

Voorwoord

Met dit eindwerk sluit ik mijn vier jaar als student natuurkunde af. Graag zou ik met deze thesis mijn ouders bedanken om van het begin tot het einde achter mijn keuze voor fysica te staan. Ik heb enorm genoten van deze vier jaar studie en studentenleven. Dit heb ik grotendeels te danken aan mijn prima professoren en assistenten en de fijne medestudenten. Het is dankzij Borussia Strakzak dat ik steeds de nodige ontspanning kon vinden, zodat ik telkens met hernieuwd enthousiasme aan deze thesis verder kon werken. Maar dit eindwerk was er natuurlijk nooit gekomen zonder de hulp van mijn promotoren dr. Bert Janssen en Prof. dr. Walter Troost; hartelijk dank voor alle tijd en moeite die jullie aan mij besteed hebben. Ook wil ik Patrick Meessen bedanken om mij te wijzen op het bestaan van [17]. Hoewel ik het hele jaar rond supersymmetrie, supersnaren en supergravitatie heb gewerkt is het toch Hanne die dit jaar voor mij tot een echt superjaar gemaakt heeft, heel hard bedankt daarvoor.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	4
1.1	Veldentheorie en kwantisatie	5
1.2	Algemene relativiteitstheorie	6
1.3	Supersnaren als unificerende theorie?	7
1.4	Supergravitatie	9
1.5	Overzicht van dit eindwerk	10
2	Supersymmetrie en supergravitatie in vogelvlucht	12
2.1	Rigide symmetrie en supersymmetrie	12
2.1.1	Rigide symmetrie	12
2.1.2	Rigide supersymmetrie	14
2.2	Lokale symmetrieën en supersymmetrieën	15
2.2.1	Lokale symmetrieën	16
2.2.2	Lokale supersymmetrie of supergravitatie	17
2.3	Type IIA, type IIB en 11-dimensionale supergravitatie	18
2.3.1	11-dimensionale supergravitatie	18
2.3.2	10-dimensionale supergravitatie	19
2.3.3	Dimensionele reductie	21
2.3.4	Dualiteiten	23
2.4	Symmetrie en supersymmetrie van oplossingen	24
2.4.1	Symmetrie van oplossingen	24
2.4.2	Supersymmetrie van oplossingen	25
3	Algemene eigenschappen van pp-waves	30
3.1	pp-waves als oplossingen van supergravitatie	30
3.1.1	Enkele elementaire kenmerken van pp-waves	30
3.1.2	Een Ansatz voor oplossingen met een pp-wave metriek	32
3.2	pp-waves als Penrose limieten	36
3.2.1	Penrose's originele limiet	37
3.2.2	De veralgemening door Güven	39
3.3	Supersymmetrie van pp-waves	41

3.4	De maximaal supersymmetrische golven	46
3.4.1	De maximaal supersymmetrische golf uit 11D	46
3.4.2	De maximaal supersymmetrische golf uit IIB	48
4	Een constructiemethode voor pp-waves met 3/4-supersymmetrie	51
4.1	Inleiding	51
4.2	Een eerste schets van de constructiemethode	52
4.3	3/4-supersymmetrische pp-waves in IIA en IIB	53
4.3.1	Algemeen	53
4.3.2	3/4 supersymmetrie bij een pp-wave met twee Ramond-Ramond velden	55
4.3.3	3/4 supersymmetrie bij aanwezigheid van het Kalb-Ramond veld	59
4.4	Een 3/4-supersymmetrische pp-wave in 11D	62
4.5	Relaties tussen de verschillende oplossingen	64
4.6	Besluit	66
A	Notaties en conventies	67
B	Gamma matrices in een pp-wave achtergrond	69
B.1	Algemene concepten omtrent gamma matrices	69
B.2	Gamma matrices in een pp-wave achtergrond	71
C	Van Λ tot Ω, precieze uitdrukkingen	75
C.1	11-dimensionale supergravitatie	75
C.2	Type IIA supergravitatie	75
C.3	Type IIB supergravitatie	76

Hoofdstuk 1

Inleiding

De moderne natuurkunde rust op het bestaan van vier fundamentele, experimenteel waargenomen interacties, of krachten.

Drie van deze krachten - elektromagnetisme, de zwakke en sterke kracht - en hun interacties met de gekende materie worden samengevat in één theorie, het standaardmodel. Dit model berust op wat men noemt (speciaal) relativistische kwantumveldentheorie, een theorie op microscopische schaal, en het is experimenteel sterk geverifieerd. Ook macroscopische effecten worden in principe door deze theorie beschreven aangezien we ze kunnen bekijken als opgebouwd uit minuscule deelprocessen die dan beschreven worden door het standaardmodel.

Van de vierde kracht, de zwaartekracht, bestaat echter enkel een macroscopische theorie, de algemene relativiteitstheorie, die (op grote schaal) experimenteel bevestigd is. Voor microscopische gravitatie zijn er echter zo goed als geen experimentele gegevens. Het is echter toch een gebied van naarstig theoretisch onderzoek, daar men in de fysica nog steeds op zoek is naar een alomvattende theorie. Deze zou dan heel de rijke fenomenologie van de natuurkunde funderen, op alle schalen en in alle subdomeinen. Hiervoor zou men dan in principe moeten terugrekenen tot op de microscopische interacties van de materiedeeltjes. Deze misschien ietwat ambitieuze reductivistische visie wordt gesteund door de geschiedenis van de fysica, doorheen dewelke verscheidene unificerende theorieën gevonden zijn. Dit heeft ons gebracht tot op het huidige niveau van het standaardmodel en de algemene relativiteitstheorie.

Momenteel is er echter een kandidaat om de rol als unificerende theorie in te vullen. Deze theorie heet supersnaartheorie en zij vertrekt van het gegeven dat elementaire deeltjes geen punten maar kleine snaartjes zijn. Een eerste benadering van supersnaartheorie is supergravitatie en het is in dit gebied dat deze thesis zich bevindt.

1.1 Veldentheorie en kwantisatie

Idee Het is niet zo dat veldentheorie een theorie is voor een of ander bepaald fenomeen. Met veldentheorie bedoelt men een manier waarop men een bepaalde theorie in de fysica kan formuleren. Dit formalisme wordt vooral gebruikt in de theoretische hoge energie fysica, maar ook in bijvoorbeeld de fysica van de vaste stof.

In veldentheorie beschrijft men alle aanwezig fysische objecten, zowel deeltjes als krachten, aan de hand van een veld. We kunnen zo'n veld bekijken als een object dat in elk punt van de ruimte-tijd een fysische grootte vastlegt. Deze fysische grootte wordt in het geval van deeltjes gegeven door de absolute waarde van het veld te interpreteren als de waarschijnlijkheidsdichtheid om een deeltje te observeren. Voor krachten heeft het veld werkelijk de betekenis van veldsterkte¹ zoals we die kennen uit bijvoorbeeld het elektromagnetisme.

Actie Deze velden die dus alle aanwezige fysische objecten bepalen, worden gezien als dynamische objecten. Dit wil zeggen dat ze constant variëren en fluctueren. Welke de dynamica is, of dus aan welke bewegingsvergelijkingen de objecten voldoen, wordt samengevat in een zogenaamde actie. Een actie kent aan elk denkbaar pad van één bepaald ruimte-tijd punt naar een ander² een getal toe: de actie. Dit getal is afhankelijk van de waarde van de velden in de punten op dit pad. Het principe van de stationaire actie stelt dan dat de velden op het pad een waarde aannemen zodat ze de actie extremaal maken. Wiskundig kunnen aan de hand van dit principe een stel bewegingsvergelijkingen voor de velden uit de actie afgeleid worden, deze noemt men de Euler-Lagrange vergelijkingen. Een voorbeeld van zo'n bewegingsvergelijkingen zijn de wetten van Maxwell voor het elektromagnetische veld.

Kwantisatie Een veldentheorie zoals hierboven beschreven is wat men een klassieke veldentheorie noemt³. Wil men de kwantumeffecten beschrijven die optreden op kleine schaal, dan dient men deze klassiek veldentheorie te

¹Merk op dat men krachten ook vaak beschrijft aan de hand van hun zogenaamde ijkvelden of potentialen, de veldsterkte is dan de afgeleide van dit veld.

²Zo'n pad in de ruimte-tijd beschrijft de weg van een denkbeeldig puntdeeltje dat zich gedurende een bepaalde tijd doorheen de ruimte beweegt.

³Met klassiek wordt hier dus bedoeld: niet gekwantiseerd. Zo'n 'klassieke' veldentheorie kan gerust relativistisch zijn, natuurlijk hoeft dit niet, ook Newtoniaanse mechanica kan op een veldtheoretische manier beschreven worden. In het bijzonder wordt dit gedaan in de continuummechanica.

kwantiseren. Op kleine afstanden geldt er immers een heel andere, weinig intuïtieve mechanica: de kwantummechanica. Men kan een veldentheorie op twee equivalente manieren omzetten in een kwantumtheorie.

In de eerste methode maakt men van de oplossingen van de klassieke bewegings-vergelijkingen een Fourier ontwikkeling. De Fourier coëfficiënten in deze ontwikkeling worden dan niet langer gezien als getallen maar als niet-commuterende operatoren. Voor deze operatoren stelt men dan canonische commutatierelaties op en aan de hand hiervan kan men dan het hele kwantumformalisme van verwachtingswaarden van toestanden en operaties erop, ontwikkelen.

De tweede methode is de Feynman padintegraal. Hier kent men aan elke mogelijke evolutie een kans toe, bepaald door een factor $e^{\frac{i}{\hbar}S_{kl}}$, waarin S_{kl} de klassieke actie is. Verwachtingswaarden voor fysisch te observeren grootheden kunnen dan met behulp van deze kansverdeling bepaald worden.

Conclusie Aangezien het ons vreemd lijkt dat er voor verschillende schalen verschillende werkelijkheden zouden zijn, moet elke theorie die zich wil opwerpen als fundamenteel, consistent te kwantiseren zijn. Het is immers onze ervaring dat als dingen opgebouwd zijn uit kleinere dingen, de eigenschappen van het grote uiteindelijk bepaald worden door de eigenschappen van het kleine.

1.2 Algemene relativiteitstheorie

Einstein ontwikkelde de algemene relativiteit omdat de onmiddellijke interactie op afstand van de Newtoniaanse zwaartekracht niet in overeenstemming was met zijn speciale relativiteitstheorie.

Zwaartekracht als meetkunde Ook algemene relativiteitstheorie wordt geformuleerd als een veldentheorie. Het dynamische veld is in dit geval echter de metriek van onze ruimte-tijd. Dit veld bepaalt de manier waarop we afstanden en tijdsverschillen meten, anders dan vroeger wordt dit nu een tijds- en positieafhankelijk begrip. Deze notie van niet-constante metriek zorgt ervoor dat de ruimte-tijd gekromd wordt. Het is Einsteins verdienste om in te zien dat zo'n kromming van de ruimte overeenkomt met gravitationele effecten. Hij stelt in zijn theorie dat het de aanwezigheid van massa is die ervoor zorgt dat de ruimte gekromd wordt. Deze kromming zorgt ervoor dat rechten niet langer de paden van kortste afstand zullen zijn en dat andere objecten in de buurt van een massa dus zullen afbuigen van hun rechtlijnige

baan. Op deze manier wordt het gravitationeel veld geïdentificeerd met het metriekveld, dat verantwoordelijk is voor de kromming.

Equivalentieprincipe Naast deze geometrische interpretatie van de zwaartekracht heeft de algemene relativiteitstheorie nog een andere karakteristieke eigenschap. De theorie is invariant onder algemene coördinatentransformaties. Fysisch houdt dit in dat alle observatoren equivalent zijn. Vandaar dat deze theorie de naam algemene relativiteitstheorie meekreeg, als veralgemening van de speciale relativiteitstheorie waar slechts observatoren die met een onderling constante snelheid bewegen equivalent zijn.

Probleem Hoewel algemene relativiteitstheorie goed geformuleerd is als klassieke veldentheorie, kan deze theorie echter niet op de standaard manier gekwantiseerd worden. Wil men dit doen dan treden er in de berekening van gravitationele interacties oneindigheden op waar men geen blijf mee weet. Als we op zoek zijn naar een unificerende theorie dient deze ook op het kwantumniveau goed geformuleerd te zijn. Het is dan ook daarom dat de zoektocht naar een gekwantiseerde theorie van de zwaartekracht van groot belang is in de huidige theoretische hoge energie fysica.

1.3 Supersnaren als unificerende theorie?

Snaren Snaartheorie vertrekt van een heel nieuw idee. In plaats van de elementaire deeltjes als puntvormig te beschouwen, zoals door de eeuwen heen is gebeurt, bekijkt men ze als 1-dimensionaal uitgestrekte objecten. Deze kleine snaartjes zijn voortdurend aan het trillen en het is deze trillingswijze die hun verdere fysische eigenschappen bepaalt. De verschillende types elementaire deeltjes worden nu gezien als verschillende trillingsmodes van één type snaren. Dit is natuurlijk een zeer mooi unificerend principe en het kan de relatieve weelde aan deeltjes in het standaardmodel op die manier verklaren. Dat we de snaren experimenteel toch als puntdeeltjes waarnemen wordt verklaard doordat ze zeer klein zijn. Om tot op deze schaal metingen te doen dient een zeer hoge energie bereikt te worden, groter dan deze die met de huidige deeltjesversnellers bereikt kan worden.

Zwaartekracht De belangrijkste eigenschap van snaartheorie is echter dat deze automatisch gravitatie met zich meebrengt. De zwaartekracht zit als het ware ingebakken in de natuur als men de elementaire deeltjes als snaren bekijkt. In het spectrum van de snaren komen immers steeds massalozes spin

2 deeltjes voor. Door deze te interpreteren als gravitonen kan men gravitationele interacties gaan berekenen. Door de grootte van de interactie voorspeld door supersnaartheorie te vergelijken met de experimenteel gekende constante van Newton kan men tot een schatting van de snaarlengte komen. Deze berekening duidt op snaren ter grootte van de Planck-lengte, deze is van de orde $10^{-35} m$.

Dit natuurlijk incorporeren van de zwaartekracht heeft er voor gezorgd dat snaartheorie, die al langer bestond, plots als een kandidaat voor een mogelijke unificerende theorie werd.

Supersnaren Een nadeel aan de snaartheorieën is dat ze naast de zwaartekracht ook het bestaan van tachyonen⁴ voorspellen. Men kan de aanwezigheid van tachyonen vermijden door te werken met zogenaamde supersnaartheorieën. Dit zijn snaartheorieën die een supersymmetrisch deeltjesspectrum hebben. Als bonus worden op deze manier ook automatisch fermionen aan de eerdere puur bosonische snaartheorieën toegevoegd. Men kan deze supersnaartheorieën kwantiseren en hoewel voorlopig niemand een volledige berekening, die erg ingewikkeld is, heeft gemaakt, zijn er een hoop redenen om aan te nemen dat de oneindigheden die in andere theorieën samengaan met kwantumgravitatie hier niet optreden. De kwantisatie zorgt hier echter wel voor een merkwaardige consistentie eis: het aantal ruimte-tijd dimensies moet tien zijn. Hoewel dit een op de eerste indruk moeilijk te geloven eigenschap is, zijn er technieken om dit in overeenstemming te brengen met onze vierdimensionale ervaringswereld.

Dualiteiten Er bestaan vijf verschillende supersnaartheorieën, ook dit lijkt eerst misschien niet echt hoopgevend: hoe kan een bepaalde theorie immers claimen de 'ultieme' theorie te zijn als we willekeurig dienen te kiezen uit vijf types? Ondertussen zijn er echter reeds een hele hoop zogenaamde dualiteiten tussen deze theorieën bekend. Deze tonen aan dat de theorieën in bepaalde situaties dezelfde fysica beschrijven, zij het in een andere 'taal'. Dit lijkt erop te wijzen dat al de vijf supersnaartheorieën bepaalde limieten zijn van één onderliggende theorie, die men alvast M-theorie heeft gedoopt. Het is de ontdekking van deze onderlinge verbanden die voor de zogenaamde tweede snaarrevolutie heeft gezorgd.

⁴Dit zijn deeltjes die bewegen met een snelheid groter dan die van het licht

1.4 Supergravitatie

Lage energie benadering Omdat de snaren uit supersnaartheorie zo klein zijn zullen vele snaareffecten pas bij hele hoge energie beginnen meespelen. We kunnen daarom proberen om een effectieve benadering bij lage energie⁵ te maken, deze zal een veldentheorie zijn die men supergravitatie noemt. Laat ons even de procedure van zo'n lage energie limiet bespreken.

Eén van de effecten die enkel bij hoge energieën optreed is dat snaartheorie een oneindig aantal elementaire deeltjes met steeds een grotere massa voorspelt. De massa van deze deeltjes is steeds een veelvoud van $\frac{1}{l_s}$. Aangezien de snaarlengte nu zeer klein is zal zelfs het eerste deeltje dat voorkomt in deze oneindige reeks veel te zwaar zijn om bij lagere energieën geproduceerd te worden. We kunnen ons in een lage energie benadering dus beperken tot de massalozere deeltjes uit het snaarspectrum. Omdat we bij lage energie, en dus op relatief⁶ grote lengteschaal, werken kunnen we deze massalozere deeltjes terug als puntdeeltjes beschouwen en kunnen we ze met een veldentheorie beschrijven. Het is echter zo dat in interacties tussen de massalozere deeltjes de massieve deeltjes uit snaartheorie wel een rol spelen als virtuele deeltjes, ook al is de energie te laag om ze als reële deeltjes te produceren. Dit effect zorgt ervoor dat we om benaderend correcte interacties te hebben we met een zogenaamde effectieve interactie moeten werken, die deze effecten in rekening brengt. Het blijkt dat als men deze procedure exact wiskundig uitvoert men terecht komt bij tiendimensionale supergravitaties.

Een hele hoop cruciale eigenschappen van de supersnaartheorieën zullen wel bewaard blijven in deze limiet. Zo heeft bijvoorbeeld elk van de vijf verschillende supersnaartheorieën een supergravitatie als lage energie limiet en bestaan de dualiteiten tussen de snaartheorieën ook tussen deze supergravitaties. Het is zelfs zo dat men hieruit vermoedt dat 11-dimensionale supergravitatie de lage energie limiet zal zijn van M-theorie. Ook zijn oplossingen van de snaartheorieën gelinkt aan oplossingen van supergravitatie. Men kan dus proberen oplossingen te zoeken van de eenvoudiger supergravitatietheorieën om zo tot oplossingen te komen van de moeilijkere supersnaartheorieën. Het is in dit gebied dat deze thesis zich situeert. We zullen in dit werk steeds in supergravitatie werken, maar de oplossingen die hierin geconstrueerd worden kunnen naar supersnaartheorie vertaald worden.

⁵Met lage energie bedoelen we hier een energie die laag is ten opzichte van de energie karakteristiek voor supersnaartheorie, $\frac{1}{l_s}$ met l_s de lengte van de snaar. Zo komt een snaarlengte van 10^{-35} m overeen met een energie van 10^{19} GeV. De lage energie waar we hier over spreken, is dus nog steeds veel hoger dan het niveau tot op welk vandaag experimenten gebeuren.

⁶Ten opzichte van de snaarlengte.

Opmerkingen Oorspronkelijk werden de supergravitaties reeds gevonden als theorieën van lokale supersymmetrie. Ze zijn een veralgemening van algemene relativiteitstheorie. Men hoopte toen dat deze theorieën kwantumgravitatie konden beschrijven, het is echter gebleken dat dit niet werkt. Toch is het belang van deze supergravitatietheorieën opnieuw groot, nu blijkt dat zij de lage energie benaderingen zijn van de supersnaartheorieën. In het volgende hoofdstuk wordt kort wat meer uitleg gegeven over supersymmetrie en supergravitatie.

Merk verder op dat in deze thesis steeds met supergravitatie als klassieke veldentheorie gewerkt wordt.

1.5 Overzicht van dit eindwerk

Resultaat Mijn eigen werk presenteer ik in hoofdstuk 4. Hier toon ik een constructiemethode waarmee $3/4$ supersymmetrische gravitatiegolven gevonden kunnen worden. Deze golven zullen oplossingen zijn van 10- en 11-dimensionale supergravitatie. Om de afleiding die ik hier geef toegankelijk te maken voor een groter publiek zijn er eerst nog enkele hoofdstukken waarin ik wat noodzakelijke begrippen probeer uit te leggen.

Hoofdstuk 2 Bewust van het mogelijk grote verschil in voorkennis van de verschillende lezers heb ik geprobeerd alvast in dit hoofdstuk te technische zaken te mijden. Dit hoofdstuk heeft tot doel aan lezers die niet bekend zijn met supersymmetrie en supergravitatie, uit te leggen wat de begrippen die voorkomen in de titel van deze thesis betekenen.

Hoofdstuk 3 In dit hoofdstuk worden enkele belangrijke eigenschappen aangehaald van het type gravitatiegolven waarbinnen de oplossingen vallen die geconstrueerd worden verder in dit werk. Hierin introduceer ik ook al enkele technieken die later intensief gebruikt zullen worden.

Hoofdstuk 4 Dit is waarschijnlijk het meest technische hoofdstuk. Toch heb ik geprobeerd de rode draad van de redenering toegankelijk te maken ook voor lezers die niet zelf de achterliggende berekeningen willen invullen. Op het einde van dit hoofdstuk geef ik een overzicht van de gevonden oplossingen.

Bijlage A Omdat er een veelheid aan notaties en conventies gebruikt worden in het gebied, geef ik de mijne even weer in deze bijlage. Ook kunnen lezers die niet vertrouwd zijn met bepaalde notaties die niet in de tekst zelf gedefinieerd worden, hier in dat geval een kijkje nemen.

Bijlage B In deze bijlage worden eerst voor lezers die niet zo vertrouwd zijn met spinoren en gamma matrices enkele basisconcepten uitgelegd. Het tweede deel spitst zich toe op de vorm en eigenschappen van gamma matrices in het geval van de gravitatiegolven waarover deze thesis handelt.

Bijlage C De formules die in deze appendix worden gegeven komen herhaaldelijk voor in dit werk. Het leek me daarom een goed idee om ze in deze bijlage te verzamelen zodat ze eenvoudig teruggevonden kunnen worden.

Hoofdstuk 2

Supersymmetrie en supergravitatie in vogelvlucht

In dit hoofdstuk worden de begrippen supersymmetrie en supergravitatie kort uitgelegd. Hoewel deze twee noties centraal staan in deze thesis, zou een volledig rigoureuze afleiding met alle berekeningen en technische details erbij ons echter te ver voeren. Toch zou ik graag lezers die niet vertrouwd zijn met de concepten die met 'super' samengaan, een basisintuïtie geven over de achtergrond van de berekeningen in volgende hoofdstukken. Met de bedoeling toch ook niet alles ad hoc in te voeren, heb ik geprobeerd de analogie tussen symmetrie en supersymmetrie ten volle uit te buiten. We zullen aan de hand van eenvoudige voorbeelden enkele concepten rond symmetrie kort illustreren, dan kunnen we deze begrippen veralgemenen naar supersymmetrie zonder in dit geval de (technisch ingewikkeldere) afleidingen rigoureuus uit te werken. Dit laat ons toe enkele formules waar we in de latere hoofdstukken beroep op zullen doen, toch van de nodige context en duiding te voorzien. Lezers geïnteresseerd in de exacte afleidingen, die in dit hoofdstuk vaak ingekort of weggelaten zijn, worden verwezen naar [1]-[6].

2.1 Rigide symmetrie en supersymmetrie

2.1.1 Rigide symmetrie

Definitie Met een symmetrie bedoelen we een familie van transformaties die een theorie (of zijn actie) invariant laat. Deze familie wordt gegeven door een aantal parameters en vormt een groep voor de samenstelling. We noemen een symmetrie 'rigide' als deze parameters niet van de ruimte-tijd coördinaten afhangen.

