Inhoudsopgave

1 Inleiding **4**
1.1 Motivatie: over theorieën 4
1.2 Waarom snaartheorie? 5
1.3 Supergravitatie als lage-energie-limiet 6
1.4 Opbouw en doel van het werk 7
1.5 Conventies 8

2 Concepten en technieken **9**
2.1 Over IIA en IIB supergravitatie 9
2.1.1 De acties van Type IIA en Type IIB 10
2.1.2 IJktransformaties 12
2.1.3 Massieve Type IIA 12
2.2 De democratische formulering 15
2.2.1 Hodge-dualiteit 15
2.2.2 On-shell dualisatie 16
2.3 Dimensionele reductie en T-dualiteit 21
2.3.1 Kaluza-Klein reductie 21
2.3.2 T-dualiteit 27
2.3.3 Scherk-Schwarz reductie 29

3 Resultaten **31**
3.1 T-dualiteit tussen Type IIA en Type IIB 31
3.1.1 Dimensionele reductie 31
3.1.2 Dualiteitsregels 36
3.2 Massieve T-dualiteit 38
3.2.1 Reductieregels 38
3.2.2 Massieve T-dualiteitsregels 41
3.3 T-dualiteit in de democratische formulering 43
3.3.1 Reductieregels voor de magnetische potentialen 43

3.3.2 T-dualiteitsregels voor alle Ramond-Ramond potentialen 47
3.4 Iets over de duale Kalb-Ramond vorm 50
3.5 Een uitstapje naar 11 dimensies 53
3.6 Besluit 56

Dankwoord

Een dankwoord krijgt algauw standaard vormen. Dit doet niets af aan het feit dat het meer is dan een formaliteit. De mensen die ik hier dank, verdienen mijn oprechte dankbaarheid. Vele mensen hebben mij geholpen op één of andere manier om dit werk tot een goed einde te brengen. Iedereen die zich hierdoor aangesproken voelt wil ik danken.

In het bijzonder prof. Troost. Dankzij zijn enthousiasme heb ik voor dit onderwerp gekozen, en zijn eindeloze geduld zorgde ervoor dat ik er geen moment spijt van had. Ook zijn assistent, Bert Janssen, verdient een speciale aandacht. Ik denk dan aan de vele keren dat ik op zijn deur klopte met een probleem, of dat hij het studentenlokaaltje binnenviel om te vragen of het wel ging. Dank aan Jos Gheerardyn, die toen Bert afwezig was ons wel verder wilde helpen.

Hartelijk dank aan Stefan Knippenberg, die samen met mij lange dagen klopte. Dank aan alle leden van theoretische fysica, waarbij ik mij thuis mocht voelen. Dank voor de morele ondersteuning. Dank u wel, Wouter Lefebvre, en alle vrienden en medestudenten.

Dank aan mijn ouders, die mij bleven ondersteunen al wisten ze op den duur niet meer waarover ik het had, of wat ik bezig was. Een grote dank u wel voor dit vertrouwen.

Hoofdstuk 1

Inleiding

1.1 Motivatie: over theorieën

Een theorie is een model. Hij probeert de werkelijkheid te beschrijven, te voorspellen hoe het systeem zal reageren. Sommige modellen zijn erg intuïtief. Men ziet als het ware voor zich wat er gebeurt. Als zulk model ook een accurate beschrijving geeft, heeft men precies wat men wil. De gravitatietheorie van Newton is een mooi voorbeeld.

Elke theorie heeft ook zijn beperkingen. De klassieke mechanica en elektrodynamica falen bij hoge snelheden of kleine afstanden. Voor snelheden in de buurt van de lichtsnelheid kent men de relativiteitstheorie van Einstein. Voor kleine afstanden heeft men de kwantummechanica. Beide omvatten de klassieke theorieën. Dit wil zeggen: in de limiet van lage snelheid respectievelijk grote afstand geven ze de klassieke theorie.

Relativiteitstheorie en kwantummechanica hebben iets gemeen: ze zijn veel minder intuïtief dan de klassieke mechanica. In dit verband wil ik een citaat van R. Feynman aanhalen: "Nobody understands quantum mechanics". Dit komt vooral omdat deze theorieën een werkelijkheid beschrijven waar wij nauwelijks mee te maken krijgen. Als u straks boodschappen gaat doen en daarna aardappelen kookt, dan zijn de klassieke mechanica en thermodynamica voldoende om de fenomenen te beschrijven. Dat de lichtsnelheid constant is zult u slechts nodig hebben als u vergezochte (gedachten-) experimenten uitvoert.

Fysici zijn niet tevreden met een theorie voor alle praktische doeleinden. Zij zijn veeleisend: zij willen alles beschrijven. Ook uitzinnige experimenten. Soms leidt dit tot onverwachte praktische toepassingen, zoals de laser.

Relativiteitstheorie zowel als kwantummechanica vragen om concepten aan te nemen die we intuïtief verwerpen, zoals gekromde tijdruimte of waarschijnlijkheidsgolven. De enige manier om hiermee vertrouwd te raken is de theorie zelf zeer goed te bestuderen. Een bolvormige aarde is ooit ook contra-intuïtief geweest.

Dit is nog zoveel meer van toepassing voor een theorie die de gravitatie met de andere krachten wil verenigen! Dit behelst een beschrijving van gravitatie op kwantummechanisch niveau. Een eventuele unificatie zou zeker moeten beschrijven hoe het komt dat deze zoveel zwakker is dan de andere krachten.

1.2 Waarom snaartheorie?

In de snaartheorie worden deeltjes niet als punten beschouwd maar als ééndimensionale objecten. Experimenteel is dit niet bevestigd: elementaire deeltjes "zien" eruit als puntdeeltjes. Dit is te verklaren als men aanneemt dat de lengte van de snaren zeer klein is. De bedoelde lengteschaal is de Planck-lengte, van de orde van $10^{-35}m$. De verschillende elementaire deeltjes worden gezien als trillingswijzen van hetzelfde soort snaar.

Snaartheorie heeft een aantal interessante eigenschappen. Vooreerst is het een kwantumtheorie, wat eigenlijk een "conditio sine qua non" is om als unificerende theorie te dienen. Verder voorspelt de theorie een spin-2 massaloos deeltje. Dat zijn precies de eigenschappen die men toekent aan het graviton, het deeltje dat gravitatie overbrengt. Bovendien is de theorie algemeen genoeg om het Standaard Model te bevatten. De theorieën zijn beperkt door wiskundige consistentie. Een eis die daaruit volgt is bijvoorbeeld het aantal tijdruimte-dimensies: dat zijn er tien. Er zijn methoden uitgedacht om dit te verenigen met de door ons waargenomen vier dimensies. Hierop komen we later terug.

Tot nu toe hebben we steeds gesproken over "de" snaartheorie. In feite zijn er vijf consistente theorieën gekend. Tussen sommige van deze theorieën zijn er relaties, de zogenaamde dualiteiten. Deze dualiteiten zijn belangrijke en interessante symmetrieën. Bijvoorbeeld S-dualiteit ("S" staat voor "strong-weak coupling") verwisselt een sterke koppeling met een zwakke. Zo kan men door perturbatief rekenen toch resultaten bekomen voor een sterke koppeling. Een andere dualiteit is diegene die het onderwerp is van dit werk: de "target space" of kortweg T-dualiteit [1]. Deze verwisselt – ruw gezegd – een grote met een kleine lengteschaal en het aantal windingen van de snaar met zijn impuls. De target space is de ruimte waarin de snaren en andere objecten leven. Stel dat deze een compacte dimensie heeft. De snaar kan dan een aantal maal gewonden zijn om deze dimensie met een zekere spanning. De energieniveaus ten gevolge van deze spanning gaan verder uit elkaar liggen naarmate de straal van deze dimensie groter wordt. Ook het impuls langs de compacte dimensie is discreet en geeft aanleiding tot een energiespectrum, dat juist dichter bij elkaar gaat liggen wanneer de dimensie vergroot. Een snaar met impuls n en aantal windingen m rond een compacte richting met straal k, heeft hetzelfde spectrum als zijn T-duale snaar, met impuls m en aantal windingen n, in de T-duale achtergrond met compacte richting met straal k^{-1}.

1.3 Supergravitatie als lage-energie-limiet

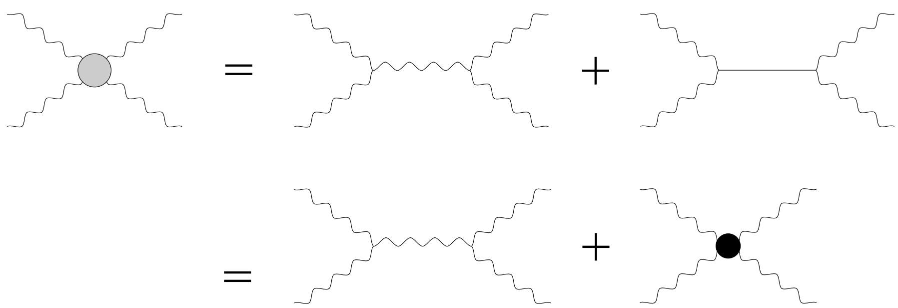
Deze thesis beschouwt niet de snaartheorie als dusdanig, maar de supergravitatie. Supergravitatie is een veldentheorie die als lage-energie-limiet uit de stringtheorie volgt. Hierdoor is de supergravitatie veel eenvoudiger, en minder verreikend, dan de snaartheorie. Toch erft de supergravitatie een heel aantal eigenschappen. Ook is het zo dat eigenschappen die bewezen zijn voor supergravitatie, vaak kunnen uitgebreid worden naar de volledige snaartheorie.

Om van een theorie van interagerende snaren naar een veldentheorie te komen zijn meerdere stappen nodig. We hebben reeds vermeld dat de elementaire deeltjes gezien worden als trillingswijzen van de snaar. Een snaar heeft echter een oneindig spectrum. Er is een groot hiaat tussen de massaloze en de massieve modes. De laagste massieve modes hebben een massa in de orde van de Planck-massa (10^{19} GeV). Dit maakt het mogelijk een lage-energie-limiet te nemen.

In de lage-energie-limiet beschouwt men enkel de massaloze toestanden als begin en einde van interactie. Deze kunnen dan wel een massief deeltje uitwisselen. De interactie via massieve toestanden wordt uitgeïntegreerd tot een effectieve actie. De bekomen actie houdt dus wel rekening met uitwisseling van massieve deeltjes. Zie hiervoor figuur 1.1. Tot nu toe lijkt het nog altijd om interagerende deeltjes te gaan eerder dan om velden. Het blijkt echter onmogelijk de individuele deeltjes te onderscheiden. Dat zou namelijk zo veel energie vergen dat de lage-energie-benadering niet meer van toepassing is. Het is dus juister om de theorie als een veldentheorie te beschouwen.

Het aantal tijdruimte-dimensies blijft gelijk aan die in de snaartheorie. U kunt zich dus verwachten aan Lagrangianen in negen, tien en elf dimensies. Er bestaat inderdaad een elfdimensionale supergravitatie, die dan geen lage-energie-limiet is van een snaartheorie.

Er zijn nog twee beperkingen te vermelden. Hoewel supergravitatie bedoeld was als kwantumtheorie, bekijken we hier de klassieke veldentheorie. Alle velden zijn dus functies en geen operatoren. Als tweede beperken we ons tot de bosonische sector. Dit gebeurt door de fermionische velden gewoon nul te stellen. De T-dualiteitsrelatie tussen snaartheorieën geldt onvermijdelijk ook in de lage-energie-limiet.



Figuur 1.1: De lage-energie-limiet in de interactie, uit [2]: de interactie tussen twee massaloze modes (golvende lijnen) is een resultaat van interactie via massaloze modes en via massieve modes (rechte lijn). Dat is gelijk aan interactie via massaloze modes plus een effectieve interactie.

1.4 Opbouw en doel van het werk

Het doel is de T-dualiteitsrelatie tussen de massieve Type IIA en Type IIB supergravitatie uit te breiden naar de democratische formulering. Daartoe zullen we eerst enkele concepten verduidelijken. In het volgende hoofdstuk komen de twee Types supergravitatie aan bod en de massieve uitbreiding van Type IIA. Vervolgens wordt de democratische formulering bekomen door middel van on-shell Hodge-dualisatie. De laatste concepten die we aanhalen zijn dimensionele reductie en T-dualiteit.

Het derde hoofdstuk gaat in drie stappen naar het doel toe. Als eerste vernoemen we de (gewone, massaloze) T-dualiteitsrelatie tussen Type IIA en Type IIB. De tweede stap handelt over de massieve T-dualiteitsrelatie tussen de massieve Type IIA en de (massaloze) Type IIB. Zo komen we tot de T-dualiteit in de democratische formulering. De laatste twee secties van hoofdstuk drie handelen over enkele verwante problemen.

1.5 Conventies

Er bestaan tientallen conventies voor de metriek, de normalisatiecoëfficiënten en de namen van de velden. Het is dan ook te verwachten dat de artikels daarin van elkaar verschillen. Hier zullen we bijna altijd de conventies uit het boek van Tomás Ortín gebruiken [3].

Dit betekent dat de metriek "mostly minus" genomen wordt, dus $\eta = diag(1, -1, ..., -1)$. Verder wordt er gesommeerd over herhaalde indices. Om de notatie niet te zwaar te maken laten we de indices weg wanneer er geen dubbelzinnigheid is. Een bovenindex tussen haakjes duidt telkens de rang van de vorm aan wanneer er meerdere vormen met dezelfde naam zijn. Wanneer twee velden volledig gecontraheerd zijn is dit aangeduid met een kwadraat:

$$(\hat{G}^{(4)})^2 \quad = \quad \hat{G}^{(4)}{}_{\mu\nu\rho\sigma}\hat{G}^{(4)\ \mu\nu\rho\sigma}. \tag{1.1}$$

Producten van vormvelden veronderstellen steeds een antisymmetrisatie met gewicht één, bijvoorbeeld:

$$AB^{(2)} \quad = \quad A_{[\mu}B^{(2)}{}_{\nu\rho]} = \frac{1}{3}(A_\mu B^{(2)}{}_{\nu\rho} + A_\nu B^{(2)}{}_{\rho\mu} + A_\rho B^{(2)}{}_{\mu\nu}). \tag{1.2}$$

Objecten met een hoedje, zoals in (1.1) zijn tiendimensionaal. Dit is om onderscheid te maken met negendimensionale velden, die zonder hoed aangeduid zijn, zoals in (1.2). Voor elf dimensies gebruiken we een streepje.

De benamingen actie en Lagrangiaan(-dichtheid) worden vaak door elkaar gebruikt. In feite is de actie de tijdruimte-integraal van de Lagrangiaandichtheid. Als twee Lagrangianen verschillen met een totale afgeleide is de actie dezelfde. Bijgevolg zullen totale afgeleiden verwaarloosd worden.

