TEMA 3

Anillos. Dominios euclídeos.

Ejercicio 3.1. Sea X un conjunto no vacío y $R = \mathcal{P}(X)$, el conjunto de partes de X. Si se consideran en R las operaciones:

$$A + B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

$$A \times B = A \cap B$$

demostrar que $(R, +, \times)$ es un anillo con elemento 1 igual a X.

Ejercicio 3.2. Sea A un grupo abeliano y consideremos el producto cartesiano $R = \mathbb{Z} \times A$. Si en R definimos las siguientes operaciones:

$$(n, a) + (m, b) = (n + m, a + b)$$

$$(n, a)(m, b) = (nm, ma + nb)$$

demostrar que $(R, +, .)$ es un anillo conmutativo con elemento 1 igual a (1,0).

Ejercicio 3.3. En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros se definen las siguientes operaciones:

$$a \oplus b = a + b - 1 \; y \; a \otimes b = a + b - ab.$$

Demuestra que $\langle \mathbb{Z}, \oplus, \otimes \rangle$ es un dominio de integridad.

Ejercicio 3.4. En el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de las parejas de enteros se definen las siguientes operaciones:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \; y \; (a, b)(c, d) = (ac, bd)$$

Demuestra que $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, . \rangle$ es un anillo conmutativo. Prueba que no es dominio de integridad y calcula sus unidades y sus divisores de cero.

Ejercicio 3.5. En un anillo R un elemento a es idempotente si $a^2 = a$. Demuestra que en un dominio de integridad los únicos idempotentes son 0 y 1.

Ejercicio 3.6. Determinar los ideales del anillo cociente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Describir el retículo de ideales de este anillo cuando $n = pq$ siendo p y q primos positivos distintos.

Ejercicio 3.7. Demostrar que un cuerpo es un dominio de integridad.

Ejercicio 3.8. Sea R un dominio de integridad y $a, b, c \in R$. Demostrar:

1. $b|a \Rightarrow b|ac$.

2. $\left.\begin{array}{l} b|a \\ c|b \end{array}\right\} \Rightarrow c|a.$

3. $\left.\begin{array}{l} b|a \\ b|(a+c) \end{array}\right\} \Rightarrow b|c.$

4. $\left.\begin{array}{l} b|a \\ b \nmid c \end{array}\right\} \Rightarrow b \nmid (a+c).$

5. Si $c \neq 0$, $bc|ac \Leftrightarrow b|a$.

Ejercicio 3.9. El conjunto $A = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\} \subseteq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ es cerrado para la suma y el producto.

- Demostrar que A es un cuerpo.
- Demostrar que A no es un subanillo de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Ejercicio 3.10. ¿Cuales de los siguientes conjuntos son subanillos del cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales? (Siempre que aparece $\frac{n}{m}$ suponemos que $m.c.d.(n,m) = 1$).

1. $\{\frac{n}{m} \mid m$ es impar$\}$
2. $\{\frac{n}{m} \mid m$ es par$\}$
3. $\{\frac{n}{m} \mid 4 \nmid m\}$
4. $\{\frac{n}{m} \mid (m,6) = 1\}$
5. ¿Es alguno de los subconjuntos anteriores un ideal de $\mathbb{Q}$?

Ejercicio 3.11. Sea $f : R \to R$ un homomorfismo de anillos y sea

$$S = \{a \in R\,;\; f(a) = a\}.$$

Demostrar que S es un subanillo de R.

Ejercicio 3.12. Sea R un anillo y sea $a \in R$ un elemento invertible. Demostrar que la aplicación $f_a : R \to R$ dada por $f_a(x) = axa^{-1}$ es un automorfismo de R.

Ejercicio 3.13. Dado un anillo R, demostrar que existe un único homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}$ en R.

Ejercicio 3.14. Demostrar que si A es un anillo de característica n entonces existe un único homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en A y que además este homomorfismo es inyectivo.

