e^{\frac{1}{b_1}(x-1)} \tag{9}$$

Obsérvese que este segundo caso coincide plenamente con el ejemplo número 2. Constituyen la misma forma funcional y sólo se diferencian en los parámetros utilizados. Resulta inmediato comprobar que las condiciones exigidas a unos coeficientes y a otros también coinciden.

TERCER CASO $b_2 \neq 0$

El estudio de este caso se realiza atendiendo a las posibles raíces del denominador: dos reales distintas, una real doble o dos complejas.

A) El denominador posee dos raíces reales distintas

La condición necesaria y suficiente para que la función

$$g(x) = \frac{x-a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}, \quad b_2 \neq 0, \; 0 < x \leq 1$$

en la que el denominador posee dos raíces reales, α *y* β *, distintas, permita generar una curva de Lorenz es que los coeficientes cumplan:*

1) $b_0 = 0$

2) $a < 0$

3) $0 < b_1 < -a$

4) $0 < b_2 \leq 1 + \dfrac{a(a+b_1)}{1-2a}$

En efecto, es condición necesaria: dada la función generadora

$$g(x) = \frac{x-a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \text{ con } b_2 \neq 0$$

cuyo denominador posee dos raíces reales, α y β , distintas, se tiene

$$G(x) = \int g(x)dx = \frac{1}{b_2}\left(\frac{\alpha - a}{\alpha - \beta}\ln(x-\alpha) + \frac{\beta - a}{\beta - \alpha}\ln(x-\beta)\right)$$

De la condición

$$\lim_{x \to 0^+} G(x) = \frac{1}{b_2}\left(\frac{\alpha - a}{\alpha - \beta}\ln(-\alpha) + \frac{\beta - a}{\beta - \alpha}\ln(-\beta)\right) = -\infty$$

se deduce que una de las dos soluciones es cero y la otra negativa, es decir $\alpha < 0;\; \beta = 0$ ó bien $\alpha = 0;\; \beta < 0$, (no se estudia la posibilidad $\alpha = \beta = 0$, pues estamos estudiando el caso de que las dos soluciones reales sean distintas). Además, para que el límite anterior sea menos infinito, se ha cumplir que $a/\alpha b_2 > 0$.

Sin pérdida de generalidad sea $\alpha < 0;\; \beta = 0$. Si una de las soluciones del denominador es cero, su término independiente ha de ser cero, $b_0 = 0$. Si la otra solución ha de ser negativa, no es cero, entonces ha de ser $b_1 \neq 0$. De $\alpha < 0$ y $a/\alpha b_2 > 0$ se deduce que $a/b_2 < 0$, es decir a y b_2 tienen distinto signo.

La función *g(x)* puede escribirse como:

$$g(x)=\frac{x-a}{b_1x+b_2x^2} \text{ con } b_1\neq 0 \text{ y } b_2\neq 0$$

por tanto las soluciones del denominador son $\beta=0$ y $\alpha=-b_1/b_2$ y puesto que α ha de ser negativo se deduce que b_1 y b_2 tienen el mismo signo.

La función G(x), se puede escribir:

$$G(x)=\frac{b_1+ab_2}{b_1b_2}\ln(b_2x+b_1)-\frac{a}{b_1}\ln x$$

y dado que $0<x\leq 1$ y que b_1 y b_2 han de tener el mismo signo, para que G(x) exista, es condición indispensable que b_1 y b_2 sean positivos y por tanto a negativo.

Las dos condiciones hasta ahora impuestas hacen que *a* sea negativa que b_0 valga cero y que b_1 y b_2, sean positivos.

Puesto que la función f(x), modeliza una curva de Lorenz, su derivada ha de ser positiva, por tanto se verifica

$$g(x)=\frac{x-a}{b_1x+b_2x^2}>0$$

de donde, y teniendo en cuenta las condiciones anteriormente expuestas que deben cumplir los coeficientes, b_1 y b_2, (ambos positivos), sólo se deduce que $a<x$, algo que también ya es conocido.

