TEMA 4

Anillos de polinomios.

Ejercicio 4.1. Encontrar un polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado 3 tal que: $f(0) = 6,\ f(1) = 12$ y $f(x) \equiv (3x+3) \bmod (x^2+x+1)$.

Ejercicio 4.2. Demostrar que en un D.E. todos los ideales son principales. Concluir entonces que el DFU $\mathbb{Z}[x]$ no es un D.E. viendo que el ideal suyo generado por 2 y x no es principal.

Ejercicio 4.3. Encontrar los polinomios irreducibles de grados 2 y 3 en $\mathbb{Z}_2[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$ y $\mathbb{Z}_5[x]$.

Ejercicio 4.4. Estudiar si los siguientes polinomios son reducibles ó irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$:

a) $2x^5 - 6x^3 + 9x^2 - 15$

b) $x^4 + 15x^3 + 7$

c) $x^5 + x^4 + x^2 + x + 2$

ch) $2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

d) $x^4 - 22x^2 + 1$

e) $x^3 + 17x + 36$

f) $x^5 - x^2 + 1$

g) $x^4 + 10x^3 + 5x^2 - 2x - 3$

h) $x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 15x + 1$

i) $x^4 - x^2 - 2x - 1$

j) $x^5 + 5x^4 + 7x^3 + x^2 - 3x - 11$

k) $x^5 - 10x^4 + 36x^3 - 53x^2 + 26x + 1$

l) $x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 15x + 1$

ll) $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 1$

m) $x^6 + 3x^5 - x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

n) $x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x + 1$

ñ) $x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 2x - 1$

o) $2x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 4$

p) $3x^5 - x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 2x + 1$

q) $x^4 - x^3 + 9x^2 - 4x - 1$

r) $x^7 + 5x^6 + x^2 + 6x + 5$

s) $3x^5 + 42x^3 - 147x^2 + 21$

t) $x^5 + 3x^4 + 10x^2 - 2$

u) $x^4 + 3x^2 - 2x + 5$

v) $3x^6 + x^5 + 3x^2 + 4x + 1$

w) $2x^4 + x^3 + 5x + 3$

x) $2x^5 - 2x^2 - 4x - 2$

y) $3x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 6$

z) $x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1$

α) $6x^4 + 9x^3 - 3x^2 + 1$

β) $2x^4 + 8x^3 + 10x^2 + 2$

γ) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 1$

δ) $x^6 - x^5 + 3x^4 + x + 2$ sabiendo que reducido módulo 7, es producto de un polinomio de grado 1 por un irreducible de grado 5.

Ejercicio 4.5. Dado un anillo conmutativo y un elemento $a \in R$ demuestra que la aplicación $\Phi : R[x] \to R[x]$ dada por $\Phi(f(x)) = f(x + a)$ es un isomorfismo de anillos. Aplica este resultado y el criterio de Eisenstein para ver que el polinomio $f(x) = x^4 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ estudiando el polinomio $f(x + 1)$.

Ejercicio 4.6. Sea I el ideal de $\mathbb{Z}_3[x]$ generado por $x^2 + 2x + 2$. Demostrar que el anillo cociente $\mathbb{Z}_3[x]/I$ es un cuerpo y hallar el inverso de $(ax + b) + I$.

Ejercicio 4.7. Hallar el m.c.d. y el m.c.m. en $\mathbb{Z}_5[x]$ de los polinomios $x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ y $3x^6 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$.

Ejercicio 4.8. Calcular, si es posible, el inverso de la clase de x en el anillo cociente $\mathbb{Q}[x]/(x^4 + x + 1)$.

Ejercicio 4.9. Demostrar que $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^4+x+1)}$ es un cuerpo y calcular el inverso de la clase de $x^2 + 1$.

Ejercicio 4.10. Considerar el polinomio $f(x) = x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$:

- Probar que $f(x)$ es irreducible.
- Calcular el inverso de la clase $[x^2+x+2]$ en el anillo cociente $\mathbb{Z}_3[x]/f(x)\mathbb{Z}_3[x]$.
- ¿Es el polinomio $x^3 + 9x^2 - x + 244$ irreducible sobre $\mathbb{Z}[x]$?.