Hoofdstuk 2

Concepten en technieken

2.1 Over IIA en IIB supergravitatie

Type IIA en Type IIB supergravitatie zijn de lage-energie-limiet van de gelijknamige snaartheorieën. Ze zijn beide theorieën voor gesloten snaren. In feite verschillen ze enkel van elkaar door een projectie, de GSO projectie. Deze is nodig om de kwantumtheorie consistent te maken. De GSO projectie zorgt ervoor dat de Type IIA een niet-chirale theorie is terwijl de Type IIB wel chiraal is. De chiraliteit van de theorie slaat op de fermionen. In de bosonische sector van de supergravitatie uit zich dat in de rang van de Ramond-Ramond potentialen. De Ramond randvoorwaarde is namelijk antiperiodiek en dit kan slechts voor een fermionische mode. Vandaar heeft het verschil tussen de chiraliteiten slechts invloed op de Ramond-Ramond potentialen (en op de fermionen). De potentialen in Type IIA hebben oneven rang en deze van Type IIB zijn even. De veldinhoud van de Type IIA is

$$\{\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \hat{\phi}, \hat{C}^{(1)}{}_{\hat{\mu}}, \hat{C}^{(3)}{}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}\}. \tag{2.1}$$

Hierbij stelt $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ de metriek voor. Zoals in de algemene relativiteitstheorie is de metriek functie van de plaats en stelt hij de gravitatiekracht voor. $\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ noemt men de Kalb-Ramond vorm, of ook wel het axion. Het is een vormveld, dus antisymmetrisch. De scalar $\hat{\phi}$ heet het dilaton. In snaartheorie heeft deze een verband met de koppelingsconstante ("string coupling constant"). Deze drie velden worden Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz velden genoemd. De benaming komt uit de snaartheorie, waar de gesloten snaar een Neveu-Schwarz randvoorwaarde heeft voor de linkslopende en voor de rechtslopende fermionische mode op de snaar.

De velden die we nog niet vernoemd hebben, de $\hat{C}^{(n)}$, zijn de Ramond-Ramond potentialen. Zoals hierboven uitgelegd hebben deze hun oorsprong in een snaar met Ramond randvoorwaarde. Ook deze zijn volledig antisymmetrisch.

Men zou zich kunnen afvragen: bestaan er gemengde randvoorwaarden, en zo ja, geven deze dan geen extra velden? Er zijn inderdaad Ramond-Neveu-Schwarz of Neveu-Schwarz-Ramond toestanden en velden gekend. Deze zijn echter fermionisch, daarom nemen we ze niet mee.

Type IIB heeft de volgende veldinhoud:

$$\{\hat{\jmath}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \hat{\mathcal{B}}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \hat{\varphi}, \hat{C}^{(0)}, \hat{C}^{(2)}{}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \hat{C}^{(4)}{}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}\}. \tag{2.2}$$

De Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz velden zijn volledig dezelfde als in Type IIA. Om het onderscheid tussen de twee theorieën duidelijk te maken zijn ze met andere namen aangeduid. De metriek is $\hat{\jmath}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, het axion $\hat{\mathcal{B}}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ en het dilaton $\hat{\varphi}$. De Ramond-Ramond potentialen zijn hier van even orde.

2.1.1 De acties van Type IIA en Type IIB

Als we het hier over een theorie hebben, bedoelen we in essentie een Lagrangiaan. De actie leidt tot bewegingsvergelijkingen, die oplossingen hebben zoals branen. De objecten die in de snaartheorie voorkomen, vindt men hier als oplossingen.

Type IIA heeft als Lagrangiaan:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\;& \sqrt{|\hat{g}|}\; e^{-2\hat{\phi}}\Big(\hat{R} - 4(\partial\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2\cdot 3!}\hat{H}^2\Big) \\ & -\sqrt{|\hat{g}|}\;\Big(\frac{1}{2\cdot 2!}(\hat{G}^{(2)})^2 + \frac{1}{2\cdot 4!}(\hat{G}^{(4)})^2\Big) \\ & -\frac{1}{144}\;\hat{\epsilon}\;\partial\hat{C}^{(3)}\;\partial\hat{C}^{(3)}\;\hat{B}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Hierbij is $\hat{R}$ de Ricci scalar, de kinetische term voor de metriek en dus voor het gravitationeel veld. $|\hat{g}|$ staat voor de absolute waarde van de determinant van de metriek $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$. De Kalb-Ramond en de Ramond-Ramond veldsterktes zijn:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= 3\partial\hat{B}, \\ \hat{G}^{(2)} &= 2\partial\hat{C}^{(1)}, \\ \hat{G}^{(4)} &= 4\partial\hat{C}^{(3)} - 12\partial\hat{B}\hat{C}^{(1)}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

De actie van Type IIB ziet er als volgt uit:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \sqrt{|\hat{\jmath}|}\, e^{-2\hat{\varphi}}\Big(\hat{\mathcal{R}} - 4(\partial\hat{\varphi})^2 + \frac{1}{2\cdot 3!}\hat{\mathcal{H}}^2\Big) \\ &\quad + \sqrt{|\hat{\jmath}|}\,\Big(\frac{1}{2}(\hat{G}^{(1)})^2 + \frac{1}{2\cdot 3!}(\hat{G}^{(3)})^2 + \frac{1}{4\cdot 5!}(\hat{G}^{(5)})^2\Big) \\ &\quad - \frac{1}{192}\,\hat{\epsilon}\,\partial\hat{C}^{(4)}\,\partial\hat{C}^{(2)}\,\hat{\mathcal{B}}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Dit zijn de veldsterktes:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &= 3\partial\hat{\mathcal{B}}, \\ \hat{G}^{(1)} &= \partial\hat{C}^{(0)}, \\ \hat{G}^{(3)} &= 3\partial\hat{C}^{(2)} - 3\partial\hat{\mathcal{B}}\hat{C}^{(0)}, \\ \hat{G}^{(5)} &= 5\partial\hat{C}^{(4)} - 30\partial\hat{\mathcal{B}}\hat{C}^{(2)}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

De Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz sector is gelijk voor de beide theorieën. Daarom wordt deze ook de common sector genoemd. De Ramond-Ramond potentialen, $\hat{C}$, zijn kenmerkend voor de Type II theorieën. In Type IIA heeft men oneven potentialen, dus even veldsterktes. Het omgekeerde gebeurt in IIB: even potentialen en oneven veldsterktes. De normalisatie van de kinetische termen is niet vergezocht. Een klassieke kinetische term is van de vorm $\frac{1}{2}v^2$. Bij de contractie van een p-vorm krijgt men echter $p!$ termen, vandaar de extra factor in de noemer.

De laatste term noemt men de Chern-Simons term. Hij is een topologische term: hij koppelt niet aan de metriek en hangt daardoor slechts af van de topologie van de ruimte. Wanneer de metriek continu vervormd wordt zal deze term niet veranderen. De vorm en de voorfactor van de topologische term is bepaald door supersymmetrie. Hier geven we slechts het bosonische deel, maar de volledige actie van Type IIA en Type IIB zijn invariant onder de supersymmetrie-transformaties.

In Type IIB is er een extra moeilijkheid. De veldsterkte van de potentiaal $\hat{C}^{(4)}$ is zelfduaal voor Hodge-dualiteit, wat meer uitgewerkt is in sectie 2.2.1. Dat elimineert de helft van de vrijheidsgraden in deze potentiaal, maar zorgt er ook voor dat er geen echte actie bestaat. De zelfdualiteit impliceert immers dat elke term van de vorm $(\hat{G}^{(5)})^2$ gelijk is aan nul. Met andere woorden, er is geen kinetische term voor deze veldsterkte. Er is een oplossing voorgesteld in [4], met behulp van een niet-zelfduale actie. De actie (2.5) is in feite reeds deze niet-zelfduale actie. Men vergeet als het ware dat $\hat{G}^{(5)}$ zelfduaal is, en voegt die restrictie later met de hand toe als een bewegingsvergelijking. De bijkomende voorwaarde is dan:

$$\hat{G}^{(5)} = \frac{1}{5!}\frac{1}{\sqrt{|\hat{\jmath}|}}\hat{\epsilon}\hat{G}^{(5)}. \tag{2.7}$$

Het is ook door de zelfdualiteit dat de term $(\hat{G}^{(5)})^2$ een extra factor $\frac{1}{2}$ in de normalisatie heeft. Vanaf nu zullen we steeds de niet-zelfduale actie gebruiken voor Type IIB en de zelfdualiteit apart beschouwen.

2.1.2 IJktransformaties

Alle vormvelden die in supergravitatie voorkomen, zijn ijkvelden. Ze kunnen dus variëren met een lokale, willekeurige parameter. De potentialen zijn geen fysische velden. De fysica is volledig bepaald door de veldsterktes. Deze zijn invariant onder de ijktransformaties[1]. Dit is een belangrijke en nuttige eigenschap. Bij dimensionele reductie, bijvoorbeeld, zullen de ijktransformaties samen met de velden gereduceerd worden. Nagaan of de berekende veldsterktes invariant zijn voor ijktransformatie geeft een krachtig controlemiddel.

De ijkvariaties voor de velden van Type IIA zijn

$$\begin{aligned} \delta\hat{B} &= 2\partial\hat{\Sigma}^{(1)}, \\ \delta\hat{C}^{(1)} &= \partial\hat{\Lambda}^{(0)}, \\ \delta\hat{C}^{(3)} &= 3\partial\hat{\Lambda}^{(2)} + 3\hat{B}\partial\hat{\Lambda}^{(0)}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Een eenvoudige berekening leert ons dat de actie (2.3) en de veldsterktes (2.4) inderdaad invariant zijn. Voor Type IIB hebben we

$$\begin{aligned} \delta\hat{\mathcal{B}} &= 2\partial\hat{\Sigma}^{(1)}, \\ \delta\hat{C}^{(0)} &= 0, \\ \delta\hat{C}^{(2)} &= 2\partial\hat{\Lambda}^{(1)}, \\ \delta\hat{C}^{(4)} &= 4\partial\hat{\Lambda}^{(3)} + 12\hat{\mathcal{B}}\partial\hat{\Lambda}^{(1)}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ook hier zijn de veldsterktes (2.6) en de actie (2.5) invariant.

2.1.3 Massieve Type IIA

Wat men massieve Type IIA noemt is een uitbreiding van Type IIA met een kosmologische constante[2]. In deze formulering kan men gemakkelijk $m = 0$

[1] In een niet-abelse theorie, zoals de Yang-Mills theorie voor de zwakke interactie, zijn ze enkel covariant.

[2] Strikt genomen is dit geen echte kosmologische constante, hij koppelt namelijk anders aan het dilaton. Een kosmologische constante zou een factor $e^{\frac{5}{4}\hat{\phi}}$ extra krijgen.

stellen en de gewone, massaloze Type IIA terugvinden.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \sqrt{|\hat{g}|}\; e^{-2\hat{\phi}}\Big(\hat{R} - 4(\partial\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2\cdot 3!}\hat{H}^2\Big) \\ &\quad -\sqrt{|\hat{g}|}\;\Big(\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2\cdot 2!}(\hat{G}^{(2)})^2 + \frac{1}{2\cdot 4!}(\hat{G}^{(4)})^2\Big) \\ &\quad -\frac{1}{144}\;\hat{\epsilon}\;\Big(\partial\hat{C}^{(3)}\;\partial\hat{C}^{(3)}\;\hat{B} + \frac{1}{2}m\partial\hat{C}^{(3)}\hat{B}\hat{B}\hat{B} \\ &\quad +\frac{9}{80}m^2\hat{B}\hat{B}\hat{B}\hat{B}\hat{B}\Big).\end{aligned} \tag{2.10}$$

In vergelijking met de massaloze Type IIA hebben de Ramond-Ramond-veldsterktes extra m-afhankelijkheid.

$$\begin{aligned}\hat{G}^{(2)} &= 2\partial\hat{C}^{(1)} + m\hat{B} \\ \hat{G}^{(4)} &= 4\partial\hat{C}^{(3)} - 12\partial\hat{B}\hat{C}^{(1)} + 3m\hat{B}\hat{B}\end{aligned} \tag{2.11}$$

Ook de ijktransformaties veranderen. Dit is noodzakelijk omdat de veldsterktes invariant moeten blijven. Buiten de gebruikelijke gradiënten zoals $\partial\hat{\Lambda}$ krijgen de Ramond-Ramond-potentialen er een verschuiving $-m\hat{\Sigma}$ bij. Merk op dat de parameter van deze verschuiving dezelfde is als die van de ijkvariatie van $\hat{B}$. Deze transformatie noemt men Stückelbergtransformatie [5].

$$\begin{aligned}\delta\hat{B} &= 2\partial\hat{\Sigma}^{(1)} \\ \delta\hat{C}^{(1)} &= \partial\hat{\Lambda}^{(0)} - m\hat{\Sigma}^{(1)} \\ \delta\hat{C}^{(3)} &= 3\partial\hat{\Lambda}^{(2)} + 3\hat{B}\partial\hat{\Lambda}^{(0)} - 3m\hat{B}\hat{\Sigma}^{(1)}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

De uitbreiding van Type IIA, zoals hierboven vermeld, is equivalent aan Romans' theorie voor massieve supergravitatie. Historisch gezien is Romans' theorie de oudste [6], waarna men een verband vond met een veralgemeende Type IIA [7]. Dit verband ligt vast in de Stückelberg transformaties (2.12).

Beschouw de veldherdefinitie

$$\hat{B} = \tilde{B} - \frac{2}{m}\partial\hat{C}^{(1)}. \tag{2.13}$$

In feite is dit een ijktransformatie met het veld $\hat{C}^{(1)}$ als parameter. De veldsterkte verandert dus niet:

$$\hat{H} = 3\partial\hat{B} = 3\partial\tilde{B}. \tag{2.14}$$

De veldsterkte van $\hat{C}^{(1)}$ verandert wel, en zodanig dat $\hat{C}^{(1)}$ eruit verdwijnt. $\hat{C}^{(1)}$ vertegenwoordigt dus geen fysische vrijheidsgraden.

$$\hat{G}^{(2)} = 2\partial\hat{C}^{(1)} + m(\tilde{B} - \frac{2}{m}\partial\hat{C}^{(1)}) = m\tilde{B}. \tag{2.15}$$

Hierdoor is

$$(\hat{G}^{(2)})^2 = m^2\tilde{B}^2. \tag{2.16}$$

Dit komt als een "massaterm" voor $\tilde{B}$ in de actie[3]. De schijnbaar verdwenen vrijheidsgraden van $\hat{C}^{(1)}$ zijn hier terug te vinden. Een massief veld heeft meer vrijheidsgraden dan een massaloos.
Ook kan een massief veld geen ijkveld meer zijn. Dit volgt eveneens uit de transformatie (2.13):

$$\delta\tilde{B} = 2\partial\hat{\Sigma}^{(1)} + \frac{2}{m}\partial(-m\hat{\Sigma}^{(1)}) = 0. \tag{2.17}$$

Om het volledig af te maken moet $\hat{C}^{(1)}$ ook uit $\hat{G}^{(4)}$ weggetransformeerd kunnen worden. De herdefinitie van $\hat{C}^{(3)}$ is zijn Stückelbergtransformatie (2.12):

$$\begin{aligned} \hat{C}^{(3)} &= \tilde{C}^{(3)} + 3\tilde{B}\hat{C}^{(1)} - \frac{3}{m}\hat{C}^{(1)}\partial\hat{C}^{(1)}, \\ \hat{G}^{(4)} &= 4\partial\tilde{C}^{(3)} + 3m\tilde{B}\tilde{B}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

De Chern-Simons term verandert niet bij deze veldherdefinities. Ze zijn immers ijktransformaties met als parameter $\hat{C}^{(1)}$. Dit alles bij elkaar levert de Lagrangiaan van Romans' theorie [6]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \;=\; & \sqrt{|\hat{g}|}\; e^{-2\hat{\phi}}\Big(\hat{R} - 4(\partial\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2\cdot 3!}\hat{H}^2\Big) \\ & -\sqrt{|\hat{g}|}\;\Big(\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2\cdot 2!}m^2\tilde{B}^2 + \frac{1}{2\cdot 4!}(\hat{G}^{(4)})^2\Big) \\ & -\frac{1}{144}\;\hat{\epsilon}\Big(\partial\tilde{C}^{(3)}\;\partial\tilde{C}^{(3)}\;\tilde{B} + \frac{1}{2}m\partial\tilde{C}^{(3)}\tilde{B}\tilde{B}\tilde{B} \\ & +\frac{9}{80}m^2\tilde{B}\tilde{B}\tilde{B}\tilde{B}\tilde{B}\Big). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Als men hier $m = 0$ stelt bekomt men niet de massaloze Type IIA. De reden is dat bij de Stückelbergtransformaties m in de noemer voorkomt.
De T-dualiteitsregels tussen Type IIA en Type IIB kunnen uitgebreid worden naar een massieve T-dualiteit tussen de massieve IIA en de (massaloze) IIB.