Ejercicio 3.15. Dados dos números naturales n y m, dar condiciones para que exista un homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Ejercicio 3.16. Describir los ideales de $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$ enumerando los elementos de cada uno de ellos.

Ejercicio 3.17. Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) El anillo $\frac{\mathbb{Z}}{(6\mathbb{Z}+4\mathbb{Z})\cap 5\mathbb{Z}} \times \mathbb{Q}$ tiene 4 unidades e infinitos divisores de cero.

ii) Existe un único homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}$ en $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$ que es sobreyectivo.

iii)$\mathbb{Z}_{1457}$ es un cuerpo.

iv) De $\mathbb{Z}_7$ en $\mathbb{Z}_{14}$ hay exactamente 7 homomorfismos de anillos.

Ejercicio 3.18. Calcular en $\mathbb{Z}[i]$ todos los elementos z que cumplan $N(z) \leq 5$, ¿cuales de ellos son irreducibles?.

Ejercicio 3.19. Calcula $\mathcal{U}(R)$ las unidades del anillo R en los casos $R = \mathbb{Z}[i]$ y $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Ejercicio 3.20. Comprobar que los elementos 2, 3, $4+\sqrt{10}$, $4-\sqrt{10}$ son irreducibles en $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ pero no son primos. Como consecuencia deducir que en $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ hay dos factorizaciones en irreducibles de 6 distintas.

Ejercicio 3.21. Demostrar que los elementos 2, 7, $1+\sqrt{-13}$ y $1-\sqrt{-13}$ son irreducibles no asociados en $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$. Encontrar dos factorizaciones distintas en irreducibles de 14 y a partir de ella concluir que en $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ hay elementos irreducibles que no son primos.

Ejercicio 3.22. En el anillo $\mathbb{Z}[i]$ calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de $a = 2i$ y $b = 3-7i$. Calcular además elementos u y v tales que $ua + vb = \text{mcd}(a, b)$.

Ejercicio 3.23. Calcular las unidades de $\mathbb{Z}\sqrt{-3}$ y demostrar que en este anillo $4 = 2.2 = (1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$ son dos factorizaciones en irreducibles distintas del elemento 4. Razonar que los elementos en las factorizaciones no son primos.

Ejercicio 3.24. En el anillo $\mathbb{Z}[i]$ calcular elementos u y v tales que

$$(2+5i)u + (3-4i)v = 1+i.$$

Ejercicio 3.25. Da la solución general, si existe, de la ecuación diofántica en $\mathbb{Z}[i]$,

$$4x + (3+3i)y = -1+5i\ .$$

Ejercicio 3.26. Factoriza $15+42i$ y $9-2i$ en $\mathbb{Z}[i]$. Calcula $mcd(15+42i, 9-2i)$.

Ejercicio 3.27. En $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ factoriza $3+\sqrt{3}$ en irreducibles y calcula $\text{m.c.d.}(3+\sqrt{3}, 2)$ y $\text{m.c.m.}(3+\sqrt{3}, 2)$.

Ejercicio 3.28. Demuestra que los elementos $2, 1+\sqrt{-7}, 1-\sqrt{-7}$ de $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ son irreducibles pero no son primos y encuentra dos factorizaciones que no sean esencialmente idénticas de 8 en irreducibles. ¿Que se puede concluir entonces de las propiedades aritméticas de $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$?

Ejercicio 3.29. Sea $a+bi \in \mathbb{Z}[i]$ un elemento tal que $ab \neq 0$. Probar que es primo si y solo si a^2+b^2 es un primo.

Ejercicio 3.30. En el anillo $\mathbb{Z}[i]$ se consideran los elementos $x = 1 + 3i$, $y = 3 + 4i$. Factorizar x e y como producto de irreducibles y calcular su m.c.d. y su m.c.m.