Ejercicio 4.11. Probar que el anillo cociente $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^3-2x-3)}$ es un cuerpo y calcular el inverso de la clase de $x+1$.

Ejercicio 4.12. Calcular las unidades de los anillos cociente $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2+x+1)$, $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2+1)$ y $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2+2)$.

Ejercicio 4.13. Calcular el inverso de la clase del polinomio $2x+1$ en el anillo cociente $\mathbb{Q}[x]/(x^3+2x^2+4x-2)$

Ejercicio 4.14. Hallar la intersección, la suma y el producto de los ideales de $\mathbb{Q}[x]$ generados por los polinomios x^2+x-2 y x^2-1.

Ejercicio 4.15. Demostrar que el subconjunto de $\mathbb{Z}[x]$ formado por los polinomios con coeficientes de grado uno par es un subanillo. Comprobar que en este subanillo los elementos 2 y $2x$ tienen m.c.d. y no tienen m.c.m.

Ejercicio 4.16. Estudiar si son cuerpos los siguientes anillos cociente $K[x]/I$:

a) $K=\mathbb{Q}\,;\, I=(x^2+2)$

b) $K=\mathbb{R}\,;\, I=(x^2+2)$

c) $K=\mathbb{Q}\,;\, I=(x^4+2x^3+x^2+8x-12)$

d) $K=\mathbb{Z}_3\,;\, I=(x^2+x+1)$

Ejercicio 4.17. Factoriza los siguientes polinomios como producto de irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$.

1. $x^6-x^5-10x^2+15x-5.$
2. $3x^4-5x^3-101.$
3. $2x^4+4x-1.$

Ejercicio 4.18. Factoriza en irreducibles de $\mathbb{Q}[x]$ los siguientes polinomios.

1. $2x^4+3x^3+3x^2+3x+1.$
2. $x^4+3x^3+5x^2+1.$
3. $x^5-4x+1.$

Ejercicio 4.19. Estudiar si es un cuerpo el anillo cociente $\mathbb{Q}[x]/(x^5+5x^4+3x^2+5)$ y calcular, si es posible, el inverso en dicho anillo de la clase de $x+1$.

Ejercicio 4.20. Estudiar la irreducibilidad en $\mathbb{Z}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$ de los polinomios

1. $f(x)=x^5+3x^4+6x^3+5x^2+2x-7\,;$
2. $f(x)=x^4-6x^3+14x^2+9x+10\,;$
3. $f(x)=2x^4+x^3+2x^2+3x+1\,.$

Ejercicio 4.21. En el anillo $A[x]$ se consideran los ideales $I_1=(7), I_2=(x)$ e $I_3=(x^2)$. Describir los ideales I_1+I_2, I_2+I_3, $I_2\cap I_3$, $I_1\cap(I_2+I_3)$, reconociendo cuales de éstos son principales, en los casos en que $A=\mathbb{Z}$ y $A=\mathbb{Q}$.

Ejercicio 4.22. Demostrar que $\mathbb{Z}_3[x]/(x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1)$ es un cuerpo y que todo elemento suyo admite un representante de grado ≤ 3. Calcula el inverso en dicho cuerpo de la clase de $x + 2$.

Ejercicio 4.23. (Propuesto en Examen Final Febrero 2011)

1. Estudiar si son cuerpos los siguientes anillos cocientes y, caso de existir, calcular en cada caso el inverso de la clase de $x^2 - x + 1$:

$$\frac{\mathbb{Z}_5[x]}{(x^3+2)} \quad , \quad \frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)} \ .$$

2. Estudiar si la siguiente congruencia en $\mathbb{Z}_3[x]$ tiene solución y, en caso afirmativo, dar la solución general:

$$(x^4 + x^3 + x + 2)f(x) \equiv (x^3 + x + 1)(\text{mod } \ x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1)$$

Ejercicio 4.24. (Propuesto en Examen Final Febrero 2011)
Razonar brevemente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. El polinomio $3x^5 - 6x^4 + 30x^2 + 12x - 6 \in \mathbb{Z}[x]$ es reducible en $\mathbb{Z}[x]$ pero irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.
2. Un polinomio de $\mathbb{Z}[x]$ con raíces racionales no enteras es irreducible.