Sólo queda por estudiar cómo condiciona a los coeficientes la concavidad de la curva de Lorenz. Puesto que

$$(g(x))^2+g'(x)>0, \quad \forall x/0<x\leq 1$$

se ha de cumplir que

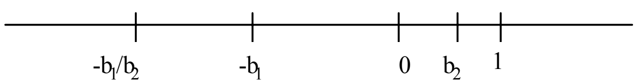
$$\frac{(1-b_2)x^2-2a(1-b_2)x+a(a+b_1)}{(b_1x+b_2x^2)^2}>0$$

y por tanto

$$(1-b_2)x^2-2a(1-b_2)x+a(a+b_1)>0 \quad con \quad 0<x\leq 1 \qquad (10)$$

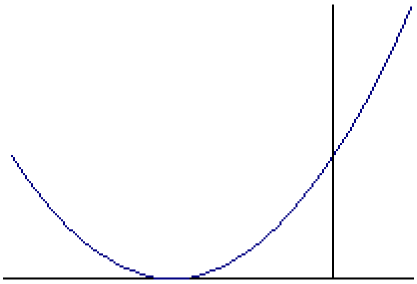
Este trinomio de segundo grado se estudia bajo distintos supuestos para el coeficiente b_2, del que ya sabemos que ha de ser positivo:

1) Si $0<b_2<1$, (obsérvese que este caso $-b_1/b_2<-b_1$),

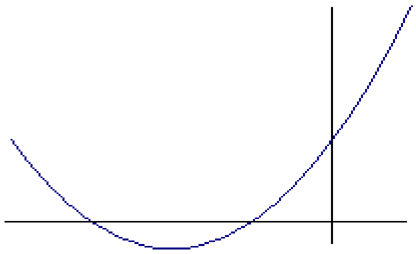


la función $y=(1-b_2)x^2-2a(1-b_2)x+a(a+b_1)$ posee un mínimo en el punto $(a,a(b_1+ab_2))$.

La inecuación (10) se verifica cuando:



a) El mínimo está en el segundo cuadrante o sobre eleje x, es decir $a(b_1 + ab_2) \geq 0$ y puesto que *a* es negativo, $b_1 + ab_2 \leq 0$, luego $a \leq -b_1/b_2$.

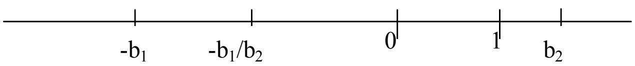


b) El mínimo está en el tercer cuadrante, pero la parábola corta al eje y en un valor mayor o igual que cero, es decir: $a(b_1 + ab_2) < 0$ a la vez que $a(a + b_1) \geq 0$.

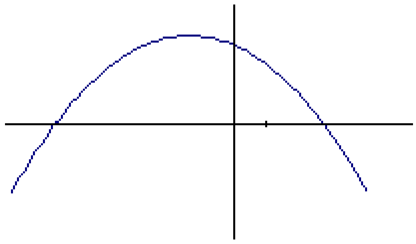
De ambas condiciones se deduce que $\dfrac{-b_1}{b_2} < a < -b_1$.

Por tanto se puede concluir que para $0 < b_2 < 1$ la inecuación (10) se verifica si y sólo si $a < -b_1$

2) Si $b_2 > 1$, (obsérvese que $-b_1 < -b_1/b_2$),



la función $y = (1 - b_2)x^2 - 2a(1 - b_2)x + a(a + b_1)$, posee un máximo en el punto $(a, a(b_1 + ab_2))$.



La inecuación (10) se verifica cuando el máximo está por encima del eje de las x, $a(b_1 + ab_2) > 0$ es decir $a < -b_1/b_2$ y además una de las dos raíces del polinomio $(1-b_2)x^2 - 2a(1-b_2)x + a(a+b_1)$ es mayor o igual que uno, (la otra evidentemente es negativa). Para que una raíz sea mayor o igual que uno, cuando x=1, la parábola ha de ser positiva o cero, esto es:

$$1 - b_2 - 2a + 2ab_2 + a^2 + ab_1 \geq 0\,;$$

$$b_2 \leq 1 + \frac{a(a+b_1)}{1-2a}$$

y para que el conjunto de posibles valores de b_2 no sea vacío ha de ocurrir que $\frac{a(a+b_1)}{1-2a} > 0$, de donde se deduce que $a < -b_1$.

Por tanto se puede concluir que para $b_2 > 1$ la inecuación (10) se verifica si y sólo si $a < -b_1$.

3) Si $b_2 = 1$ entonces $a(a+b_1) \geq 0$. Puesto que a es negativa, entonces $a < -b_1$

Recíprocamente el mismo camino seguido en la necesidad se puede utilizar para demostrar la suficiencia, pues si los coeficientes verifican las condiciones exigidas, se verifica la inecuación (10), por lo que *f* es cóncava, *g(x)* es positiva, luego *f* es creciente, existe *G(1)* y el límite de *G(x)* cuando x tiende a cero es menos infinito, de donde se deduce que la función

$$f(x) = e^{G(x)-G(1)}$$

modeliza una curva de Lorenz.