Illustratie Laat ons deze misschien wat abstracte definitie wat concreter maken aan de hand van een voorbeeld. We nemen hiervoor volgende actie¹:

$$S = \int dx \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^*. \quad (2.1)$$

Deze actie beschrijft een vrij, massaloos, geladen deeltje met spin nul, dit wordt beschreven door het complexe veld $\phi(x)$ en zijn complex toegevoegde $\phi^*(x)$. Een fysische interpretatie van dit veld wordt gegeven door $\phi\phi^*(x)$ als een waarschijnlijkheidsdichtheid te bekijken voor de positie van het deeltje.

Men kan eenvoudig nagaan dat de actie (2.1) invariant is onder bijvoorbeeld de translaties

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu = (1 + \xi^\nu \partial_\nu)x^\mu. \quad (2.2)$$

Dit kunnen we verstaan als een ruimtelijke symmetrie van de theorie: er is geen onderscheid tussen deze theorie geobserveerd in een punt ten opzichte van een ander punt. Merk op dat ξ^ν een willekeurige maar constante vector is, en dat deze symmetrie dus een rigide symmetrie is. Naast de translaties heeft deze actie ook nog de Lorentz transformaties als ruimtelijke symmetrieën, ook deze zijn opnieuw rigide.

Naast ruimtelijke symmetrieën kan een actie nog invarianties van een ander type hebben. Hier bijvoorbeeld de faseverschuiving $\phi \rightarrow e^{iq\Lambda}\phi$, met Λ een willekeurig constant reëel getal. Vaak noteert men een (niet-discrete)transformatie in infinitesimale vorm², hier $\phi \rightarrow (1 + iq\Lambda)\phi$ of korter:

$$\delta\phi = iq\Lambda\phi. \quad (2.3)$$

Dit is een ander soort rigide symmetrie dan (2.2), we noemen zo'n symmetrieën die werken op de velden en niet op de coördinaten interne symmetrieën, deze zijn moeilijker fysisch te interpreteren.

Behouden grootheden Symmetrieën van een theorie zijn erg belangrijk. Volgens het bekende theorema van Noether hangt met elke symmetrie een behouden grootheid samen. Voor de translaties (2.2) en de faseverschuivingen (2.3) zijn dit respectievelijk behoud van impuls en behoud van lading.

¹We noteren $x = (x^\mu)$ en veronderstellen $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

²Dit betekent dat we de parameters van de transformatie als zeer klein beschouwen. In dit geval is dit gewoon het getal $\Lambda \ll 1$. Wiskundig zegt men dat we de Liegroep beschrijven aan de hand van zijn Lie-algebra.

2.1.2 Rigide supersymmetrie

Supersymmetrie is een symmetrie tussen fermionen en bosonen. Daar waar oorspronkelijk fermionen totaal verschillend geacht werden van bosonen, bekijkt supersymmetrie hen echter als inwisselbare concepten. Supersymmetrietransformaties hebben echter heel andere eigenschappen dan de 'gewone' symmetrietransformaties die we reeds behandelden.

Illustratie Laat ons deze nieuwe eigenschappen ook hier aan de hand van een voorbeeld overlopen. Hiervoor nemen we nu de actie:

$$S = \int d^4x (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \bar{\zeta} \gamma^\mu \partial_\mu \zeta). \quad (2.4)$$

Deze actie beschrijft twee types massaloze neutrale deeltjes met spin nul, gegeven door de velden ϕ en χ , en een massaloos geladen deeltje met spin 1/2, gegeven door de spinor³ ζ . Er is geen interactie tussen deze deeltjes aanwezig en ze zijn dus vrij. De actie (2.4) is invariant onder een heel nieuw type symmetrie die we supersymmetrie noemen, in infinitesimale vorm ziet de transformatie eruit als:

$$\begin{cases} \delta\phi = \bar{\epsilon}\zeta, \\ \delta\chi = i\bar{\epsilon}\gamma_5\zeta, \\ \delta\zeta = \gamma^\mu \partial_\mu (\phi + i\gamma_5\chi) \epsilon. \end{cases} \quad (2.5)$$

Het cruciale verschil met gewone symmetrieën is dat de infinitesimale parameter ϵ van deze transformatie een spinor is, niet langer een scalar (2.3) of een vector (2.2) zoals in het geval van gewone symmetrie. Daarom noemt men gewone symmetrieën ook wel eens bosonische symmetrieën en supersymmetrie een fermionische symmetrie. De parameter ϵ is hier een willekeurige spinor die echter niet afhangt van de ruimte-tijd coördinaten, we noemen (2.5) dan ook een rigide supersymmetrie.

Deze supersymmetrietransformatie mixt de bosonische velden ϕ en χ met het fermionische veld ζ . In een theorie die supersymmetrisch is, is het onderscheid tussen fermionen en bosonen dus enkel een keuze van beschrijving, we kunnen de twee types door het uitvoeren van een supersymmetrietransformatie in elkaar omzetten. Een gevolg hiervan is dat het aantal fysische vrijheidsgraden beschreven door de bosonen gelijk moet zijn aan dat bevat in de fermionen. Omdat in vier dimensies een deeltje met spin 1/2 dubbel zoveel vrijheidsgraden heeft als een deeltje met spin nul, hebben we hier dus

³Voor een introductie tot spinoren en de gamma matrices die met hun beschrijving samengaan verwijzen we u naar het eerste deel van bijlage B.

twee velden van dit laatste type nodig. In het algemeen hebben we in een supersymmetrische theorie voor alle vrijheidsgraden in de bosonisch velden fermionische tegenhangers nodig. Meestal duid men deze aan met het suffix -ino, zo heet de superpartner van het graviton het gravitino, de tegenhanger van het foton noemt men het fotino, enz.

Translaties De commutator van twee supersymmetrietransformaties zal steeds een translatie bevatten. Dit zorgt ervoor dat als een actie invariant is onder een supersymmetrie hij ook invariant is onder translaties. Dit zal later in dit hoofdstuk van groot belang zijn.

Algemeen Een supersymmetrie is steeds van de vorm

$$\begin{cases} \delta B \sim \epsilon F, \\ \delta F \sim \epsilon \partial B, \end{cases} \quad (2.6)$$

waarin B het bosonisch veld is en F zijn fermionische superpartner. Net zoals een actie verschillende symmetrieën kan hebben, kan ze ook verschillende supersymmetrieën hebben. We duiden het aantal verschillende⁴ supersymmetrieën van een theorie aan met N . Ook supersymmetrie gaat samen met behouden grootheden, deze noemt men superladingen, in het algemeen heeft een supersymmetrische theorie dus N zo'n behouden superladingen.

2.2 Lokale symmetrieën en supersymmetrieën

Typisch voor zowel de symmetrieën als supersymmetrieën uit het vorig stuk is dat deze rigide waren. We kunnen deze notie nu veralgemenen door ook naar symmetrie en supersymmetrie te kijken waarbij de parameters niet zomaar een willekeurig constante vector of spinor zijn, maar waarbij die vector of spinor een willekeurige functie is van de ruimte-tijd coördinaten. De transformatie dient nu van punt tot punt nog wel van dezelfde familie te zijn, maar daarom niet meer met dezelfde parameters. Dit soort (super)symmetrie noemt men lokale (super)symmetrie.

⁴Merk op dat met verschillende supersymmetrieën verschillende types fermionische transformaties bedoelt worden. Zo blijft bv. (2.5) voor verschillende ϵ één en dezelfde supersymmetrie, net zoals (2.3) voor twee verschillende Λ twee transformaties behorende tot dezelfde symmetrie aanduidt. Transformatie (2.2) en (2.3) zijn daarentegen wel verschillende symmetrieën. Voor het supersymmetrie geval kan u later bijvoorbeeld (2.15) met (2.5) vergelijken en is meteen duidelijk dat dit verschillende supersymmetrieën zijn.

2.2.1 Lokale symmetrieën

Door het lokaal maken ('ijken') van reeds aanwezige rigide symmetrie van een actie voert men interacties in. Hiermee bedoelen we dat als men een actie die een rigide symmetrie heeft, wilt uitbreiden tot een actie die ook invariant is onder de lokale versie van die symmetrie, er termen dienen te worden toegevoegd die interacties beschrijven. Dit klinkt misschien niet echt spectaculair als u het zo leest, maar het is toch zeer opmerkelijk.

Illustratie We zullen om het idee te verduidelijken en om een gevoel te geven van hoe merkwaardig dit toch wel is, even kort de invoering van bijvoorbeeld het elektromagnetisme bespreken aan de hand van het lokaal maken van de fasesymmetrie (2.3) van de actie (2.1).

Veralgemeend tot een lokale symmetrie wordt de faseverschuiving (2.3) nu

$$\delta\phi = iq\Lambda(x), \quad (2.7)$$

waarin de parameter Λ een willekeurige functie van de coördinaten is en dus verschilt van punt tot punt. De actie (2.1) is niet langer invariant onder deze lokale transformaties door de aanwezigheid van de afgeleiden, ze varieert voor en na een transformatie van de vorm (2.7) met

$$\delta S = iq \int dx [\partial_\mu \Lambda(x) \partial^\mu \phi^*(x) - \partial_\mu \Lambda(x) \partial^\mu \phi(x)]. \quad (2.8)$$

We kunnen nu een nieuwe actie S' construeren die wel invariant is onder deze lokale transformatie, door een nieuwe term toe te voegen die een tegengestelde bijdrage levert, zodat $\delta S' = 0$. Hiervoor voeren we een nieuw veld $A_\mu(x)$ in dat dient te transformeren als

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda(x). \quad (2.9)$$

Men kan nu eenvoudig de invariantie nagaan van de actie

$$\begin{aligned} S' &= \int dx (\partial_\mu - iqA_\mu) \phi (\partial^\mu + iqA^\mu) \phi^* \\ &= \int dx (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* + iqA_\mu [\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*] + q^2 \phi \phi^* A_\mu A^\mu). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Zo'n veld dat we invoeren voor het lokaal maken van een symmetrie noemen we het ijkveld van deze symmetrie.

Om het nieuwe veld A_μ als een echt fysisch veld bekijken dat ook onafhankelijk van ϕ kan bestaan, stellen we er ook een kinetische term voor

op. Zo'n kinetische term bevat het kwadraat van de afgeleiden van het veld, hier $\partial_\nu A_\mu$. Deze kinetische term dient echter invariant te zijn onder (2.9) om de invariantie van S' te behouden. Hierdoor dienen we te werken met $F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$, wat wel invariant is onder (2.9). Om een kinetische term te krijgen dienen we nu gewoon te kwadrateren: $F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Als uiteindelijke invariante actie vinden we dan

$$S' = \int dx \left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + iq A_\mu [\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*] + q^2 \phi \phi^* A_\mu A^\mu \right). \quad (2.11)$$

Hierin vinden we de oorspronkelijke deeltjes terug maar ook een nieuw veld $F = dA$, dit veld bezit de ijkvariantie $A \rightarrow A + d\Lambda$. Maar zo'n veld kennen we al lang: het is het elektromagnetisch veld. Deze actie beschrijft dus eigenlijk niets anders dan het vrij elektromagnetische veld en een geladen massaloos spin nul deeltje. De laatste termen geven interacties weer tussen de geladen deeltjes via het uitwisselen van fotonen. Bovendien kan men laten zien dat de behouden grootte die samenhangt met de symmetrie (2.7) de elektrische lading is. Door de fasesymmetrie van de actie (2.1) uit te breiden tot een lokale fasesymmetrie, en het 'compenserende' veld een eigen bestaan te geven, hebben we dus een elektromagnetische interactie ingevoerd.

2.2.2 Lokale supersymmetrie of supergravitatie

Men kan op dezelfde manier als voor gewone symmetrieën, van een actie eisen dat ze invariant blijft, ook als we de supersymmetrie lokaal maken. Het blijkt dat we door dit te doen opnieuw een interactie, namelijk gravitatie, invoeren.

De berekeningen die hiermee gepaard gaan zijn onmiddellijk veel ingewikkelder dan diegene die we in het vorige deeltje maakten, we zullen ze in dit werk dan ook weglaten. Laat ons genoeg nemen met een bespreking van de ideeën en gevolgen.

In hun lokale vorm zien de supersymmetrie transformaties (2.6) er grofweg uit als

$$\begin{cases} \delta B \sim \epsilon F, \\ \delta F \sim \partial \epsilon + \epsilon \partial B. \end{cases} \quad (2.12)$$

Zoals we echter opmerkten in het stukje over rigide supersymmetrieën brengen deze transformaties automatisch translaties met zich mee. Als we de supersymmetrie dus lokaal maken, eisen we dus ook dat de theorie invariant is onder lokale translaties. Een lokale translatie is echter niets anders dan een algemene coördinatentransformatie. Het ijkveld dat dient ingevoerd te worden om de theorie invariant te maken onder de coördinatentransformaties

is de metriek. Om deze metriek als een volwaardig fysisch en dus dynamisch veld te bekijken dienen we de Einstein-Hilbert term $\sqrt{|g|}R$ aan onze actie toe te voegen. Op deze manier hebben we dus gravitatie in de theorie gebracht door te eisen dat hij lokaal supersymmetrisch is. Naast het ijkveld voor de coördinatentransformaties, de metriek of 'graviton', dat spin 2 heeft en dus een boson is, is er ook nog een fermionisch ijkveld met spin 3/2, het gravitino. Deze twee ijkvelden zijn echter een minimale veldinhoud voor een lokaal-supersymmetrische theorie, afhankelijk van het aantal dimensies en het aantal supersymmetrieën N , kunnen er nog veel meer velden aanwezig zijn in de theorie. Er bestaan dus een hele hoop lokaal supersymmetrische theorieën, maar ze beschrijven alle op zijn minst gravitatie. Daarom spreken we over supergravitatie theorieën: deze zijn alle een uitbreiding van algemene relativiteitstheorie.

2.3 Type IIA, type IIB en 11-dimensionale supergravitatie

Er is dus een hele waaier van supergravitaties in allerlei dimensies. In dit stuk geven we kort de nodige informatie over de drie supergravitaties waarmee we in deze thesis zullen werken.

2.3.1 11-dimensionale supergravitatie

In 11-dimensies geldt er een speciale eigenschap: er is maar één consistente supergravitatie theorie. We kunnen dus eenduidig spreken over 11-dimensionale supergravitatie, we duiden deze theorie in dit werk in het kort aan met de notatie 11D. Deze theorie is $N = 1$ supersymmetrisch en heeft als veldinhoud

$$\{g_{\mu\nu}, A_{\mu\nu\rho}, \psi_\mu\}. \quad (2.13)$$

Het graviton wordt bepaald door de metriek $g_{\mu\nu}$, het gravitino door ψ_μ . Verder is er nog een viervorm veldsterkte F_4 aanwezig, beschreven door het ijkveld A_3 : $F_4 = dA_3$.

In deze thesis bekijken we enkel puur bosonische oplossingen, dit wil zeggen dat in onze oplossingen steeds alle fermionvelden nul zijn. Als dusdanig kunnen we deze bosonische oplossingen ook zien als oplossingen van het bosonisch deel van de supersymmetrische actie. Dit bosonische deel van de 11D

actie heeft volgende vorm:

$$S = \int d^{11}x \sqrt{|g|} \left[R - \frac{1}{2 \cdot 4!} F_4^2 - \frac{1}{(144)^2} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_{11}} F_{\mu_1 \dots \mu_4} F_{\mu_5 \dots \mu_8} A_{\mu_9 \mu_{10} \mu_{11}} \right] \quad (2.14)$$

Deze bosonische actie bestaat uit de kinetische termen van de aanwezige velden en een laatste topologische term. Deze laatste term noemt men de Chern-Simons term.

De volledige actie van 11D is invariant onder volgende supersymmetrie-transformatie:

$$\begin{cases} \delta e_\mu^a = -\frac{i}{2} \bar{\epsilon} \Gamma^a \psi_\mu, \\ \delta \psi_\mu = 2 \nabla_\mu \epsilon + \frac{i}{144} (\Gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_\mu - 8 \Gamma^{\beta\gamma\delta} \delta_\mu^\alpha) \epsilon F_{\alpha\beta\gamma\delta}, \\ \delta A_{\mu\nu\rho} = \frac{3}{2} \bar{\epsilon} \Gamma_{[\mu\nu} \psi_{\rho]}, \end{cases} \quad (2.15)$$

hierin is e_μ^a het vielbein bepaald door $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$. 11D is waarschijnlijk de belangrijkste supergravitatie daar zij gezien wordt als de lage energie benadering van de voorlopig nog onbekende M-theorie. Verder kunnen bijna alle lagerdimensionale supergravitaties gevonden worden als reducties van deze theorie.

2.3.2 10-dimensionale supergravitatie

In tien dimensies is er een grotere weelde aan supergravitaties. We kunnen zowel $N = 1$ als $N = 2$ hebben, bij $N = 2$ spreken we van type II. Als $N = 2$ kunnen de spinoren die de twee supersymmetrietransformaties parametriseren tegengestelde of dezelfde chiraliteit hebben. In het eerste geval noemen we de theorie type IIA in het andere geval type IIB. In deze thesis zullen we enkel in de laatste twee werken. Ze hebben elk een unieke formulering en we zullen de theorieën in het kort aanduiden met IIA en IIB. In tegenstelling tot 11D is er vanuit veldtheoretisch standpunt niet onmiddellijk een manier waarop deze twee tiendimensionale theorieën zich van supergravitaties in ander dimensies zouden onderscheiden. Het is echter doordat ze de lage energie benadering zijn van respectievelijk type IIA en type IIB supersnaartheorie dat het interessant is om hen te bestuderen. Uit snarentheorie zijn ook de zogenaamde dualiteiten afkomstig die een verband leggen tussen IIA en IIB onderling en hen aan nog andere tiendimensionale theorieën koppelen. Verder zal blijken dat IIA de zogenaamde dimensionale reductie is van 11D.

Veldinhoud Laat ons beginnen met een overzicht te geven van de velden die aanwezig zijn in IIA en IIB supergravitatie:

$$\text{IIA:} \quad \{\phi, \lambda, g_{\mu\nu}, \psi_\mu, B_{\mu\nu}, A_\mu, A_{\mu\nu\rho}\}, \quad (2.16)$$

$$\text{IIB:} \quad \{\phi, \lambda, g_{\mu\nu}, \psi_\mu, B_{\mu\nu}, A, A_{\mu\nu}, A_{\mu\nu\rho\sigma}\}. \quad (2.17)$$

Allebei deze theorieën bevatten twee fermionvelden: het gravitino ψ_μ en het dilatino λ . Deze fermionen zullen onder supersymmetrie echter verschillend transformeren in de twee theorieën.

Onder de bosonische velden zijn er drie gemeenschappelijk. Elk van beide theorieën heeft een metriek (graviton) $g_{\mu\nu}$, een scalair veld ϕ dat het dilaton genoemd wordt en ook een tweevorm B . Deze laatste is het ijkveld van het Kalb-Ramond veld (axion):

$$H = dB. \quad (2.18)$$

De drie bosonische velden g , ϕ en H noemt men de Neveu-Schwarz/Neveu-Schwarz (NS-NS) velden. Deze benaming stamt uit snaartheorie waar ze een type randvoorwaarden aanduidt. Snaren met deze NS-NS randvoorwaarden geven in de lage energie limiet net de drie NS-NS velden van IIA en IIB supergravitatie.

Verder bevatten zowel IIA als IIB elk ook nog vormvelden van het type A_n . In IIA komen deze met oneven n voor, in IIB deze met even n . Deze n -vormen zijn de potentialen van veldsterkten F_{n+1} die men Ramond-Ramond velden noemt:

$$\begin{aligned} F_1 &= dA_0, \\ F_2 &= dA_1, \\ F_3 &= dA_2 - A_0 H, \\ F_4 &= dA_3 - 4H \wedge A_1, \\ F_5 &= dA_4 - 10H \wedge A_2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ook de benaming Ramond-Ramond velden komt van een type randvoorwaarden in supersnaartheorie.

Acties We beschrijven beide acties hier aan de hand van hun Lagrangiaan:

$$S = \int \mathcal{L} dx. \quad (2.20)$$

We beperken ons in deze thesis tot het bosonische deel van de acties van IIA en IIB:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{IIA}} = & \sqrt{|g|} \left[R + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3!} e^{-\phi} H^2 - \frac{1}{2 \cdot 2!} e^{\frac{3\phi}{2}} F_2^2 - \frac{1}{2 \cdot 4!} e^{\frac{\phi}{2}} F_4^2 \right] \\ & - \frac{1}{144} e^{\mu_1 \dots \mu_{10}} \partial_{\mu_1} A_{\mu_2 \mu_3 \mu_4} \partial_{\mu_5} A_{\mu_6 \mu_7 \mu_8} B_{\mu_9 \mu_{10}}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{IIB}} = & \sqrt{|g|} \left[R + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3!} e^{-\phi} H^2 + \frac{1}{2} e^{2\phi} F_1^2 + \frac{1}{2 \cdot 3!} e^{\phi} F_3^2 + \frac{1}{4 \cdot 5!} F_5^2 \right] \\ & - \frac{1}{192} e^{\mu_1 \dots \mu_{10}} \partial_{\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_5} \partial_{\mu_6} A_{\mu_7 \mu_8} B_{\mu_9 \mu_{10}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ook hier bestaan de acties zoals in 11D uit de kinetische termen en een Chern-Simons term. Deze twee acties hebben een gemeenschappelijk deel dat wordt gegeven door de kinetische termen van de NS-NS velden. Men noemt dit deel van de acties de common sector:

$$\sqrt{|g|} \left[R + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3!} e^{-\phi} H^2 \right]. \quad (2.23)$$

Opmerking Het veld F_5 dient omwille van supersymmetrie nog aan een extra voorwaarde van zelfdualiteit te voldoen⁵ die niet uit de bewegingsvergelijkingen van de IIB actie volgt:

$$F_5 = {}^* F_5. \quad (2.24)$$

2.3.3 Dimensionele reductie

Supersnaartheorie blijkt enkel wiskundig consistent indien zij in tien dimensies geformuleerd wordt. Een manier om deze 10-dimensionale theorie te rijmen met onze alledaagse beleving van slechts drie ruimte dimensies en één tijdsdimensie, is te veronderstellen dat deze extra dimensies zeer klein zijn. De wiskundige techniek achter dit 'oprollen' van de extra dimensies noemt men Kaluza-Klein reductie of kortweg dimensionele reductie. Niet alleen

⁵Om een supersymmetrische actie te hebben dient het aantal bosonische vrijheidsgraden gelijk te zijn aan het aantal fermionische vrijheidsgraden. Dit is voor IIB enkel het geval als de vijfvorm F_5 slechts de helft van de vrijheidsgraden heeft die een vijfvorm in het algemeen beschrijft. Hiervoor zorgt de extra eis van zelfdualiteit: slechts de helft van de componenten van F_5 zijn nu vrij, de andere helft is een kopie. Men kan dit vergelijken met de eis dat een matrix symmetrisch is, ook in dit geval worden dan het aantal vrijheden die een matrix in het algemeen heeft, beperkt.

levert deze techniek een methode om de 10-dimensionale snaar- en supergravitatie theorieën te linken aan onze vierdimensionale ervaringswereld, ze legt ook een verband tussen 11D en IIA.

Van 11D naar IIA Laat ons aan de hand van dit specifiek geval kort de techniek van dimensionale reductie bekijken op het niveau van supergravitatie.