Ejercicio 4.25. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2011)

1. Sea $R = A[x]/(2x^3 + 6x^2 + 18x + 6)$. Estudiar si R es un cuerpo en los casos $A = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z}_2$, $A = \mathbb{Z}_3$, $A = \mathbb{Z}_5$. Cuando sea posible, calcular el inverso de la clase de $3x + 2$.

2. Estudiar la irreducibilidad en $\mathbb{Z}[x]$ y $\mathbb{Q}[x]$ de los siguientes polinomios y factorizarlos en irreducibles:

$$i)\ 2x^7 - 4x^5 + 20x^3 - 8x + 12 \ ; \ \ ii)\ 10x^6 + 7x^5 + 3x^4 + 14x^3 + 7x^2 + 8x + 4$$

Ejercicio 4.26. (Propuesto en Examen Final Febrero 2012)

1. Factorizar en irreducibles el polinomio $4x^5+6x^4+12x^3+26x^2+16x+6 \in A[x]$ en los casos: i) $A = \mathbb{Z}$; ii) $A = \mathbb{Q}$; iii) $A = \mathbb{Z}_3$

2. Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
   (a) El anillo cociente $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(3x^4-15x^2+30x+45)}$ es un cuerpo.
   (b) Existe un polinomio $f \in \mathbb{Z}_3[x]$ de grado 3 tal que $f(1) = 1$ y $f \equiv 2x + 1(\text{mod } x^3 + 2x + 2)$.

Ejercicio 4.27. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2012)

1. Factorizar en irreducibles de $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{Z}_3[x]$ los siguientes polinomios:
   (a) $f_1 = 2x^6 + 5x^5 + 12x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 2x - 1$
   (b) $f_2 = 2x^5 - 10x^4 + 20x^2 + 50x - 10$
   (c) $f_3 = x^4 + 3x^2 - 2x + 5$

2. Estudiar si el anillo cociente $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^4+3x^2-2x+5)}$ es un cuerpo y, si es posible, calcular:

   (a) El inverso de la clase del polinomio x^2+1.

   (b) Un representante de la clase del polinomio x^6+1 de grado menor que 4.

Ejercicio 4.28. (Propuesto en Examen Final Febrero 2013)

1. Factorizar en irreducibles de $\mathbb{Z}[x]$ y $\mathbb{Q}[x]$ los siguientes polinomios:
   i) $f(x) = 30x^5 + 105x^4 - 135x^3 + 180x^2 + 765x + 315$;
   ii) $g(x) = 20x^4 + 15x^3 - 15x^2 + 20x - 5$;
   iii) $h(x) = x^5 + 8x^4 + 18x^3 + 11x^2 + 7x + 3$.

2. Razonar que $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{Z}_2[x]$ son D.F.U.. En el cociente $\dfrac{\mathbb{Z}_2[X]}{(x^2+x+1)}$ ¿Existe el inverso de la clase del polinomio x^3+1?

3. Razonar si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:
   Existe un polinomio de $\mathbb{Z}[x]$ de grado 8 que tiene, en su factorización en $\mathbb{Z}[x]$ cuatro irreducibles distintos, en su factorización en $\mathbb{Q}[x]$ dos irreducibles distintos y en su factorización en $\mathbb{Z}_2[x]$ tres irreducibles distintos.

Ejercicio 4.29. (Propuesto en Examen Final Febrero 2014)

1. Factoriza como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$ el polinomio

$$f(x) = \frac{2}{17}x^5 - \frac{1}{17}x^4 + 2x - 1.$$

2. Factoriza como producto de irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$ el polinomio

$$f(x) = 12x^5 + 126x^4 + 48x^3 - 6x^2 + 12x + 6.$$

3. ¿Tiene x^3+1 inverso módulo x^5+2x+2 en $\mathbb{Z}_3[x]$? En caso afirmativo calcúlalo.