B) El denominador posee una raíz real doble

La condición necesaria y suficiente para que la función

$$g(x) = \frac{x-a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}\,, \quad b_2 \neq 0\,,\ 0 < x \leq 1$$

cuyo denominador posee una raíz real doble, α *, permita generar una curva de Lorenz es que es que los coeficientes cumplan:*

1) $b_0 = 0$

2) $b_1 = 0$

3) $a < 0$

4) $0 < b_2 \leq 1 + \dfrac{a^2}{1-2a}$

En efecto, es condición necesaria: dada la función generadora

$$g(x) = \frac{x-a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \quad \text{con} \quad b_2 \neq 0$$

cuyo denominador posee una raíz real doble, α , se tiene

$$G(x) = \int g(x)dx = \frac{1}{b_2}\left(\ln(x-\alpha) + \frac{a-\alpha}{x-\alpha} \right)$$

De la condición

$$\lim_{x\to 0} G(x) = \frac{1}{b_2}\left(\ln(-\alpha) + \frac{a-\alpha}{-\alpha} \right) = -\infty$$

ha de ser $\alpha = 0$, $b_0 = b_1 = 0$, y $b_2 > 0$. Entonces:

$$g(x) = \frac{x-a}{b_2 x^2}, \quad G(x) = \frac{1}{b_2}\left(\ln(x) + \frac{a}{x} \right)$$

Puesto que la función *f* modeliza la curva de Lorenz, *g(x)* ha de ser positiva, y teniendo en cuenta que $b_2 > 0$ ha de ocurrir que $x - a > 0$ y por tanto $a < 0$.

Sólo queda por estudiar cómo condiciona a los coeficientes la concavidad de la curva de Lorenz. Puesto que

$$(g(x))^2 + g'(x) > 0, \quad \forall x / 0 < x \leq 1$$

se ha de cumplir que

$$\frac{(1-b_2)x^2 - 2a(1-b_2)x + a^2}{(b_2 x^2)^2} > 0$$

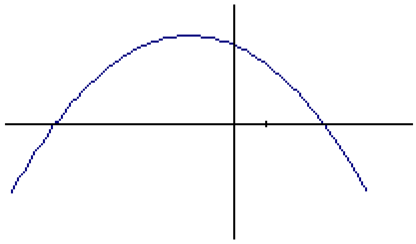
y por tanto

$$(1-b_2)x^2 - 2a(1-b_2)x + a^2 > 0 \quad con \quad 0 < x \leq 1 \tag{11}$$

De la misma forma que en la proposición anterior, este trinomio de segundo grado se estudia bajo distintos supuestos para el coeficiente b_2, del que ya sabemos que ha de ser positivo:

1) Si $0 < b_2 < 1$, la función $y = (1 - b_2)x^2 - 2a(1 - b_2)x + a^2$, posee un mínimo en el punto $(a, a^2 b_2)$. La inecuación (11) se verifica siempre pues la ordenada del mínimo es positiva.

2) Si $b_2 > 1$, la función $y = (1 - b_2)x^2 - 2a(1 - b_2)x + a^2$, posee un máximo en el punto $(a, a^2 b_2)$. que pertenece al segundo cuadrante.



La inecuación (11) se verifica cuando una de las raíces del polinomio $(1 - b_2)x^2 - 2a(1 - b_2)x + a^2$ es mayor o igual que uno.
De igual forma que antes, cuando x=1, la parábola ha de ser positiva o cero, esto es:

$$1 - b_2 - 2a + 2ab_2 + a^2 \geq 0 \; ; \; b_2 \leq 1 + \frac{a^2}{1 - 2a}$$

Obsérvese que el conjunto de posibles valores de b_2 no es vacío pues $\frac{a^2}{1 - 2a} > 0$, ya que $a < 0$.

3) Si $b_2 = 1$ entonces queda $a^2 \geq 0$. que evidentemente siempre se verifica.