Ejercicio 3.31. En el anillo $\mathbb{Z}[i]$ resolver el siguiente sistema de congruencias

$$\left.\begin{array}{ccccc} x & \equiv & i & \text{mod} & 3 \\ x & \equiv & 2 & \text{mod} & 2+i \\ x & \equiv & 1+i & \text{mod} & 3+2i \\ x & \equiv & 3+2i & \text{mod} & 4+i \end{array}\right\}$$

Ejercicio 3.32. Resolver, dando la solución general, el siguiente sistema de congruencias en $\mathbb{Z}[i]$:

$$\left.\begin{array}{cccc} x & \equiv & 1 & (\text{mod} \quad 1+2i) \\ x & \equiv & 1-i & (\text{mod} \quad 1+3i) \\ x & \equiv & 2i & (\text{mod} \quad 3+2i) \end{array}\right\}$$

Ejercicio 3.33. Calcular en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ el m.c.d. y el m.c.m. de los elementos 3 y $2 + \sqrt{-2}$.

Ejercicio 3.34. En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ resolver el siguiente sistema de congruencias

$$\left.\begin{array}{ccccc} x & \equiv & 1+2\sqrt{-2} & \text{mod} & 2-3\sqrt{-2} \\ x & \equiv & 3 & \text{mod} & 1+\sqrt{-2} \end{array}\right\}$$

Ejercicio 3.35. En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ comprobar que $4 = 2 \cdot 2$ y $4 = (1+\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})$ son dos factorizaciones en irreducibles no equivalentes, ¿es $(1+\sqrt{5})$ primo?.

Ejercicio 3.36. Factorizar en irreducibles los siguientes elementos: $11 + 7i$ en $\mathbb{Z}[i]$; $4 + 7\sqrt{2}$ 2n $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$; $4 - \sqrt{-3}$ en $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

Ejercicio 3.37. Hallar el m.c.d. y las expresiones de Bezout para las siguientes parejas de elementos de $\mathbb{Z}[i]$: $11 + 7i$ y $3 + 7i$; $8 + 6i$ y $5 - 15i$; $16 + 7i$ y $10 - 5i$.

Ejercicio 3.38. i) Encontrar u y v en $\mathbb{Z}[i]$ tales que

$$4u + (3 + 3i)v = -1 + 5i$$

.

ii) En $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de $2 + \sqrt{-2}$ y 3.

Ejercicio 3.39. i) Resolver el siguiente sistema de congruencias en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ y dar una solución de norma mayor que 7:

$$x \equiv 2\,(\ \text{mod}\ 1+\sqrt{-2})\ ;\ x \equiv \sqrt{-2}\,(\ \text{mod}\ 3+\sqrt{-2})$$

ii) Dar la solución general de la ecuación en $\mathbb{Z}$ $6783x + 613y = 3$.

iii) Calcular $m.c.d.(-1 + 3i, 2)$ en $\mathbb{Z}[i]$.

iv) Descomponer $-3 + 9i$ en factores primos en $\mathbb{Z}[i]$.

Ejercicio 3.40. i) Calcular $m.c.d.(18-i, 11+7i)$ en $\mathbb{Z}[i]$.

ii) Verificar que $4 = 2.2 = (1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$ es un ejemplo de factorización no única en elementos irreducibles en $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

Ejercicio 3.41. Resolver en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ el siguiente sistema de congruencias: $x \equiv 1+2\sqrt{-2}(\bmod\ 2-3\sqrt{-2}); x \equiv 3(\bmod\ 1+\sqrt{-2})$.

Ejercicio 3.42. Resolver en $\mathbb{Z}$ la congruencia $3293x \equiv 222(\bmod\ 8991)$ y en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ la congruencia $(2+\sqrt{2})x \equiv 3-\sqrt{2}(\bmod\ 3)$.

Ejercicio 3.43. Razonar si existe, en el anillo cociente $A = \mathbb{Z}[i]/(2+2i)$, el inverso de la clase del elemento $2+3i$. Encontrar, si existe, un divisor de cero no nulo en A. ¿Es A un cuerpo?