[3] Om dezelfde reden als van de kosmologische constante, is het geen echte massaterm.

2.2 De democratische formulering

De vormvelden in de acties (2.10) en (2.5) noemt men elektrisch. Ze zijn Hodge-duaal aan de zogenaamde magnetische velden. In de democratische formulering komen zowel elektrische als magnetische velden voor, en met een gelijk verdeeld gewicht. Deze formulering werd in [8] voorgesteld om een andere uitdrukking te geven van supersymmetrie. In deze sectie gebruiken we Hodge-dualiteit om van de elektrische formulering naar de democratische formulering te gaan.

2.2.1 Hodge-dualiteit

In D dimensies is een p-vorm duaal aan een $(D-p)$-vorm. Deze relatie, de Hodge-dualiteit, gebeurt via de Levi-Civita tensor:

$$T^{(p)} = \frac{1}{(D-p)!}\frac{1}{\sqrt{|g|}}\epsilon T^{(D-p)} = {}^{*}T^{(D-p)}, \tag{2.20}$$

waarbij g de metriek voorstelt. Zo kan men duale veldsterktes definiëren. In tien dimensies noemt men de veldsterktes met een orde kleiner dan vijf elektrisch. Ze zijn duaal aan veldsterktes met een orde groter dan vijf, die magnetisch heten. In een algemene dimensie D zijn de elektrische vormen deze van rang 0 tot rang $D/2$, en de overige zijn magnetisch.

De vijfvorm $\hat{G}^{(5)}$ uit de Type IIB theorie (2.5) is zelfduaal en dus zowel elektrisch als magnetisch. Nu moet ook duidelijk worden waarom een term van de vorm $(\hat{G}^{(5)})^2$ gelijk is aan nul. Immers,

$$\hat{G}^{(5)\,\hat{\mu}_1\ldots\hat{\mu}_5} = \frac{1}{5!}\frac{1}{\sqrt{|\hat{\jmath}|}}\hat{\epsilon}^{\hat{\mu}_1\ldots\hat{\mu}_5\hat{\lambda}_1\ldots\hat{\lambda}_5}\hat{G}^{(5)}{}_{\hat{\lambda}_1\ldots\hat{\lambda}_5}, \tag{2.21}$$

zodat

$$\hat{G}^{(5)}{}_{\hat{\mu}_1\ldots\hat{\mu}_5}\hat{G}^{(5)\,\hat{\mu}_1\ldots\hat{\mu}_5} = \frac{1}{5!}\frac{1}{\sqrt{|\hat{\jmath}|}}\hat{G}^{(5)}{}_{\hat{\mu}_1\ldots\hat{\mu}_5}\epsilon^{\hat{\mu}_1\ldots\hat{\mu}_5\hat{\lambda}_1\ldots\hat{\lambda}_5}\hat{G}^{(5)}{}_{\hat{\lambda}_1\ldots\hat{\lambda}_5} = 0. \tag{2.22}$$

Het laatste is gelijk aan nul omdat de uitdrukking zowel symmetrisch als antisymmetrisch is voor verwisselen van de indices $\hat{\lambda}_1\ldots\hat{\lambda}_5$ met $\hat{\mu}_1\ldots\hat{\mu}_5$.

De magnetische veldsterktes zijn via de Hodge-dualiteit verbonden met de elektrische. Daardoor is er ook een verband tussen de potentialen, maar slechts langs de afgeleiden om. Om de magnetische potentialen en een duale actie te definiëren maakt men gebruik van een Lagrange-multiplicator. Deze methode werkt slechts als alleen de veldsterktes en de afgeleiden van de potentialen in de Lagrangiaan voorkomen, maar niet de potentialen zelf.

Laten we bij wijze van voorbeeld, de Kalb-Ramond vorm dualiseren. Daartoe schrijven we een intermediaire actie op: deze is gelijk aan de gewone common sector actie plus een term met een Lagrange-multiplicator:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \sqrt{|\hat{g}|}e^{-2\hat{\phi}}\Big(\hat{R} - 4(\partial\hat{\phi})^2 + \frac{1}{12}(\hat{H}^{(3)})^2\Big) \\
&\quad + \frac{1}{3!\cdot 6!}\hat{\epsilon}\tilde{B}^{(6)}\partial\hat{H}^{(3)}.
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

Hierbij wordt het veld $\hat{H}^{(3)}$ niet langer als afgeleid van een potentiaal beschouwd, maar als een onafhankelijk veld. De bewegingsvergelijking van de Lagrange-multiplicator $\tilde{B}^{(6)}$ levert de Bianchi-identiteit van $\hat{H}^{(3)}$ en toont dus aan dat het een veldsterkte is. Toepassen van deze bewegingsvergelijking op de intermediaire actie resulteert in de gewone actie (2.41). De bewegingsvergelijking van $\hat{H}^{(3)}$ leidt tot de Hodge-dualiteitsregel tussen $\hat{H}^{(3)}$ en $\hat{H}^{(7)} = 7\partial\tilde{B}^{(6)}$:

$$
\begin{aligned}
\hat{H}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} &= -\frac{1}{7!}\frac{1}{\sqrt{|g|}}e^{2\hat{\phi}}\hat{\epsilon}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\lambda}_1\ldots\hat{\lambda}_7}\hat{H}^{(7)}{}_{\hat{\lambda}_1\ldots\hat{\lambda}_7}, \\
\hat{H}^{(7)} &= 7\partial\tilde{B}^{(6)}.
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

Deze invullen in de intermediaire actie levert de duale actie

$$
\mathcal{L} = \sqrt{|\hat{g}|}e^{-2\hat{\phi}}\Big(\hat{R} - 4(\partial\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2\cdot 7!}e^{4\hat{\phi}}(\hat{H}^{(7)})^2\Big). \tag{2.25}
$$

Merk op dat de duale veldsterkte een tegengestelde dilatonkoppeling heeft. Dit is in het algemeen zo.

2.2.2 On-shell dualisatie

In de formuleringen (2.10) van de massieve Type IIA en (2.5) van Type IIB komen enkel elekrische potentialen voor. Men spreekt dan ook van de elektrische formulering. De democratische formulering is equivalent aan de elektrische en bevat zowel elektrische als magnetische potentialen. Hierdoor lijkt het aantal vrijheidsgraden in de Lagrangiaan verdubbeld. De elektrische en magnetische potentialen zijn echter niet onafhankelijk. De Hodge-dualiteitsregels tussen de veldsterktes elimineren de overtollige vrijheidsgraden. Deze volgen niet uit de actie, maar moeten met de hand bij de bewegingsvergelijkingen gevoegd worden. Dit is volledig analoog aan de niet-zelfduale actie voor Type IIB. Daarom spreekt men ook van een pseudo-actie eerder dan van een actie.

De elektrische potentialen komen dus nog voor in de pseudo-actie, maar ook in de magnetische veldsterktes. Om naar deze gemengde vorm te komen gebruikt men de zogenaamde on-shell dualisatie. Deze onvolledige dualisatie leidt tot de gemengde vorm die men de democratische formulering noemt. On-shell dualisatie gebeurt via de bewegingsvergelijking in plaats van met behulp van een Lagrange-multiplicator. Men stelt de bewegingsvergelijking op van een veld, zeg van $\hat{C}^{(3)}$ uit de massieve Type IIA:

$$\begin{aligned} \sqrt{|\hat{g}|}\nabla_{\hat{\lambda}} G^{\hat{\lambda}\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} + \frac{1}{12}\hat{\epsilon}^{\hat{\lambda}\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\lambda}_1\ldots\hat{\lambda}_6}\partial_{\hat{\lambda}}\hat{C}^{(3)}{}_{\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_3}\partial_{\hat{\lambda}_4}\hat{B}_{\hat{\lambda}_5\hat{\lambda}_6} & \\ +\frac{m}{16}\hat{\epsilon}^{\hat{\lambda}\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\lambda}_1\ldots\hat{\lambda}_6}\partial_{\hat{\lambda}}\hat{B}_{\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2}\hat{B}_{\hat{\lambda}_3\hat{\lambda}_4}\hat{B}_{\hat{\lambda}_5\hat{\lambda}_6} & = 0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Deze kan geschreven worden als een Bianchi-identiteit van een duale veldsterkte:

$$\partial\Big(-\hat{G}^{(6)} - 60\partial\hat{B}\hat{C}^{(3)} + 15m\hat{B}\hat{B}\hat{B}\Big) \;=\; 0, \tag{2.27}$$

waarbij

$$\hat{G}^{(6)} \;=\; \frac{1}{4!}\frac{1}{\sqrt{|\hat{g}|}}\hat{\epsilon}\hat{G}^{(4)}. \tag{2.28}$$

Hieruit haalt men de duale veldsterkte als functie van de potentiaal:

$$\hat{G}^{(6)} \;=\; 6\partial\hat{C}^{(5)} - 60\partial\hat{B}\hat{C}^{(3)} + 15m\hat{B}\hat{B}\hat{B}. \tag{2.29}$$

Om tot een gemengde actie te komen vallen we terug op de gebruikelijke manier met een Lagrange-multiplicator. De intermediaire actie is echter zo gekozen dat de reeds gevonden dualiteitscondities eruit volgen. Voor de eenvoud nemen we alleen de velden mee die gedualiseerd worden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & -\sqrt{|\hat{g}|}\frac{1}{4\cdot 4!}(\hat{G}^{(4)})^2 - \frac{1}{2\cdot 144}\hat{\epsilon}\partial\hat{C}^{(3)}\partial\hat{C}^{(3)}\hat{B} \\ & -\frac{m}{2\cdot 288}\hat{\epsilon}\partial\hat{C}^{(3)}\hat{B}\hat{B}\hat{B} \\ & -\frac{1}{2\cdot 4!\cdot 5!}\hat{\epsilon}(\hat{C}^{(5)} - 10\hat{C}^{(3)}\hat{B})(\partial\hat{G}^{(4)} - 4\hat{H}\partial\hat{C}^{(1)} - 6m\partial\hat{B}\hat{B}). \end{aligned} \tag{2.30}$$

De bewegingsvergelijking van de Lagrange-multiplicator $\hat{C}^{(5)}$ geeft de Bianchi-identiteit van $\hat{G}^{(4)}$. Hier is slechts de helft van de Chern-Simons term meegenomen. Dat is niet de regel: de factor is steeds zo gekozen dat dezelfde dualiteitsconditie uit (2.30) volgt als uit de bewegingsvergelijking (2.27).

Invullen van de dualiteitsconditie (2.28) in de intermediaire actie levert een gedeelte van de gemengde actie:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}' \;=\;& -\sqrt{|\hat{g}|}\frac{1}{4\cdot 6!}(\hat{G}^{(6)})^2 + \frac{1}{2\cdot 144}\hat{\epsilon}\partial\hat{C}^{(3)}\partial\hat{C}^{(3)}B^{(2)} \\
& + \frac{m}{2\cdot 288}\hat{\epsilon}\partial\hat{C}^{(3)}\hat{B}\hat{B}\hat{B} + \frac{3}{4\cdot 4!\cdot 4!}m\hat{\epsilon}\partial\hat{C}^{(1)}\hat{B}\hat{B}\hat{B}\hat{B} \\
& - \frac{1}{4\cdot 5!}\hat{\epsilon}\partial\hat{C}^{(5)}\partial\hat{C}^{(1)}\hat{B} + \frac{3}{2\cdot 4!\cdot 5!}m\hat{\epsilon}\partial\hat{C}^{(5)}\hat{B}\hat{B} \\
& + \frac{15}{4\cdot 5!\cdot 5!}m^2\hat{\epsilon}\hat{B}\hat{B}\hat{B}\hat{B}\hat{B}.
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

Samen met het deel van de actie (2.10) dat niet opgenomen is in (2.30), vormt het een Lagrangiaan waarin $\hat{C}^{(3)}$ en zijn magnetische tegenhanger $\hat{C}^{(5)}$ hetzelfde gewicht krijgen. De Chern-Simons termen met $\partial\hat{C}^{(3)}$ zijn tegengesteld van teken in (2.31) als deze in het overblijvende deel, zodat zij eruit wegvallen:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\;& \sqrt{|\hat{g}|}\; e^{-2\hat{\phi}}\Big(\hat{R} - 4(\partial\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2\cdot 3!}\hat{H}^2\Big) \\
& -\sqrt{|\hat{g}|}\;\Big(\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2\cdot 2!}(\hat{G}^{(2)})^2 + \frac{1}{4\cdot 4!}(\hat{G}^{(4)})^2 + \frac{1}{4\cdot 6!}(\hat{G}^{(6)})^2\Big) \\
& + \frac{1}{4\cdot 5!}\hat{\epsilon}\partial\hat{C}^{(5)}\partial\hat{C}^{(1)}\hat{B} + \frac{3}{2\cdot 4!\cdot 5!}m\hat{\epsilon}\partial\hat{C}^{(5)}\hat{B}\hat{B} \\
& + \frac{3}{4\cdot 4!\cdot 4!}m\hat{\epsilon}\partial\hat{C}^{(1)}\hat{B}\hat{B}\hat{B}\hat{B} + \frac{6}{4\cdot 4!\cdot 5!}m^2\hat{\epsilon}\hat{B}\hat{B}\hat{B}\hat{B}\hat{B}.
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Deze vorm is goed om van te vertrekken voor de dualisatie van $\hat{C}^{(1)}$. Dat gebeurt volledig analoog. Eerst leidt men de Bianchi-identiteit van de duale veldsterkte af uit de bewegingsvergelijking. Deze bewegingsvergelijking kan men uit (2.32) verkrijgen, maar is eenvoudiger uit de gewone actie van de massieve Type IIA (2.10) af te leiden. De bewegingsvergelijkingen uit beide formuleringen zijn dezelfde. Dat moet ook zo, want de acties zijn equivalent. Om tot de juiste dualiteitsconditie te komen wordt nu de volledige Chern-Simons term meegenomen. Deze verdwijnt dan wanneer de dualiteitsconditie in de intermediaire actie ingevuld wordt.