We splitsen de coördinaten die de 11-dimensionale ruimte overdekken op als $(\hat{x}^{\hat{\mu}}) = (x^\mu, z)$. De coördinaten (x^μ) overdekken een 10-dimensionale subruimte, we veronderstellen verder dat de aanwezige velden niet afhangen van z : $\partial_z \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0$ en $\partial_z \hat{A}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} = 0$. We kunnen nu nieuwe 10-dimensionale velden op de subruimte definiëren als:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \sqrt{-g_{zz}} \left(\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{\hat{g}_{\hat{\mu}z}\hat{g}_{\hat{\nu}z}}{\hat{g}_{zz}} \right), & A_{\mu\nu\rho} &= \hat{A}_{\mu\nu\rho}, \\ A_\mu &= \frac{\hat{g}_{\mu z}}{\hat{g}_{zz}}, & B_{\mu\nu} &= \hat{A}_{\mu\nu z}, \\ \phi &= \frac{3}{4} \log(-\hat{g}_{zz}). \end{aligned} \tag{2.25}$$

De velden zonder hoedje zijn onafhankelijk van z en hebben ook geen componenten in deze richting, ze vormen dus een 10-dimensionale beschrijving van de 11-dimensionale velden (met hoedjes). De constructie is zo gemaakt dat de nieuwe velden transformeren als tensoren ten opzichte van coördinatentransformaties in de tien dimensionale subruimte. Coördinatentransformaties in elf dimensies die de z -richting veranderen worden ijktransformaties van de nieuwe velden in de tien dimensionale beschrijving. Merk op dat het aantal verschillende velden in de lagerdimensionale beschrijving groter is dan in de hogerdimensionale theorie. Dit komt natuurlijk omdat tensoren van een bepaalde orde in een theorie met meer dimensies meer componenten en dus ook meer vrijheidsgraden bevatten. Deze afbeelding van de 11-dimensionale velden in nieuwe 10-dimensionale velden gebeurt bijectief, alle fysische vrijheidsgraden worden eenduidig in de 10-dimensionale velden gemixt en men kan ook omgekeerd terug de 11-dimensionale velden uitdrukken in functie van de 10-dimensionale velden.

Merk op dat de nieuwe veldinhoud in tien dimensies exact dezelfde is als die van IIA (2.21), de fermionen buiten beschouwing gelaten. Men kan ook nagaan dat de actie van 11D (2.14), in deze nieuwe beschrijving overgaat in deze van IIA (2.21). Als de elfde dimensie zeer klein is, zodat ze door waarnemers van onze grootte niet opgemerkt wordt, zal 11D dus als IIA geobserveerd worden.

Door deze methode (of een veralgemening ervan) herhaaldelijk toe te passen kan men dus eventueel onze 4-dimensionale werkelijkheid interpreteren

als een hogedimensionale theorie in tien of elf dimensies waarvan zes of zeven dimensies zeer klein zijn.

2.3.4 Dualiteiten

Er zijn vijf supersnaartheorieën bekend, maar ondertussen zijn er een hoop zogenaamde dualiteiten gevonden tussen deze theorieën. De lage energie limiet blijkt te commuteren met deze dualiteiten en ze bestaan dus ook tussen de 10-dimensionale supergravitaties. Deze dualiteiten kan men zien als een soort vertaling van de ene theorie naar de andere. Het blijkt dat bepaalde fysische situaties in de ene theorie ook beschreven worden door een andere situatie in een andere theorie. We zullen hier kort T- en S-dualiteit bespreken, daar later zal blijken dat bepaalde van onze gevonden oplossingen via deze dualiteiten gerelateerd zijn.

T-dualiteit T-dualiteit (target space duality) hangt nauw samen met dimensionele reductie. We zullen T-dualiteit hier enkel bekijken vanuit supergravitatie oogpunt. Twee theorieën zijn dan T-duaal aan elkaar als de reductie van de ene over een cirkel met straal R , precies dezelfde theorie oplevert als de reductie van de andere, maar nu over een cirkel met straal $\frac{1}{R}$. Op deze manier kan men ook het expliciete verband tussen de verschillende velden in de verschillende theorieën vinden. Om T-dualiteit te kunnen uitvoeren moet men dus dimensionele reductie kunnen toepassen, daarom dienen alle velden onafhankelijk te zijn van minstens één richting, noem deze z . We geven hier de T-dualiteitsregels om de bosonische velden van IIA te vertalen naar die van IIB:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu z} g_{\nu z} - B_{\mu z} B_{\nu z}}{g_{zz}}, & \tilde{g}_{\mu z} &= \frac{B_{\mu z}}{g_{zz}}, \\
\tilde{B}_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} + 2 \frac{g_{z[\mu} B_{\nu]z}}{g_{zz}}, & \tilde{B}_{\mu z} &= \frac{g_{\mu z}}{g_{zz}}, \\
\tilde{\phi} &= \phi - \frac{1}{2} \log -g_{zz}, & \tilde{g}_{zz} &= \frac{1}{g_{zz}}, \\
\tilde{A}_{(2n) \mu_1 \dots \mu_{2n}} &= A_{(2n+1) \mu_1 \dots \mu_{2n} z} - 2n B_{z[\mu_1} A_{(2n-1) \mu_2 \dots \mu_{2n}]} & (2.26) \\
&+ 2n(2n-1) \frac{B_{z[\mu_1} g_{\mu_2|z} A_{(2n-1) \mu_3 \dots \mu_{2n}]z}}{g_{zz}}, \\
\tilde{A}_{(2n) \mu_1 \dots \mu_{2n-1} z} &= -A_{(2n-1) \mu_1 \dots \mu_{2n-1}} \\
&+ (2n-1) \frac{g_{z[\mu_1} A_{(2n-1) \mu_2 \dots \mu_{2n-1}]z}}{g_{zz}}.
\end{aligned}$$

De velden met een tilde boven zijn velden in IIB, die zonder tilde de oorspronkelijke velden uit IIA. Niet alleen de veldinhoud van deze twee theorieën transformeren perfect in elkaar, ook de T-duale actie van IIA is de actie van

IIB. Ook met de zelfdualiteit van F_5 wordt rekening gehouden, een deel gaat naar de viervorm F_4 het andere deel naar een zesvorm die hodge dual zal zijn aan F_4 .

S-dualiteit S-dualiteit staat voor strong-weak duality, zij verwisselt een zwakke snaar-koppelingsconstante $g_s < 1$ met een sterke koppeling $\frac{1}{g_s} > 1$ of andersom. In supergravitatie komt dit overeen met $\phi \rightarrow -\phi$. Er komen echter ook nog transformaties van de andere velden bij kijken. Het zou teveel plaats innemen om dit formalisme hier in meer detail te bespreken, men kan een grondigere bespreking terugvinden in [6]. Wel is het interessant om weten dat IIB onder S-dualiteit in zichzelf wordt afgebeeld.

S-dualiteit is een zeer interessante dualiteit daar zij het niet-perturbatieve, sterke koppeling gebied omzet in het zwakke koppeling gebied van een andere theorie. Dit zorgt ervoor dat niet perturbatieve effecten in de ene theorie toch met perturbatierekening kunnen behandeld worden in de andere theorie. In IIB is het dus zelfs zo dat niet-perturbatieve fenomenen kunnen vertaald worden naar andere perturbatieve fenomenen in dezelfde theorie.

2.4 Symmetrie en supersymmetrie van oplossingen

2.4.1 Symmetrie van oplossingen

In het stuk hiervoor hebben we het telkens gehad over symmetrie van een theorie. Het is echter zo dat niet elke oplossing van een theorie ook alle symmetrie van die theorie bezit. Het is eerder andersom, een algemene oplossing zal maar weinig symmetrie van de theorie behouden. Om dit in te zien hoeft u maar naar dit blad te kijken, hoewel het is opgebouwd uit deeltjes die voldoen aan rotatiesymmetrische wetten heeft het zelf niets meer van die symmetrie overgehouden, er is een voor- en een achterkant, een bovenzijde en een onderzijde en de letters blijken getypt van links naar rechts.

Voorbeeld Laat ons deze algemene opmerking even staven met de wiskundige uitwerking van een eenvoudig voorbeeld. Kijk hiervoor opnieuw naar de actie (2.1). Deze actie was onder andere invariant onder willekeurige translaties: voor elke ξ_μ is $S(\phi(x), \phi^*(x)) = S(\phi(x + \xi), \phi^*(x + \xi))$.

De bewegingsvergelijking voor deze actie is de bekende Klein-Gordon vergelijking, in dit geval voor een massaloos deeltje:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0. \tag{2.27}$$

Deze vergelijking heeft onder andere de oplossing

$$\phi(x) = e^{ik_\mu x^\mu} + e^{il_\mu x^\mu}, \quad (2.28)$$

met k_μ en l_μ twee lineair onafhankelijke null vectoren: $k_\mu k^\mu = l_\mu l^\mu = 0$. Neem voor dit voorbeeld $k^\mu = \delta_0^\mu + \delta_1^\mu$ en $l^\mu = \delta_0^\mu - \delta_1^\mu$. Als translatie kunnen we $\xi^\mu = \frac{\pi}{2}\delta_1^\mu$ kiezen. Laat ons nu kijken naar de waarschijnlijkheidsdichtheid $\phi\phi^*$ van de oplossing (2.28). Deze is hier niet invariant onder de verschuiving ξ^μ :

$$\phi\phi^*(x) = |e^{ik_\mu x^\mu} + e^{il_\mu x^\mu}|^2 \neq \phi\phi^*(x + \xi) = |e^{ik_\mu x^\mu} - e^{il_\mu x^\mu}|^2. \quad (2.29)$$

Hier ziet men dus dat hoewel de actie en de bewegingsvergelijkingen voor deze oplossing invariant zijn onder translaties, de zelf oplossing het toch niet is. Deze oplossing verliest echter niet alle symmetrie. Zo blijft ze bijvoorbeeld nog steeds invariant onder de translatie $\zeta^\mu = \delta_2^\mu$: men kan eenvoudig nagaan dat $\phi\phi^*(x) = \phi\phi^*(x + \zeta)$.

Terminologie Het is dus a priori niet duidelijk welke symmetrieën een oplossing allemaal heeft. Voor oplossingen van algemene relativiteitstheorie kan men echter de ruimtelijke symmetrieën systematisch opzoeken door te kijken naar oplossingen van de zogenaamde Killing vergelijkingen. Vectoren die deze vergelijking oplossen noemt men Killing vectoren, zij zijn elk de infinitesimale generator van een 1-dimensionale symmetriegroep.

2.4.2 Supersymmetrie van oplossingen

Net zoals in het geval van gewone symmetrieën geldt ook dat oplossingen van supersymmetrische theorieën zelf niet per se invariant zijn onder alle supersymmetrietransformaties.

In deze thesis werken we enkel met bosonische oplossingen. De eerste indruk is misschien dat een oplossing die enkel uit bosonen bestaat niet supersymmetrisch kan zijn, als we de zaak wat grondiger bekijken zal blijken dat dit soms echter toch mogelijk kan zijn.

In het algemeen werkt een lokale supersymmetrietransformatie als volgt op een oplossing:

$$\begin{cases} B \rightarrow B + \delta B = B + \epsilon F, \\ F \rightarrow F + \delta F = F + \partial\epsilon + \epsilon\partial B. \end{cases} \quad (2.30)$$

Voor puur bosonische oplossingen vereenvoudigt dit tot

$$\begin{cases} B \rightarrow B, \\ 0 \rightarrow \partial\epsilon + \epsilon\partial B. \end{cases} \quad (2.31)$$

De voorwaarde dat een bosonische oplossing invariant is onder een supersymmetrietransformatie geparametriseerd door de spinor ϵ is dus dat

$$\delta F = \partial\epsilon + \epsilon\partial B = 0. \quad (2.32)$$

In analogie met gewone symmetrieën noemt men deze vergelijkingen de Killing spinor vergelijkingen. Een ϵ die er voor een bepaalde oplossing aan voldoet, noemen we een Killing spinor van deze oplossing. Deze vergelijking (2.32) laat ons toe om voor een gegeven oplossing op zoek te gaan naar mogelijke ϵ die een supersymmetrietransformatie parametriseren die de oplossing invariant laat. Zo'n ϵ die aan (2.32) voldoet heeft in het algemeen de vorm $f(x)\epsilon_0$, met ϵ_0 een constante spinor.

Definitie De constante spinor ϵ_0 kan gerepresenteerd worden⁶ als een $2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ -dimensionale vector. De vergelijking (2.32) heeft in deze representatie de vorm

$$M(x)\epsilon_0 = 0. \quad (2.33)$$

Een bepaalde niet-nul oplossing voor ϵ_0 zal dus een zeker aantal niet-nul componenten hebben, zeg a , we duiden het totaal aantal componenten aan met $b = 2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$. Een oplossing van een supergravitatie theorie waarvoor ϵ_0 aan (2.33) voldoet, noemen we dan $\frac{a}{b}$ -supersymmetrisch. Als $a = b$ spreken we over een maximaal supersymmetrische oplossing. In het algemeen noemen we een oplossing supersymmetrisch als $a > 0$.

Belang van supersymmetrie Als een oplossing supersymmetrisch is volgen daar meteen enkele belangrijke eigenschappen uit. Zo zal de oplossing steeds stabiel zijn, dit wil zeggen dat ze bij een kleine perturbatie niet zal vervallen naar een andere oplossing.

Verder wordt door supersymmetrie gegarandeerd dat een oplossing geen naakte singulariteiten zal hebben.

Supersymmetrie 'beschermt' de oplossingen ook voldoende zodat ze een voortzetting naar sterke koppeling of kwantisatie zullen doorstaan.

Om deze redenen is het interessant om te zoeken naar oplossingen met supersymmetrie.

Formules We geven hier de voor ons relevante Killing spinor vergelijkingen, namelijk die van 11D, IIA en IIB. Merk op dat de vorm van de vergelijkingen enkel afhankelijk is van de theorie waarin we werken. De invulling ervan

⁶Zie bijlage B.

wordt gegeven door de preciese uitdrukking voor de velden, die van oplossing tot oplossing verschilt.

11D:

$$\delta\psi_\mu = 2\nabla_\mu\epsilon + \frac{i}{144} (\Gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_\mu - 8\Gamma^{\beta\gamma\delta}\delta^\alpha_\mu) \epsilon F_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0. \quad (2.34)$$

IIA:

$$\begin{cases} \delta\psi_\mu = \left[\nabla_\mu - \frac{1}{8}\Gamma_{11} \not{H}_\mu + \frac{i}{8}e^\phi \sum_{n=1,2} \frac{1}{(2n)!} \not{F}_{(2n)} \Gamma_\mu (-\Gamma_{11})^n \right] \epsilon = 0, \\ \delta\lambda = \left[\not{\partial}\phi + \frac{1}{2\cdot 3!}\Gamma_{11} \not{H} + \frac{i}{4}e^\phi \sum_{n=1,2} \frac{5-2n}{(2n)!} \not{F}_{(2n)} (-\Gamma_{11})^n \right] \epsilon = 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

IIB:

$$\begin{cases} \delta\psi_\mu = \left(\nabla_\mu - \frac{1}{8} \not{H}_\mu \otimes \sigma_3 \right) \epsilon \\ \quad + \frac{i}{8}e^\phi \left(\sum_{n=1,2} \frac{1}{(2n-1)!} \not{F}_{(2n-1)} \Gamma_\mu \otimes \mathcal{P}_n + \frac{1}{2\cdot 5!} \not{F}_{(5)} \Gamma_\mu \mathcal{P}_3 \right) \epsilon = 0, \\ \delta\lambda = \left[\not{\partial}\phi + \frac{1}{2\cdot 3!} \not{H} \otimes \sigma_3 + \frac{i}{4}e^\phi \sum_{n=1,2} \frac{n-3}{(2n-1)!} \not{F}_{(2n-1)} \otimes \mathcal{P}_n \right] \epsilon = 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Hierin zijn σ_i de Pauli matrices en

$$\mathcal{P}_n = \begin{cases} \sigma_1, & n \text{ even,} \\ \sigma_2, & n \text{ oneven.} \end{cases} \quad (2.37)$$

In alle drie de theorieën zijn deze vergelijkingen een uitdrukking van de algemene vergelijking (2.32). Ze zijn afkomstig van het nul stellen van de variaties van de fermionvelden. Daarom noemt men de eerste van de twee vergelijkingen in IIA en IIB de gravitino vergelijking en de tweede de dilatino vergelijking. In 11D is er geen dilatino aanwezig en is er dus enkel de gravitino vergelijking. We zullen in deze thesis sterk steunen op deze Killing spinor vergelijkingen om te zoeken naar oplossingen met 3/4-supersymmetrie.

Voorbeeld Om de lezer een beetje een idee te geven hoe het berekenen van de supersymmetrie van een oplossing in zijn werk gaat, geven we een eenvoudig voorbeeld. Neem hiervoor de fundamentele string oplossing⁷ $F1$:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \mathcal{H}^{-1}(dt^2 - dz^2) - (dx_1^2 + \dots + dx_8^2), \\ e^{-2\phi} &= \mathcal{H}, \\ H &= \partial_i \mathcal{H} dt \wedge dz \wedge dx^i, \end{aligned} \quad (2.38)$$

⁷We poneren deze oplossing hier om haar te kunnen gebruiken als voorbeeld. Lezers die wat meer achtergrond over de $F1$ oplossing willen, kunnen die vinden in [6].

we noteren de coördinaten als (t, z, x^i) . Verder is $\mathcal{H}(x^i)$ een harmonische functie in de x^i : $\partial_i \partial_i \mathcal{H} = 0$.

Deze $F1$ is een braanoplossing van zowel IIA als IIB. We zullen hier kort de supersymmetrie berekenen aan de hand van de Killing spinor vergelijkingen van IIA. Men kan een analoge berekening doen in IIB met hetzelfde resultaat.

Daar in deze oplossing (2.38) de Ramond-Ramond velden nul zijn, herleiden de Killing spinor vergelijkingen (2.35) zich tot

$$\begin{cases} \delta\psi_\mu = [\nabla_\mu - \frac{1}{8}\Gamma_{11} \not{H}_\mu] \epsilon = 0, \\ \delta\lambda = [\not{\partial}\phi + \frac{1}{2\cdot 3!}\Gamma_{11} \not{H}] \epsilon = 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

We vullen nu ook de expliciete uitdrukkingen voor $g_{\mu\nu}$, ϕ en H uit (2.38) in deze twee vergelijkingen in. Wat rekenen levert de volgende vergelijkingen:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} (1 + \Gamma_{11} \Gamma^a \Gamma^b) \epsilon = 0, \\ (\partial_i + \frac{1}{4} \mathcal{H}^{-1} \partial_i \mathcal{H} \Gamma_{11} \Gamma^a \Gamma^b) \epsilon = 0, \\ \left[\partial_t - \frac{1}{4} \mathcal{H}^{-\frac{3}{2}} \not{\partial} \mathcal{H} \Gamma^t (1 + \Gamma_{11} \Gamma^a \Gamma^b) \right] \epsilon = 0, \\ \left[\partial_z + \frac{1}{4} \mathcal{H}^{-\frac{3}{2}} \not{\partial} \mathcal{H} \Gamma^b (1 + \Gamma_{11} \Gamma^a \Gamma^b) \right] \epsilon = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Hierin zijn de gamma matrices $\Gamma^a = e_t^a \Gamma^t$ en $\Gamma^b = e_z^b \Gamma^z$ met $\eta^{ab} = e_\mu^a e_\nu^b g^{\mu\nu}$. Gebruikmakend van de eerste vergelijking in (2.40) kunnen we de andere drie sterk vereenvoudigen:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} (1 + \Gamma_{11} \Gamma^a \Gamma^b) \epsilon = 0, \\ (\partial_i - \frac{1}{4} \mathcal{H}^{-1} \partial_i \mathcal{H}) \epsilon = 0, \\ \partial_t \epsilon = 0, \\ \partial_z \epsilon = 0. \end{cases} \quad (2.41)$$

Dit stelsel heeft als oplossingen $\epsilon = \mathcal{H}^{\frac{1}{4}} \epsilon_0$ met ϵ_0 een constante spinor die voldoet aan

$$\frac{1}{2} (1 + \Gamma_{11} \Gamma^a \Gamma^b) \epsilon_0 = 0. \quad (2.42)$$

We dienen nu het aantal niet-nul componenten van ϵ_0 te bepalen om de hoeveelheid bewaarde supersymmetrie te kennen. Daar we hier in tien dimensies werken heeft een spinor $2^{\lfloor \frac{10}{2} \rfloor} = 32$ componenten.

Merk op dat $(\Gamma_{11}\Gamma^a\Gamma^b)^2 = 1$ en dat $(\Gamma_{11}\Gamma^a\Gamma^b)^\dagger = \Gamma_{11}\Gamma^a\Gamma^b$. Dit zorgt ervoor dat $P = \frac{1}{2}(1 + \Gamma_{11}\Gamma^a\Gamma^b)$ een projector is. De projector projecteert een aantal -zeg q - van de componenten van ϵ_0 op 0. Deze q componenten voldoen dus triviaal aan (2.42) en zijn onbepaald. De andere $(32 - q)$ componenten worden op zichzelf afgebeeld en vergelijking (2.42) stelt dan dat ze nul moeten zijn. De $F1$ oplossing zal dus $\frac{q}{32}$ -supersymmetrisch zijn.

De projector P heeft twee verschillende eigenwaarden: q keer 0 en $32 - q$ keer 1. Dit geeft dat

$$32 - q = \text{Tr}P = \frac{1}{2} [\text{Tr}1 + \text{Tr}(\Gamma_{11}\Gamma^a\Gamma^b)], \quad (2.43)$$

of dus dat

$$q = 16 - \text{Tr}(\Gamma_{11}\Gamma^a\Gamma^b). \quad (2.44)$$

Het is eenvoudig in te zien dat $\text{Tr}(\Gamma_{11}\Gamma^a\Gamma^b) = 0$. Neem hiervoor Γ^i een gamma matrix uit een x^i richting. Uit de anti-commutatierelaties van de gamma matrices volgt dat

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\Gamma_{11}\Gamma^a\Gamma^b) &= -\text{Tr}(\Gamma^i\Gamma^i\Gamma_{11}\Gamma^a\Gamma^b) \\ &= \text{Tr}(\Gamma^i\Gamma_{11}\Gamma^a\Gamma^b\Gamma^i). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Gebruiken we echter de eigenschap dat $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, dan vinden we dat

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\Gamma_{11}\Gamma^a\Gamma^b) &= -\text{Tr}(\Gamma^i\Gamma^i\Gamma_{11}\Gamma^a\Gamma^b) \\ &= -\text{Tr}(\Gamma^i\Gamma_{11}\Gamma^a\Gamma^b\Gamma^i). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Deze twee resultaten geven dus dat $\text{Tr}(\Gamma_{11}\Gamma^a\Gamma^b) = -\text{Tr}(\Gamma_{11}\Gamma^a\Gamma^b) = 0$. Dit leidt via (2.44) onmiddellijk tot $q = 16$. De projector projecteert dus 16 componenten op nul, en 16 componenten op zichzelf. Dit zorgt ervoor dat de $F1$ oplossing 1/2-supersymmetrisch is.

Hoofdstuk 3

Algemene eigenschappen van pp-waves

In dit hoofdstuk leiden we de lezer kort rond in de wereld van de pp-waves. Het is tot deze klasse van gravitatiegolven dat de oplossingen gepresenteerd in hoofdstuk 4 behoren.

3.1 pp-waves als oplossingen van supergravitatie

3.1.1 Enkele elementaire kenmerken van pp-waves

Gravitatiegolven Eén van de belangrijke eigenschappen van de algemene relativiteitstheorie is dat deze het bestaan van gravitatiegolven voorspelt. Deze golven kunnen beschouwd worden als het gravitationeel analogon van de elektromagnetische golven die ons allen uit het dagelijks leven bekend zijn. Meestal worden gravitatiegolven gezien als kleine storingen die zich in een voor de rest vlakke ruimte voortplanten. Doordat de storing klein is kan men dan de Einstein vergelijking benaderend oplossen en herleiden tot een golfvergelijking voor de storing. Er zijn echter ook exacte oplossingen bekend die een golfkarakter vertonen.