Ejercicio 3.44. Resolver, dando la solución general, el siguiente sistema de congruencias en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$:

$$\left.\begin{array}{rcccc} x & \equiv & 1+\sqrt{-2} & (\text{mod} & 3+\sqrt{-2}) \\ x & \equiv & 5 & (\text{mod} & 2+\sqrt{-2}) \end{array}\right\}$$

Ejercicio 3.45. Encuentra todas las soluciones en $\mathbb{Z}[i]$ de la ecuación $(3+2i)x+5iy = 4$.

Ejercicio 3.46. Sea R el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$.

1. Demuestra que 2, 3, $1+\sqrt{-11}$ y $1-\sqrt{-11}$ son irreducibles en R.
2. ¿Son primos? (ten en cuenta que $12 = 2^2 3 = (1+\sqrt{-11})(1-\sqrt{-11})$).

Ejercicio 3.47. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de $1+4\sqrt{-2}$ y $5+2\sqrt{-2}$ en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

Ejercicio 3.48. Encuentra todas las soluciones en $\mathbb{Z}[i]$ de

$$\left\{\begin{array}{rccl} (1+i)x & \equiv & 2 & (\text{mod } 3), \\ 2x & \equiv & i & (\text{mod } 2+i). \end{array}\right.$$

Ejercicio 3.49.

1. Probar que en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, la igualdad

$$9 = 3.3 = (2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$$

proporciona dos factorizaciones distintas en irreducibles (aunque no en primos) del elemento 9.

2. Resolver, si es posible, la siguiente congruencia en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

$$(1+\sqrt{-2})\,x \quad \equiv \quad 2-\sqrt{-2} \quad (\text{mod} \quad \sqrt{-2})$$

Ejercicio 3.50.

1. Encuentra todas las soluciones en $\mathbb{Z}[i]$ de la ecuación $(3+i)x+4y = 4+2i$.
2. En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ se tiene la igualdad

$$18 = 2.3.3 = (1+\sqrt{-17})(1-\sqrt{-17}).$$

Utilizando esta igualdad demuestra que en $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ hay elementos irreducibles que no son primos.

3. Dados los elementos $a = 4-\sqrt{2}$ y $b = -1-5\sqrt{2}$ del anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Calcula, en los casos en que existan, $mcd(a, b)$, $mcm(a, b)$ y la factorización en irreducibles de $mcm(a, b)$.

Ejercicio 3.51. Estudiar si el sistema siguiente de congruencias en $\mathbb{Z}[i]$ tiene solución y, en caso afirmativo, dar la solución general:

$$\left.\begin{array}{rcll} x & \equiv & i & \pmod{1-2i} \\ (2+i)x & \equiv & i & \pmod{1+i} \\ x & \equiv & -i & \pmod{2-i} \end{array}\right\}$$

Ejercicio 3.52. Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Todo subanillo de un anillo no conmutativo es no conmutativo.
2. Hay un anillo cociente del anillo $\mathbb{Z}_{12}$ que tiene 8 elementos.
3. Si α es el ideal principal de $\mathbb{Z}[i]$ generado por el elemento $3 + i$ y β el generado por el elemento $2 + 2i$, entonces el anillo cociente $\frac{\mathbb{Z}[i]}{\alpha+\beta}$ es un cuerpo con dos elementos.
4. De la factorización $15 = 3.5 = (1+\sqrt{-14})(1-\sqrt{-14})$ en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ se deduce que dicho anillo no es un dominio euclídeo.
5. La congruencia en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $(2+\sqrt{2})x \equiv 3+2\sqrt{2} \pmod{3-\sqrt{2}}$, tiene solución.