De Chern-Simons termen verdwijnen alleen wanneer alle elektrische en de magnetische Ramond-Ramond potentialen met hetzelfde gewicht meegenomen worden. De massaparameter uit de massieve Type IIA geldt ook als een veldsterkte. Zowel bij de massieve Type IIA als bij Type IIB gaat dat vlot wanneer in volgorde van afnemende rang gedualiseerd wordt. De democratische acties zijn:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_A \;=\;& \sqrt{|\hat{g}|}\; e^{-2\hat{\phi}}\Big(\hat{R} - 4(\partial\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2\cdot 3!}\hat{H}^2\Big) \qquad (2.33)\\
& -\sqrt{|\hat{g}|}\;\Big(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4\cdot 2!}(\hat{G}^{(2)})^2 + \frac{1}{4\cdot 4!}(\hat{G}^{(4)})^2\\
& +\frac{1}{4\cdot 6!}(\hat{G}^{(6)})^2 + \frac{1}{4\cdot 8!}(\hat{G}^{(8)})^2 + \frac{1}{4\cdot 10!}(\hat{G}^{(10)})^2\Big),\\
\mathcal{L}_B \;=\;& \sqrt{|\hat{\jmath}|}\; e^{-2\hat{\varphi}}\Big(\hat{\mathcal{R}} - 4(\partial\hat{\varphi})^2 + \frac{1}{2\cdot 3!}\hat{\mathcal{H}}^2\Big) \qquad (2.34)\\
& +\sqrt{|\hat{\jmath}|}\;\Big(\frac{1}{4}(\hat{G}^{(1)})^2 + \frac{1}{4\cdot 3!}(\hat{G}^{(3)})^2\\
& +\frac{1}{4\cdot 5!}(\hat{G}^{(5)})^2 + \frac{1}{4\cdot 7!}(\hat{G}^{(7)})^2 + \frac{1}{4\cdot 9!}(\hat{G}^{(9)})^2\Big).
\end{aligned}
$$

Een andere opmerking is dat we de Kalb-Ramond veldsterkte $\hat{H}^{(3)}$ niet gedualiseerd hebben. De on-shell dualisatie is niet veel ingewikkelder dan die van de Ramond-Ramond vormen. Echter, wanneer men dit gaat combineren met T-dualiteit rijzen er problemen. Onder T-dualiteit gaat de veldsterkte $H^{(7)}$ namelijk naar een vorm die niet in de acties (2.10) of (2.5) staat. We raken dit aspect even aan in sectie 3.4.

De Ramond-Ramond veldsterktes zijn van dezelfde vorm. In het algemeen is de n-vorm veldsterkte gegeven door

$$\hat{G}^{(n)} = n\partial\hat{C}^{(n-1)} - \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)\partial\hat{B}\hat{C}^{(n-3)} + (n-1)!!\; m(\hat{B})^{n/2}. \qquad (2.35)$$

Hierbij worden termen slechts meegenomen als ze betekenisvol zijn. De laatste term geldt alleen voor mIIA, dus voor even veldsterktes. De factor $(n-1)!!$ betekent het product van de oneven getallen kleiner of gelijk aan $n-1$, waarbij $-1!! = 1$ gedefinieerd wordt. De macht van $\hat{B}$ duidt hier niet op een contractie maar op een antisymmetrisatie. Deze algemene vorm is de handigste vorm om later T-dualiteit op toe te passen. Dat is dan ook de reden voor on-shell dualisatie.

Ook de ijktransformaties zijn van dezelfde vorm. In vormnotatie is een algemene formule vrij direct. In componentnotatie, hetgeen we hier steeds gebruikten, echter niet.

$$
\begin{aligned}
\delta\hat{C}^{(n)} &= n\partial\hat{\Lambda}^{(n-1)} + \frac{n!}{2\cdot(n-3)!}\hat{B}\partial\hat{\Lambda}^{(n-3)} \\
&\quad + \frac{n!}{8\cdot(n-5)!}\hat{B}\hat{B}\partial\hat{\Lambda}^{(n-5)} + \frac{n!}{48\cdot(n-7)!}\hat{B}\hat{B}\hat{B}\partial\hat{\Lambda}^{(n-7)} \\
&\quad + \frac{n!}{384\cdot(n-9)!}\hat{B}\hat{B}\hat{B}\hat{B}\partial\hat{\Lambda}^{(n-9)} - n!!\ m\ (\hat{B})^{\frac{n-1}{2}}\hat{\Sigma}^{(1)}.
\end{aligned} \tag{2.36}
$$

2.3 Dimensionele reductie en T-dualiteit

Om goed te begrijpen waar T-dualiteit over gaat, is het principe van dimensionele reductie onmisbaar. De meeste snaartheorieën en supergravitatietheorieën leven in tien of elf dimensies. Daarvan is er één de tijd, de andere zijn allemaal ruimtelijk. De door ons waargenomen werkelijkheid telt echter maar drie ruimtelijke dimensies. Dit kan verschillende verklaringen hebben.

Eén is het idee van de "brane worlds". Ons heelal is dan slechts een vierdimensionale deelruimte (een braan) van een tien- of elfdimensionale wereld. Net zoals Suske en Wiske niet waarnemen dat er buiten hun tweedimensionale stripwereld een groter geheel bestaat, zo "zien" ook wij de extra dimensies niet. Het beste dat we voorlopig kunnen doen is ze onrechtstreeks vermoeden. Een probleem met de brane world is de gravitatie. In D dimensies heeft de gravitatiekracht een r^{-D+2} verloop. De r^{-2} afhankelijkheid die we hier meten wijst dus op een vierdimensionale wereld[4].

Een andere mogelijkheid is dat de extra dimensies niet "buiten" het heelal liggen, maar onwaarneembaar klein zijn. In plaats van uitgestrekt als een rechte, is zo'n dimensie compact als een cirkel. Als hij klein genoeg is lijkt het alsof hij niet bestaat. Het is mogelijk om een theorie met een compacte dimensie te beschrijven als een theorie met een dimensie minder. Deze procedure is dimensionele reductie. Wat de gravitatie betreft: hierbij zal zij de omgekeerde-kwadraatwet volgen voor lengteschalen groter dan die van de compacte dimensie, maar sneller afnemen op korte afstanden.

Dimensionele reductie heeft nog een ander effect dan alleen het verminderen van de dimensies. Eén enkel veld in de hoger-dimensionale theorie splitst zich op in meerdere componenten in de lager-dimensionale theorie. Zo heeft een hoger-dimensionale theorie een unificerend karakter.

2.3.1 Kaluza-Klein reductie

Dimensionele reductie werd het eerst voorgesteld door Kaluza en Klein [10]. Zij wilden namelijk de gravitatie en het elektromagnetisme samenbrengen in één tensor. Daartoe stelden zij een vijfdimensionale metriek voor. Door het reduceren naar vier dimensies breekt deze tensor op in een vierdimensionale metriek, een vector en een scalar. Het bestaan veronderstellen van een extra dimensie leek toen nogal ad hoc, maar het was vooral de niet geïnterpreteerde scalar die kritiek uitlokte.

[4] Een uitzondering is de theorie van Randall en Sundrum[9], waarbij een r^{-2} verloop gevonden wordt terwijl het aantal dimensies vijf is.

Het idee van de extra dimensies is – door stringtheoreten althans – ondertussen aanvaard. De scalar blijkt samen te hangen met de grootte van de cirkel waarover gecompactificeerd wordt. Kaluza-Klein reductie is een probaat middel geworden om de tien- of elfdimensionale wereld van de snaren en de supergravitatie in verband te brengen met de door ons gekende vier dimensies.

Het principe van Kaluza-Klein reductie is vrij eenvoudig. Laten we het illustreren aan de hand van een massaloos, scalair veld $\hat{\phi}(\hat{x}^{\hat{\mu}})$. De vergelijking van dat veld is:

$$\partial_{\hat{\mu}}\partial^{\hat{\mu}}\hat{\phi}(\hat{x}) = 0. \tag{2.37}$$

De coördinaten $\hat{x}^{\hat{\mu}}$ splitsen we op in negen "gewone" coördinaten x^{μ} en de coördinaat van de compacte richting x:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\hat{x}) &= \hat{\phi}(x^{\mu}, x), \\ \partial_{\hat{\mu}}\partial^{\hat{\mu}}\hat{\phi}(x^{\mu}, x) &= \partial_{\mu}\partial^{\mu}\hat{\phi}(x^{\mu}, x) + \partial_x\partial^x\hat{\phi}(x^{\mu}, x). \end{aligned} \tag{2.38}$$

De x-richting is compact, dus het veld kan daarlangs in Fouriercomponenten ontwikkeld worden:

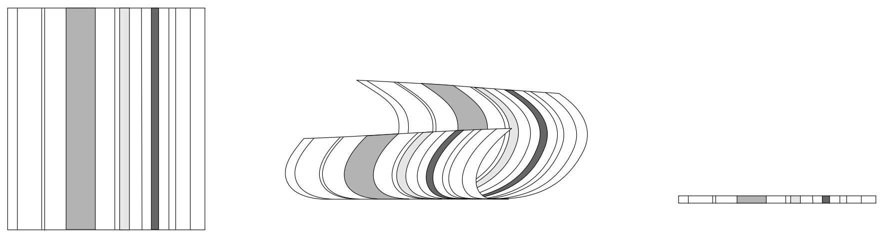
$$\hat{\phi}(x^{\mu}, x) = \sum \phi_n(x^{\mu})e^{\frac{\imath nx}{R}}, \tag{2.39}$$

waarbij R de straal van de compacte richting is. De Fouriermodes ϕ_n hangen slechts af van de niet-gecompactificeerde richtingen en zijn dus objecten in de lagere dimensie. De bewegingsvergelijking wordt dan

$$\sum(\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi_n(x^{\mu}) - \frac{n^2}{R^2}\phi_n)e^{\frac{\imath nx}{R}} = 0. \tag{2.40}$$

Deze som kan slechts nul zijn als elke term nul is. Elke term afzonderlijk is de Klein-Gordon vergelijking voor een massief deeltje met massa $m = \frac{|n|}{R}$. Compactificatie resulteert dus in een oneindige reeks massieve modes, die Kaluza-Klein modes genoemd worden. Nu koppelt de nulde mode niet aan de massieve modes, dus men kan na deze mode trunceren. Dit komt overeen met een isometrie langs de compacte dimensie.

Als men meerdere richtingen tegelijk compactificeert, kan men dat even goed over een bol doen als over een torus, of welk oppervlak dan ook. Voor compactificatie over iets anders dan een torus is het echter nog niet duidelijk of de truncatie naar een massaloze theorie consistent is. Naargelang het gekozen oppervlak worden de procedure en de uiteindelijke resultaten meer of minder ingewikkeld. Wij houden het bij het reduceren van één dimensie



Figuur 2.1: Een intuïtief beeld van compactificatie. Een tweedimensionaal veld met een isometrie wordt opgerold. Van ver bekeken lijkt er maar één dimensie te zijn.

over een cirkel. Deze speciale dimensie zullen we voortaan aanduiden met de index x.

Laten we, bij wijze van voorbeeld, de common sector actie reduceren:

$$\mathcal{L}_{10} = \sqrt{|\hat{g}|}e^{-2\hat{\phi}}\Big(\hat{R} - 4(\partial\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2\cdot 3!}\hat{H}^2\Big). \tag{2.41}$$

Beschouw hoe de componenten van de metriek zich gedragen onder tiendimensionale algemene coördinatentransformaties met parameter $\hat{\xi}$. Net zoals de metriek zelf wordt deze parameter onafhankelijk gesteld van de tiende dimensie x.

$$\begin{aligned} \delta_{10}\ \hat{g}_{xx} &= \hat{\xi}^{\hat{\lambda}}\partial_{\hat{\lambda}}\hat{g}_{xx} + \partial_x\hat{\xi}^{\hat{\lambda}}\hat{g}_{\hat{\lambda}x} + \partial_x\hat{\xi}^{\hat{\lambda}}\hat{g}_{x\hat{\lambda}} \\ &= \hat{\xi}^{\lambda}\partial_{\lambda}\hat{g}_{xx}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

$\hat{g}_{xx}$ transformeert als een negendimensionale scalar, waarbij $\hat{\xi}^{\lambda}$ kan gezien worden als de parameter van een negendimensionale coördinatentransformatie. We kunnen dus stellen:

$$\begin{aligned} \hat{g}_{xx} &= -k^2, \\ \hat{\xi}^{\lambda} &= \xi^{\lambda}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Het minteken en het kwadraat is zo gekozen om praktische redenen. We zullen namelijk vaker $\sqrt{-\hat{g}_{xx}} = k$ nodig hebben. Wanneer men hetzelfde probeert met $\hat{g}_{\mu x}$, blijkt dat deze componenten niet transformeren als een vector

$$\delta_{10}\ \hat{g}_{\mu x} = \hat{\xi}^{\lambda}\partial_{\lambda}\hat{g}_{\mu x} + \partial_{\mu}\hat{\xi}^{\lambda}\hat{g}_{\lambda x} + \partial_{\mu}\hat{\xi}^{x}\hat{g}_{xx}. \tag{2.44}$$

De laatste term lijkt op een ijkvariatie, zonder de $\hat{g}_{xx}$ tenminste. De component $\hat{\xi}^x$ van de parameter voor coördinatentranformatie wordt in negen dimensies dan een parameter voor ijktransformaties. Men stelt dus

$$\begin{aligned} \frac{\hat{g}_{\mu x}}{\hat{g}_{xx}} &= A_\mu, \\ \hat{\xi}^x &= \xi. \end{aligned} \tag{2.45}$$

De tiendimensionale coördinatentransformatie splitst dus op in een negendimensionale coördinatentransformatie en een ijktransformatie:

$$\begin{aligned} \delta_{10} A_\mu &= \xi^\lambda \partial_\lambda A_\mu + \partial_\mu \xi^\lambda A_\lambda + \partial_\mu \xi \\ &= \delta_9 A_\mu + \delta_{ijk} A_\mu. \end{aligned} \tag{2.46}$$

De vector A die uit de metriek volgt noemt men de Kaluza-Klein vector. De ijktransformatie doet denken aan een Maxwell-veld. Daarom wordt deze vector geïnterpreteerd als de elektromagnetische potentiaal. Ook bij de componenten $\hat{g}_{\mu\nu}$ zijn correctietermen nodig. De negendimensionale metriek moet immers transformeren als een tensor.

