FÍSICA MATEMÁTICA I
ESPACIOS DE HILBERT Y OPERADORES LINEALES

Titulación: Licenciado en Física

Optativa, segundo curso, primer cuatrimestre
(**6** créditos: 4 de teoría y 2 de problemas)

A) TEMARIO

I. ESPACIOS LINEALES

1. Espacio lineal: Definición y propiedades.
2. Subespacio lineal.
3. Suma de subespacios.
4. Dependencia e independencia lineal. Bases lineales o de Hamel.
5. Aplicaciones lineales.
    - 5.1. Definición y propiedades.
    - 5.2. Operador lineal inverso.
    - 5.3 Isomorfismos.
    - 5.4. Espacio lineal $L(L_1, L_2)$
    - 5.5. Composición de operadores.
    - 5.5. Proyectores.
6. Espacio cociente.
7. Funcionales lineales. Espacio dual $L^*(L_1, L_2)$.

II. ESPACIOS LINEALES NORMADOS Y ESPACIOS DE BANACH

1. Espacio topológico. Topología inducida por un conjunto. Subespacio topológico.
2. Espacio métrico.
    - 2.1. Definición de métrica y espacio métrico. Bolas.
    - 2.2. Topología inducida por una métrica. Subespacio métrico.
3. Espacio lineal topológico. Espacio lineal métrico. Subespacios.
4. Espacio lineal normado.
    - 4.1. Conceptos generales: norma, métrica derivada.
    - 4.2. Sucesiones.
    - 4.3. Operadores lineales continuos. Acotación y norma.
    - 4.4. Espacio $A(L)$.
5. Espacio de Banach. Isomorfismos. Compleción.
6. Series y expansiones.
7. Espacio dual $A^*(L)$.

III. ESPACIOS EUCLÍDEOS Y ESPACIOS DE HILBERT

1. Espacio euclídeo o pre-Hilbert.
    - 1.1. Definición de producto interno y propiedades.
    - 1.2. Desigualdad de Cauchy-Schwartz.
    - 1.3. Espacio euclídeo como espacio lineal topológico.
    - 1.4. Identidad de polarización. Ley del paralelogramo.
    - 1.5. Ortogonalidad. Complemento ortogonal. Proyectores ortogonales.
    - 1.6. Conjuntos ortonormales.
        - 1.6.1. Método de ortonormalización de Gram-Schmidt.
        - 1.6.2. Bases ortonormales.

   1.7. Espacio euclídeo separable.
2. Espacio de Hilbert.
   2.1. Definición y propiedades generales.
   2.2. Importancia para la Física.
   2.3. Teorema de proyección ortogonal.
   2.4. Aproximación óptima a un vector.
   2.5. Conjuntos ortonormales.
   2.6. Teorema de Riesz-Fisher.
   2.7. Isomorfismos.
   2.8. Espacios de Hilbert separables.
   2.9. Notación de Dirac.

IV. ESPACIOS DE FUNCIONES

1. Espacio C_K[a,b].
2. Espacio L^p[a,b].
3. Espacio de Hilbert L^2[B, μ]. Bases.

V. OPERADORES Y FUNCIONALES

1. Operadores cerrados. Clausura de un operador.
2. Teoremas de extensión, inversión y gráfico cerrado para operadores acotados.
3. Teorema de representación de Riesz (Riesz-Fréchet). Isometría entre H y H^*.
4. Operadores en $A(H)$.
   4.1. Representación matricial.
   4.2. Adjunto de un operador.
   4.3. Operadores hermíticos o simétricos.
   4.4. Operadores autoadjuntos.
   4.5. Operadores positivos.
   4.6. Operadores normales.
   4.7. Operadores esencialmente autoadjuntos.
   4.8. Operadores isométricos.
   4.9. Operadores unitarios.
   4.10. Proyectores ortogonales.
   4.11. Operadores compactos. Operadores de Hilbert-Schmidt.

VI. TEORÍA ESPECTRAL

1. Resolvente y espectro de un operador lineal.
   1.1. Caracterización topológica.
   1.2. Clasificación de puntos espectrales.
   1.3. Criterios para la determinación y localización de $\sigma(A)$.
2. Espectro de normales, hermíticos, autoadjuntos y unitarios.
3. Espectro de compactos.
4. Representaciones espectrales.
   4.1. Descomposición espectral de compactos autoadjuntos.
   4.2. Descomposición espectral de compactos normales.
   4.3. Generalización a otros tipos de operadores.
   4.4. Resolución espectral de la unidad.
   4.5. Descomposición espectral de autoadjuntos. Transformada de Cayley.
5. Notación de Dirac.

VII. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA ELEMENTAL DE DISTRIBUCIONES

1. Funciones generalizadas y distribuciones.
2. Funciones Heaviside y delta de Dirac.
3. Soporte de una distribución
4. Propiedades de la delta de Dirac.
5. Transformada de Fourier.
6. Aplicaciones.

B) BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

-L. Abellanas y A. Galindo, *Espacios de Hilbert*, Eudema, 1987.
-T.M. Apostol, *Análisis Matemático*, Reverté, 1976.
-S. K. Berberian, *Introducción al espacio de Hilbert*, Teide, 1977.
-L. Debnath and P. Mikusinski, *Introduction to Hilbert Spaces*, Elsevier, 2005.
-P. García González, J. E. Alvarellos Bermejo y J. J. García Sanz, *Introducción al formalismo de la mecánica cuántica*, U.N.E.D., Madrid, 2001.
-G. Helmberg, *Introduction to spectral theory in Hilbert space*, North Holland, 1969.
-R. P. Kanwall, *Generalized functions (theory and technique)*, Academic Press, 1983.
-A. N. Kolmogórov y S,V, Fomín, *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, M.I.R., 1975.
-R.D. Richtmyer, *Principles of Advanced Mathematical Physics*, vol. 1, Springer-Verlag, 1978.
-P. Roman, *Some modern mathematics for physicists and other outsiders*, vol. 2, Pergamon, 1975.
- A. Vera López y P. Alegría Ezquerra, *Un curso de Análisis Funcional. Teoría y problemas*, AVL, 1997.

C) LECTURA HISTÓRICA RECOMENDADA

-J. von Neumann, *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica*, C.S.I.C., Madrid, 1991 (traducción del original *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlín, 1932).