Definitie Een belangrijke klasse van deze exacte gravitatiegolven zijn de zogenaamde plane-fronted waves with parallel rays of pp-waves¹. Brinkmann

¹In het Nederlands kunnen we ze vlakke golven met parallelle 'stralen' noemen. In deze thesis kiezen we ervoor de internationale term pp-waves te gebruiken om verwarring omtrent betekenis te vermijden.

[7] beschreef hen voor het eerst in 1923. Als oplossing van de Einstein vergelijkingen worden de pp-waves gekarakteriseerd doordat ze een covariant constante null Killing vector bezitten. Het is binnen deze klasse van gravitatiegolven dat we in deze thesis zullen werken.

Metriek Met een gepaste keuze van coördinaten wordt de metriek van zo'n pp-wave in d dimensies gegeven door

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -2dx^+ dx^- - W(x^-, x^i)(dx^-)^2 - \sum_{i=1}^{d-2} (dx^i)^2. \quad (3.1)$$

Deze metriek factoriseert de ruimte in twee delen: een tweedimensionale ruimte, overdekt door de coördinaten x^+ en x^- , en een $(d-2)$ -dimensionaal euclidisch deel $\mathbb{E}^{(d-2)}$ dat het golfoppervlak beschrijft, overdekt door de coördinaten x^i . In dit werk zullen we vaak van deze coördinatensplitsing $(x^\mu) = (x^+, x^-, x^i)$ gebruik maken. Om te zien dat deze metriek inderdaad een pp-wave beschrijft, kan men verifiëren dat de vector $k^\mu = \delta_+^\mu$, aan de gestelde criteria voldoet. Omdat $g_{++} = 0$, is k^μ alvast een null vector. Verder kan men eenvoudig uitrekenen dat k^μ covariant constant is: $\nabla_\mu k^\mu = 0$, en ook voldoet aan de Killing vergelijkingen

$$\nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = 0. \quad (3.2)$$

Het is ook zo dat elke metriek die aan de pp-wave criteria voldoet, in de vorm (3.1) te schrijven is. Dit is veel moeilijker om aan te tonen en we zullen er in deze thesis dan ook niet verder op ingaan, de geïnteresseerden verwijzen we naar [8].

IJkvrijheid Het lijnelement ds^2 is invariant onder algemene coördinatentransformaties. Dit zorgt ervoor dat verschillende functies W toch dezelfde golf kunnen beschrijven. Als een coördinatentransformatie de metriek (3.1) omvormt tot

$$ds^2 = -2dx^+ dx^- - \widetilde{W}(x^-, x^i)(dx^-)^2 - \sum_{i=1}^{d-2} (dx^i)^2, \quad (3.3)$$

dan beschrijven W en \widetilde{W} dezelfde fysische gravitatiegolf beschrijven. Een voorbeeld is de coördinatentransformatie

$$\begin{cases} x^+ \rightarrow x^+ + \frac{1}{2} \sum_i x^i \int_0^{x^-} f_i(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^{x^-} f(t) dt - \frac{1}{8} \sum_i \int_0^{x^-} \left(\int_0^t f_i(s) ds \right)^2 dt, \\ x^i \rightarrow x^i - \frac{1}{2} \int_0^{x^-} \int_0^t f_i(s) ds dt. \end{cases} \quad (3.4)$$

Invullen in (3.1) levert dat

$$\widetilde{W}(x^-, x^i) = W \left(x^-, x^i + \frac{1}{2} \int_0^{x^-} \int_0^t f_i(s) ds dt \right) + \sum_i f_i(x^-) x^i + f(x^-). \quad (3.5)$$

We kunnen dit interpreteren als een soort ijkinvariantie van de functie W . Zo beschrijven bijvoorbeeld $W(x^-, x^i)$ en $W(x^-, x^i) + f(x^-)$ dezelfde fysische golf, iets wat doet denken aan ijktheorieën waarin bijvoorbeeld A_μ en $A_\mu + d\Lambda$ hetzelfde elektromagnetische veld beschrijven². Er zijn ook ingewikkeldere transformaties mogelijk. Als W geen singulariteiten heeft, kunnen we de f_i 's uit (3.4) kiezen als de oplossingen van het stelsel

$$f_i(x^-) = -\partial_i W \left(x^-, \frac{1}{2} \int_0^{x^-} \int_0^t f_1(s) ds dt, \dots, \frac{1}{2} \int_0^{x^-} \int_0^t f_{(d-2)}(s) ds dt \right). \quad (3.6)$$

Uit (3.5) kan men dan snel afleiden dat $\partial_i \widetilde{W}(x^-, 0) = 0$. We kunnen dus voor elke reguliere W een equivalente functie vinden waarvoor deze afgeleiden in $x^i = 0$ verdwijnen. Verder in deze thesis zullen we deze eigenschap nog handig kunnen gebruiken.

3.1.2 Een Ansatz voor oplossingen met een pp-wave metriek

Euler-Lagrange vergelijkingen Zoals gezegd zijn de pp-waves oplossingen van algemene relativiteitstheorie. Hull [9] toonde aan dat men ze kan veralgemenen tot oplossingen van 11-dimensionale supergravitatie waarbij eventueel ook een 4-vorm veldsterkte aanwezig is. Hieronder zullen we een afleiding geven waaruit men kan zien dat deze golven oplossingen zijn van de vrij algemene Lagrangiaan

$$\mathcal{L}_d(g, \phi, F_{(q+1)}) = \sqrt{g} \left[R + \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \sum_q \frac{(-1)^q}{2(q+1)!} e^{a_q \phi} F_{(q+1)}^2 \right]. \quad (3.7)$$

Naast de metriek zijn hier dus eventueel ook nog een dilaton ϕ en verschillende veldsterkten $F_{(q+1)}$ aanwezig. Deze Lagrangiaan kan onder andere het bosonische deel van zowel 11D ($q = 3, a_q = \phi = 0$), IIA (q is oneven) als IIB

²In [8] worden transformaties die de vorm van de metriek (3.1) behouden, 'gauge transformations' genoemd, in een verwijzing naar ijktransformaties of gauge transformations.

(q is even) supergravitatie beschrijven³ en heeft als bewegingsvergelijkingen het stelsel

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\alpha\beta} = \sum_q \left[\frac{(-1)^q q}{2(q+1)!(d-2)} e^{a_q \phi} F_{(q+1)}^2 g_{\alpha\beta} - \frac{(-1)^q}{2q!} e^{a_q \phi} F_{(q+1) \alpha \mu_1 \dots \mu_q} F_{(q+1) \beta}{}^{\mu_1 \dots \mu_q} \right] \\ \quad - \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi, \\ \nabla^2 \phi = \sum_q \frac{(-1)^q a_q}{2(q+1)!} e^{a_q \phi} F_{(q+1)}^2, \\ \nabla_{\mu_1} (e^{a_q \phi} F_{(q+1)}^{\mu_1 \dots \mu_{q+1}}) = 0. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

We proberen nu een algemene Ansatz op te bouwen die het stelsel (3.8) oplost en als metriek (3.1) heeft. Dit wil zeggen dat we niet per se aantonen dat de hieronder voorgestelde oplossingen de enige oplossingen zijn met een pp-wave metriek, maar dat we enkele aannames maken die de bewegingsvergelijkingen sterk vereenvoudigen. We vinden zo een ruime klasse van oplossingen die als metriek de vorm (3.1) hebben, zonder daarom aan te tonen dat deze klasse exhaustief is.

De enige objecten die voorlopig bepaald zijn in deze vergelijkingen zijn dus de metriek en de daaruitvolgende Ricci tensor. Een korte berekening leert dat deze Ricci tensor slechts één van nul verschillende component heeft:

$$R_{--} = \frac{1}{2} \partial_i \partial_i W. \quad (3.9)$$

Aanname Om verder een Ansatz te ontwikkelen moeten we zoals steeds een evenwicht vinden tussen algemeenheid en eenvoud. We willen de bewegingsvergelijkingen vereenvoudigen maar toch nog steeds een ruime klasse oplossingen behouden. In deze thesis zullen we ons beperken tot oplossingen waarvoor we het dilaton ϕ nul stellen. Het zal blijken dat deze keuze nog een voldoende aantal oplossingen toelaat, waarvoor niet triviale eigenschappen bestaan. Het is natuurlijk niet onmogelijk om het dilaton 'aan' te zetten, men zal dan echter de hier voorgestelde Ansatz moeten veralgemenen.

Dilaton vergelijking Merk op dat het dilaton toch nog een fysische rol blijft spelen ook al stellen we het in onze oplossingen nul. De aanwezigheid van het dilaton in de Lagrangiaan zorgt immers voor de tweede vergelijking in het stelsel (3.8). Het nul stellen van het dilaton verwijdert deze vergelijking

³Vergelijk met (2.14), (2.21) en (2.22). Merk op dat we steeds de Chern-Simons term weglaten. We kunnen dit doen omdat zijn bijdrage tot de bewegingsvergelijkingen voor de oplossingen die wij beschouwen steeds nul zal zijn.

niet, dit kan enkel indien men de dilatonkoppeling a_q nul stelt⁴. De dilaton vergelijking reduceert tot de vorm

$$0 = \sum_q \frac{(-1)^q a_q}{2(q+1)!} F_{(q+1)}^2. \quad (3.10)$$

Een tweede aanname De vergelijking bestaat uit een som met kwadraten. De eenvoudigste manier om ze op te lossen, is om deze kwadraten afzonderlijk nul te stellen. Verder heeft deze aanname als voordeel dat ze onafhankelijk is van de dilatonkoppeling en dus werkt voor een groot aantal Lagrangianen. In een euclidische ruimte zou het nul stellen van de norm van de velden betekenen dat we al de veldsterkten identiek nul moeten stellen. Maar aangezien de ruimte-tijd metriek niet definitief is, bestaan er niet-triviale velden met norm nul. Via de inverse metriek

$$g^{++} = W, \quad g^{+-} = -1, \quad g^{--} = g^{+i} = g^{-i} = 0, \quad g^{ij} = -\delta_{ij}, \quad (3.11)$$

kunnen we de eis $F_{(q+1)}^2 = g^{\mu_1\nu_1} \dots g^{\mu_{(q+1)}\nu_{(q+1)}} F_{\mu_1\dots\mu_{(q+1)}} F_{\nu_1\dots\nu_{(q+1)}} = 0$ uitschrijven als

$$\begin{aligned} W F_{+i_1\dots i_q} F_{+i_1\dots i_q} - 2F_{+i_1\dots i_q} F_{-i_1\dots i_q} - q F_{+-i_1\dots i_{(q-1)}} F_{-+i_1\dots i_{(q-1)}} \\ - \frac{1}{q+1} F_{i_1\dots i_{(q+1)}} F_{i_1\dots i_{(q+1)}} = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Opnieuw proberen we deze vergelijking te vereenvoudigen en wel door elke term afzonderlijk nul te stellen. Dit kan enkel door alle componenten nul te stellen behalve dan deze die de x^- maar niet de x^+ richting bevatten. Compact opgeschreven in de taal der vormen geeft dit:

$$F_{q+1} = dx^- \wedge \varphi_q, \quad (3.13)$$

waarbij φ_q een q -vorm is. Deze q -vorm is gedefinieerd op de Euclidische ruimte \mathbb{E}^{d-2} beschreven door de coördinaten x^i . Merk op dat voorlopig de functies $\varphi_{i_1\dots i_q}$ nog van alle coördinaten x^+, x^- en x^i kunnen afhangen.

Ansatz Bovenstaande aannames hebben ons er toe geleid om voor de Lagrangiaan (3.7) naar een oplossing te zoeken van de vorm:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -2dx^+ dx^- - W(x^-, x^i) (dx^-)^2 - \sum_{i=1}^{d-2} (dx^i)^2, \\ \phi &= 0, \\ F_{q+1} &= dx^- \wedge \varphi_q. \end{aligned} \quad (3.14)$$

⁴In 11D is dit het geval, daar is de dilaton vergelijking dus niet aanwezig. Omdat we een Ansatz willen construeren die ook werkt in IIA en IIB dienen we deze vergelijking dus wel te bekijken. In 11D kunnen we ze zien als triviaal voldaan.

Deze Ansatz is zo gekozen dat ze alvast de dilaton vergelijking (3.10) oplost. Laat ons nu kijken of deze aanname compatibel is met de resterende vergelijkingen uit (3.8) en welke extra voorwaarden dat nog oplevert.

Einstein vergelijkingen De eerste vergelijking uit (3.8), ook wel de Einstein vergelijking genoemd, is triviaal voldaan op de R_{--} component na. Deze stelt de voorwaarde

$$\partial_i \partial_i W = \sum_q \frac{-1^{(q+1)}}{q!} \varphi_q^2. \quad (3.15)$$

De vorm van de functie W wordt dus bepaald door de aanwezige veldsterkten. Deze differentiaalvergelijking kan men oplossen voor gegeven W of φ_q . Voorlopig laten we ze onopgelost en zien ze enkel als een voorwaarde waaraan onze klasse van oplossingen moet voldoen.

Veralgemeende Maxwell vergelijkingen De laatste vergelijkingen van het stelsel (3.8) leiden onmiddellijk tot de extra voorwaarden

$$\left\{ \partial_+ \varphi_{i_1 \dots i_q} = 0, \partial_j \varphi_{j i_1 \dots i_{(q-1)}} = 0. \right. \quad (3.16)$$

Vaak wordt de tweede van deze vergelijkingen compact genoteerd via de Hodge duale: $d^* \varphi_q = 0$. Merk op dat \star hier staat voor Hodge dualiteit tussen vormen op het $\mathbb{E}^{(d-2)}$ deel van de ruimte.

Bianchi identiteiten Naast het voldoen aan de bewegingsvergelijkingen voldoen fysische veld normaal ook steeds aan de Bianchi identiteiten. Dit is een veralgemening van wat men voor vectorvelden conservativiteit noemt. We vragen dat alle aanwezige vormvelden gesloten zijn: $dF_q = 0$, of dus dat ze afleidbaar zijn van een potentiaal. Dit levert via (3.13) dat

$$d\varphi_q = 0. \quad (3.17)$$

Resultaat We hebben nu dus een Ansatz geconstrueerd waarvoor de bewegingsvergelijkingen van de Lagrangiaan (3.7) zich herleiden tot een eenvoudig stel voorwaarden, en die als metriek op de ruimte-tijd een pp-wave levert. In dit werk bedoelen we met een pp-wave dus een oplossing die voldoet aan:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -2dx^+ dx^- - W(x^-, x^i)(dx^-)^2 - \sum_{i=1}^{d-2} (dx^i)^2, \\
F_{(q+1)} &= dx^- \wedge \varphi_q,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{cases}
\partial_i \partial_i W = \sum_q \frac{-1^{(q+1)}}{q!} \varphi_q^2, \\
\partial_+ \varphi_{i_1 \dots i_q} = 0, \\
d^* \varphi_q = 0, \\
d\varphi_q = 0.
\end{cases} \tag{3.19}$$

Opmerkingen Het is een belangrijke vaststelling dat zowel de vorm van de Ansatz als de vergelijkingen waar ze aan moet voldoen, invariant zijn onder de coördinatentransformatie (3.4). Het is dus heel de pp-wave configuratie die deze invariantie heeft en niet enkel de metriek.

Ook kan men zien dat als een pp-wave gekarakteriseerd door (W, φ_q) een oplossing is, dan ook $(W + H, \varphi_q)$ een oplossing zal zijn als H een harmonische functie is in de x^i ⁵. Pas op, deze oplossingen zijn ook werkelijk fysisch verschillend, daar ze een verschillende singulariteitenstructuur hebben. Deze transformatie $W \rightarrow W + H$ is dus van een heel andere aard dan de transformaties $W \rightarrow \widetilde{W}$.

3.2 pp-waves als Penrose limieten

In de vorige sectie hebben we gezien dat pp-waves niet enkel oplossingen van pure gravitatie hoeven te zijn, maar ook veralgemeend kunnen worden naar oplossingen van de supergravitaties door koppeling aan extra velden. In deze sectie willen we laten zien dat pp-waves meer dan enkel een wiskundige curiositeit zijn en wel degelijk ook een fysische betekenis hebben. Deze betekenis is echter niet onmiddellijk duidelijk: voor 1976 werden de pp-waves vaak nog als 'niet-fysisch' gezien. Daar kwam verandering in toen Penrose [10] aantoonde dat eender welke ruimte-tijd⁶ voor een observator in een bepaalde limiet het uitzicht van een pp-wave aanneemt. Vierentwintig jaar later breidde Güven [11] de limietprocedure van Penrose uit, zodat deze naast de metriek ook de andere fysische velden die aanwezig zijn in supergravitatie omvat.

⁵Dit betekent dat $\partial_i \partial_i H = 0$

⁶Exacter: Indien dit een hyperbolische normale pseudo-Riemannse variëteit is.

3.2.1 Penrose's originele limiet

Canonische vorm Om de Penrose limiet te kunnen nemen dienen we de metriek eerst in een canonische vorm te brengen. Dit kan gedaan worden door een speciale keuze van coördinaten. We doen dat op een omgeving van een stukje van een null geodeet γ . Deze null geodeet snijdt in elk punt een null hyperoppervlak loodrecht⁷. Op de omgeving kunnen we dit hyperoppervlak zien als lid van een (differentieerbare) één-parameter familie van null hyperoppervlakken H_λ . Neem als eerste coördinaat y^1 alvast de parameter λ : $y^1 = \lambda$. Elk hyperoppervlak H_{y^1} uit deze familie bepaalt uniek een null geodeet γ_{y^1} , die het loodrecht snijdt. Merk op dat dit loodrecht snijden hier betekent dat deze geodeet in H_{y^1} zal liggen omdat hij null is. Kies de oorsprong voor y^1 zodanig dat $\gamma_0 = \gamma$. De parameter die voor een gegeven y^1 langsheen zo'n null geodeet γ_{y^1} loopt, noemen we y^0 . De overige $(d-2)$ coördinaten die voor gegeven y^1 samen met y^0 het null hyperoppervlak H_{y^1} parametriseren, noemen we y^i , kies hun richtingen loodrecht op y^0 en neem verder dat hun oorsprong $y^i = 0$ op γ ligt. We hebben dus de set (y^0, y^1, y^i) die een differentieerbare kaart op de oorspronkelijke omgeving geven.

Dit werkt enkel op een omgeving waarin deze verschillende null geodeten γ_{y^1} , gegeven door y^1 constant en $y^i = 0$, elkaar niet snijden⁸, maar zo'n omgeving kan men steeds vinden. Lezers die geïnteresseerd zijn in meer details omtrent deze coördinatenkeuze verwijzen we naar [12].

In deze coördinaten (y^0, y^1, y^i) heeft de metriek de vorm

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -a & -b_i \\ 0 & -b_i & -c_{ij} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Merk op dat zowel a, b_i als c_{ij} functies zijn van de coördinaten (y^0, y^1, y^i) .

⁷Neem een vaste vector V^μ in de d -dimensionale raakruimte in een punt p van de ruimte-tijd. Aangezien de metriek een niet singuliere matrix is, heeft de vergelijking $g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu = 0$ een $(d-1)$ -dimensionale vectorruimte als oplossingsverzameling. Lokaal spant deze deelruimte van de raakruimte een hyperoppervlak H op, dit hyperoppervlak snijdt de geodeet rakend aan V^μ loodrecht. Elke geodeet bepaalt lokaal dus op een unieke wijze een hyperoppervlak, anderzijds zal ook elk hyperoppervlak lokaal een unieke geodeet bepalen via hetzelfde mechanisme. Als V^μ tijdsachtig is noemen we H ruimteachtig, is V^μ ruimteachtig dan wordt H tijdsachtig genoemd. Als V^μ null is, dan noemen we H ook null, in dit geval treed het ietwat vreemde verschijnsel op dat de kromme langs V^μ in H zal liggen.

⁸Punten waarin deze null geodeten elkaar snijden noemt men geconjugeerde punten. Meestal spreekt men dus van een omgeving vrij van geconjugeerde punten.

Limietprocedure Het nemen van de Penrose limiet is geïnspireerd door een interpretatie van de raakruimte. Als we een steeds kleinere omgeving van een punt steeds meer uitvergroten verkrijgen we niets anders dan de vlakke raakruimte in dat punt. Ook de Penrose limiet blaast de omgeving van een punt op tot de gehele ruimte, alleen doen we dit niet in elke coördinaat even snel en zullen we voor de relevante tensoren nog een extra schaling invoeren. Het essentiële van de procedure bestaat uit de coördinatentransformatie

$$X^0 = y^0, \quad X^1 = \Omega^{-2}y^1, \quad X^i = \Omega^{-1}y^i, \quad (3.21)$$

met Ω een constante. De Penrose limiet vergroot de coördinaten (X^μ) waarmee we werken, door $\Omega \rightarrow 0$ te nemen. Het blijkt dat als we cruciale tensoren zoals de metriek ongewijzigd houden in de limiet, deze gewoon nul worden. Om de metriek in deze limiet niet triviaal te laten worden, kijken we hoe hij schaalt in Ω en verwijderen we deze schaling. Het lijnelement ds^2 is invariant onder de coördinatentransformatie en laat zich schrijven als

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dy^\mu dy^\nu \\ &= \Omega^2 \left(-2dX^0dX^1 - a\Omega^2(dX^1)^2 - 2\Omega \sum_i b_i dX^i dX^1 - \sum_{i,j} c_{ij} dX^i dX^j \right) \\ &= g_{\mu\nu}(\Omega)dX^\mu dX^\nu \\ &= \Omega^2 G_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu \end{aligned} \quad (3.22)$$

In de laatste lijn definieerden we een nieuwe metriek die dezelfde is als de oude op een conforme transformatie na:

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -\Omega^2 a & -\Omega b_i \\ 0 & -\Omega b_i & -c_{ij} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

We zien dat de oude metriek $g_{\mu\nu}$ als Ω^2 naar nul gaat als $\Omega \rightarrow 0$. We definiëren de Penrose limiet van de metriek daarom als $\tilde{g}_{\mu\nu} = \lim_{\Omega \rightarrow 0}(\Omega^{-2}g_{\mu\nu}) = \lim_{\Omega \rightarrow 0} G_{\mu\nu}$. Deze heeft de eenvoudige vorm

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu = -2dX^0dX^1 - \sum_{i,j} c_{ij}dX^i dX^j. \quad (3.24)$$

Merk op dat ook in de coördinatentransformatie (3.21) de limiet $\Omega \rightarrow 0$ wordt genomen en dit zorgt ervoor dat c_{ij} enkel nog afhangt van X^0 .

Om de metriek (3.24) beter te herkennen gebruiken we de coördinatentransformatie⁹

$$X^0 = 2x^-, \quad X^1 = x^+ - \frac{1}{2} \sum_{i,j} M_{ij}(x^-)x^i x^j, \quad X^i = \sum_j Q_j^i(x^-)x^j, \quad (3.25)$$

⁹We gaan van Rosen coördinaten naar zogenaamde Brinkmann coördinaten.

met

$$\begin{cases} M_{ij} = c_{kl} \partial_- Q_i^k Q_j^l, \\ M_{ij} = M_{ji}, \\ c_{ij} Q_k^i Q_l^j = \delta_{kl}. \end{cases}$$

Als we dan $A_{ij} = -\partial_- M_{ij} + c_{kl} \partial_- Q_i^k \partial_- Q_j^l$ noemen, herleidt de metriek zich tot

$$d\tilde{s}^2 = -2dx^+ dx^- - \sum_{i,j} A_{ij}(x^-) x^i x^j (dx^-)^2 - \sum_i (dx^i)^2. \quad (3.26)$$

Deze is natuurlijk niets anders dan een speciaal geval van de metriek uit (3.1) en beschrijft dus een pp-wave.