Het is handiger om de tiendimensionale velden te schrijven in functie van de negendimensionale. Voor de metriek geeft dat

$$\begin{aligned} \hat{g}_{xx} &= -k^2, \\ \hat{g}_{\mu x} &= -k^2 A_\mu, \\ \hat{g}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - k^2 A_\mu A_\nu. \end{aligned} \tag{2.47}$$

De reductie van de metriek is ook te beschrijven als een reductie van het Vielbein $\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{A}}$. Een Vielbein is - intuïtief gesproken - een coördinatentransformatie in de raakruimte waar de velden leven. Het transformeert de "gekromde" coördinaten (de afgeleiden naar de coördinaten in de variëteit zelf) in "vlakke" coördinaten, een orthonormaal assenstelsel in de raakruimte. Hierdoor bepaalt het Vielbein de metriek en omgekeerd. Het meet hoezeer de metriek lokaal afwijkt van een vlakke Minkowski-metriek:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{A}} \hat{e}_{\hat{\nu}}{}^{\hat{B}} \hat{\eta}_{\hat{A}\hat{B}} \tag{2.48}$$

In de tiendimensionale ruimte kan men de orthogonale basis steeds zo kiezen dat de reductie gegeven wordt door

$$\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{A}} = \begin{pmatrix} e_\mu{}^A & k A_\mu \\ 0 & k \end{pmatrix}. \tag{2.49}$$

Samen met (2.48) geeft deze reductie opnieuw de reductieregels van de metriek (2.47).

Hiermee is de reductie van $\sqrt{|\hat{g}|}$ bepaald:

$$\sqrt{|\hat{g}|} \quad = \quad k\sqrt{|g|} \tag{2.50}$$

De reductie van de Ricci scalar $\hat{R}$ volgt uit de reductieregels van de metriek. De berekening is vrij lang, maar rechttoe-rechtaan. De Ricci scalar reduceert naar een Ricci scalar en kinetische termen voor de Kaluza-Klein vector en scalar:

$$\hat{R} \quad = \quad R + \frac{2}{k}\nabla_\lambda \partial^\lambda k - \frac{1}{4}k^2 F^2(A), \tag{2.51}$$

waarbij

$$F(A) \quad = \quad 2\partial A. \tag{2.52}$$

De reductie van het axion wordt bepaald door het gedrag onder algemene coördinatentransformaties, net zoals bij de metriek:

$$\begin{aligned} \delta_{10}\hat{B}_{\mu x} &= \xi^\lambda \partial_\lambda \hat{B}_{\mu x} + \partial_\mu \xi^\lambda \hat{B}_{\lambda x}, \\ \delta_{10}\hat{B}_{\mu\nu} &= \xi^\lambda \partial_\lambda \hat{B}_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi^\lambda \hat{B}_{\lambda\nu} + \partial_\nu \xi^\lambda \hat{B}_{\mu\lambda} + \partial_\mu \xi \hat{B}_{x\nu} + \partial_\nu \xi \hat{B}_{\mu x}. \end{aligned} \tag{2.53}$$

De componenten transformeren als een vector en een tensor. De transformatie met $\partial\xi$ kan men interpreteren als een ijktransformatie. Men kan deze met behulp van een extra term $A_{[\mu}B^{(1)}{}_{\nu]}$ wegwerken. Om later de T-dualiteit aan te tonen is het echter handiger slechts de helft te elimineren. Dan worden de rollen van A en $B^{(1)}$ namelijk symmetrisch in de ijktransformatie en in de veldsterkte. Daarom stelt men deze reductieregels voor:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{\mu x} &= B^{(1)}{}_\mu, \\ \hat{B}_{\mu\nu} &= B^{(2)}{}_{\mu\nu} - A_{[\mu}B^{(1)}{}_{\nu]}. \end{aligned} \tag{2.54}$$

De ijktransformaties van deze velden zijn de reductie van de ijktransformatie van $\hat{B}$ en van de coördinatentransformatie in de x-richting.

$$\begin{aligned} \delta B^{(1)}{}_\mu &= 2\partial_{[\mu}\hat{\Sigma}^{(1)}{}_{x]} = \partial_\mu \Sigma^{(0)} \\ \delta B^{(2)}{}_{\mu\nu} &= 2\partial_{[\mu}\Sigma^{(1)}{}_{\nu]} + A_{[\mu}\partial_{\nu]}\Sigma^{(0)} + B^{(1)}{}_{[\mu}\partial_{\nu]}\xi. \end{aligned} \tag{2.55}$$

De reductie van de veldsterktes wordt het eenvoudigst gedefinieerd in vlakke indices. Dan zijn de negendimensionale veldsterktes gewoon gelijk aan de componenten van de tiendimensionale veldsterktes. Als de veldsterktes zo gedefinieerd worden zijn ze invariant onder de ijktransformaties.

$$\begin{aligned}\hat{H}_{ABX} &= F_{AB}(B), \\ \hat{H}_{ABC} &= H_{ABC}(B).\end{aligned} \tag{2.56}$$

Deze regels kan men met behulp van Vielbeins omzetten naar gekromde coördinaten.

$$\begin{aligned}\hat{H}_{ABX} &= \hat{e}_A{}^\mu \hat{e}_B{}^\nu \hat{e}_X{}^x (3\partial_{[\mu}\hat{B}_{\nu x]}) \\ &= e_A{}^\mu e_B{}^\nu k^{-1}(2\partial_{[\mu}B^{(1)}{}_{\nu]}), \\ \hat{H}_{ABC} &= \hat{e}_A{}^\mu \hat{e}_B{}^\nu \hat{e}_C{}^\rho (3\partial_{[\mu}\hat{B}_{\nu\rho]} - 3A_{[\mu}(2\partial_\nu B^{(1)}{}_{\rho]})) \\ &= e_A{}^\mu e_B{}^\nu e_C{}^\rho (3\partial_{[\mu}B^{(2)}{}_{\nu\rho]} - 3A_{[\mu}\partial_\nu B^{(1)}{}_{\rho]} - 3B^{(1)}{}_{[\mu}\partial_\nu A_{\rho]}).\end{aligned} \tag{2.57}$$

Dit geeft de veldsterktes $F(B)$ en H in functie van de potentialen:

$$\begin{aligned}F(B) &= 2\partial B^{(1)}, \\ H &= 3\partial B^{(2)} - 3A\partial B^{(1)} - 3B^{(1)}\partial A.\end{aligned} \tag{2.58}$$

Merk op dat de reductieregel (2.54) inderdaad aanleiding geeft tot een veldsterkte symmetrisch in A en $B^{(1)}$.
De reductieregel van het dilaton is zo gekozen opdat de negendimensionale common sector geen factor k bij de metriek zou krijgen. Die factor komt er door de reductie van $\sqrt{|\hat{g}|}$ en van:

$$\hat{\phi} = \phi + \frac{1}{2}\log k. \tag{2.59}$$

Wanneer deze vergelijkingen bijeen gevoegd worden, bekomt men, na partiële integratie:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_9 &= \sqrt{|g|}e^{-2\phi}\Big(R - 4(\partial\phi)^2 + (\partial \log k)^2 + \frac{1}{12}H^2 \\ &\quad -\frac{1}{4}k^2F^2(A) - \frac{1}{4}k^{-2}F^2(B)\Big).\end{aligned} \tag{2.60}$$

De veldinhoud van deze actie en de relatieve factoren zijn dus bepaald uit de reductie. Men kan evenwel meerdere negendimensionale acties opschrijven, maar slechts deze is de dimensionele reductie van een tiendimensionale actie. De veldsterktes zijn gegeven door (2.52) en (2.58). Zij zijn invariant onder de volgende ijktransformaties:

$$\begin{aligned}\delta A &= \partial\xi, \\ \delta B^{(1)} &= \partial\Sigma^{(0)}, \\ \delta B^{(2)} &= 2\partial\Sigma^{(1)} + A^{(1)}\partial\Sigma^{(0)} + B^{(1)}\partial\xi.\end{aligned} \tag{2.61}$$

2.3.2 T-dualiteit

De negendimensionale common sector (2.60) is invariant voor $O(1,1)$ transformaties, zoals we hier zullen zien. Een referentie voor de algemenere $O(d,d)$ invariantie vindt men in [11]. De negendimensionale common sector kan men dan herschrijven in een manifest invariante vorm:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_9 &= \sqrt{|g|}e^{2\phi}\Big(R - 4(\partial\phi)^2 - \frac{1}{8}(\partial M)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{i} M^{-1}{}_{ij}\mathcal{F}^{\mu\nu\ j} + \frac{1}{12}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}\Big). \end{aligned} \tag{2.62}$$

Hierbij is

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} A \\ B^{(1)} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{F} &= 2\partial\mathcal{A}, \\ M &= \begin{pmatrix} -k^{-2} & 0 \\ 0 & -k^{2} \end{pmatrix}, \\ H_{\mu\nu\rho} &= 3\partial_{[\mu}B_{\nu\rho]} + 3\mathcal{F}_{[\mu\nu}{}^{i}\mathcal{A}_{\rho]}{}^{j}\eta_{ij}. \end{aligned} \tag{2.63}$$

De indices i tot l zijn $O(1,1)$-indices, terwijl de andere de Lorentz-indices zijn. De vectoren A en $B^{(1)}$ vormen een doublet en de Kaluza-Klein scalar k parametriseert een $O(1,1)$-matrix. Dat de actie inderdaad invariant is volgt eenvoudig uit het feit dat

$$\Lambda\eta_2\Lambda = \eta_2 \tag{2.64}$$

voor elke $O(1,1)$-transformatie Λ. η_2 stelt de metriek van de $O(1,1)$-groep voor:

$$\eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De groep $O(1,1)$ valt uiteen in drie delen:

$$\begin{aligned} O(1,1) &= Grp\Big(\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} |\lambda \in \mathbb{R}\}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Big) \\ &= SO^{+}(1,1) \times \mathbb{Z}_2{}^{(T)} \times \mathbb{Z}_2{}^{(S)}. \end{aligned} \tag{2.65}$$

De groep $SO^{+}(1,1)$ wijzigt A, $B^{(1)}$ en k met een factor. In tien dimensies komt dit overeen met een coördinatentransformatie, meer bepaald een dilatatie in de tiende dimensie. Duiden we deze transformatie met parameter

λ aan als Λ, dan transformeren de coördinaten als volgt:

$$\begin{aligned} \Lambda\, x^\mu &= x^\mu, \\ \Lambda\, x &= \lambda x. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Analoog heeft $\mathbb{Z}_2^{(S)}$ een interpretatie als tiendimensionale coördinatentransformatie, zeg S. Het voegt een minteken toe aan de x-coördinaat en is een spiegeling:

$$\begin{aligned} S\, x^\mu &= x^\mu, \\ S\, x &= -x. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Daarentegen heeft $\mathbb{Z}_2^{(T)}$ geen interpretatie als coördinatentransformatie in de tiende dimensie. Deze transformatie verwisselt A met B en k met k^{-1}:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B^{(1)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ A \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k^{-2} & 0 \\ 0 & -k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -k^2 & 0 \\ 0 & -k^{-2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Deze opsplitsing van de T-dualiteitsgroep in coördinatentransformaties en de werkelijke T-dualiteitstransformaties is voorgesteld in [12].

In tien dimensies zijn het stukken uit de metriek en uit het axion die verwisseld worden. Dit noemt men T-dualiteit. De componenten van de metriek transformeren aldus:

$$\begin{aligned} \hat{g}'_{xx} &= \frac{1}{\hat{g}_{xx}}, \\ \hat{g}'_{\mu x} &= \frac{\hat{B}_{\mu x}}{\hat{g}_{xx}}, \\ \hat{g}'_{\mu\nu} &= \hat{g}_{\mu\nu} - \frac{\hat{g}_{\mu x}\hat{g}_{\nu x}}{\hat{g}_{xx}} + \frac{\hat{B}_{\mu x}\hat{B}_{\nu x}}{\hat{g}_{xx}}. \end{aligned} \tag{2.69}$$

De Kalb-Ramond vorm heeft deze transformatieregels:

$$\begin{aligned} \hat{B}'_{\mu x} &= \frac{\hat{g}_{\mu x}}{\hat{g}_{xx}}, \\ \hat{B}'_{\mu\nu} &= \hat{B}_{\mu\nu} - 2\frac{\hat{B}_{[\mu|x|}\hat{g}_{\nu]x}}{\hat{g}_{xx}}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

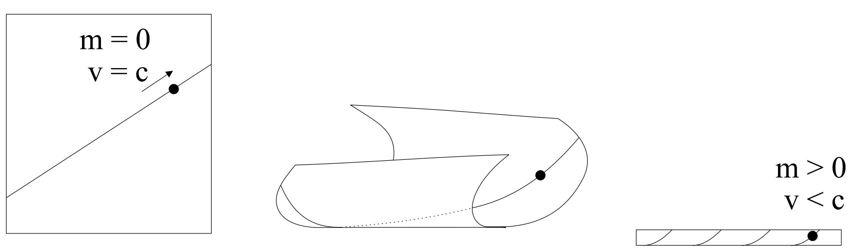
Het dilaton krijgt een correctie vanuit de metriek:

$$\hat{\phi}' = \hat{\phi} - \frac{1}{2}\log|\hat{g}_{xx}|. \tag{2.71}$$

Voor een algemene tiendimensionale common sector is zo'n symmetrie helemaal niet evident. Sterker: hij is er niet. De T-dualiteitsrelatie kan slechts onder dezelfde voorwaarden als dimensionele reductie. Er moet een isometrie zijn. Maar zelfs met een isometrie is de symmetrie niet direct zichtbaar. Kortom, de T-dualiteitsrelaties mogen er in tien dimensies ingewikkeld uitzien, in essentie is het een dimensionele reductie en weer decompactificeren op een andere manier. Fysisch komt het overeen met het verwisselen van een grote met een kleine lengteschaal: $k = \sqrt{|\hat{g}_{xx}|}$ staat immers in verband met de straal van de compacte dimensie.

2.3.3 Scherk-Schwarz reductie

Een andere techniek die we zullen gebruiken is de Scherk-Schwarz reductie [13]. Net zoals bij Kaluza en Klein gaat het hier om dimensioneel reduceren. Er is echter een belangrijk verschil: sommige velden worden niet onafhankelijk van de extra dimensie verondersteld. Meer bepaald hebben zij een lineaire x-afhankelijkheid. Die zorgt ervoor dat de gereduceerde velden massief worden. We zullen deze reductie gebruiken om veralgemeende T-dualiteitsregels op te stellen tussen de massieve IIA en de massaloze IIB. De eerste gaat via Kaluza-Klein reductie naar een massieve Type II, de andere krijgt massa door een welgekozen Scherk-Schwarz reductie.



Figuur 2.2: Massa via dimensionele reductie

De tekening 2.2 geeft een intuïtief beeld van hoe een deeltje massa kan verkrijgen door dimensionele reductie. Een massaloos deeltje beweegt aan lichtsnelheid over een tweedimensionaal vlak. Na compactificatie volgt het deeltje, nog steeds aan lichtsnelheid, een spiraalvormige baan. De component van de snelheid langs de compacte dimensie is niet nul, zodat de component langs de uitgestrekte dimensie lager is dan die van het licht. Van veraf bekeken lijkt het deeltje langs een lijn te bewegen met een snelheid lager dan die van het licht. Het deeltje is massief.