La demostración de la suficiencia se puede hacer siguiendo los mismos pasos pero en orden inverso.
Obsérvese que esta proposición es el caso particular de la anterior en el que $b_1 = 0$

<u>C) El denominador no posee raíces reales</u>

Una función de la forma

$$g(x) = \frac{x - a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}, \quad b_2 \neq 0, \; 0 < x \leq 1$$

cuyo denominador no posee raíces reales, no permite generar una curva de Lorenz.
En efecto, sean α y β dos números reales tales que

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = b_2\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right)$$

calculando la función *G(x),* resulta:

$$G(x) = \int g(x)dx = \frac{1}{2b_2}\ln\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right) + \frac{\alpha - a}{\beta b_2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$$

el límite de *G(x)* cuando x tiende a cero ha de ser igual a menos infinito, lo que supone que $\alpha = \beta = 0$. Se trataría entonces del caso anterior, una solución real doble.

BIBLIOGRAFÍA

CALLEJÓN, J. (1995). *Un nuevo método para generar distribuciones de probabilidad. Problemas asociados y Aplicaciones.* Universidad de Granada.

CALLEJÓN J. (1995). Función generadora de una curva de Lorenz IX Reunión ASEPELT-España. Volumen IV. Análisis de Empresa. Métodos estadísticos y econométricos. Santiago de Compostela, pp. 343-350

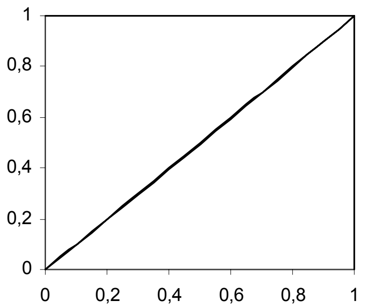
CASAS, J.M., HERRERÍAS, R. y NÚÑEZ, J. (1990). *Familias de formas funcionales para estimar la curva de Lorenz.* IV Reunión Anual ASEPELT-ESPAÑA. Murcia.

CASAS, J.M. y NÚÑEZ, J. (1991). *Sobre la medición de la desigualdad y conceptos afines*. Actas de la V Reunión Anual ASEPELT-ESPAÑA. Las Palmas.

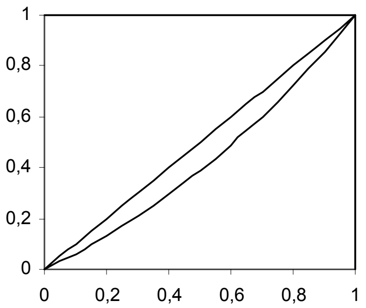
HERRERÍAS, R.(1975). *Sobre las estructuras estadísticas de Pearson y exponenciales, problemas asociados.* Publicaciones de la Facultad de Ciencias de Granada.

LAFUENTE, M. (1994). *Medidas de cuantificación de la Desigualdad: La Desigualdad de la Renta en España según la E.P.F. 1990-91*. Tesis Doctoral. Universidad de Murcia.

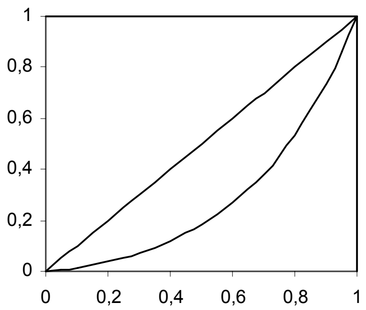
ANEXO I $\quad f(x) = x^{a_1} e^{a_0(x-1)}$