Fysische betekenis. We hebben nu dus een nieuwe betekenis voor onze pp-wave oplossingen, maar de fysische interpretatie is uit het vorige misschien nog niet helemaal duidelijk. Penrose kijkt hiervoor naar opeenvolging van observatoren O_Ω . Deze observatoren bewegen zich door hun ruimte-tijd langsheen een wereldlijn $(X^0(\tau), X^1(\tau), X^i(\tau))$. Als we nu de limiet $\Omega \rightarrow 0$ in (3.21) nemen, zal de wereldlijn van de observator O_Ω de null geodeet γ meer en meer gaan benaderen. In de limiet zal de observator $O_0 = \lim_{\Omega \rightarrow 0} O_\Omega$ zich dus met de lichtsnelheid bewegen. Er gebeurt echter nog iets, de metriek waarmee de opeenvolgende observatoren O_Ω de ruimte opmeten verandert ook. De opeenvolgende observatoren zullen een steeds kleinere omgeving rond henzelf als steeds groter gaan meten.

We kunnen de limietprocedure dus zien als een rij van observatoren die zich sneller en sneller bewegen en ondertussen meer en meer inzoomen op hun nabije omgeving¹⁰. Voor de uiteindelijke limiet-observator heeft de ruimte-tijd het uitzicht van een pp-wave.

3.2.2 De veralgemening door Güven

Penrose bekeek deze limietprocedure in het kader van de algemene relativiteitstheorie en had dus genoeg aan een definitie betreffende de coördinaten en de metriek. In veralgemeningen van de relativiteitstheorie zoals supergravitatie treden nog vele andere tensoren op, het is dus duidelijk dat in dit kader ook de definitie van de Penrose limiet een veralgemening tot deze nieuwe velden nodig heeft. Zoals hierboven al vermeld, werd deze gegeven door Güven.

¹⁰Dit meer en meer inzoomen veronderstelt natuurlijk wel dat een observator oneindig klein is.

Vormvelden Laat ons voor een zinnige definitie van de limiet voor willekeurige tensoren opnieuw kijken naar hun schaling in Ω na de coördinaten-transformatie (3.21). Voor een p -vorm ijkveld levert dit

$$\begin{aligned}
A_p &= \frac{1}{p!} A_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \\
&= \Omega^p \left(\frac{1}{(p-2)!} A_{0i_1 \dots i_{(p-2)}} dX^0 \wedge dX^1 \wedge dX^{i_1} \wedge \dots \wedge dX^{i_{(p-2)}} \right. \\
&\quad + \Omega^{-1} \frac{1}{(p-1)!} A_{0i_1 \dots i_{(p-1)}} dX^0 \wedge dX^{i_1} \wedge \dots \wedge dX^{i_{(p-1)}} \\
&\quad + \Omega \frac{1}{(p-1)!} A_{1i_1 \dots i_{(p-1)}} dX^1 \wedge dX^{i_1} \wedge \dots \wedge dX^{i_{(p-1)}} \\
&\quad \left. + \frac{1}{p!} A_{i_1 \dots i_p} dX^{i_1} \wedge \dots \wedge dX^{i_p} \right). \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Hier willen we dus de Penrose limiet definiëren als $\tilde{A}_p = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \Omega^{-p} A_p$ ¹¹. Er treed nu echter een kleine complicatie op daar de tweede term in (3.27) zal divergeren in deze limiet. We kunnen dit oplossen door gebruik te maken van de ijkkeuze. We weten immers dat de fysica van een theorie invariant is onder de ijktransformatie $A_p \rightarrow A_p + d\Lambda_{(p-1)}$. Kies $\Lambda_{(p-1)}$ zo dat $A_{0\mu_1 \dots \mu_{(p-1)}} = 0$, de limiet is nu goed gedefinieerd en geeft als resultaat

$$\tilde{A}_p = \frac{A_{i_1 \dots i_p}(X^0)}{p!} dX^{i_1} \wedge \dots \wedge dX^{i_p} + \text{ijk}. \tag{3.28}$$

Voor de veldsterkten betekent dit dat

$$\tilde{F}_{(p+1)}(X^0) = \frac{1}{p!} F_{0i_1 \dots i_p} dX^0 \wedge dX^{i_1} \wedge \dots \wedge dX^{i_p}, \tag{3.29}$$

of als we via (3.25) naar Brinkmann coördinaten gaan dat

$$\tilde{F}_{(p+1)} = \frac{1}{p!} F_{-i_1 \dots i_p}(x^-) dx^- \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \tag{3.30}$$

Merk de gelijkenis op met (3.13). Het blijkt dus dat de aannames die we bij het construeren van de Ansatz (3.18) deden, daar om de vergelijkingen zo eenvoudig mogelijk op te lossen, leiden tot de vorm die een veldsterkte in de Penrose limiet aanneemt. Een belangrijk verschil is dat de velden in (3.13) nog kunnen afhangen van de x^i terwijl in de Penrose limiet de velden enkel nog van x^- afhangen. De reden hiervoor is dezelfde als in het geval van de metriek: de limiet van de coördinaten-transformatie (3.21) zorgt ervoor dat (3.28) enkel nog afhankelijk is van X^0 . Dit zorgt ervoor dat elke Penrose limiet een pp-wave is, maar dat het omgekeerde niet altijd waar is.

¹¹Bekijk voor de schalingseigenschappen het dilaton ϕ hier even als een nul-vorm.

Eigenschappen Het is merkwaardig maar bijzonder interessant dat de schalingen (3.22) en (3.27) er ook precies voor zorgen dat de Lagrangiaan (3.7) homogeen schaalt als

$$\mathcal{L}(g, \phi, F_{(q+1)}) = \Omega^{(d-2)} \mathcal{L}(G, \phi, \Omega^{-p} F_{(q+1)}). \quad (3.31)$$

Aan de bewegingsvergelijkingen behorend bij een Lagrangiaan verandert er niets als we deze met een constante factor vermenigvuldigen. Dit betekent dus dat als een metriek en een configuratie velden de bewegingsvergelijkingen van de Lagrangiaan (3.7) oplossen, ook hun Penrose limiet aan dezelfde bewegingsvergelijkingen voldoet. Dit is natuurlijk van groot belang want dit wil zeggen dat de fysische interpretatie die we hierboven gaven aan deze limiet werkelijk een fysische betekenis heeft, de ruimte in de limiet geobserveerd voldoet nog steeds aan dezelfde bewegingsvergelijkingen als de oorspronkelijke ruimte. Het nemen van de limiet gebeurt dus binnen één theorie. Verder kan men aantonen [13] dat het aantal symmetrieën en supersymmetrieën van een ruimte-tijd configuratie nooit kleiner wordt in de Penrose limiet. Dit wijst er al op dat het interessant is om naar de supersymmetrie van pp-waves te kijken, dit doen we in de volgende sectie. We zullen daar kunnen aantonen dat de Penrose limiet van een willekeurige oplossing steeds 1/2 supersymmetrie bewaart.

Conclusie Penrose toonde aan dat elke oplossing van de algemene relativiteitstheorie in een bepaalde limiet het uitzicht van een pp-wave heeft. Dit kan men veralgemenen naar oplossingen van supergravitatie. Zo hebben pp-waves dus dezelfde fundamentele betekenis in supergravitatie als ze in de relativiteitstheorie hebben.

3.3 Supersymmetrie van pp-waves

Het aantal supersymmetrieën van een oplossing zal in de Penrose limiet nooit afnemen [13]. Daar een bepaalde pp-wave de Penrose limiet van verscheidene ruimte-tijden kan zijn en steeds het aantal supersymmetrieën heeft van de meest supersymmetrische van die ruimte-tijden, kunnen we misschien reeds vermoeden dat ze vaak veel supersymmetrie zullen hebben. In deze sectie zullen we de Killing spinor vergelijkingen voor een algemene pp-wave analyseren in IIA, IIB en 11D. We kunnen hieruit aantonen dat een Penrose limiet altijd minstens 1/2-supersymmetrisch zal zijn. In het volgende hoofdstuk wordt dan een constructiemethode getoond waarmee 3/4-supersymmetrische pp-waves gevonden kunnen worden.

Opmerking Vanaf dit punt zullen er in dit werk vele manipulaties met gamma matrices gebeuren, niet altijd op de voorgrond, maar zeker in de achterliggende berekeningen. Een korte inleiding over gamma matrices en hun eigenschappen in een pp-wave achtergrond kan u vinden in bijlage B.

Killing spinor vergelijkingen In het algemeen kunnen we voor zowel IIA, IIB als 11D de Killing spinor vergelijkingen (2.35), (2.36) en (2.34) opschrijven onder de vorm

$$\begin{cases} \Theta\epsilon = 0, \\ (\nabla_\mu + i\Omega_\mu)\epsilon = 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

De eerste vergelijking noemen we de dilatino vergelijking en de tweede de gravitino vergelijking. De oplossingsstrategie zal zijn om in beide vergelijkingen een Γ_+ rechts af te zonderen. Uit de speciale vorm van de pp-wave metriek (3.1) volgt dat deze Γ_+ evenredig is met een projector P_1 ¹². Deze projector zorgt ervoor dat de helft van de componenten van ϵ op nul geprojecteerd worden. Deze componenten voldoen dus triviaal aan de Killing spinor vergelijkingen. Hierdoor hebben we dan aangetoond dat de oplossingen minstens 1/2-supersymmetrisch zijn. We geven de berekening in detail weer hieronder.

Covariante afgeleide Laat ons eerst kijken naar ∇_μ uit (3.32). Dit is de covariante afgeleide voor spinoren, gedefinieerd als $\nabla_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu^{ab}\Gamma_{ab}$. De spinconnectie ω_μ^{ab} heeft in het geval van een pp-wave slechts twee van nul verschillende componenten:

$$\omega_-^{i+} = -\omega_-^{+i} = \frac{1}{2}\partial_i W. \quad (3.33)$$

Dit laat ons toe om voor deze golven $\nabla_\mu\epsilon$ te schrijven als

$$\begin{aligned} \nabla_+\epsilon &= \partial_+\epsilon, \\ \nabla_-\epsilon &= \partial_-\epsilon - \frac{1}{4}\partial_i W \Gamma_+ \Gamma_i \epsilon, \\ \nabla_i\epsilon &= \partial_i\epsilon. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Griekse letters De Θ en Ω_μ hangen af van de vormvelden, metriek en gamma matrices. Deze worden alle bepaald door onze pp-wave oplossing (3.18), die natuurlijk een oplossing kan zijn van 11D, IIA of IIB supergravitatie, afhankelijk van de dimensie en de aanwezige velden. De precieze vorm

¹²Zie (B.21) voor meer details.

van Θ en Ω_μ verschilt in de verschillende supergravitaties. Toch hebben de Θ en Ω_μ voor een pp-wave essentiële eigenschappen die onafhankelijk zijn van de supergravitatietheorie waarin we werken. Vertrekkende van de uitdrukkingen (2.35), (2.36) en (2.34) en gebruikmakend van Ansatz (3.18), kan men in zowel IIA, IIB als 11D bekomen dat

$$\Theta = \Lambda\Gamma_+, \quad (3.35)$$

$$\Omega_+ = 0, \quad (3.36)$$

$$\Omega_i = \Delta_i\Gamma_+, \quad (3.37)$$

$$\Omega_i\Omega_j = 0, \quad (3.38)$$

$$\Gamma_+\Omega_- = \tilde{\Omega}_-\Gamma_+. \quad (3.39)$$

Voorlopig hebben we de concrete uitdrukkingen voor Λ , Δ_i , Ω_- en $\tilde{\Omega}_-$ niet nodig, maar men kan ze vinden in bijlage C. Uit vergelijking (3.35) kan men onmiddellijk zien dat de dilatino vergelijking de vorm $\Lambda\Gamma_+\epsilon = 0$ aanneemt. Omdat we de resterende gravitino vergelijking ook graag in zo'n vorm $V\Gamma_+\epsilon = 0$ willen brengen, hebben we de uitdrukkingen (3.35)-(3.39) hierboven in een vorm gebracht die nul is, of waarin een Γ_+ rechts staat.

Gravitino vergelijking Aan de hand van de eigenschappen (3.35)-(3.39) kunnen we de gravitino vergelijking uit (3.32) reeds sterk vereenvoudigen. Uit (3.36) en (3.34) volgt onmiddellijk dat ϵ niet afhangt van x^+ . Via opnieuw (3.34) ziet men ook dat de x^i component van de gravitino vergelijking niets anders is dan

$$\partial_i\epsilon = -i\Omega_i\epsilon. \quad (3.40)$$

Aangezien verder (3.38) geldt, verkrijgen we dat $\partial_i\partial_j\epsilon = -i\Omega_i\partial_j\epsilon = -\Omega_i\Omega_j\epsilon = 0$. Dit laat ons toe ϵ te ontbinden als

$$\epsilon = \chi + \epsilon_j x^j, \quad (3.41)$$

waarin χ en ϵ_i enkel nog afhangen van x^- . Wanneer we dit nu afleiden naar x^i en (3.40) gebruiken, vinden we, omdat $\Omega_i\epsilon_j = \partial_i\epsilon_j = 0$, dat $\epsilon_j = -i\Omega_j\chi$. Samengevat is dus

$$\epsilon = (1 - ix^j\Omega_j)\chi. \quad (3.42)$$

Aan de hand van de eerste twee componenten van de gravitino vergelijking uit (3.32) hebben we dus reeds de volledige x^+ en x^i afhankelijkheid van de Killing spinor ϵ in kaart gebracht. Nu dient enkel nog de x^- component van de gravitino vergelijking opgelost te worden. Ze wordt gegeven door

$$\left(\partial_- + \frac{1}{4}\partial_i W\Gamma_i\Gamma_+ + i\Omega_-\right)\epsilon = 0. \quad (3.43)$$

We combineren dit met wat we net berekend hadden, substitueer (3.42) in (3.43) en gebruik dat $\Gamma_+\Omega_i = 0$ omdat $\Gamma_+^2 = 0$:

$$\left(\partial_- + i\Omega_- + \frac{1}{4}\partial_j W \Gamma_j \Gamma_+ - ix^j \partial_- \Omega_j - ix^j \Omega_j \partial_- + x^j \Omega_- \Omega_j \right) \chi = 0. \quad (3.44)$$

Om ook de resterende x^- afhankelijkheid op te lossen nemen we de vorige vergelijking in $x^i = 0$ ¹³. Omdat we wegens de ijkvrijheid (3.6) W zo kunnen kiezen dat zijn afgeleiden in $x^i = 0$ nul zijn, geeft dit de lineaire differentiaalvergelijking

$$\partial_- \chi = -i\Omega_-|_{x^i=0} \chi, \quad (3.45)$$

met als oplossing

$$\chi = e^{-\int i\Omega_-|_{x^i=0} dx^-} \psi. \quad (3.46)$$

In deze laatste uitdrukking is ψ een constante spinor, dit wil zeggen dat we de x^- afhankelijkheid van χ , en dus van ϵ , volledig bepaald hebben. Dit laat ons toe om vergelijking (3.44) te reduceren tot een puur algebraïsche vergelijking van de vorm

$$\left[i(\Omega_- - \Omega_-|_{x^i=0}) + \frac{1}{4}\partial_j W \Gamma_j \Gamma_+ - x^j (i\partial_- \Omega_j + \Omega_j (\Omega_-|_{x^i=0}) - \Omega_- \Omega_j) \right] \chi = 0. \quad (3.47)$$

Na gebruik van (3.37), (3.39) en (B.20) krijgen we de gravitino vergelijking in een vorm met alle Γ_+ rechts:

$$\left[i(\Omega_- - \Omega_-|_{x^i=0}) + \frac{1}{4}\partial_j W \Gamma_j \Gamma_+ - x^j \left(i\partial_- \Delta_j + i\frac{1}{2}\frac{W\partial_- W}{W^2 + 4}\Delta_j + \Delta_j \left(\tilde{\Omega}_-|_{x^i=0} \right) - \Omega_- \Delta_j \right) \Gamma_+ \right] \chi = 0. \quad (3.48)$$

¹³Zoals we eerder opmerkten kan er eventueel een harmonisch deel in W aanwezig zijn. Hier dienen we onderscheid te maken tussen het reguliere deel van W en een eventueel aanwezig harmonisch deel dat in nul singulier is. Vanaf dit punt in de thesis duiden we met de functie W een reguliere functie aan, het eventuele harmonische stuk van de golf met H . De totale functie die we hiervoor W noemden wordt nu dus $H + W$. Omdat in de buurt van nul de afgeleide $\partial_i H$ sterk opblaast dient de term die deze afgeleide bevat identiek nul te zijn: $\partial_i H \Gamma_i \Gamma_+ \chi = 0$. Dit is equivalent met $\Gamma_+ \chi = 0$, deze voorwaarde legt aan de helft van de componenten van χ op dat ze nul moeten zijn, maar laat de andere helft onbepaald. Hierdoor zijn pp-waves met een harmonisch deel nog steeds 1/2-supersymmetrisch als hun regulier deel W voldoet aan de voorwaarden die we verder zullen afleiden en is het al dan niet aanwezig zijn van het harmonisch deel van geen verder belang voor deze afleiding.

1/2 supersymmetrie. Omdat Γ_+ evenredig is met een projector P_1 , die projecteert op precies de helft van de Hilbertruimte (waarin χ gerepresenteerd wordt), zijn de laatste tweede termen van deze vergelijking identiek nul voor de helft van de componenten van χ . Als $\Omega_- - \Omega_-|_{x^i=0}$ nu nul is, is de vergelijking voor de helft van de componenten van χ dus triviaal voldaan. Aangezien de dilatino vergelijking reeds van de vorm $\Lambda\Gamma_+\chi = 0$ is, laten zowel de dilatino vergelijking als de gravitino vergelijking dan de helft van de componenten van χ vrij. Deze oplossingen waarvoor minstens de helft van de componenten van de Killing spinor niet-nul zijn, zijn dus minstens 1/2-supersymmetrisch.

De voorwaarde dat $\Omega_- = \Omega_-|_{x^i=0}$ komt overeen met $\partial_j\varphi_{i_1\dots i_q} = 0$, kijk hiervoor naar Ω_- in bijlage C en merk op dat doordat $\Gamma_+\Gamma_-$ niet afhangt van x^i , de afhankelijkheid enkel nog in de componenten van het veld φ zit. Deze voorwaarde volgt niet uit de voorwaarden (3.19) die volgen uit de bewegingsvergelijkingen, maar vernauwt deze. De meest algemene pp-waves zijn dus niet steeds 1/2-supersymmetrisch, een grote subklasse echter wel. In het bijzonder voldoen alle Penrose limieten aan deze voorwaarde en ze zijn dus alle 1/2-supersymmetrisch.

Resultaat We hebben hier dus aangetoond dat er een familie van 1/2 - supersymmetrische pp-waves bestaat van de vorm

$$ds^2 = -2dx^+dx^- - W(x^-, x^i)(dx^-)^2 - \sum_{i=1}^{d-2} (dx^i)^2,$$

$$F_{(q+1)} = dx^- \wedge \varphi_q, \quad (3.49)$$

$$\begin{cases} \partial_i\partial_i W = \sum_q \frac{-1^{(q+1)}}{q!} \varphi_q^2, \\ \partial_+\varphi_{i_1\dots i_q} = 0, \\ \partial_j\varphi_{i_1\dots i_q} = 0. \end{cases} \quad (3.50)$$

$$\epsilon = (1 + x^j\Omega_j) e^{-\int i\Omega_-|_{x^i=0} dx^-} \psi, \quad (3.51)$$

$$\begin{cases} \Lambda e^{-\int i\tilde{\Omega}_- dx^-} \Gamma_+\psi = 0, \\ V e^{-\int i\tilde{\Omega}_- dx^-} \Gamma_+\psi = 0. \end{cases} \quad (3.52)$$

Hierin is

$$V = \frac{1}{4}\partial_j W \Gamma_j - x^j \left(i\partial_- \Delta_j + i\frac{1}{2}\frac{W\partial_- W}{W^2 + 4}\Delta_j + \Delta_j \tilde{\Omega}_- - \Omega_- \Delta_j \right). \quad (3.53)$$

De uitdrukkingen voor Λ , Ω_- , $\tilde{\Omega}_-$ en Δ_i kan men vinden in bijlage C.

Bijzondere gevallen Men kan nu de Λ en V uit (3.52) verder onderzoeken en proberen nog meer componenten van de spinor ψ op nul te projecteren¹⁴. De interessantste gevallen zijn natuurlijk die van maximale supersymmetrie, als zowel Λ als V identiek nul zijn. Er bestaan zo twee pp-wave oplossingen, één in 11D en één in IIB, we bespreken ze kort in de volgende sectie. Ook als Λ en V niet identiek nul zijn kan men nog meer supersymmetrie bekomen. In het volgende hoofdstuk bekijken we een methode om pp-waves met 3/4 supersymmetrie te construeren.

3.4 De maximaal supersymmetrische golven

Om nog wat meer vertrouwd te geraken met de berekeningen rond supersymmetrie van oplossingen, bekijken we hier kort even de maximaal supersymmetrische pp-wave oplossingen. Oorspronkelijk werden de maximaal supersymmetrische golven op een heel ander manier gevonden dan met de methode die hieronder gebruikt wordt. De manier die ik hier geef, lijkt sterk op deze die we in het volgende hoofdstuk zullen gebruiken om oplossingen te vinden met 3/4-supersymmetrie.

Oplossingen van een theorie die maximaal supersymmetrisch zijn, worden zeer belangrijk geacht omdat men veronderstelt dat ze de goede vacua voor deze theorie zijn.

3.4.1 De maximaal supersymmetrische golf uit 11D

Een pp-wave is maximaal supersymmetrisch als zowel de Λ als de V uit (3.52) identiek nul zijn: de Killing spinoren ϵ zijn dan volledig vrij van enige restrictie. In 11-dimensionale supergravitatie is Λ alvast nul uit de afwezigheid van het dilatino. We dienen dus een golf zo te kiezen dat ook V nul wordt. Om V alvast wat te vereenvoudigen zullen we de φ_3 onafhankelijk van x^- kiezen, dat geeft dat

$$V = \frac{1}{4} \partial_j W \Gamma_j - x^j \left(\Delta_j \tilde{\Omega}_- - \Omega_- \Delta_j \right). \quad (3.54)$$

Een blik werpen op (C.1) leert dat $\Delta_j \tilde{\Omega}_- - \Omega_- \Delta_j$ in het algemeen best ingewikkeld kan worden. Omdat we in dit werk geen beroep willen doen

¹⁴Deze extra supersymmetrie kan enkel optreden als het harmonische stuk van de golf H nul is. Is dit stuk niet-nul, dan geldt immers de extra voorwaarde dat $\Gamma_+ \psi = 0$. Deze voorwaarde zorgt ervoor dat er niet meer dan 1/2 supersymmetrie kan zijn, de componenten die niet op nul geprojecteerd worden dienen nu nul te zijn. De helft van de componenten zijn onbepaald maar de andere helft moeten nul zijn, er kan dus niet meer dan 1/2 supersymmetrie bekomen worden. In de volgende delen wordt dus steeds verondersteld dat $H = 0$.

op te geavanceerde technieken zullen we ons laten leiden door eenvoud. We kiezen φ_3 zo eenvoudig mogelijk, met slechts één niet-nul component. Noteer

$$\varphi_3 = \lambda dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \quad (3.55)$$

Berekening Alvorens we verder kunnen werken, dienen we een onderscheid te maken tussen verschillende types coördinaten. $\Delta_j \tilde{\Omega}_- - \Omega_- \Delta_j$ zal een andere vorm hebben al naar gelang x^j behoort tot $\{x^1, x^2, x^3\}$ of tot de zes andere coördinaten uit het Euclidisch deel van de ruimte-tijd \mathbb{E}^9 . De drie coördinaten van het eerste type duiden we aan met x^i , de zes van het tweede type met x^a . Men kan dan voor deze beide gevallen afzonderlijk $(\Delta_j \tilde{\Omega}_- - \Omega_- \Delta_j) \Gamma_+$ uitrekenen¹⁵:

$$\begin{aligned} (\Delta_i \tilde{\Omega}_- - \Omega_- \Delta_i) \Gamma_+ &= -\frac{\lambda^2 \Gamma_i \Gamma_+}{18}, \\ (\Delta_a \tilde{\Omega}_- - \Omega_- \Delta_a) \Gamma_+ &= -\frac{\lambda \Gamma_a \Gamma_+}{72}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Dit invullen in (3.54) geeft

$$V \Gamma_+ = \left[\left(\frac{1}{4} \partial_i W + \frac{\lambda^2 x^i}{18} \right) \Gamma_i + \left(\frac{1}{4} \partial_a W + \frac{\lambda^2 x^a}{72} \right) \Gamma_a \right] \Gamma_+. \quad (3.57)$$

We kunnen V nu nul maken door een goede keuze voor W , kies deze daarvoor zodanig dat

$$\begin{aligned} \partial_i W &= -\frac{2\lambda^2 x^i}{9}, \\ \partial_a W &= -\frac{\lambda^2 x^a}{18}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Dit levert voor W de unieke oplossing¹⁶ $W = -\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\lambda x^i}{3} \right)^2 - \sum_{a=4}^9 \left(\frac{\lambda x^a}{6} \right)^2$. Merk op dat deze W aan de bewegingsvergelijking (3.15) voldoet.