In de veldentheorie is dit beeld niet echt geschikt. Wat er in feite gebeurt is een Kaluza-Klein reductie, waarbij de massieve Kaluza-Klein modes zo gekozen worden dat ze de Fourierexpansie van een lineaire functie vormen. Ook dit is een consistente truncatie. Laten we door middel van een voorbeeld de minder plastische, maar praktische werkwijze tonen. Het veld $\hat{C}^{(0)}$ uit Type IIB wordt van x afhankelijk gesteld. Het negendimensionale veld $C^{(0)}$ kan niet afhangen van de tiende dimensie, dus de reductieregel is van de volgende vorm:

$$\hat{C}^{(0)} = C^{(0)} + f(x). \tag{2.72}$$

$\hat{C}^{(0)}$ transformeert als een scalar onder algemene coördinatentransformaties. $C^{(0)}$ moet dit ook doen, en de coördinatentransformatie in de tiende dimensie wordt een ijktransformatie. Dit was al zo bij de Kaluza-Klein vector, maar hier geeft het een voorwaarde op $f(x)$:

$$\begin{aligned} \delta\hat{C}^{(0)} &= \hat{\xi}^{\mu}\partial_{\mu}\hat{C}^{(0)} + \hat{\xi}^{x}\partial_{x}\hat{C}^{(0)} \\ &= \xi^{\mu}\partial_{\mu}C^{(0)} + \xi\partial_{x}f(x). \end{aligned} \tag{2.73}$$

De functie $f(x)$ moet lineair zijn, opdat de laatste term niet zou afhangen van x. Stel dus $f(x) = -mx$. De ijktransformatie van $C^{(0)}$ is

$$\delta C^{(0)} = m\Sigma^{(0)}. \tag{2.74}$$

Dit is een negendimensionale Stückelbergtransformatie, want $\Sigma^{(0)}$ is parameter van de ijktransformatie van $B^{(1)}$. Zo zal $B^{(1)}$ massief worden. Dit is volledig analoog aan de werkwijze uit sectie 2.1.3 voor de massieve uitbreiding van Type IIA. De veldsterkte $G^{(1)}$ heeft een massieve correctie

$$G^{(1)} = \partial C^{(0)} + mB^{(1)}. \tag{2.75}$$

De kinetische term reduceert tot twee termen omdat de afgeleide naar x niet nul is:

$$(\hat{G}^{(1)})^2 = \hat{G}_{\mu}\hat{G}^{\mu} + \hat{G}_{x}\hat{G}^{x} = (G^{(1)})^2 - k^2m^2. \tag{2.76}$$

Hoofdstuk 3

Resultaten

We hebben nu alle concepten en technieken die nodig zijn. Het uiteindelijke werk is een kwestie van deze goed te combineren en uit te zoeken hoe ze zich tegenover elkaar gedragen. Als eerste zullen we de velden en de acties (2.3) en (2.5) van Type IIA en Type IIB dimensioneel reduceren. Het verband tussen de reducties leidt tot de T-dualiteit. Vervolgens breiden we uit naar de massieve T-dualiteit tussen de massieve Type IIA (2.10) en Type IIB (2.5). Daartoe gebruiken we Scherk-Schwarz reductie voor het reduceren van Type IIB. In de derde stap komen we tot de T-dualiteit in de democratische formulering.

Tenslotte gaan we in op enkele verwante kwesties. De ene is de Hodge-duale van de Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz veldsterkte $\hat{H}^{(3)}$ en wat deze vorm geeft bij dimensionele reductie. In het andere deel bekijken we even de elfdimensionale origine van Type IIA.

3.1 T-dualiteit tussen Type IIA en Type IIB

In sectie 2.3.2 zagen we T-dualiteit als een symmetrie binnen één actie. Het kan echter ook zijn dat twee verschillende acties T-duaal zijn. De Lagrangiaan van Type IIA wordt door T-dualiteit getransformeerd in een Type IIB. Deze relatie werd aangetoond door Bergshoeff, Hull en Ortín [14].

3.1.1 Dimensionele reductie

Als er T-dualiteit is tussen Type IIA en Type IIB, dan moeten de twee theorieën naar dezelfde negendimensionale theorie reduceren. Met "dezelfde" bedoelt men: op namen van velden na. De common sector hebben we reeds

gereduceerd in sectie 2.3.1.
Wat dus nog rest is de reductie van de Ramond-Ramond potentialen en veldsterktes, en dit voor Type IIA zowel als voor Type IIB. Voor Type IIA hebben we

$$\begin{aligned}
\hat{C}^{(1)}{}_x &= C^{(0)}, \\
\hat{C}^{(1)}{}_\mu &= C^{(1)}{}_\mu + A_\mu C^{(0)}, \\
\hat{C}^{(3)}{}_{\mu\nu x} &= C^{(2)}{}_{\mu\nu}, \\
\hat{C}^{(3)}{}_{\mu\nu\rho} &= C^{(3)}{}_{\mu\nu\rho} + 3A_{[\mu}C^{(2)}{}_{\nu\rho]}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

De correctietermen met A zijn zo gekozen, dat de negendimensionale velden geen ijktransformatie met parameter ξ hebben. Dit is volledig analoog aan de reductie van de Kalb-Ramond vorm (2.54). Terwijl daar het doel een symmetrische ijktransformatie was, wordt hier de transformatie met $\partial\xi$ volledig geëlimineerd. De veldsterktes hebben in vlakke coördinaten een eenvoudige reductieregel:

$$\begin{aligned}
\hat{G}^{(2n)}{}_{A_1\ldots A_{2n-1}X} &= k^{-1}G^{(2n-1)}{}_{A_1\ldots A_{2n-1}}, \\
\hat{G}^{(2n)}{}_{A_1\ldots A_{2n}} &= G^{(2n)}{}_{A_1\ldots A_{2n}}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

De ijktransformaties van de Ramond-Ramond velden reduceren als volgt:

$$\begin{aligned}
\hat{\Lambda}^{(2n)}{}_{\mu_1\ldots\mu_{2n-1}x} &= \Lambda^{(2n-1)}{}_{\mu_1\ldots\mu_{2n-1}}, \\
\hat{\Lambda}^{(2n)}{}_{\mu_1\ldots\mu_{2n}} &= \Lambda^{(2n)}{}_{\mu_1\ldots\mu_{2n}}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

De negendimensionale actie die uit de reductie volgt, noemt men Type II:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = {} & \sqrt{|g|}e^{-2\phi}\Big(R - 4(\partial\phi)^2 + (\partial\log k)^2 + \frac{1}{2\cdot 3!}H^2 \\
& -\frac{1}{4}k^2F^2(A) - \frac{1}{4}k^{-2}F^2(B)\Big) \\
& +\sqrt{|g|}\Big(\frac{k^{-1}}{2}(G^{(1)})^2 - \frac{k}{2\cdot 2!}(G^{(2)})^2 + \frac{k^{-1}}{2\cdot 3!}(G^{(3)})^2 - \frac{k}{2\cdot 4!}(G^{(4)})^2\Big) \\
& -\frac{1}{72}\,\epsilon\,\Big(\partial C^{(3)}\partial C^{(3)}B^{(1)} + 3\partial C^{(3)}\partial C^{(2)}(B^{(2)} + AB^{(1)}) \\
& +6\partial A\ \partial C^{(3)}C^{(2)}B^{(1)} + 9\partial A\ \partial C^{(2)}C^{(2)}(B^{(2)} + AB^{(1)}) \\
& +9\partial A\ \partial A\ C^{(2)}C^{(2)}B^{(1)}\Big).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Hierbij zijn de Ramond-Ramond veldsterktes gedefinieerd door

$$\begin{aligned} G^{(1)} &= \partial C^{(0)}, \\ G^{(2)} &= 2\partial C^{(1)} + F(A)C^{(0)}, \\ G^{(3)} &= 3\partial C^{(2)} + 3F(B)C^{(1)} - HC^{(0)}, \\ G^{(4)} &= 4\partial C^{(3)} + 6F(A)C^{(2)} - 4HC^{(1)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Deze veldsterktes, zowel als de Lagrangiaan zijn invariant onder de volgende ijktransformaties. Deze ijktransformaties zijn de reductie van de tiendimensionale ijktransformaties:

$$\begin{aligned} \delta C^{(0)} &= 0, \\ \delta C^{(1)} &= \partial\Lambda^{(0)}, \\ \delta C^{(2)} &= 2\partial\Lambda^{(1)} - 2B^{(1)}\partial\Lambda^{(0)}, \\ \delta C^{(3)} &= 3\partial\Lambda^{(2)} - 6A\partial\Lambda_1 + 3(B^{(2)} + AB^{(1)})\partial\Lambda^{(0)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Voor de common sector van Type IIB kunnen we dezelfde reductieregels gebruiken als in 2.3.1. We kunnen echter ook de naamsverandering van velden anticiperen. In feite integreren we de T-dualiteitstransformatie (2.68) in de reductieregels. Laten we de Kaluza-Klein vector $B^{(1)}$ noemen in plaats van A. De vector uit de Kalb-Ramond vorm, $B^{(1)}$, wordt A. De Kaluza-Klein scalar heet nu k^{-2}. Met de zo gewijzigde reductieregels zal de Type IIB reduceren naar Type II (3.4), zonder dat er nadien een naamsverandering nodig is. De reductieregels voor de metriek zien er dan als volgt uit:

$$\begin{aligned} \hat{\jmath}_{xx} &= -k^{-2}, \\ \hat{\jmath}_{\mu x} &= -k^{-2}B^{(1)}{}_{\mu}, \\ \hat{\jmath}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - k^{-2}B^{(1)}{}_{\mu}B^{(1)}{}_{\nu}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Deze van de Kalb-Ramond vorm veranderen analoog:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{B}}_{\mu x} &= A_{\mu}, \\ \hat{\mathcal{B}}_{\mu\nu} &= B^{(2)}{}_{\mu\nu} - B^{(1)}{}_{[\mu}A_{\nu]}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Daarmee zijn de negendimensionale veldsterktes en ijkvariaties dezelfde als (2.52) en (2.58).

Tenslotte zal de term met $\log k$ bij het dilaton van teken veranderen:

$$\hat{\varphi} = \phi - \frac{1}{2}\log k. \tag{3.9}$$

In vergelijking met Type IIA zullen de parameters van de ijkvariaties ook andere namen krijgen. Deze zijn zo gekozen dat A zal varieren met $\partial\xi$ en $B^{(1)}$ met $\partial\Sigma^{(0)}$:

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}^{(1)}{}_x &= \xi, \\ \hat{\Sigma}^{(1)}{}_\mu &= \Sigma^{(1)}{}_\mu.\end{aligned} \tag{3.10}$$

De parameter van de coördinatentransformatie in de x-richting noemen we hier $\Sigma^{(0)}$.

De reductieregels voor de Ramond-Ramond vormen, hun veldsterktes en ijktransformaties zijn erg gelijklopend aan die uit Type IIA. In feite zijn ze, op de verwisseling van A en $B^{(1)}$ na, van volledig dezelfde vorm:

$$\begin{aligned}\hat{C}^{(0)} &= C^{(0)}, \\ \hat{C}^{(2)}{}_{\mu x} &= -C^{(1)}{}_\mu, \\ \hat{C}^{(2)}{}_{\mu\nu} &= C^{(2)}{}_{\mu\nu} + 2B^{(1)}{}_{[\mu}C^{(1)}{}_{\nu]}, \\ \hat{C}^{(4)}{}_{\mu\nu\rho x} &= -C^{(3)}{}_{\mu\nu\rho}, \\ \hat{C}^{(4)}{}_{\mu\nu\rho\sigma} &= C^{(4)}{}_{\mu\nu\rho\sigma} + 4B^{(1)}{}_{[\mu}C^{(3)}{}_{\nu\rho\sigma]};\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\hat{G}^{(2n+1)}{}_{A_1\ldots A_{2n}X} &= -kG^{(2n)}{}_{A_1\ldots A_{2n}}, \\ \hat{G}^{(2n+1)}{}_{A_1\ldots A_{2n+1}} &= G^{(2n+1)}{}_{A_1\ldots A_{2n+1}}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}^{(2n)}{}_{\mu_1\ldots\mu_{2n-1}x} &= \Lambda^{(2n-1)}{}_{\mu_1\ldots\mu_{2n-1}}, \\ \hat{\Lambda}^{(2n)}{}_{\mu_1\ldots\mu_{2n}} &= \Lambda^{(2n)}{}_{\mu_1\ldots\mu_{2n}}.\end{aligned}$$

Wanneer deze regels gecombineerd worden, bekomt men de volgende actie:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \quad = \quad & \sqrt{|g|}e^{-2\phi}\Big(R - 4(\partial\phi)^2 + (\partial \log k)^2 + \frac{1}{2\cdot 3!}H^2 \\
& -\frac{1}{4}k^2F^2(A) - \frac{1}{4}k^{-2}F^2(B)\Big) \\
& +\sqrt{|g|}\Big(\frac{k^{-1}}{2}(G^{(1)})^2 - \frac{k}{2\cdot 2!}(G^{(2)})^2 + \frac{k^{-1}}{2\cdot 3!}(G^{(3)})^2 \\
& -\frac{k}{4\cdot 4!}(G^{(4)})^2 + \frac{k^{-1}}{4\cdot 5!}(G^{(5)})^2\Big) \\
& -\frac{1}{192}\,\epsilon\,\Big(2\partial C^{(4)}\partial C^{(2)}A + 4\partial C^{(4)}\partial B^{(1)}C^{(1)}A \\
& -2\partial C^{(4)}\partial C^{(1)}(B^{(2)} + B^{(1)}A) \\
& +8\partial B^{(1)}C^{(3)}\partial C^{(2)}A + 16\partial B^{(1)}\partial B^{(1)}C^{(3)}C^{(1)}A \\
& -8\partial B^{(1)}C^{(3)}\partial C^{(1)}(B^{(2)} + B^{(1)}A) + 4\partial C^{(3)}\partial C^{(2)}(B^{(2)} + B^{(1)}A) \\
& +8\partial C^{(3)}\partial B^{(1)}C^{(1)}(B^{(2)} + B^{(1)}A)\Big).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Deze actie ziet er niet gelijk uit aan de actie (3.4) van Type II. Het opvallendste verschil is de aanwezigheid van een viervorm $C^{(4)}$. Verder is de Chern-Simons term verschillend, evenals de factor bij $G^{(4)}$.