1.1 Ejercicios de Exámenes

Ejercicio 3.53. (Propuesto en Examen Final Febrero 2011)

1. Resolver, si es posible, el siguiente sistema de congruencias en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ dando la solución general:

$$\left.\begin{array}{lcccc} x & \equiv & -2 & \text{mod} & (1+\sqrt{-2}) \\ x & \equiv & 4\sqrt{-2} & \text{mod} & (1-\sqrt{-2}) \end{array}\right\}$$

2. Demostrar que todo elemento del anillo cociente $\frac{\mathbb{Z}[i]}{(2)}$ admite un representante de norma ≤ 3. Calcular las unidades y los divisores de cero en dicho anillo.

Ejercicio 3.54. (Propuesto en Examen Final Febrero 2011)
Razonar brevemente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. El anillo cociente $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ tiene cinco ideales no triviales.
2. El entero 2 es irreducible como elemento de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ pero no lo es como elemento de $\mathbb{Z}[i]$.
3. $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ no es un dominio euclídeo porque es posible encontrar para el elemento 8 dos factorizaciones en irreducibles que no son esencialmente idénticas (es decir que se diferencian no atendiendo al orden o a producto por unidades)

Ejercicio 3.55. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2011) Razonar que hay un único homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. ¿Cual es el núcleo de dicho homomorfismo? Calcular todos los ideales, unidades y divisores de cero de ambos anillos.

Ejercicio 3.56. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2011)

1. Discutir y resolver en $\mathbb{Z}[i]$ la ecuación

$$(1+3i)X + (-5+i)Y = 1+i$$

2. Demostrar razonadamente que $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ no es un dominio de factorización única.

Ejercicio 3.57. (Propuesto en Examen Final Febrero 2012)

1. Resolver el siguiente sistema de congruencias en $\mathbb{Z}[i]$

$$\left.\begin{array}{rcll} (3+i)x & \equiv & 1-i & (\text{mod} \quad 2+5i) \\ x & \equiv & 1+i & (\text{mod} \quad 3+i) \end{array}\right\}$$

2. En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ se considera el ideal $I = (2+\sqrt{-2})$ generado por el elemento $2+\sqrt{-2}$. Estudiar si el anillo cociente $A = \frac{\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]}{I}$ es un cuerpo. Calcular caso de que existan $(\sqrt{-2}+I)^{-1}$ y $\left((3+\sqrt{-2})+I\right)^{-1}$. ¿Cuantos elementos tiene A?

Ejercicio 3.58. (Propuesto en Examen Final Febrero 2012) Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. El anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ no es un Dominio euclídeo.
2. El anillo cociente $\frac{\mathbb{Z}[i]}{(2)}$ tiene cinco ideales distintos.

Ejercicio 3.59. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2012)

1. En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ se considera el ideal $I = (3+\sqrt{3})$ generado por el elemento $3+\sqrt{3}$. Estudiar si el anillo cociente $A = \frac{\mathbb{Z}[\sqrt{3}]}{I}$ es un cuerpo. Si es posible, encuentra en este anillo cociente A, de forma razonada, un elemento que sea unidad y otro que sea divisor de cero. ¿Cuantos homomorfismos de anillos se pueden definir de $\mathbb{Z}$ en A?
2. Calcular máximo común divisor, coeficientes de Bezout y mínimo común múltiplo de los elementos 5 y 7-i del anillo $\mathbb{Z}[i]$. Calcular las factorizaciones en irreducibles de ambos elementos ¿Cuales son sus factorizaciones en primos? ¿Cuantos ideales tiene el anillo cociente $\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1+2i)}$?

Ejercicio 3.60. (Propuesto en Examen Final Febrero 2013)

1. Discute y resuelve en $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (2-\sqrt{3})x & \equiv & -1 & (mod\,\sqrt{3}) \\ \sqrt{3}x & \equiv & 2-\sqrt{3} & (mod\,1-\sqrt{3}) \end{array} \right.$$

2. Dado el cociente $\dfrac{\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]}{(2+\sqrt{-2})}$. Contesta razonadamente a las preguntas: ¿Es cuerpo? ¿Cuántos elementos tiene? ¿Cuáles son unidades? ¿Y divisores de cero? ¿Cuáles son sus ideales?