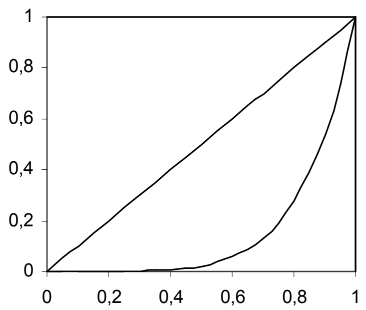
$a_0 = 0{,}01 \quad a_1 = 1{,}01$



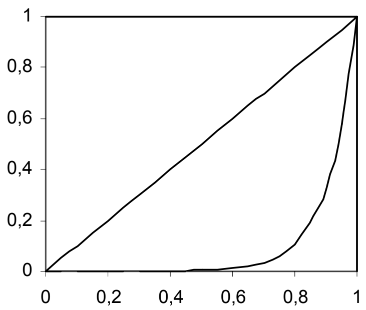
$a_0 = 0{,}5 \quad a_1 = 1{,}01$



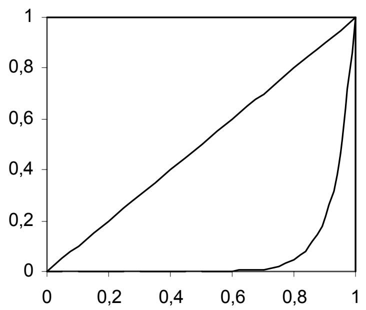
$a_0 = 2 \quad a_1 = 1{,}01$



$a_0 = 2 \quad a_1 = 4$

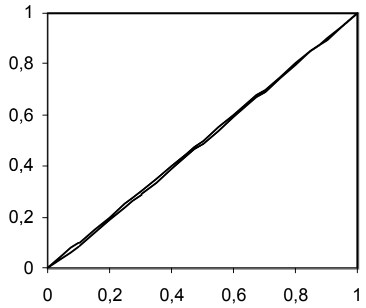


$a_0 = 10 \quad a_1 = 1{,}01$

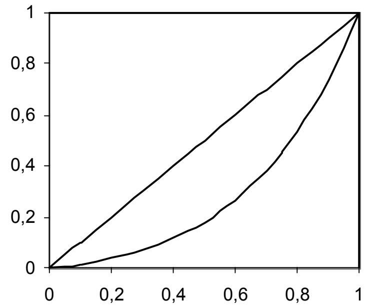


$a_0 = 10 \quad a_1 = 5$

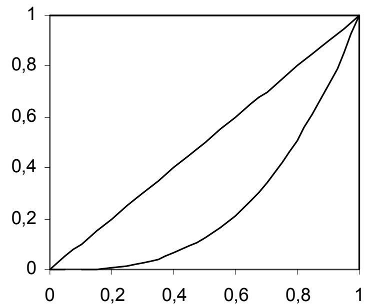
ANEXO I $\quad f(x) = x^{a_1} e^{a_0(x-1)+a_2\left(1-\frac{1}{x}\right)}$



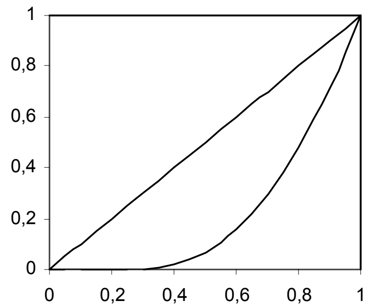
$a_0 = 0{,}01, \quad a_1 = 1{,}01, \quad a_2 = 0{,}01$



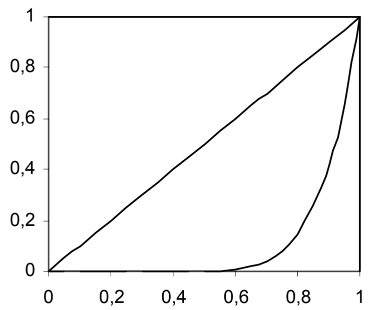
$a_0 = 2, \quad a_1 = 1{,}01, \quad a_2 = 0{,}01$



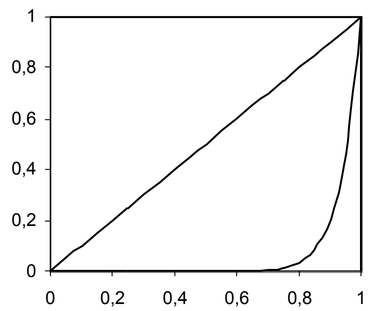
$a_0 = 0{,}01, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 0{,}01$



$a_0 = 0{,}01, \quad a_1 = 1{,}01, \quad a_2 = 2$

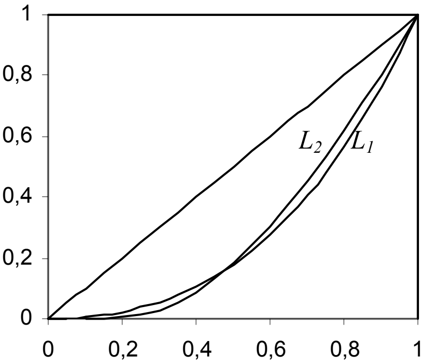


$a_0 = 0{,}01, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 5$



$a_0 = 5, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = 5$

ANEXO II $\quad f(x) = x^{a_1} e^{a_0(x-1)+a_2\left(1-\frac{1}{x}\right)}$



$L_1 \quad a_0 = 0{,}5, \quad a_1 = 2{,}1, \quad a_2 = 0{,}01$

$L_2 \quad a_0 = 0{,}01, \quad a_1 = 1{,}01, \quad a_2 = 1$