¹⁵Merk op dat we $\Delta_j \tilde{\Omega}_- - \Omega_- \Delta_j$ hier langs rechts vermenigvuldigd hebben met Γ_+ , we doen dit omdat we zo de lastige term $\frac{\Gamma_- \Gamma_+}{3}$ uit (C.1) kunnen laten vallen. Dit is gerechtvaardigd omdat V uit (3.52) ook langs rechts met Γ_+ vermenigvuldigd wordt.

¹⁶In principe zou men ook nog een constante $c(x^-)$ bij W kunnen optellen, maar deze c kan eenvoudig weggewerkt worden door de coördinatentransformatie $x^+ \rightarrow x^+ - \frac{1}{2} \int_0^{x^-} c(u) du$, een speciaal geval van de transformatie (3.4).

Resultaat We hebben hier de vorm van de maximaal supersymmetrische golf uit 11D bepaalt:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -2dx^+ dx^- - W(x^i)(dx^-)^2 - \sum_{i=1}^9 (dx^i)^2. \\
 F_4 &\begin{cases} W = -\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\lambda x^i}{3}\right)^2 - \sum_{a=4}^9 \left(\frac{\lambda x^a}{6}\right)^2, \\ F_4 = \lambda dx^- \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{cases} \quad (3.59)
 \end{aligned}$$

Opmerkingen Deze maximaal supersymmetrisch golf werd ontdekt door Kowalski-Glikman [14]. De andere maximaal supersymmetrische oplossingen van 11D zijn Minkowski ruimte, $\text{AdS}_4 \times S^7$ en $\text{AdS}_7 \times S^4$. De maximaal supersymmetrische golf is de Penrose limiet van deze laatste twee. Uit het bestaan van $\text{AdS}_4 \times S^7$ kan men dus al besluiten dat er een maximaal supersymmetrische golf in 11D moet bestaan. In de Penrose limiet kan supersymmetrie immers enkel maar toenemen.

3.4.2 De maximaal supersymmetrische golf uit IIB

Ook in type IIB dienen we Λ en V uit (3.52) nul te stellen, willen we een oplossing met maximale supersymmetrie bekomen. Hier zal echter Λ niet automatisch nul zijn. Dit levert dus een extra voorwaarde die in 11D niet aanwezig was, maar in plaats van een extra moeilijkheid is deze voorwaarde ons tot grote hulp. We kunnen in (C.3) immers zien dat Λ enkel nul zal zijn als de enige velden die niet-nul zijn, behoren tot φ_4 . Dankzij de factor $q - 4$ draagt dit veld niet bij in de dilatino vergelijking. Dit is ook de reden waarom er enkel in IIB een maximaal supersymmetrische golfoplossing aanwezig is en niet in IIA, φ_4 komt enkel in de eerste theorie voor¹⁷. Wat φ_4 zo speciaal maakt ten opzichte van de andere velden, is dat het een zelfduaal veld is. Het zal precies door deze eigenschap onder Hodge dualiteit zijn dat ook V nul kan worden.

¹⁷In IIB bestaat de maximaal supersymmetrische $\text{AdS}_5 \times S^5$ oplossing. De Penrose limietprocedure zegt dan dat er een maximaal supersymmetrische golf moet zijn in IIB. In IIA is er afgezien van Minkowski ruimte geen andere maximaal supersymmetrische oplossing en dus ook geen maximaal supersymmetrische golf. (De Penrose limiet van Minkowski ruimte is gewoon terug Minkowski ruimte.)

Zelfdualiteit Opdat de actie van IIB invariant is onder supersymmetrie-transformaties moet de vijfvorm F_5 naast de bewegingsvergelijkingen ook nog voldoen aan de extra eis $F_5 = *F_5$. Uit de definitie van Hodge dualiteit (A.6) volgt onmiddellijk dat deze eis zich via $F_5 = dx^- \wedge \varphi_4$ vertaalt als $\varphi_4 = *\varphi_4$. Hier kunnen we dus niet van de eenvoudigste aanname, dat φ_4 maar één component heeft, vertrekken. In de acht dimensionale ruimte waarop φ_4 leeft, kan één viervorm-component nooit dual aan zichzelf zijn. Wel bestaat er een mogelijkheid om slechts twee componenten niet-nul te kiezen voor φ_4 , deze componenten worden onder Hodge dualiteit dan in elkaar omgezet. Concreet ziet φ_4 er dan uit als

$$\varphi_4 = \lambda(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + dx^5 \wedge dx^6 \wedge dx^7 \wedge dx^8). \quad (3.60)$$

Laat ons nu kijken of we hiervoor de V uit de gravitino vergelijking nul kunnen maken.

Gravitino vergelijking We veronderstellen dat λ niet van x^- afhangt en zo vereenvoudigt V tot

$$V = \frac{1}{4} \partial_j W \Gamma_j + x^j \Omega_- \Delta_j, \quad (3.61)$$

omdat door keuze (3.60) $\tilde{\Omega}_-$ nul is. (Zie (C.3)). Nu dienen we $\Omega_- \Delta_j \Gamma_+$ uit te werken. Merk echter eerst volgende eigenschap op: uit (B.25) volgt dat

$$\frac{1}{4!} \Gamma_{i_1 \dots i_4} \varphi_{i_1 \dots i_4} \Gamma_+ = \lambda (\Gamma_{1234} + \Gamma_{5678}) \Gamma_+ = 2\lambda \Gamma_{1234} \Gamma_+. \quad (3.62)$$

Dit illustreert mooi hoe alle fysische informatie van de zelfduale vorm in slechts één van de twee componenten vervat zit, ze wordt gewoon gekopieerd in de andere component. Het is deze eigenschap die ons in het volgende hoofdstuk zal toelaten om de 3/4-supersymmetrische oplossing met een vijf-vorm op dezelfde manier te behandelen als de andere gevallen.

Men kan eenvoudig narekenen dat

$$\Omega_- \Delta_j \Gamma_+ = \frac{\lambda^2}{32}. \quad (3.63)$$

Als we nu V nul willen stellen leert (3.61) ons dat

$$\partial_j W = -\frac{\lambda^2}{16}. \quad (3.64)$$

We vinden dus $W = -\sum_{i=1}^8 \left(\frac{\lambda x^i}{4}\right)^2$, hetgeen voldoet aan (3.15).

Resultaat De maximaal supersymmetrische golf in IIB heeft de vorm

$$ds^2 = -2dx^+ dx^- - W(x^i)(dx^-)^2 - \sum_{i=1}^8 (dx^i)^2.$$

$$F_5 \begin{cases} W = -\sum_{i=1}^8 \left(\frac{\lambda x^i}{4}\right)^2, \\ F_4 = \lambda dx^- \wedge (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + dx^5 \wedge dx^6 \wedge dx^7 \wedge dx^8). \end{cases} \quad (3.65)$$

Opmerkingen Deze oplossing werd voor het eerst besproken in [15]. In IIB zijn de enige andere oplossingen met maximale supersymmetrie Minkowski ruimte en $\text{AdS}_5 \times S^5$. De maximaal supersymmetrische golf is de Penrose limiet van deze laatste.

Hoofdstuk 4

Een constructiemethode voor pp-waves met 3/4-supersymmetrie

4.1 Inleiding

Dit hoofdstuk mag beschouwd worden als de kern van deze thesis. Hierin beschrijf ik een constructiemethode om in 10- en 11-dimensionale supergravitatie 3/4-supersymmetrische golfoplossingen te vinden. De 11-dimensionale oplossing is algemeen bekend en werd voor het eerst beschreven door Gauntlet en Hull [16]. Pas in het eindstadium van dit werk kwam ik op de hoogte dat de 10-dimensionale oplossingen die ik in dit hoofdstuk presenteer eerder gevonden werden in [17]. In essentie gebruiken deze auteurs dezelfde methode als degene hier voorgesteld.

Doorheen dit werk worden verschillende aannames gemaakt, zowel hiervoor als in dit hoofdstuk. Deze aannames zijn gemaakt om eenvoudigere vergelijkingen te bekomen, maar daarom nog niet noodzakelijk. Het is dus niet zo dat onze aanpak claimt alle pp-waves met 3/4-supersymmetrie gevonden te hebben. Zoals u zult lezen vinden we alle oplossingen hier binnen de pp-waves waarvoor de veldsterkten in totaal niet meer dan twee niet-nul componenten bezitten en waarvoor de veldsterkten tijdonafhankelijk zijn. Hoewel we het niet expliciet aantonen lijkt het niet meteen mogelijk om binnen deze subklasse nog andere oplossingen te vinden met 3/4-supersymmetrie.

4.2 Een eerste schets van de constructiemethode

In het vorige hoofdstuk werd aangetoond dat een algemene pp-wave minstens 1/2-supersymmetrisch is. Dit resultaat werd bekomen doordat de Killing spinor vergelijkingen (3.32) in de vorm $QP_1\chi = 0$ en $Q'P_1\chi = 0$, $P_1 \sim \Gamma_+$ gebracht konden worden, zie (3.52). De projector P_1 projecteert de helft van de componenten van χ op nul en deze worden dus niet door de vergelijkingen bepaald. 1/2 van de componenten van χ is alvast vrij te kiezen en we zeggen daarom dat een pp-wave oplossing minstens 1/2 supersymmetrie bewaart.

Op het eind van vorig hoofdstuk werd al even aangehaald dat het zeker ook mogelijk is om meer supersymmetrische pp-waves te construeren zoals bijvoorbeeld de maximaal supersymmetrische golven. Dat werd gedaan door de Ansatz (3.49) zo te verfijnen dat Q en Q' nul worden. Men kan zich nu afvragen of er niet nog andere mogelijkheden zijn om meer supersymmetrie te behouden. Wat we willen is dat meer dan de helft van de componenten van χ op nul geprojecteerd worden. Hiervoor hebben we dus graag nog een extra projector, deze kunnen we proberen te distilleren uit de Q en Q' . We krijgen dan iets van de vorm $\tilde{Q}P_2P_1\chi = 0$ en $\tilde{Q}'P_2P_1\chi = 0$. Als nu P_2 op zijn beurt een projector is op de halve Hilbertruimte en commuteert met P_1 dan worden ook nog de helft van de overblijvende componenten van χ op nul geprojecteerd. P_1 projecteert dus de helft van χ onmiddellijk op nul, waarna P_2 nog eens de helft van de overblijvende componenten op nul projecteert, dit zorgt ervoor dat $1/2 + \frac{1}{2}1/2 = 3/4$ supersymmetrie bewaard blijft. We zullen in dit hoofdstuk kijken hoe deze 'distillatie' van de projector P_2 uit de Q en Q' in zijn werk gaat.

Opmerkingen In principe kan men proberen nog meer constructies te maken zoals bijvoorbeeld $\tilde{Q}P_3P_2P_1\chi$ of $\tilde{Q}(P_3 + P_2)P_1\chi$ enzovoort om nog andere hoeveelheden van supersymmetrie te bekomen. Wegens tijdgebrek beperken we ons in deze thesis tot de hier voorgestelde methode om 3/4 supersymmetrie te bekomen.

Er moet voor deze methode in zowel gravitino als dilatino vergelijking een zelfde extra projector afgezonderd kunnen worden. Het gemakkelijkste is om hiervoor eerst naar de eenvoudigste van de twee, de dilatino vergelijking, te kijken. Merkwaardig genoeg zal blijken dat indien we een extra projector in de dilatino vergelijking kunnen construeren we deze projector ook steeds in de gravitino vergelijking kunnen afzonderen. Dit is vreemd daar we niet onmiddellijk een reden zien waarom het afzonderen van een projector in de dilatino vergelijking een voldoende voorwaarde is om dezelfde projector in de

gravitino vergelijking af te zonderen.

4.3 3/4-supersymmetrische pp-waves in IIA en IIB

We beginnen onze zoektocht naar golfoplossingen met 3/4-supersymmetrie in IIA en IIB, deze onderscheiden zich van 11D doordat in deze laatste geen dilatino vergelijking aanwezig is. Later in dit hoofdstuk zullen we het geval van 11D apart behandelen.

4.3.1 Algemeen

De dilatino vergelijking kan geschreven worden in de vorm $\Lambda\Gamma_+\chi = 0$. In bijlage C kan men zien dat Λ essentieel bestaat uit een som van Γ_A 's¹. Als we onze pp-wave zo kiezen dat de som uit slechts twee zulke termen bestaat: $\Lambda \sim \Gamma_A + \Gamma_B$, dan is er een bekende manier om een projector te construeren. We maken daarin gebruik van het feit dat $\Gamma_\mu^2 = \pm 1$. Via de anticommutatierelaties kan het product van een aantal verschillende gamma matrices in het kwadraat 1 geven: $\Gamma_A^2 = 1$. Als dit zo is, zal $\frac{1}{2}(1 \pm \Gamma_A)$ dus een projector zijn. We kunnen een factor van dit type eenvoudig uit Λ afzonderen: $\Gamma_A + \Gamma_B = 2\Gamma_A \frac{1}{2}(1 \pm \Gamma_A \Gamma_B)$. Dat de laatste factor een projector is staat niet vast, maar we kunnen op zoek gaan naar gevallen waar dit wel zo is. Deze bespreking is misschien wat vaag en laat ons daarom maar eens wat concreter gaan werken.

Vorm van de veldsterkten Het is de bedoeling om de pp-wave zo te kiezen dat Λ slechts uit twee termen van gamma matrices bestaat. Dit kan als de veldsterkten van de pp-wave slechts twee componenten hebben. We kunnen dus één type veldsterkte nemen met twee niet-nul componenten, of twee types veldsterkte met elk slechts één component verschillend van nul. We zullen beide gevallen hetzelfde behandelen, het eerste geval zullen we daarom bekijken als twee veldsterkten van hetzelfde type met elk één component. Noem de twee veldsterkten van de pp-wave $F_{(q+1)} = dx^- \wedge \varphi_q$ en $F_{(p+1)} = dx^- \wedge \varphi_p$, ze voldoen aan de voorwaarden (3.50). We duiden deze configuratie aan met $F_{(p+1)} - F_{(q+1)}$. Merk op dat hoewel p gelijk kan zijn aan q , ook dan met φ_q en φ_p nog steeds twee verschillende vormvelden bedoeld

¹Met Γ_A wordt hier een willekeurige antisymmetrisatie van gamma matrices bedoeld bv: $\Gamma_{i_1 i_2 i_3}$ of $\Gamma_{i_1 \dots i_q}$ enz.

worden². Laat ons steeds $q \leq p$ nemen. Omdat deze twee veldsterkten elk maar één component hebben zal

$$\begin{cases} \varphi_q = \lambda dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}, \\ \varphi_p = \mu dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Beide velden moeten wel tot dezelfde theorie behoren, daarom dient $p+q$ even te zijn. We veronderstellen dat de twee groepjes coördinaten $\{x^{i_1} \dots x^{i_q}\}$ en $\{x^{j_1} \dots x^{j_p}\}$ m gemeenschappelijke elementen hebben. Hieruit volgt onmiddellijk dat dus $m \leq q < p$ of $m < q = p$.

Uit de veldinhoud van IIA, IIB en 11D volgt onmiddellijk dat $q \leq p \leq 4$.

Opmerking Het geval $q = 4$ is speciaal: door de extra eis van zelfdualiteit zal hier de oplossing met $3/4$ supersymmetrie niet twee maar vier componenten hebben. Men kan echter op zoek gaan naar een viervorm φ_4 met twee componenten, die $3/4$ supersymmetrie heeft maar niet zelfduaal is, en er daarna de Hodge duale bij optellen. De uiteindelijke oplossing $\varphi_4 + \star\varphi_4$ is dan natuurlijk zelfduaal. Dat dit niets aan de supersymmetrie verandert komt doordat via (B.25) $\varphi_{i_1 \dots i_4} \Gamma_{i_1 \dots i_4} \Gamma_+ = \star\varphi_{i_1 \dots i_4} \Gamma_{i_1 \dots i_4} \Gamma_+$. Hierdoor zorgt het toevoegen van de Hodge duale slechts voor een extra factor 2 bij de φ_4 -term in (C.3). Maar dit compenseert net de factor $\frac{1}{2}$ die deze viervorm in de formule heeft ten opzichte van de andere velden. We kunnen dus doen alsof die factor $\frac{1}{2}$ er niet is en de viervorm behandelen als de andere, we dienen dan enkel nadien aan de oplossing die we vinden nog de Hodge duale toe te voegen.

Wat hier nogal technisch aangetoond wordt is eigenlijk niets anders dan dat alle fysische informatie in de helft van de componenten van φ_4 zit en gewoon door de eis van zelfdualiteit in de andere helft gekopieerd wordt³. We bekijken dus eerst de eerste helft, die zich analoog gedraagt aan de andere q -vormen, en kopiëren deze daarna met Hodge dualiteit. Het uiteindelijke resultaat is dan zelfduaal en dient als de werkelijke oplossing beschouwd te worden. Heel deze opmerking heeft tot nut dat we φ_4 zo toch mee kunnen behandelen in de algemene berekeningen voor een φ_q met twee componenten, hoewel de uiteindelijke oplossing voor φ_q dus vier niet-nul componenten heeft.

²We zouden dan strikt genomen moeten werken met φ_q en bijvoorbeeld ψ_q , maar in de berekeningen is het handiger als we ψ_q blijven noteren met φ_p , ook voor $q = p$.

³Als u geen intuïtief beeld van een zelfduale vorm heeft, aarzel dan niet om het te vergelijken met een symmetrische matrix. Deze vergelijking gaat natuurlijk niet exact op, maar ze laat toe om de zaken wat concreter voor te stellen.

4.3.2 3/4 supersymmetrie bij een pp-wave met twee Ramond-Ramond velden

Daar het Kalb-Ramond veld met andere voorfactoren voorkomt in Λ dan de Ramond-Ramond velden zullen we deze gevallen apart behandelen. We kijken eerst naar configuraties waarbij de twee componenten van de veldsterkten van Ramond-Ramond velden afkomstig zijn, daarna beschouwen we gevallen waarin minstens één van de twee componenten van het Kalb-Ramond veld is.

Dilatino vergelijking

Laten we onze analyse van de dilatino vergelijking beginnen in type IIA, vooreerst bekijken we enkel Ramond-Ramond veldsterkten, zowel q als p zijn in deze theorie oneven.

Uitwerking Λ uit (C.2) wordt voor $F_{(p+1)} - F_{(q+1)}$

$$4i\Lambda = (4-q)\lambda\Gamma_{i_1\dots i_q}\Gamma_{11}^{\frac{q+1}{2}} + (4-p)\mu\Gamma_{j_1\dots j_p}\Gamma_{11}^{\frac{p+1}{2}}. \quad (4.2)$$

Als we nu de afzondering die we hierboven reeds schetsten expliciet uitvoeren krijgen we

$$4i\Lambda = (4-q)\lambda\Gamma_{i_1\dots i_q}\Gamma_{11}^{\frac{q+1}{2}} \left(1 + (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \frac{(4-p)\mu}{(4-q)\lambda} \Gamma_{i_1\dots i_q}\Gamma_{j_1\dots j_p}\Gamma_{11}^{\frac{q+p+2}{2}} \right), \quad (4.3)$$

aangezien $\Gamma_{i_1\dots i_q}^2 = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}$. Opdat de factor tussen haakjes een projector levert, moet

$$\left(\frac{(4-p)\mu}{(4-q)\lambda} \Gamma_{i_1\dots i_q}\Gamma_{j_1\dots j_p}\Gamma_{11}^{\frac{q+p+2}{2}} \right)^2 = 1. \quad (4.4)$$

Dit kan men eenvoudig uitrekenen met behulp van de basiseigenschappen van de gamma matrices. Het blijkt dat dit enkel voldaan is als

$$\begin{cases} (4-q)\lambda = \pm(4-p)\mu, \\ \frac{q+p}{2} + m \text{ is even.} \end{cases} \quad (4.5)$$

In IIB is de analyse voor Ramond-Ramond velden volledig analoog. Men dient enkel in plaats van met de Γ_{11} met de \mathcal{D}_q te werken. Uiteindelijk blijkt dat exact dezelfde voorwaarden (4.5) als in IIA gelden.

Eigenschappen In IIA krijgen we de projector

$$P_2 = \frac{1}{2} \left(1 + (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \Gamma_{i_1 \dots i_q} \Gamma_{j_1 \dots j_p} \Gamma_{11}^{\frac{q+p+2}{2}} \right), \quad (4.6)$$

in IIB is

$$P_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \Gamma_{i_1 \dots i_q} \Gamma_{j_1 \dots j_p} \otimes \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p \right). \quad (4.7)$$

Als we deze projectoren in detail bekijken merkt men dat deze net onder de voorwaarde (4.5) hermitisch zijn. Verder kan men via de anticommutatiere-laties van de gamma matrices berekenen dat

$$\text{Tr} \left(\Gamma_{i_1 \dots i_q} \Gamma_{j_1 \dots j_p} \right) = \text{Tr} \left(\Gamma_{i_1 \dots i_q} \Gamma_{j_1 \dots j_p} \Gamma_{11}^{\frac{q+p+2}{2}} \right) = 0. \quad (4.8)$$

Dit zorgt er voor dat de projectoren op exact de helft van de Hilbertruimte projecteren. Verder is het zo dat deze projectoren commuteren met de projector $P_1 = \frac{1}{2} (1 + \Gamma_0 \Gamma_1)$, die bekomen kan worden uit Γ_+ (zie (B.21)). Dit zorgt ervoor dat exact de helft van de spinoren die eigenwaarde 1 hadden voor P_1 , nu eigenwaarde 0 hebben voor de nieuwe projector. Hierdoor zal nog een extra vierde van de componenten van ψ uit (3.52) op nul geprojecteerd worden. Alvast in de dilatino vergelijking blijft dus 3/4 van de supersymmetrie behouden. Deze vergelijking is nu van de vorm

$$\Lambda' P_2 P_1 \psi = 0. \quad (4.9)$$

Overzicht van mogelijke oplossingen Tabel 4.1 laat zien welke combinaties van veldsterkten mogelijk zijn zodat (4.5) voldaan is, we dienen ook in acht te nemen dat $m \leq q < p$ of $m < q = p$. Merk op dat $p = 4$ impliceert dat ook $q = 4$ aangezien anders via (4.5) één van de veldsterkten identiek nul is. De oplossing $F_5 - F_5$, $m = 0$ komt overeen met de maximaal supersymmetrische golf uit IIB.