Ejercicio 3.61. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2013)

1. Resolver el siguiente sistema de congruencias en $\mathbb{Z}[i]$

$$\left. \begin{array}{rcrl} x & \equiv & i & (\text{mod } 1+i) \\ x & \equiv & 1-i & (\text{mod } 3i) \\ x & \equiv & -1 & (\text{mod } 2-i) \end{array} \right\}$$

2. Se considera el anillo cociente $A = \frac{\mathbb{Z}[\sqrt{3}]}{(2)}$. En este anillo A encuentra, si es posible y de forma razonada: a) un elemento que sea unidad pero que no sea el 'uno' del anillo; b) un divisor de cero; c) un representante de la clase del elemento $4+3\sqrt{3}$ de norma menor que 4; d) un homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}$ en A.

Ejercicio 3.62. (Propuesto en Examen Final Febrero 2014)

1. Resuelve en $\mathbb{Z}[i]$ el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{array}{rcrlr} x & \equiv & i & \textbf{mod} & 1+i \\ x & \equiv & -1 & \textbf{mod} & 2+i \\ x & \equiv & i & \textbf{mod} & 2i \end{array}$$

2. Resuelve la siguiente ecuación en $\mathbb{Z}_3[x]$.

$$(x^3 - x^2 + x - 1)\,F(x) + (x^4 - x^3 + x^2 - 1)\,G(x) = x^2 - 1$$

y encuentra una solución en la que el grado del polinomio $F(x)$ sea mínimo.

Ejercicio 3.63. (Propuesto en Examen Final Febrero 2014) Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. El anillo $\mathbb{Z}_4$ tiene el mismo número de ideales que de subanillos.
2. El anillo cociente $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + 2\rangle$ es un cuerpo y tiene menos de 35 elementos.
3. El anillo cociente $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/\langle 1 - \sqrt{2}\rangle$ tiene solo un elemento.
4. La aplicación $\varphi : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$ dada por $\varphi(a) = a^5$ es un homomorfismo de anillos.

Ejercicio 3.64. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2014)

1. Resolver en $\mathbb{Z}[i]$ el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{array}{ccrcr} x & \equiv & 2+2i & \textbf{mod} & 1+5i \\ x & \equiv & 1+i & \textbf{mod} & 2+i \\ x & \equiv & -1+i & \textbf{mod} & 2i \end{array}$$

2. Resolver la siguiente ecuación en $\mathbb{Z}_3[x]$

$$(x^4 - 1)\,F(x) + (x^3 + x + 1)\,G(x) = x^2 - 1$$

y encontrar, si existe, una solución particular en la que el grado del polinomio $G(x)$ sea menor que 3.

Ejercicio 3.65. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2014) Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. El anillo $\mathbb{Z}[i]$ contiene subanillos que no son ideales mientras que en $\mathbb{Z}$ todos sus subanillos son ideales.
2. El homomorfismo de anillos $\varphi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}[i]$ de evaluación en “i" , definido por $\varphi(f(x)) = f(i)\ \forall f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, es inyectivo.
3. Si $D = \mathbb{Z}[i]$, el anillo de polinomios $D[x]$ es un D.F.U. (dominio de factorización única).
4. El anillo $\mathbb{Z}_6[x]$ es un D.E. (dominio euclídeo).
5. Hay cuatro ideales de $\mathbb{Z}$ que contienen al ideal de $\mathbb{Z}$, $[12\mathbb{Z}\cap 10\mathbb{Z}] + [14\mathbb{Z}) \cap 21\mathbb{Z}]$.

Ejercicio 3.66. (Propuesto en Examen Final Febrero 2015)

1. Estudiar para que valores de n y m la correspondencia $\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ dada por $\varphi([a]_n) = [a]_m$ es una aplicación bien definida.