$C^{(4)}$ is echter een magnetische potentiaal en dus afhankelijk van $C^{(3)}$. De relatie tussen hun veldsterktes is niet alleen de Hodge-dualiteit in negen dimensies, het is ook de reductie van de zelfdualiteit van $\hat{G}^{(5)}$. Terwijl in Type IIB de zelfdualiteit niet uit de pseudo-actie volgt, kan men hem hier wel in de actie stoppen. De actie (3.13) is dus eigenlijk een pseudo-actie. De Hodge-dualiteit moet men opleggen om een echte actie te bekomen. Deze Hodge-dualiteit bekomt men langs een intermediaire actie met Lagrange-multiplicator, zoals in 2.2.1. Dit resulteert in

$$G_5 = -\frac{1}{4!}\frac{k}{\sqrt{|g|}}\epsilon\tilde{G}_4, \tag{3.14}$$

met

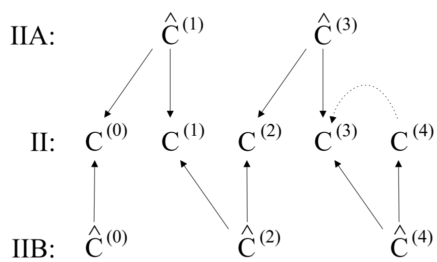
$$\tilde{G}^{(4)} = 4\partial\tilde{C}^{(3)} + 6F(A)C^{(2)} - 4HC^{(1)}. \tag{3.15}$$

Dezelfde Hodge-dualiteitsrelatie bekomt men door de reductie van de zelf-dualiteitsrelatie (2.21) van $\hat{G}^{(5)}$:

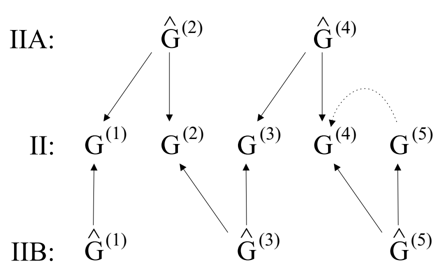
$$\hat{G}_5 = \frac{1}{5!}\frac{1}{\sqrt{|\hat{\jmath}|}}\hat{\epsilon}\hat{G}_5. \tag{3.16}$$

Zo blijkt dat $\tilde{C}^{(3)} = C^{(3)}$ en dus $\tilde{G}^{(4)} = G^{(4)}$.

Met behulp van deze relatie en wat rekenwerk is alles te schrijven in functie van $C^{(3)}$. Zoals hierboven reeds vermeld, is het resultaat hetzelfde als de reductie (3.4) van Type IIA.



Figuur 3.1: Een schema van de reductie. Dit toont reeds aan hoe de T-dualiteit tussen de Ramond-Ramond velden er uit zal zien. De componenten zonder index x zijn ruwweg T-duaal aan de componenten met x. De stippellijn duidt de Hodge-dualiteit aan die reductie is van de zelfdualiteit uit Type IIB.



Figuur 3.2: Hetzelfde schema voor de veldsterktes.

3.1.2 Dualiteitsregels

Het is echter wenselijk om de transformatieregels tussen de tiendimensionale velden expliciet op te schrijven.

Voor de Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz velden zijn de T-dualiteitsregels reeds gegeven in (2.69), (2.70) en (2.71). Ze zijn hetzelfde voor Type IIA in functie van Type IIB als voor Type IIB in functie van Type IIA.

De T-dualiteitsregels van de Ramond-Ramond vormen zijn iets lastiger om samen te stellen. Dit komt vooral doordat de vormen verschillend zijn in Type IIA en Type IIB. In deze regels is dan ook moeilijker de reductie te herkennen. De eerste set T-dualiteitsregels geven de velden van Type IIA in functie van de velden van Type IIB:

$$\begin{aligned}
\hat{C}^{(1)}{}_x &= \hat{C}^{(0)}, \\
\hat{C}^{(1)}{}_\mu &= -\hat{C}^{(2)}{}_{\mu x} + \hat{\mathcal{B}}_{\mu x}\hat{C}^{(0)}, \\
\hat{C}^{(3)}{}_{\mu\nu x} &= \hat{C}^{(2)}{}_{\mu\nu} + 2\frac{\hat{\jmath}_{[\mu|x|}\hat{C}^{(2)}{}_{\nu]x}}{\hat{\jmath}_{xx}}, \\
\hat{C}^{(3)}{}_{\mu\nu\rho} &= -\hat{C}^{(4)}{}_{\mu\nu\rho x} + 3\hat{\mathcal{B}}_{[\mu|x|}\hat{C}^{(2)}{}_{\nu\rho]} + 6\frac{\hat{\mathcal{B}}_{[\mu|x|}\hat{\jmath}_{\nu|x|}\hat{C}^{(2)}{}_{\rho]x}}{\hat{\jmath}_{xx}}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Het tweede deel geeft de velden van Type IIB in functie van die van Type IIA:

$$\begin{aligned}
\hat{C}^{(0)} &= \hat{C}^{(1)}{}_x, \\
\hat{C}^{(2)}{}_{\mu x} &= -\hat{C}^{(1)}{}_\mu + \frac{\hat{g}_{\mu x}\hat{C}^{(1)}{}_x}{\hat{g}_{xx}}, \\
\hat{C}^{(2)}{}_{\mu\nu} &= \hat{C}^{(3)}{}_{\mu\nu x} + 2\hat{B}_{[\mu|x|}\hat{C}^{(1)}{}_{\nu]} - 2\frac{\hat{B}_{[\mu|x|}\hat{g}_{\nu]x}\hat{C}^{(1)}{}_x}{\hat{g}_{xx}}, \\
\hat{C}^{(4)}{}_{\mu\nu\rho x} &= -\hat{C}^{(3)}{}_{\mu\nu\rho} + 3\frac{\hat{g}_{[\mu|x|}\hat{C}^{(3)}{}_{\nu\rho]x}}{\hat{g}_{xx}}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

De componenten zonder index x van $C^{(4)}$ lijken te ontbreken. Deze zijn echter afhankelijk van de componenten met index x, door de zelfdualiteit van $\hat{G}^{(5)}$.

3.2 Massieve T-dualiteit

De T-dualiteit uit het vorige deel kan uitgebreid worden naar de massieve Type IIA (2.10) en Type IIB (2.5). Dimensionele reductie van de massieve Type IIA leidt tot een massieve versie van Type II. Van Type IIB bestaat er echter geen massieve versie. Via Scherk-Schwarz reductie (2.3.3) kan men massa genereren, en zo van de massaloze IIB naar de massieve II komen. Dit leidt dan tot een massieve T-dualiteit. E. Bergshoeff, M. De Roo, M. D. Green, G. Papadopoulos en P. K. Townsend [7] hebben deze veralgemeende relaties aangetoond.

3.2.1 Reductieregels

Voor het gemak van de lezer hernemen we de Lagrangiaan van de massieve Type IIA:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & \sqrt{|\hat{g}|}\; e^{-2\hat{\phi}}\Big(\hat{R} - 4(\partial\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2\cdot 3!}\hat{H}^2\Big) \\
& -\sqrt{|\hat{g}|}\;\Big(\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2\cdot 2!}(\hat{G}^{(2)})^2 + \frac{1}{2\cdot 4!}(\hat{G}^{(4)})^2\Big) \\
& -\frac{1}{144}\;\hat{\epsilon}\Big(\partial\hat{C}^{(3)}\;\partial\hat{C}^{(3)}\;\hat{B} + \frac{1}{2}m\partial\hat{C}^{(3)}\hat{B}\hat{B}\hat{B} \\
& +\frac{9}{80}m^2\hat{B}\hat{B}\hat{B}\hat{B}\hat{B}\Big).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

De reductieregels zijn volledig identiek als in het massaloze geval. De resulterende Lagrangiaan, veldsterktes en ijktransformaties krijgen wel massieve correcties.

De actie is gegeven door:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sqrt{|g|}e^{-2\phi}\Big(R - 4(\partial\phi)^2 + (\partial \log k)^2 + \frac{1}{2\cdot 3!}H^2 \\
&\quad -\frac{1}{4}k^2F^2(A) - \frac{1}{4}k^{-2}F^2(B)\Big) \\
&\quad +\sqrt{|g|}\Big(-\frac{1}{2}k\ m^2 + \frac{k^{-1}}{2}(G^{(1)})^2 - \frac{k}{2\cdot 2!}(G^{(2)})^2 \\
&\quad +\frac{k^{-1}}{2\cdot 3!}(G^{(3)})^2 - \frac{k}{2\cdot 4!}(G^{(4)})^2\Big) \\
&\quad -\frac{1}{72}\ \epsilon\ \Big(\partial C^{(3)}\partial C^{(3)}B^{(1)} + 3\partial C^{(3)}\partial C^{(2)}(B^{(2)} + AB^{(1)}) \\
&\quad +6\partial C^{(3)}\partial A^{(1)}C^{(2)}B^{(1)} + 9\partial A\partial C^{(2)}C^{(2)}(B^{(2)} + AB^{(1)}) \\
&\quad +9\partial A\ \partial A\ C^{(2)}C^{(2)}B^{(1)}\Big) \\
&\quad -\frac{m}{144}\epsilon\Big(3\partial C^{(3)}B^{(2)}B^{(2)}B^{(1)} + 9\partial AC^{(2)}B^{(2)}B^{(2)}B^{(1)} \\
&\quad +\frac{3}{2}\partial C^{(2)}B^{(2)}B^{(2)}(B^{(2)} + 3AB^{(1)})\Big) \\
&\quad -\frac{1}{128}m^2\epsilon B^{(2)}B^{(2)}B^{(2)}B^{(2)}B^{(1)}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

De veldsterktes zijn:

$$\begin{aligned}
F(A) &= 2\partial A \\
F(B) &= 2\partial B^{(1)}, \\
H &= 3\partial B^{(2)} - 3A\partial B^{(1)} - 3B^{(1)}\partial A, \\
G^{(1)} &= \partial C^{(0)} + mB^{(1)}, \\
G^{(2)} &= 2\partial C^{(1)} + F(A)C^{(0)} + m(B^{(2)} + AB^{(1)}), \\
G^{(3)} &= 3\partial C^{(2)} + 3F(B)C^{(1)} - HC^{(0)} + 3mB^{(2)}B^{(1)}, \\
G^{(4)} &= 4\partial C^{(3)} + 6F(A)C^{(2)} - 4HC^{(1)} + 3mB^{(2)}(B^{(2)} + 2AB^{(1)}).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

De ijktransformaties zijn als volgt:

$$
\begin{aligned}
\delta A &= \partial\xi, \\
\delta B^{(1)} &= \partial\Sigma^{(0)}, \\
\delta B^{(2)} &= 2\partial\Sigma^{(1)} + A\partial\Sigma^{(0)} + B^{(1)}\partial\xi, \\
\delta C^{(0)} &= -m\Sigma^{(0)}, \\
\delta C^{(1)} &= \partial\Lambda^{(0)} - m\Sigma^{(1)} + mA\Sigma^{(0)}, \\
\delta C^{(2)} &= 2\partial\Lambda^{(1)} - 2B^{(1)}\partial\Lambda^{(0)} + 2mB^{(1)}\Sigma^{(1)} - m(B^{(2)} - AB^{(1)})\Sigma^{(0)}, \\
\delta C^{(3)} &= 3\partial\Lambda^{(2)} - 6A\partial\Lambda_1 + 3(B^{(2)} + AB^{(1)})\partial\Lambda^{(0)} \\
&\quad -3m(B^{(2)} + AB^{(1)})\Sigma^{(1)} + 3mB^{(2)}A\Sigma^{(0)}.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Net zoals in de massieve Type IIA heeft men ook hier Stückelbergtransformaties voor de potentialen $C^{(0)}$ en $C^{(1)}$. Door een veldherdefinitie blijkt dat de velden $B^{(1)}$ en $B^{(2)}$ massief zijn:

$$
\begin{aligned}
\tilde{B}^{(1)} &= B^{(1)} + \frac{1}{m}\partial C^{(0)}, \\
\tilde{B}^{(2)} &= B^{(2)} + \frac{2}{m}\partial(C^{(1)} + AC^{(0)}) - \frac{1}{m}A\partial C^{(0)}.
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Dit zorgt voor massatermen uit de veldsterktes:

$$
\begin{aligned}
G^{(1)} &= m\tilde{B}^{(1)}, \\
G^{(2)} &= m(\tilde{B}^{(2)} + A\tilde{B}^{(1)}).
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Dit duidt aan dat we inderdaad met een massieve versie van Type II te maken hebben.

Voor de reductie van Type IIB gebruiken we Scherk-Schwarzreductie, zoals uitgelegd in sectie 2.3.3. Het is niet nodig de reductie van de common sector te hernemen. Deze is volledig identiek als de Kaluza-Klein reductie. De Ramond-Ramond velden worden lineair afhankelijk van x verondersteld. De Ramond-Ramond velden reduceren als volgt:

$$
\begin{aligned}
\hat{C}^{(0)} &= C^{(0)} - mx, \\
\hat{C}^{(2)}{}_{\mu x} &= -C^{(1)}{}_{\mu} - mxA_{\mu}, \\
\hat{C}^{(2)}{}_{\mu\nu} &= C^{(2)}{}_{\mu\nu} + 2B^{(1)}{}_{[\mu}C^{(1)}{}_{\nu]} - mx(B^{(2)}{}_{\mu\nu} + A_{[\mu}B^{(1)}{}_{\nu]}), \\
\hat{C}^{(4)}{}_{\mu\nu\rho x} &= -C^{(3)}{}_{\mu\nu\rho} - 3mxA_{[\mu}B^{(2)}{}_{\nu]}, \\
\hat{C}^{(4)}{}_{\mu\nu\rho\sigma} &= C^{(4)}{}_{\mu\nu\rho\sigma} + 4B^{(1)}{}_{[\mu}C^{(3)}{}_{\nu\rho\sigma]} - 3mxB^{(2)}{}_{[\mu\nu}B^{(2)}{}_{\rho\sigma]} \\
&\quad -6mxB^{(2)}{}_{[\mu\nu}A_{\rho}B^{(1)}{}_{\sigma]}.
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Het is het eerste veld dat alles bepaalt. De x-afhankelijkheid van de velden is niet willekeurig gekozen. De reductie van de éénvorm veldsterkte moet niet alleen de negendimensionale één-veldsterkte geven, maar ook de term met m^2. Een andere richtlijn is dat de ijktransformaties van de gereduceerde velden overeen moeten komen met deze uit de massieve Type IIA. De x-afhankelijke correcties zorgen voor de Stückelbergtransformaties (3.22) van de negendimensionale velden. Ook de parameter $\hat{\Lambda}^{(1)}$ van de ijktransformatie van $\hat{C}^{(2)}$ krijgt een x-afhankelijkheid:

$$
\begin{aligned}
\hat{\Lambda}^{(1)}{}_x &= -\Lambda^{(0)} - mx\Sigma^{(0)}, \\
\hat{\Lambda}^{(1)}{}_\mu &= \Lambda^{(1)}{}_\mu - mx\Sigma^{(1)}{}_\mu.
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

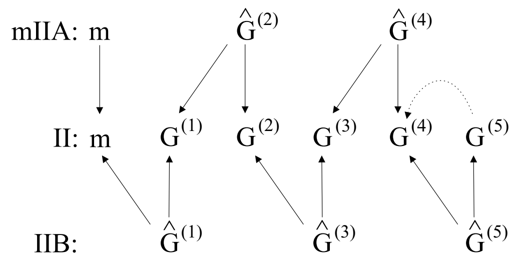
Zo reduceren de veldsterktes en de ijkvariaties naar deze van de massieve Type II. De reductie van de Chern-Simons term resulteert in veel termen waaronder er een aantal expliciet van de x-coördinaat afhangen. Om deze weg te werken kunnen we gebruiken dat de actie invariant is wanneer de Lagrangiaan met een totale afgeleide verandert. Daar de termen afhankelijk zijn van x zijn ze tiendimensionale objecten en moeten zij een tiendimensionale totale afgeleide vormen. Een eenvoudiger manier is reeds in tien dimensies de x-afhankelijke termen weg te werken:

$$
\begin{aligned}
\partial\hat{C}^{(4)}\partial\hat{C}^{(2)}\hat{B} &= \partial(\hat{C}^{(4)} + 3mx\hat{B}\hat{B})\partial(\hat{C}^{(2)} + mx\hat{B})\hat{B} \\
&\quad -\partial(mx)\hat{B}\hat{B}\partial(\hat{C}^{(2)} + mx\hat{B})\hat{B} \\
&\quad -\frac{1}{2}\partial(\hat{C}^{(4)} + 3mx\hat{B}\hat{B})\partial(mx)\hat{B}\hat{B}.
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

Deze uitdrukking reduceert naar een set negendimensionale Chern-Simons termen. Samen met de kinetische termen heeft men een negendimensionale actie, die nog verschilt van de massieve Type II (3.20) zoals we uit de massieve Type IIA gereduceerd hebben. Het verschil is, net zoals in het massaloze geval, de reductie van de zelfdualiteitsregel (3.14).