Tabel 4.1: Mogelijke $F_{(p+1)} - F_{(q+1)}$ met 3/4 supersymmetrie

p	q	m
4	4	2
4	4	0
3	3	1
3	1	0
2	2	0

Gravitino vergelijking

Natuurlijk hebben we enkel nog maar de dilatino vergelijking beschouwd. Opdat de oplossing werkelijk 3/4 supersymmetrie zou hebben, dienen we ook de gravitino vergelijking nog te bekijken. We proberen deze ofwel identiek nul ofwel ook in een vorm zoals (4.9) te krijgen. Om dit te doen dienen we dus de V uit (3.52) in de vorm $V'P_2$ te schrijven met P_2 zoals in (4.6)-(4.7).

Aanname Om de gravitino vergelijking te vereenvoudigen zullen we de vormvelden onafhankelijk van de tijd kiezen $\partial_- \lambda = \partial_- \mu = 0$. Aangezien de velden al niet afhangen van de andere coördinaten, zie (3.50), zijn ze dus constant. Door deze keuze is $\partial_- \Delta_i = 0$. Opnieuw is het misschien niet noodzakelijk om dit te eisen maar anders worden de berekeningen zeer moeilijk. Deze aanname laat zoals we zullen zien nog interessante oplossingen toe, deze thesis beperkt zich verder tot dit type.

Uitwerking Er zijn hier enkel Ramond-Ramond velden aanwezig, zodat $\tilde{\Omega}_- = 0$. Dit geeft dat

$$V = \frac{1}{4} \partial_j W \Gamma_j + x^j \Omega_- \Delta_j. \quad (4.10)$$

We zullen hier enkel de berekening voor $F_4 - F_4$ in IIA overlopen, de andere gevallen gaan analoog. We werken eerst $\Omega_- \Delta_j$ uit. Kijk hiervoor naar (C.2), wat rekenen geeft

$$\Omega_- \Delta_j \Gamma_+ = \frac{1}{16} (1 + \Gamma_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_{j_1 j_2 j_3}) \Gamma_j \Gamma_+. \quad (4.11)$$

Hier zien we al duidelijk de projector verschijnen die we zoeken. We dienen echter Γ_j naar de andere kant van de projector te brengen om $P_1 P_2$ te verkrijgen. Hoe dit gebeurt hangt echter af van j . We moeten onderscheid maken tussen de verschillende gevallen. Neem $A = \{x^{i_1}, x^{i_2}, x^{i_3}\}$ en $B = \{x^{j_1}, x^{j_2}, x^{j_3}\}$, dan noemen we

$$\begin{cases} x^i \in (A \cup B) \setminus (A \cap B), \\ x^a \notin A \cup B, \\ x^n \in A \cap B. \end{cases} \quad (4.12)$$

Deze opsplitsing geeft dan

$$\begin{aligned}
\Omega_- \Delta_i \Gamma_+ &= \frac{1}{16} \Gamma_i (1 - \Gamma_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_{j_1 j_2 j_3}) \Gamma_+, \\
\Omega_- \Delta_a \Gamma_+ &= \frac{1}{16} \Gamma_a (1 + \Gamma_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_{j_1 j_2 j_3}) \Gamma_+, \\
\Omega_- \Delta_n \Gamma_+ &= \frac{1}{16} \Gamma_n (1 + \Gamma_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_{j_1 j_2 j_3}) \Gamma_+.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Voor $F_4 - F_4$ is de P_2 uit de dilatino vergelijking (4.9) $P_2 = \frac{1}{2} (1 + \Gamma_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_{j_1 j_2 j_3})$. Als we dan (4.13) combineren met (4.10) kunnen we door een goede keuze voor $\partial_j W$ ook in de gravitino vergelijking P_2 afzonderen. Neem hiervoor

$$\begin{aligned}
\partial_i W &= \frac{-\lambda^2 x^i}{2}, \\
\partial_a W &= 0, \\
\partial_n W &= 0,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

zodat (4.10) gaat naar

$$V = (-x^i \Gamma_i + x^a \Gamma_a + x^n \Gamma_n) P_2. \tag{4.15}$$

Laat ons nu kijken welke oplossingen de aanname (4.14) toelaat, de enige oplossing is $W = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\lambda x^i}{2}\right)^2$. Merk op dat deze voldoet aan de eerder gestelde voorwaarde (3.50) $\partial_j \partial_j W = 2\lambda^2$.

Resultaat Ook in de andere $F_p - F_q$ gevallen met p en q uit tabel 4.1 kunnen we via analoge berekeningen een oplossing vinden. De zo gevonden oplossingen met 3/4 supersymmetrie zien er als volgt uit:

$$\begin{aligned}
& ds^2 = -2dx^+ dx^- - W(x^i)(dx^-)^2 - \sum_{i=1}^8 (dx^i)^2. \\
F_5 - F_5 & \begin{cases} W = -\sum_{i=1}^4 \left(\frac{\lambda x^i}{2}\right)^2, \\ F_5 = \lambda dx^- \wedge (dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4) \wedge (dx^5 \wedge dx^6 + dx^7 \wedge dx^8). \end{cases} \\
F_4 - F_4 & \begin{cases} W = -\sum_{i=1}^4 \left(\frac{\lambda x^i}{2}\right)^2, \\ F_4 = \lambda dx^- \wedge (dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4) \wedge dx^5. \end{cases} \\
F_4 - F_2 & \begin{cases} W = -\sum_{i=1}^4 \left(\frac{\lambda x^i}{3}\right)^2 - \sum_{i=5}^8 \left(\frac{\lambda x^i}{6}\right)^2, \\ F_4 = \lambda dx^- \wedge (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3), \\ F_2 = \frac{\lambda}{3} dx^- \wedge dx^4. \end{cases} \\
F_3 - F_3 & \begin{cases} W = -\sum_{i=1}^4 \left(\frac{\lambda x^i}{2}\right)^2, \\ F_3 = \lambda dx^- \wedge (dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4). \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Opmerking Als enige heeft de $F_5 - F_5$ oplossing vier componenten in plaats van twee, zoals de andere oplossingen. Dit komt door de extra eis van zelfdualeiteit. Zoals we hierboven reeds opmerkten dienen bij de twee componenten die volgen uit de berekeningen hierboven nog de Hodge duale componenten opgeteld te worden. De uiteindelijke zelfduale oplossing heeft zo dus vier componenten. Al de fysica zit echter al vervat in slechts twee ervan.

4.3.3 3/4 supersymmetrie bij aanwezigheid van het Kalb-Ramond veld

De constructiemethode die we hierboven gebruikten voor pp-waves met enkel Ramond-Ramond velden werkt ook als we één van de twee of beide velden vervangen door het Kalb-Ramond veld. We nemen voor het Kalb-Ramond veld $H_3 = dx^- \wedge \zeta_2$.

Enkel een Kalb-Ramond veld. We bekijken eerst de tweede mogelijkheid, we noteren ze met $H_3 - H_3$. Hier is

$$\zeta_2 = \lambda dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} + \mu dx_{j_1} \wedge dx_{j_2}. \quad (4.17)$$

Voor deze oplossing met enkel het Kalb-Ramond veld met twee componenten blijft het herschrijven van Λ analoog aan de berekening die we deden voor twee Ramond-Ramond velden⁴. We vinden nu de voorwaarde dat $m < 2$ en even, dus $m = 0$. Ook het oplossen van de gravitino vergelijking verloopt gelijklopend met het vorige deel, met het verschil dat $\tilde{\Omega}$ nu niet-nul is. Dit levert enkele extra termen maar verandert niets essentieels. We vinden hier dat

$$\begin{aligned} \partial_i W &= \frac{-\lambda^2 x^i}{2}, \\ \partial_a W &= 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

wat opnieuw een unieke oplossing levert in overeenstemming met (3.50): $W = -\sum_{i=1}^4 \left(\frac{\lambda x^i}{2}\right)^2$.

Een Kalb-Ramond veld gecombineerd met een Ramond-Ramond veld Als laatste kunnen we nog de combinatie van één component van het Kalb-Ramond veld met één van een Ramond-Ramond veld bekijken: $H_3 - F_q$.

Zoals hiervoor dient nu $(4 - q)\lambda = 2\mu$ voor λ afkomstig van ζ_2 en μ van φ_q .⁵ Nieuw in dit geval is dat de twee termen met gamma matrices nu onderling met een factor i verschillen. Dit zorgt voor een extra minteken: $(i\Gamma \dots \Gamma \dots)^2 = -(\Gamma \dots \Gamma \dots)^2 = 1$. Hierdoor vinden we dat in zowel IIA als in IIB m oneven dient te zijn. Daar $m \leq 2$ is dus $m = 1$ voor eender welke q .

Opnieuw dient nu de gravitino vergelijking nog opgelost te worden. We bespreken de berekening hier kort voor $F_{(q+1)}$ uit IIA of dus voor oneven q . Opnieuw dienen de coördinaten opgesplitst te worden. Die coördinaten die enkel in de component van ζ voorkomen noemen we x^i , deze die enkel in de component van φ_q zitten x^j . Coördinaten die in beide componenten voorkomen noteren we met x^n , de overblijvende met x^a en alle met x^k . Zo

⁴Men kan deze berekening zowel in IIA als IIB doen, dit levert hetzelfde resultaat.

⁵Merk op dat dit $q = 4$ al uitsluit.

verkrijgt men de vergelijkingen

$$\begin{aligned}
\partial_i W &= -\frac{\lambda^2(5-q)^2 x^i}{8}, \\
\partial_a W &= -\frac{\lambda^2 x^a}{8}, \\
\partial_n W &= -\frac{\lambda^2(3-q)^2 x^n}{8}, \\
\partial_j W &= -\frac{\lambda^2 x^j}{8}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

We zien dan dat

$$W = -\left(\frac{(5-q)\lambda x^i}{4}\right)^2 - \left(\frac{(3-q)\lambda x^n}{4}\right)^2 - \sum_{j=1}^{(q-1)} \left(\frac{\lambda x^j}{4}\right)^2 - \sum_{a=q}^6 \left(\frac{\lambda x^a}{4}\right)^2, \tag{4.20}$$

opnieuw in orde met (3.19), hier $\partial_k \partial_k W = -\frac{(4-q)^2+4}{4}\lambda^2$. Deze berekening kan men ook in IIB maken voor $q = 2$. Hier vindt men een oplossing analoog aan de vorige, (4.20), maar dan met de rol van x^i en x^n omgewisseld.

Resultaat Uiteindelijk hebben we dus de volgende bijkomende oplossingen met 3/4 supersymmetrie:

$$ds^2 = -2dx^+ dx^- - W(x^i)(dx^-)^2 - \sum_{i=1}^8 (dx^i)^2.$$

$$\begin{aligned}
H_3 - H_3 & \begin{cases} W = -\sum_{i=1}^4 \left(\frac{\lambda x^i}{2}\right)^2, \\ H_3 = \lambda dx^- \wedge (dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4). \end{cases} \\
H_3 - F_4 & \begin{cases} W = -\left(\frac{\lambda x^1}{2}\right)^2 - \sum_{i=3}^8 \left(\frac{\lambda x^i}{4}\right)^2, \\ H_3 = \frac{\lambda}{2} dx^- \wedge dx^1 \wedge dx^2, \\ F_4 = \lambda dx^- \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4. \end{cases} \\
H_3 - F_3 & \begin{cases} W = -\left(\frac{3\lambda x^1}{4}\right)^2 - \sum_{i=2}^8 \left(\frac{\lambda x^i}{4}\right)^2, \\ H_3 = \lambda dx^- \wedge dx^1 \wedge dx^2, \\ F_3 = \lambda dx^- \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{cases} \\
H_3 - F_2 & \begin{cases} W = -(\lambda x^1)^2 - \left(\frac{\lambda x^2}{2}\right)^2 - \sum_{i=3}^8 \left(\frac{\lambda x^i}{4}\right)^2, \\ H_3 = \frac{3\lambda}{2} dx^- \wedge dx^1 \wedge dx^2, \\ F_2 = \lambda dx^- \wedge dx^2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

4.4 Een 3/4-supersymmetrische pp-wave in 11D

De constructiemethode die hierboven voor IIA en IIB geïllustreerd werd kan ook toepast worden in 11D. Hierboven konden we het aantal mogelijkheden reeds sterk beperken door naar de dilatino vergelijking te kijken. Deze is in 11 dimensies afwezig. Daartegenover staat dat er maar één type veldsterkte bestaat in 11-dimensionale supergravitatie, een viervorm, wat ook hier het aantal mogelijkheden sterk verkleint.

Enkele notaties We kiezen deze viervorm hier opnieuw met twee van nul verschillende componenten zoals hiervoor

$$\begin{aligned}
F_4 &= dx^- \wedge \varphi_3, \\
\varphi_3 &= \lambda dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge dx^{i_3} + \mu dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge dx^{j_3},
\end{aligned} \tag{4.22}$$

met $m < 3$ het aantal coördinaten dat in beide componenten voorkomt.

Ook hier nemen we opnieuw aan dat $\partial_- \lambda = \partial_- \mu = 0$. Hierdoor wordt V uit de gravitino vergelijking (3.52):

$$V = \frac{1}{4} (\partial_j W) \Gamma_j + x^j (\Omega_- \Delta_j - \Delta_j \tilde{\Omega}_-). \quad (4.23)$$

Werk nu eerst $(\Omega_- \Delta_j - \Delta_j \tilde{\Omega}_-) \Gamma_+$ uit. Hiervoor dient men opnieuw onderscheid te maken tussen de verschillende types coördinaten. Noem $x^i \in (\{x^{i_1}, x^{i_2}, x^{i_3}\} \cup \{x^{j_1}, x^{j_2}, x^{j_3}\}) \setminus (\{x^{i_1}, x^{i_2}, x^{i_3}\} \cap \{x^{j_1}, x^{j_2}, x^{j_3}\})$, noteer $x^n \in \{x^{i_1}, x^{i_2}, x^{i_3}\} \cap \{x^{j_1}, x^{j_2}, x^{j_3}\}$ en met x^a worden de overblijvende coördinaten van de euclidische deelruimte \mathbb{E}^9 bedoelt.

Bepaling m Bekijk eerst alvast het geval van de x^i , wat rekenen levert dat:

$$(\Omega_- \Delta_i - \Delta_i \tilde{\Omega}_-) \Gamma_+ = \frac{\Gamma_i}{144} [(8\lambda^2 + 2\mu^2) + (-\lambda\mu + (-1)^m 7\lambda\mu) \Gamma_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_{j_1 j_2 j_3}] \Gamma_+. \quad (4.24)$$

Het is duidelijk dat we hier de projector $\frac{1}{2} (1 \pm \Gamma_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_{j_1 j_2 j_3})$ zullen gebruiken. Hiervoor dient $(\Gamma_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_{j_1 j_2 j_3})^2 = 1$. Wat anticommutes met gamma matrices levert onmiddellijk dat m oneven dient te zijn. Verder diende $m < 3$ te zijn, $m = 1$ is dus de enige mogelijkheid.

Verdere uitwerking Men kan nu ook eenvoudig voor de ander componenten $(\Omega_- \Delta_k - \Delta_k \tilde{\Omega}_-) \Gamma_+$ uitwerken, dit geeft als resultaat

$$\begin{aligned} (\Omega_- \Delta_i - \Delta_i \tilde{\Omega}_-) \Gamma_+ &= \frac{\Gamma_i}{72} [(4\lambda^2 + \mu^2) - 4\lambda\mu \Gamma_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_{j_1 j_2 j_3}] \Gamma_+, \\ (\Omega_- \Delta_j - \Delta_j \tilde{\Omega}_-) \Gamma_+ &= \frac{\Gamma_j}{72} [(\lambda^2 + 4\mu^2) - 4\lambda\mu \Gamma_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_{j_1 j_2 j_3}] \Gamma_+, \\ (\Omega_- \Delta_n - \Delta_n \tilde{\Omega}_-) \Gamma_+ &= \frac{\Gamma_n}{18} [(\lambda^2 + \mu^2) + 2\lambda\mu \Gamma_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_{j_1 j_2 j_3}] \Gamma_+, \\ (\Omega_- \Delta_a - \Delta_a \tilde{\Omega}_-) \Gamma_+ &= \frac{\Gamma_a}{72} [(\lambda^2 + \mu^2) + 2\lambda\mu \Gamma_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_{j_1 j_2 j_3}] \Gamma_+. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Om nu in (4.23) de projector $\frac{1}{2}(1 + \Gamma_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_{j_1 j_2 j_3})$ te kunnen afzonderen moeten we dan eisen dat

$$\begin{aligned}\partial_i W &= \frac{-(2\lambda + \mu)x^i}{18}, \\ \partial_j W &= \frac{-(\lambda + 2\mu)^2 x^j}{18}, \\ \partial_n W &= \frac{-2(\lambda - \mu)^2 x^n}{9}, \\ \partial_a W &= \frac{-(\lambda - \mu)^2 x^a}{9}.\end{aligned}\tag{4.26}$$

We dienen deze voorwaarden te combineren met (3.15), hier $\partial_k \partial_k W = -\lambda^2 - \mu^2$. Kort uitschrijven laat zien dat daardoor $\mu = \lambda$ moet zijn. We kunnen nu de differentiaalvergelijkingen (4.26) eenvoudig oplossen:

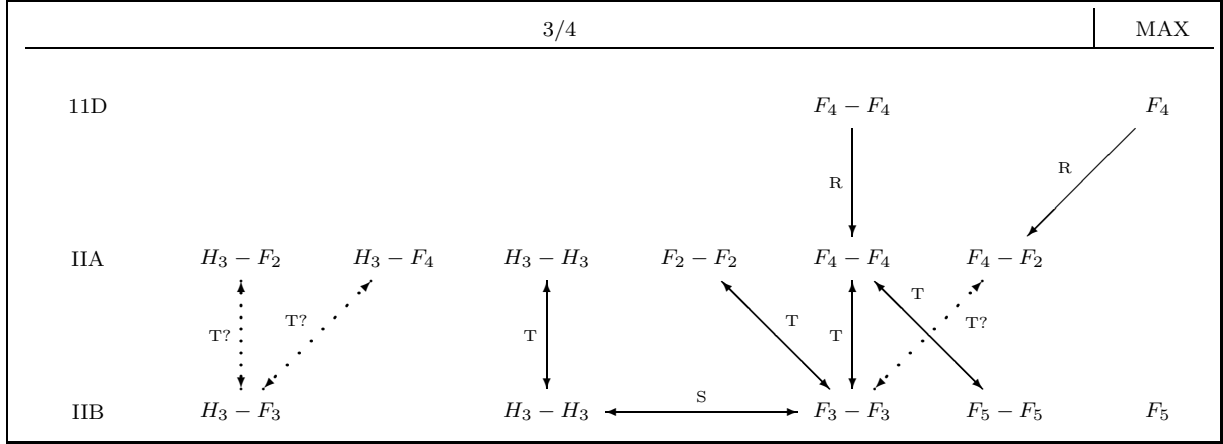
$$W = -\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\lambda x^i}{2}\right)^2 - \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\lambda x^j}{2}\right)^2.\tag{4.27}$$

Resultaat Als resultaat vinden we dus een 3/4-supersymmetrische pp-wave in 11 dimensies, met de vorm:

$$\begin{aligned}ds^2 &= -2dx^+ dx^- - W(x^i)(dx^-)^2 - \sum_{i=1}^9 (dx^i)^2 \\ F_4 - F_4 &\begin{cases} W = -\sum_{i=1}^4 \left(\frac{\lambda x^i}{2}\right)^2 \\ F_4 = \lambda dx^- \wedge (dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4) \wedge dx^5 \end{cases}\end{aligned}\tag{4.28}$$

4.5 Relaties tussen de verschillende oplossingen

Zoals u misschien reeds opmerkte zijn de oplossingen in (4.16) onderling sterk gelijkend. Dit is niet zonder reden, de oplossingen zijn via T-dualiteit met elkaar verbonden. Er zijn nog meer verbanden tussen de oplossingen, ze worden samengevat in volgend schema:



In deze tabel ziet u een overzicht van al de oplossingen geconstrueerd in dit werk en hun onderlinge relaties. T staat voor T-dualiteit en S voor S-dualiteit. Een stippellijn duidt erop dat we er voorlopig niet in geslaagd zijn een expliciete T-dualiteit te construeren maar dat de veldinhoud dit eventueel wel toelaat. De R toont dimensionele reductie over een cirkel.

De verbanden gegeven door volle lijnen zijn eenvoudig uit te rekenen. ⁶ Enkel voor de reductie van de maximaal supersymmetrische oplossing in 11D naar de $F_4 - F_2$ is misschien een beetje meer uitleg gepast.

$F_4 \rightarrow F_4 - F_4$ Wil men de reductie van F_4 naar $F_4 - F_2$ doen dan dient men eerst een coördinatentransformatie door te voeren op de metriek (3.4.1) van F_4 :

$$\begin{cases} x^+ \rightarrow x^+ - \frac{\lambda}{6} x^4 x^9, \\ x^9 \rightarrow x^9 \cos\left(\frac{\lambda}{6} x^-\right) - x^4 \sin\left(\frac{\lambda}{6} x^-\right), \\ x^4 \rightarrow x^9 \sin\left(\frac{\lambda}{6} x^-\right) + x^4 \cos\left(\frac{\lambda}{6} x^-\right). \end{cases} \quad (4.29)$$

De metriek (3.65) krijgt dan de vorm

$$ds^2 = -2dx^+ dx^- + \frac{2\lambda x^4}{3} dx^9 dx^- + \left(\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\lambda x^i}{3} \right)^2 + \sum_{i=5}^8 \left(\frac{\lambda x^i}{6} \right)^2 \right) (dx^-)^2 - \sum_{i=1}^9 (dx^i)^2. \quad (4.30)$$

Het is eenvoudig na te gaan dat een reductie in de x^9 richting nu de $F_4 - F_2$ oplossing (4.16) oplevert. Deze reductie breekt de 1/4 van de supersymmetrie. Hierdoor blijft van de maximale supersymmetrie van de F_4 golf slechts 3/4-supersymmetrie over bij de $F_4 - F_4$ golf.

⁶De lezer kan dit snel nagaan aan de hand van de formules (2.25) en (2.26).

4.6 Besluit

In dit hoofdstuk toonde ik een constructiemethode om $3/4$ -supersymmetrische gravitatiegolven te vinden. Deze oplossingen worden overzichtelijk weergegeven in (4.16), (4.21) en (4.4). Omdat we om tot deze oplossingen te komen enkele aannames hebben gemaakt, is het niet noodzakelijk dat dit de enige mogelijke golven met $3/4$ -supersymmetrie zijn. Wel lijkt het mij vrijwel onmogelijk nog andere $3/4$ -supersymmetrische golven te vinden binnen de klasse van tijdonafhankelijke pp-waves met veldsterkten met in totaal twee niet-nul componenten.

De verschillende gevonden golfoplossingen staan niet los van elkaar. De gevonden verbanden zijn reducties, T-dualiteiten en een S-dualiteit. Een overzicht vindt u in het schema op de vorige pagina.

Bijlage A

Notaties en conventies

Metriek In dit werk wordt steeds gewerkt in de zogenaamde 'mostly minus'-conventie. Dit houdt in dat de signatuur van de gebruikte metrieken steeds van de vorm $(+ - \dots -)$ is. We noteren de metriek met $g_{\mu\nu}$ en de inverse metriek met $g^{\mu\nu}$. De determinant van de metriek wordt aangeduid met g . Vaak wordt ook de notatie van Riemann gebruikt voor de metriek: $ds^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$. Met $\eta_{\mu\nu}$ wordt in dit werk steeds $\text{diag}(+ - \dots -)$ bedoeld.

Om notaties te vereenvoudigen wordt ook steeds de gekende sommatieconventie gebruikt, indien een index tweemaal voorkomt wordt verondersteld dat het een dummy index is, waarover gesommeerd wordt. Indien dit niet zo is wordt het telkens expliciet aangegeven.