2. Decidir si en el anillo $\mathbb{Z}_{12}$ el elemento $[89]^{27}+[4]^3[6]-[7]^{-1}$ es una unidad o divisor de cero (donde $[a]$ denota clase módulo 12).
3. Sea A un anillo conmutativo y C el subconjunto de A formado por sus divisores de cero ¿Es C un ideal de A? Razona la respuesta.
4. Razonar que el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ es un DFU (dominio de factorización única) pero que el cociente $\frac{\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]}{(3)}$ no lo es.
5. Demostrar que si D es un DE (dominio euclídeo) entonces $\forall a, b \in D$ se tiene que $Da + Db = Dd$ donde $d = \mathrm{mcd}(a, b)$.

Ejercicio 3.67. (Propuesto en Examen Septiembre 2015)

(**a**) Resolver en $\mathbb{Z}[i]$ el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x & \equiv & 1+2i & \textbf{mod} & 1+2i \\ x & \equiv & 1+i & \textbf{mod} & 1+i \\ x & \equiv & -1+i & \textbf{mod} & 3i \end{cases}$$

(**b**) Sabiendo que el anillo $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ es un DE respecto de la función norma $N(a + b\sqrt{-2}) = a^2 + 2b^2$.

i) Razona que A tiene un número finito de unidades.
ii) Halla todos los irreducibles en A con norma menor o igual que 5.
iii) Halla una factorización en irreducibles de $6 \in A$.

Ejercicio 3.68. (Propuesto en Examen Febrero 2016)

(**a**) He encontrado un ideal I de $\mathbb{Z}_n$ tal que el cociente $\mathbb{Z}_n/I$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_7$. ¿Es n un divisor o un múltiplo de 7 o ninguna de las dos cosas?

(**b**) Se considera la aplicación

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{49} \times \mathbb{Z}_{25}; \quad f(n) = ([n]_{49},\, [n]_{25})$$

donde $[n]_{49}$ y $[n]_{25}$ denotan las respectivas clase de n módulo 49 y módulo 25. Razona que f es un homomorfismo de anillos sobreyectivo pero no inyectivo. Calcula su núcleo.

(**c**) ¿Tiene solución la ecuación

$$-3\,x + (-5 + 4\sqrt{-2})\,y = 5 - \sqrt{-2}$$

en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$? En caso afirmativo, encuentra una solución (x, y) con norma de x mayor que 10.

(**d**) Se considera el anillo cociente $A = \frac{\mathbb{Z}[i]}{I}$ donde I es el ideal de $\mathbb{Z}[i]$ generado por el elemento $2 + i$.

(a) Demuestra que A es un cuerpo.
(b) Determina los elementos de A y sus tablas de sumar y multiplicar.
(c) Describe un isomorfismo de anillos entre A y $\mathbb{Z}_5$.

Ejercicio 3.69. (Propuesto en Examen Septiembre 2016)

(**a**) En el anillo $\mathbb{Z}[i]$ considera el ideal $I =< 3+i, 1+5i >$, generado por $3+i$ y $1+5i$ ¿Es I un ideal principal? En caso afirmativo, encuentra un elemento $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tal que $I =< \alpha >$.

(**b**) ¿Es $\Delta = \{ (a,a);\ a \in \mathbb{Z}_7\}$ un ideal de $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$?

(**c**) En el dominio euclídeo $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ determina la descomposición en irreducibles de 30.

(**d**) En dicho dominio $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ resuelve, dando la solución general, el siguiente sistema de congruencias

$$\left.\begin{array}{lcll} x & \equiv & 2 & \text{mod } 3+\sqrt{-2} \\ x & \equiv & 7 & \text{mod } 3-\sqrt{-2} \\ x & \equiv & 2 & \text{mod } 5+\sqrt{-2} \end{array}\right\}$$