Ejercicio 4.30. (Propuesto en Examen Final Septiembre 2014)

1. Factorizar en irreducibles de $\mathbb{Z}[x]$ y $\mathbb{Q}[x]$ el polinomio

$$f(x) = 10x^6 + 30x^2 + 60x + 10 \in \mathbb{Z}[x]\,.$$

2. En el anillo cociente $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(f(x))}$, calcular el inverso, si existe, de la clase del polinomio $x+2$.

Ejercicio 4.31. (Propuesto en Examen Final Febrero 2015)

(**a**) Estudiar si los siguientes polinomios son irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$ (Si son reducibles no hace falta factorizarlos):
$f_1(x) = 15x^2 + 2x - 8$.
$f_2(x) = x^5 + 3x^4 + 9x^2 + 3x + 9$.

(**b**) Estudiar si los siguientes polinomios son irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$ (Si son reducibles no hace falta factorizarlos):
$f_3(x) = 24x^7 + 12x^5 - 6$
$f_4(x) = x^5 + x^4 + x^2 + 4x + 1.$

(**c**) Factorizar en $\mathbb{Q}[x]$ el polinomio $f(x) = -3x^5 + x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x + 1$, utilizando en el método general de factorización, que se sabe que tiene un factor $p(x)$ de grado dos verificando:

(a) $p(0) \equiv 1 \bmod 3$,
(b) $p(1) \equiv 0 \bmod 3$,
(c) $p(-1) \equiv 1 \bmod 3$ y
(d) $p(0) \equiv 0 \bmod 5$.

Ejercicio 4.32. (Propuesto en Examen Septiembre 2015)

(**a**) Estudia si los siguientes polinomios son irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$ (Si son reducibles no hace falta factorizarlos):

(a) $f_1(x) = x^6 + 3x^5 - x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 3x - 1.$
(b) $f_2(x) = 5x^5 - x^4 + 5x^2 + 4x - 1.$
(c) $f_3(x) = x^4 - 2x^2 - 3.$

(**b**) ¿Cuántos elementos tiene el anillo cociente $\mathbb{Z}_3[x]/(x^5 - x^4 - 1)$? Calcular el inverso de la clase del polinomio $x^2 + 1$ ¿Es este anillo cociente un cuerpo? (En caso de no serlo encontrar un polinomio cuya clase no tenga inverso).

Ejercicio 4.33. (Propuesto en Examen Febrero 2016)

(**a**) Se considera en $\mathbb{Q}[x]$ el siguiente sistema de congruencias:

$$\left.\begin{array}{cccc} f(x) & \equiv & 1 & \text{mod} \quad x \\ f(x) & \equiv & 1 & \text{mod} \quad x+1 \\ f(x) & \equiv & 5 & \text{mod} \quad x-1 \\ f(x) & \equiv & x^2+2x+2 & \text{mod} \quad x^3-1 \end{array}\right\}$$

Resuelve el sistema dando la solución general. ¿Existe solución del sistema en $\mathbb{Z}[x]$?. Calcula la solución $f(x)$ de menor grado.

(**b**) Razona si el anillo cociente $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^6+x^5+x^4+5x^3+11x^2+x+5)}$ es, o no es, un cuerpo.

Ejercicio 4.34. (Propuesto en Examen Septiembre 2016)

(**a**) Factoriza en irreducibles de $\mathbb{Z}[x]$ los siguientes polinomios:

- $f = x^6 + 4x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1;$
- $g = 2x^6 - 3x^5 - 20x^2 + 40x - 15\,.$

(**b**) Estudia si el anillo cociente $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^4+x^3+2x^2-6x+2)}$ es un cuerpo y calcula, si es posible, el inverso en dicho anillo de la clase del polinomio $x^2 + 1$