Tensoren We werken veelal in de Ricci calculus: we noteren het type van een tensor aan de hand van zijn indices. Indices boven of onder hebben dus een verschillende betekenis. We zullen steeds objecten zonder metriek met indices onderaan definiëren zodat

$$T^{\mu_1 \dots \mu_n} = g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_n \nu_n} T_{\nu_1 \dots \nu_n}. \quad (\text{A.1})$$

Een uitzondering hierop is de totaal antisymmetrische tensor, welke we definiëren als

$$\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \text{sign}(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n). \quad (\text{A.2})$$

Met het kwadraat van een tensor T^2 bedoelen we de volledige contractie $T_{\mu_1 \dots \mu_n} T^{\mu_1 \dots \mu_n}$.

Daar de partiële afgeleide zich gedraagt als een vector noteren we ook $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Als er gesymmetriseerd of geantisymmetriseerd wordt is dit steeds gewo-

gen:

$$T_{[\mu_1 \dots \mu_n]} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} T_{\sigma(\mu_1) \sigma(\mu_2) \dots \sigma(\mu_n)}$$

$$T_{(\mu_1 \dots \mu_n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} T_{\sigma(\mu_1) \sigma(\mu_2) \dots \sigma(\mu_n)},$$

met \sum_{σ} wordt de som over alle permutaties bedoeld.

Differentiaalvormen Een antisymmetrische tensor $T_{\mu_1 \dots \mu_n} = T_{[\mu_1 \dots \mu_n]}$ noemen we vaak als n -vorm:

$$T_n = \frac{1}{n!} T_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}. \quad (\text{A.3})$$

Met het wedge product van twee vormen bedoelen we

$$T_n \wedge V_m = T_{[\mu_1 \dots \mu_n} V_{\nu_1 \dots \nu_m]}. \quad (\text{A.4})$$

Ook is er de notie van uitwendige afgeleide, deze zet een n -vorm T_n om in de $(n+1)$ -vorm

$$(dT)_{\mu_1 \dots \mu_{n+1}} = \partial_{[\mu_1} T_{\mu_2 \dots \mu_{n+1}]}. \quad (\text{A.5})$$

Omdat een n -vorm antisymmetrisch is, heeft zo'n vorm in d dimensies in het algemeen $\binom{n}{d}$ niet nul componenten. Nu is echter $\binom{n}{d} = \binom{n-d}{d}$, wat wil zeggen dat een $(d-n)$ -vorm hetzelfde aantal vrijheidsgraden beschrijft als een n -vorm. De afbeelding die deze vormen in elkaar omzet noemt men Hodge dualiteit:

$$({}^*T)_{\mu_1 \dots \mu_{d-n}} = \frac{1}{\sqrt{|g|}n!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{d-n} \nu_1 \dots \nu_n} T^{\nu_1 \dots \nu_n}. \quad (\text{A.6})$$

Voor een n -vorm B_n noteren we ook

$$\mathcal{B}_{\mu_{(m+1)} \dots \mu_n} = \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_m} B_{\mu_1 \dots \mu_n}. \quad (\text{A.7})$$

Spinoren en gamma matrices Wat meer uitleg over spinoren, gamma matrices en hun notaties kan u vinden in bijlage B.

Bijlage B

Gamma matrices in een pp-wave achtergrond

B.1 Algemene concepten omtrent gamma matrices

Clifford algebra Neem een algebra gegenereerd door d elementen Γ_a , die voldoen aan¹

$$\{\Gamma_a, \Gamma_b\} = \Gamma_a \Gamma_b + \Gamma_b \Gamma_a = 2\eta_{ab}, \quad (\text{B.1})$$

waarbij dus $a, b \in \{1 \dots d\}$. Men noemt deze algebra de Clifford algebra van dimensie d . In deze algebra kunnen we de groep voortgebracht door $\{1, \Gamma_a\}$, met de vermenigvuldiging als groepsbewerking afzonderlijk beschouwen. Deze groep kunnen we irreducibel representeren door² $2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \times 2^{\lceil \frac{d}{2} \rceil}$ complexe matrices. Het is via deze representatie dat de generatoren van deze groep (en ook de algebra) de naam gamma matrices gekregen hebben. De expliciete vorm van deze representatie is hier van geen verder belang. Van meer belang is dat we ze unitair kiezen. Vergelijking (B.1) leidt dan onmiddellijk tot $\Gamma_0^\dagger = \Gamma_0$ en $\Gamma_a^\dagger = -\Gamma_a$ voor $a \neq 0$.

Lorentz groep en spinoren Aan de hand van eigenschappen van de gamma matrices kan men nu de d -dimensionale Lorentz algebra $so(1, d-1)$ construeren. Hiervoor voeren we alvast volgende notatie in:

$$\Gamma_{a_1 \dots a_n} = \Gamma_{[a_1} \Gamma_{a_2} \dots \Gamma_{a_n]}. \quad (\text{B.2})$$

¹Het is de gewoonte in een willekeurige dimensie de notatie Γ_a te gebruiken, in vier dimensies noteert men meestal γ_a .

²Met $[a]$ wordt hier het gehele deel van a bedoelt. vb. $[\frac{5}{2}] = 2$

Noem nu

$$J_{ab} = \frac{1}{2}\Gamma_{ab}. \quad (\text{B.3})$$

Het is eenvoudig na te gaan dat deze nieuw gedefinieerde objecten voldoen aan de volgende commutatierelaties:

$$[J_{ab}, J_{cd}] = -\eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac} + \eta_{ad}J_{bc} + \eta_{bc}J_{ad}. \quad (\text{B.4})$$

Dit zijn natuurlijk niets anders dan de commutatierelaties waaraan de generatoren van de Lorentz algebra voldoen. Via de exponentiële afbeelding kunnen we nu van de Lorentz algebra naar de Lorentz groep gaan:

$$L(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{4}\omega_{ab}J^{ab}\right), \quad (\text{B.5})$$

waarin ω_{ab} een antisymmetrische matrix is die de rotaties en boosts parametrizeert. Aangezien we de gamma matrices kunnen representeren vinden we zo een representatie voor de Lorentz groep $SO(1, d-1)$. Een representatie van deze vorm noemen we een spinor representatie. Objecten die Lorentz transformeren via representaties van deze vorm noemen we spinoren en zij beschrijven deeltjes met halfvallige spin. Samengevat geeft dit dat we een spinor in d dimensies kunnen noteren als een $2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ -dimensionale vector die transformeert als

$$\psi'_\alpha = (e^{\frac{1}{4}\omega_{ab}\Gamma^{ab}})_{\alpha\beta}\psi_\beta, \quad (\text{B.6})$$

met de gamma matrices de generatoren van de d -dimensionale Clifford algebra. Belangrijk is op te merken dat hoewel we de gamma matrices irreducibel kunnen representeren de representatie die hier voor de Lorentz groep geconstrueerd werd enkel in oneven dimensies irreducibel is. In even dimensies is deze representatie reducibel; ze deelt de ruimte van spinoren op in twee delen die elk afzonderlijk transformeren. Hierover hebben we het op het einde van deze bijlage kort nog wat meer.

Majorana toegevoegde Deze notie komt slechts voor in formules (2.5) en (2.15) en we houden het dus bij een korte definitie in elf en vier dimensies zonder al te veel verdere uitleg. Definieer de Majorana toegevoegde $\bar{\epsilon}$ van een spinor als

$$\bar{\epsilon} = \epsilon^t C, \quad (\text{B.7})$$

met in vier dimensies $C = i\gamma_0$ en in elf dimensies $C = i\Gamma_0$. Deze Majorana toegevoegde wordt gebruikt om het scalair product van twee spinoren te definiëren: $\langle \chi, \psi \rangle = \bar{\chi}\psi$.

vielbeine Wanneer we niet in een vlakke maar gekromde ruimte werken worden de gamma matrices gedefinieerd op de vlakke raakruimte. In deze raakruimte kan men verscheidene basissen kiezen. In de differentiaalmeetkunde worden vaak de raakvectoren aan de coördinaatkrommes gekozen, ∂_μ . Als er niet alleen met tensoren maar ook met spinoren gewerkt wordt dan kiest men meestal voor een andere basis in de raakruimte. In dit geval neemt men een stel vectoren die orthonormaal zijn voor de Minkowski metriek, v_a . Het verband tussen deze twee basissen wordt gegeven door een (lokale) transformatiematrix die men vielbein noemt:

$$v_a = e_a^\mu \partial_\mu, \quad (\text{B.8})$$

in de duale ruimte geeft dit

$$v^a = e_\mu^a dx^\mu. \quad (\text{B.9})$$

Het is duidelijk dat de matrix e_μ^a de inverse is van e_a^μ en men noemt hem daarom inverse vielbein. Dat deze vectoren v_a een Minkowski basis vormen vertaalt zich mathematisch als $g^{ab} = \eta^{ab}$. Onmiddellijk volgt:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} \quad (\text{B.10})$$

Gekromde basis De gamma matrices gedragen zich onder coördinaten-transformaties als vectoren, we kunnen dus kiezen ten opzichte van welke basis we ze uitdrukken. Doen we dit ten opzichte van de Minkowski basis dan blijft (B.1) ongewijzigd, hoewel we er van bewust moeten blijven dat dit nu een lokale definitie is. Werken we in de andere basis, dan dienen we (B.1) aan te passen. We kunnen dit doen door beide leden van de anticommutatierelatie (B.1) te vermenigvuldigen met de inverse vielbeine. Dit geeft dan

$$\{\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}. \quad (\text{B.11})$$

In dit werk zullen we van beide basissen gebruik maken, om berekeningen ten gronde uit te voeren dient men uiteindelijk steeds terug te gaan tot de vlakke formulering maar het is vaak een compactere notatie om met indices in de coördinatenbasis te werken.

B.2 Gamma matrices in een pp-wave achtergrond

Basiseigenschappen. We bekijken even wat al het voorgaande betekent voor gamma matrices gedefinieerd op een ruimte voorzien met een pp-wave

metriek. Het cruciale deel van de metriek ziet er als volgt uit:

$$ds^2 = -2dx^+dx^- - W(x^-, x^i)(dx^-)^2 - (dx^i)^2. \quad (\text{B.12})$$

Via (B.1) en $\Gamma^\mu = g^{\mu\nu}\Gamma_\nu$ levert dit onmiddellijk volgende relaties:

$$\Gamma_+^2 = 0, \quad \Gamma_-^2 = -W \quad \Gamma_+\Gamma_- + \Gamma_-\Gamma_+ = -2, \quad (\text{B.13})$$

$$\Gamma^- = -\Gamma_+, \quad \Gamma^+ = W\Gamma_+ - \Gamma_-. \quad (\text{B.14})$$

Vooraf het resultaat dat $\Gamma_+^2 = 0$ zal een belangrijke rol spelen en wordt veelvuldig gebruikt in deze thesis, niet zozeer op de voorgrond maar wel in de achterliggende berekeningen.

vielbeine We noteren de vlakke Minkowski basis met $\{v_0, v_1\}$ en de gekromde coördinatenbasis met $\{\partial_+, \partial_-\}$. De vielbeine worden voor deze metriek gegeven door

$$\eta_{ab} = e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu}, \quad \lambda = \frac{W + \sqrt{W^2 + 4}}{2}, \quad (\text{B.15})$$

$$e_0^+ = \frac{-\lambda}{\sqrt[4]{W^2 + 4}}, \quad e_1^+ = \frac{1}{\lambda\sqrt[4]{W^2 + 4}}, \quad (\text{B.16})$$

$$e_0^- = \frac{1}{\sqrt[4]{W^2 + 4}}, \quad e_1^- = \frac{1}{\sqrt[4]{W^2 + 4}}. \quad (\text{B.17})$$

Handig voor verdere berekeningen is te weten dat λ voldoet aan $\lambda^2 = 1 + \lambda W$. Via deze vielbeine kunnen we nu expliciet de gamma matrices uitdrukken in een vlakke basis, waarin de gamma matrices terug aan de oorspronkelijke Clifford algebra (B.1) voldoen:

$$\Gamma_+ = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_0}{\sqrt[4]{W^2 + 4}}, \quad (\text{B.18})$$

$$\Gamma_- = \frac{1}{\sqrt[4]{W^2 + 4}}(\lambda\Gamma_1 + \frac{1}{\lambda}\Gamma_0). \quad (\text{B.19})$$

Calculus Aan de hand van deze identiteiten kunnen dan de volgende formules herschreven worden:

$$\begin{aligned}
\partial_- \Gamma_+ &= -\frac{1}{2} \frac{W \partial_- W}{W^2 + 4} \Gamma_+, \\
\Gamma_+ \int \Gamma_+ F(x^-) dx^- &= 0, \\
\Gamma_+ \int \Gamma_- \Gamma_+ dx^- &= \left(\int \Gamma_+ \Gamma_- dx^- \right) \Gamma_+, \\
\partial_i \Gamma_- \Gamma_+ &= \partial_i \Gamma_+ \Gamma_- = 0, \\
\Gamma_+|_{x^i=0} &= \frac{\sqrt[4]{W^2 + 4}}{\sqrt[4]{W^2 + 4}|_{x^i=0}} \Gamma_+. \tag{B.20}
\end{aligned}$$

Γ_+ als projector Wat ook een zeer belangrijke rol zal spelen voor de supersymmetrie van pp-waves is dat via (B.18)

$$\Gamma_+ \sim \frac{\Gamma_0}{2} (1 + \Gamma_0 \Gamma_1) = \Gamma_0 P. \tag{B.21}$$

Uit de eigenschappen van Γ_0 en Γ_1 volgt onmiddellijk dat $P^2 = P$ en dus dat P een projector is. Uit de unitaire vorm van de gamma matrices volgt dat $(\Gamma_0 \Gamma_1)^\dagger = \Gamma_0 \Gamma_1$ en dus dat de eigenwaarden reël zijn. Dat ook $\text{Tr}(\Gamma_0 \Gamma_1) = 0$ en $(\Gamma_0 \Gamma_1)^2 = \Gamma_0 \Gamma_1$ geeft dat 1 en -1 even vaak voorkomen als eigenwaarde. Dit alles zorgt er voor dat P evenveel eigenvectoren met eigenwaarde 0 als 1 heeft, het is dus een projector op exact de helft van de Hilbert ruimte.

Opmerking Al het voorgaande blijft gelden als we de metriek uitbreiden tot een willekeurig aantal dimensies door er een euclidisch deel aan toe te voegen:

$$ds^2 = -2dx^+ dx^- - W(x^-, x^i) (dx^-)^2 - \sum_{i=2}^{d-1} dx^i. \tag{B.22}$$

Chiraliteitsmatrix In een even aantal dimensies is de representatie van de Lorentz algebra aan de hand van gamma matrices (B.5) niet langer irreducibel. Deze kan dan opgesplitst worden in twee irreducibele representaties van dimensie $\frac{d}{2}$. Deze twee representaties zijn afzonderlijke eigenruimten van een chiraliteitsoperator. In een pp-wave achtergrond van even dimensie neemt de chiraliteitsmatrix Γ_{d+1} volgende vorm aan:

$$\Gamma_{d+1} = \Gamma_{-+} \Gamma_{2\dots(d-1)}. \tag{B.23}$$

Het is duidelijk dat inderdaad $\{\Gamma_\mu, \Gamma_{d+1}\} = 0$ en $\Gamma_{d+1}^2 = 1$.

Hodge dualiteit Hodge dualiteit is nauw verbonden met supersymmetrie, zo kunnen we in IIB een analoge dualiteit tussen gamma matrices opstellen. Omdat alle spinoren dezelfde chiraliteit hebben is de chiraliteitsoperator uit (B.23) niets anders dan de eenheid uit de Clifford algebra. We hebben dus

$$\Gamma_{-+}\Gamma_{2\dots(d-1)} = 1. \quad (\text{B.24})$$

Hieruit kan men via de eigenschappen van de gamma matrices eenvoudig afleiden dat:

$$\Gamma_{i_1\dots i_p}\Gamma_+ = \frac{(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}}{(8-p)!} \epsilon_{i_1\dots i_p i_{(p+1)}\dots i_8} \Gamma_{i_{(p+1)}\dots i_8}\Gamma_+. \quad (\text{B.25})$$

Bijlage C

Van Λ tot Ω , precieze uitdrukkingen

Voor een golf van de vorm (3.18) schrijven we de Λ , Δ_i , Ω_- en $\tilde{\Omega}_-$ uit (3.35)-(3.39) neer. Ze verschillen voor 11D, IIA en IIB.

C.1 11-dimensionale supergravitatie

In 11 dimensies vinden we dat

$$\begin{aligned}\Lambda &= 0, \\ \Delta_i &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2 \cdot 3!} \Gamma_{j_1 j_2 j_3 i} \varphi_{j_1 j_2 j_3} - \frac{1}{2!} \Gamma_{j_1 j_2} \varphi_{i j_1 j_2} \right), \\ \Omega_- &= \frac{1}{4 \cdot 3!} \Gamma_{i_1 i_2 i_3} \varphi_{i_1 i_2 i_3} \left(1 + \frac{\Gamma_- \Gamma_+}{3} \right), \\ \tilde{\Omega}_- &= \frac{-1}{12 \cdot 3!} \Gamma_{i_1 i_2 i_3} \varphi_{i_1 i_2 i_3}.\end{aligned}\tag{C.1}$$

C.2 Type IIA supergravitatie

In type IIA supergravitatie is q steeds oneven, tenzij het om het Kalb-Ramond veld H_3 gaat. Om onderscheid te maken tussen dit Kalb-Ramond veld en de Ramond-Ramond velden noteren we de vorm overeenstemmend

met dit eerste als ζ . De uitdrukkingen zijn dan

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \frac{-1}{2} \left[\frac{1}{2!} \Gamma_{i_1 i_2} \zeta_{i_1 i_2} \Gamma_{11} + \frac{i}{2} \sum_{q \in \{1,3\}} \frac{4-q}{q!} \Gamma_{i_1 \dots i_q} \varphi_{i_1 \dots i_q} \Gamma_{11}^{\frac{q+1}{2}} \right], \\
\Delta_i &= \frac{1}{4} \left[-i \Gamma_j \zeta_{ij} \Gamma_{11} + \frac{1}{2} \sum_{q \in \{1,3\}} \frac{1}{q!} \Gamma_{j_1 \dots j_q} \varphi_{j_1 \dots j_q} \Gamma_i \Gamma_{11}^{\frac{q+1}{2}} \right], \\
\Omega_- &= \frac{1}{4} \left[\frac{i}{2} \Gamma_{i_1 i_2} \zeta_{i_1 i_2} \Gamma_{11} - \frac{1}{2} \sum_{q \in \{1,3\}} \frac{1}{q!} \Gamma_{i_1 \dots i_q} \varphi_{i_1 \dots i_q} \Gamma_+ \Gamma_- (-\Gamma_{11})^{\frac{q+1}{2}} \right], \\
\tilde{\Omega}_- &= \frac{-1}{4} \left[\frac{i}{2} \Gamma_{i_1 i_2} \zeta_{i_1 i_2} \Gamma_{11} \right]. \tag{C.2}
\end{aligned}$$

C.3 Type IIB supergravitatie

In type IIB supergravitatie is q altijd even. Een speciaal geval is $q = 4$ omdat dit overeenkomt met de zelfduale veldsterkte F_5 , dit zal leiden tot extra factoren $1/2$. Opnieuw noteren we de vorm voor het Kalb-Ramond veld H_3 met ζ . We vinden dat

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \frac{-1}{2} \left[\frac{1}{2!} \Gamma_{i_1 i_2} \zeta_{i_1 i_2} \otimes \sigma_3 + \frac{i}{2} \sum_{q \in \{0,2\}} \frac{q-4}{q!} \Gamma_{i_1 \dots i_q} \varphi_{i_1 \dots i_q} \otimes \mathcal{D}_q \right], \\
\Delta_i &= \frac{1}{4} \left[i \Gamma_j \zeta_{ij} \otimes \sigma_3 + \frac{1}{2} \sum_{q \in \{0,2\}} \frac{1}{q!} \Gamma_{j_1 \dots j_q} \varphi_{j_1 \dots j_q} \Gamma_i \otimes \mathcal{D}_q + \frac{1}{4 \cdot 4!} \Gamma_{j_1 \dots j_4} \varphi_{j_1 \dots j_4} \Gamma_i \otimes \mathcal{D}_4 \right], \\
\Omega_- &= \frac{1}{4} \left[\frac{i}{2} \Gamma_{i_1 i_2} \zeta_{i_1 i_2} \otimes \sigma_3 - \frac{1}{2} \sum_{q \in \{0,2\}} \frac{1}{q!} \Gamma_{i_1 \dots i_q} \varphi_{i_1 \dots i_q} \Gamma_+ \Gamma_- \otimes \mathcal{D}_q \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4 \cdot 4!} \Gamma_{i_1 \dots i_4} \varphi_{i_1 \dots i_4} \Gamma_+ \Gamma_- \otimes \mathcal{D}_4 \right], \\
\tilde{\Omega}_- &= \frac{1}{4} \left[\frac{i}{2} \Gamma_{i_1 i_2} \zeta_{i_1 i_2} \otimes \sigma_3 \right]. \tag{C.3}
\end{aligned}$$

Met

$$\mathcal{D}_q = \begin{cases} -i\sigma_2 & \frac{q}{2} \text{ oneven} \\ \sigma_1 & \frac{q}{2} \text{ even} \end{cases} \tag{C.4}$$

en σ_i de Pauli matrices.

Bibliografie

- [1] R. Gastmans, *Relativistische kwantumveldentheorie*, Cursusnotas K.U.Leuven
- [2] M. Peskin en D. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*, Westview Press (1995)
- [3] A. Van Proeyen, *Introduction to string theory*, Cursusnotas IITS (2004)
- [4] P. Freund, *Introduction to supersymmetry*, Cambridge University Press (1986)
- [5] B. de Wit, *Introduction to supergravity*, in: Supersymmetry and supergravity '84, ed. B. de Wit, P. Fayet en P. van Nieuwenhuizen, World Scientific (1984), 49-89
- [6] T. Ortin, *Gravity and Strings*, Cambridge University Press (2004)
- [7] M.W. Brinkmann, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 9 (1923)
- [8] J. Ehlers en W. Kundt, *Exact solutions of the gravitational field equations*, in: Gravitation: an introduction to current research, ed. L. Witten, Wiley (1962), 86-99
- [9] C.M. Hull, *Exact pp-wave solutions of 11-dimensional supergravity*, Phys. Lett. **B139** (1984), 39-41
- [10] R. Penrose, *Any space-time has a plane wave as a limit*, in: Differential Geometry and Relativity, Reidel (1976), 271-275
- [11] R. Güven, *Plane wave limits and T-duality*, Phys. Lett. **B482** (2000), 253-256, hep-th/0005061
- [12] R. Penrose, Techniques of differential topology in relativity, Society for Industrial and Applied Mathematics (1972), 59-60

- [13] M. Blau, J. Figueroa-O'Farril, G. Papadopoulos, *Penrose limits, supergravity and brane dynamics*, Class. Quantum Grav. **19** (2002), hep-th/0202111
- [14] J. Kowalski-Glikman, *Vacuum states in supersymmetric Kaluza-Klein theory*, Phys. Lett. **B134** (1984), 194-196
- [15] M. Blau, J. Figueroa-O'Farril, C. Hull en G. Papadopoulos, *A new maximally supersymmetric background of IIB superstring theory*, JHEP **0201** (2002), hep-th/0110242
- [16] J.P. Gauntlett en C. Hull, *pp-waves in 11-dimensions with extra supersymmetry*, JHEP **206** (2002), hep-th/0203255
- [17] I. Bena en R. Roiban, *Supergravity pp-wave solutions with 28 and 24 supercharges*, Phys. Rev. **D67** (2003), hep-th/0206195