3.2.2 Massieve T-dualiteitsregels

Samenstellen van de reductie- en decompactificatierelaties geeft de massieve T-dualiteitsrelaties. In vergelijking met de massaloze regels, zijn het alleen de Ramond-Ramond potentialen die een m-afhankelijke correctie krijgen. Dat was te verwachten, daar ook in de reductieregels alleen deze vormen een



Figuur 3.3: Reductie van de veldsterktes. In vergelijking met het schema 3.2 heeft men hier de massaparameter m extra. Uit Type IIB verkrijgt men hem door de Scherk-Schwarz reductie van $\hat{G}^{(1)}$. Ook hier is de reductie van de zelfdualiteit opgenomen als een stippellijn.

correctie kregen. De massieve T-dualiteitsregels voor de Ramond-Ramond potentialen zijn

$$\begin{aligned}
\hat{C}^{(1)}{}_x &= \hat{C}^{(0)} + mx, \\
\hat{C}^{(1)}{}_\mu &= -\hat{C}^{(2)}{}_{\mu x} + \hat{\mathcal{B}}_{\mu x}\hat{C}^{(0)}, \\
\hat{C}^{(3)}{}_{\mu\nu x} &= \hat{C}^{(2)}{}_{\mu\nu} + 2\frac{\hat{\jmath}_{[\mu|x|}\hat{C}^{(2)}{}_{\nu]x}}{\hat{\jmath}_{xx}} + mx\mathcal{B}_{\mu\nu} - 2mx\frac{\hat{\jmath}_{[\mu|x|}\hat{\mathcal{B}}_{\nu]x}}{\hat{\jmath}_{xx}}, \\
\hat{C}^{(3)}{}_{\mu\nu\rho} &= -\hat{C}^{(4)}{}_{\mu\nu\rho x} + 3\hat{\mathcal{B}}_{[\mu|x|}\hat{C}^{(2)}{}_{\nu\rho]} + 6\frac{\hat{\mathcal{B}}_{[\mu|x|}\hat{\jmath}_{\nu|x|}\hat{C}^{(2)}{}_{\rho]x}}{\hat{\jmath}_{xx}};
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
\hat{C}^{(0)} &= \hat{C}^{(1)}{}_x - mx, \\
\hat{C}^{(2)}{}_{\mu x} &= -\hat{C}^{(1)}{}_\mu + \frac{\hat{g}_{\mu x}\hat{C}^{(1)}{}_x}{\hat{g}_{xx}} - mx\frac{\hat{g}_{\mu x}}{\hat{g}_{xx}}, \\
\hat{C}^{(2)}{}_{\mu\nu} &= \hat{C}^{(3)}{}_{\mu\nu x} + 2\hat{B}_{[\mu|x|}\hat{C}^{(1)}{}_{\nu]} - 2\frac{\hat{B}_{[\mu|x|}\hat{g}_{\nu]x}\hat{C}^{(1)}{}_x}{\hat{g}_{xx}} \\
&\quad -mx\hat{B}_{\mu\nu} - 2mx\frac{\hat{g}_{[\mu|x|}\hat{B}_{\nu]x}}{\hat{g}_{xx}}, \\
\hat{C}^{(4)}{}_{\mu\nu\rho x} &= -\hat{C}^{(3)}{}_{\mu\nu\rho} + 3\frac{\hat{g}_{[\mu|x|}\hat{C}^{(3)}{}_{\nu\rho]x}}{\hat{g}_{xx}} - 3mx\frac{\hat{g}_{[\mu|x|}\hat{B}_{\nu\rho]}}{\hat{g}_{xx}}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

3.3 T-dualiteit in de democratische formulering

De democratische formulering werd in [8] gebruikt om een andere formulering te geven van supersymmetrie. Hier gaan we na of de twee types supergravitatie T-duaal zijn ook in deze formulering. We verwachten van wel. Immers, de democratische formulering is volledig equivalent aan de gewone, elektrische formulering. Toch is het interessant de T-dualiteitsregels expliciet op te stellen voor de magnetische potentialen, om een volllediger beeld te krijgen. Dat is het onderwerp van deze sectie.

3.3.1 Reductieregels voor de magnetische potentialen

De democratische Lagrangianen (2.33) en (2.34) hernemen we hier:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_A &= \sqrt{|\hat{g}|}\; e^{-2\hat{\phi}}\Big(\hat{R} - 4(\partial\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2\cdot 3!}\hat{H}^2\Big) \\
&\quad -\sqrt{|\hat{g}|}\;\Big(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4\cdot 2!}(\hat{G}^{(2)})^2 + \frac{1}{4\cdot 4!}(\hat{G}^{(4)})^2 \\
&\quad +\frac{1}{4\cdot 6!}(\hat{G}^{(6)})^2 + \frac{1}{4\cdot 8!}(\hat{G}^{(8)})^2 + \frac{1}{4\cdot 10!}(\hat{G}^{(10)})^2\Big),
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_B &= \sqrt{|\hat{\jmath}|}\; e^{-2\hat{\varphi}}\Big(\hat{\mathcal{R}} - 4(\partial\hat{\varphi})^2 + \frac{1}{2\cdot 3!}\hat{\mathcal{H}}^2\Big) \\
&\quad +\sqrt{|\hat{\jmath}|}\;\Big(\frac{1}{4}(\hat{G}^{(1)})^2 + \frac{1}{4\cdot 3!}(\hat{G}^{(3)})^2 \\
&\quad +\frac{1}{4\cdot 5!}(\hat{G}^{(5)})^2 + \frac{1}{4\cdot 7!}(\hat{G}^{(7)})^2 + \frac{1}{4\cdot 9!}(\hat{G}^{(9)})^2\Big).
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

De magnetische potentialen uit Type IIA reduceren nu als volgt:

$$
\begin{aligned}
\hat{C}^{(5)}{}_{\mu_1\ldots\mu_4 x} &= C^{(4)}{}_{\mu_1\ldots\mu_4}, \\
\hat{C}^{(5)}{}_{\mu_1\ldots\mu_5} &= C^{(5)}{}_{\mu_1\ldots\mu_5} + 5A_{[\mu_1}C^{(4)}{}_{\mu_2\ldots\mu_5]}, \\
\hat{C}^{(7)}{}_{\mu_1\ldots\mu_6 x} &= C^{(6)}{}_{\mu_1\ldots\mu_6}, \\
\hat{C}^{(7)}{}_{\mu_1\ldots\mu_7} &= C^{(7)}{}_{\mu_1\ldots\mu_7} + 7A_{[\mu_1}C^{(6)}{}_{\mu_2\ldots\mu_7]}, \\
\hat{C}^{(9)}{}_{\mu_1\ldots\mu_8 x} &= C^{(8)}{}_{\mu_1\ldots\mu_8}.
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

Er is geen reductieregel voor $\hat{C}^{(9)}$ zonder index x gegeven. Dat is ook niet nodig omdat deze potentiaal niet voorkomt in de negendimensionale actie. Een tien-veldsterkte is immers nul in negen dimensies. In de reductieregels is dezelfde regelmaat terug te vinden als bij de elektrische potentialen. Eigenlijk is dit niet verwonderlijk omdat de potentialen zelf en hun veldsterktes deze regelmaat vertonen. De reductieregel voor de magnetische veldsterktes is dan ook dezelfde als voor de elektrische:

$$\begin{aligned}\hat{G}^{(2n)}{}_{A_1\ldots A_{2n-1}X} &= k^{-1}G^{(2n-1)}{}_{A_1\ldots A_{2n-1}}, \\ \hat{G}^{(2n)}{}_{A_1\ldots A_{2n}} &= G^{(2n)}{}_{A_1\ldots A_{2n}}.\end{aligned} \tag{3.33}$$

De Scherk-Schwarz reductie van de Type IIB magnetische potentialen gebeurt analoog aan die van de elektrische:

$$\begin{aligned}\hat{C}^{(6)}{}_{\mu_1\ldots\mu_5 x} &= -C^{(5)}{}_{\mu_1\ldots\mu_5} - 15mxA_{[\mu_1}B^{(2)}{}_{\mu_2\mu_3}B^{(2)}{}_{\mu_4\mu_5]}, \\ \hat{C}^{(6)}{}_{\mu_1\ldots\mu_6} &= C^{(6)}{}_{\mu_1\ldots\mu_6} + 6B^{(1)}{}_{[\mu_1}C^{(5)}{}_{\mu_2\ldots\mu_6]} \\ &\quad -15mxB^{(2)}{}_{[\mu_1\mu_2}B^{(2)}{}_{\mu_3\mu_4}(B^{(2)}{}_{\mu_5\mu_6]} - 3A_{\mu_5}B^{(1)}{}_{\mu_6]}), \\ \hat{C}^{(8)}_{\mu_1\ldots\mu_7 x} &= -C^{(7)}{}_{\mu_1\ldots\mu_7} - 105mxA_{[\mu_1}B^{(2)}{}_{\mu_2\mu_3}B^{(2)}{}_{\mu_4\mu_5}B^{(2)}{}_{\mu_6\mu_7]}, \\ \hat{C}^{(8)}{}_{\mu_1\ldots\mu_8} &= C^{(8)}{}_{\mu_1\ldots\mu_8} + 8B^{(1)}{}_{[\mu_1}C^{(7)}{}_{\mu_2\ldots\mu_8]} \\ &\quad -105mxB^{(2)}{}_{[\mu_1\mu_2}B^{(2)}{}_{\mu_3\mu_4}B^{(2)}{}_{\mu_5\mu_6}(B^{(2)}{}_{\mu_7\mu_8]} - 4A_{\mu_7}B^{(1)}{}_{\mu_8]}).\end{aligned} \tag{3.34}$$

Hun veldsterktes geven:

$$\begin{aligned}\hat{G}^{(2n+1)}{}_{A_1\ldots A_{2n}X} &= -kG^{(2n)}{}_{A_1\ldots A_{2n}}, \\ \hat{G}^{(2n+1)}{}_{A_1\ldots A_{2n+1}} &= G^{(2n+1)}{}_{A_1\ldots A_{2n+1}}.\end{aligned} \tag{3.35}$$

De acties (3.30) en (3.31) reduceren naar een democratische versie van de massieve Type II. Ook hier heeft men geen Chern-Simons termen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & \sqrt{|g|}e^{-2\phi}\Big(R - 4(\partial\phi)^2 + (\partial\log k)^2 + \frac{1}{2\cdot 3!}H^2 \\ & -\frac{1}{4}k^2F^2(A) - \frac{1}{4}k^{-2}F^2(B)\Big) \\ & +\sqrt{|g|}\Big(-\frac{1}{2}k\ m^2 + \frac{k^{-1}}{4}(G^{(1)})^2 - \frac{k}{4\cdot 2!}(G^{(2)})^2 + \frac{k^{-1}}{4\cdot 3!}(G^{(3)})^2 \\ & -\frac{k}{4\cdot 4!}(G^{(4)})^2 + \frac{k^{-1}}{4\cdot 5!}(G^{(5)})^2 - \frac{k}{4\cdot 6!}(G^{(6)})^2 \\ & +\frac{k^{-1}}{4\cdot 7!}(G^{(7)})^2 - \frac{k}{4\cdot 8!}(G^{(8)})^2 + \frac{k^{-1}}{4\cdot 9!}(G^{(9)})^2\Big).\end{aligned} \tag{3.36}$$

Net zoals bij de democratische formulering van de massieve Type IIA en Type IIB gaat het hier om een pseudo-actie. De Hodge-dualiteiten tussen de Ramond-Ramond vormen moeten als extra voorwaarden opgelegd worden. Deze relaties moeten op drie manieren bekomen kunnen worden: als reductie van de Hodge-dualiteitsrelaties uit de massieve Type IIA, als reductie van de Hodge-dualiteitsrelaties uit Type IIB; en als on-shell Hodge-dualisatie in de massieve Type II. Alle drie de manieren leveren deze relaties op:

$$
\begin{aligned}
G^{(0)} &= -\frac{1}{9!}\frac{k}{\sqrt{|g|}}\epsilon G^{(9)}, \\
G^{(1)} &= -\frac{1}{8!}\frac{k^{-1}}{\sqrt{|g|}}\epsilon G^{(8)}, \\
G^{(2)} &= \frac{1}{7!}\frac{k}{\sqrt{|g|}}\epsilon G^{(7)}, \\
G^{(3)} &= \frac{1}{6!}\frac{k^{-1}}{\sqrt{|g|}}\epsilon G^{(6)}, \\
G^{(4)} &= -\frac{1}{5!}\frac{k}{\sqrt{|g|}}\epsilon G^{(5)}.
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

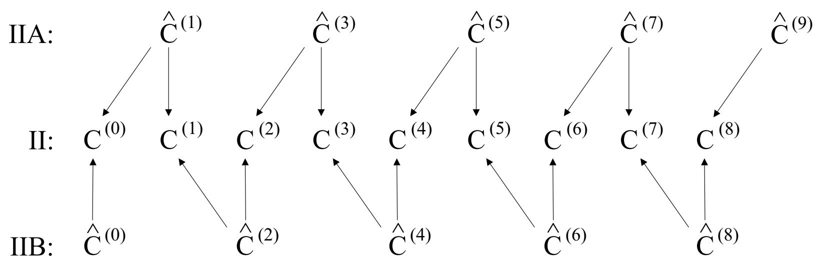
Dit toont aan dat on-shell Hodge-dualiteit commuteert met dimensionele reductie. Dat is belangrijk, want de Hodge-dualiteitsrelaties bevatten de informatie die bij de elektrische formulering in de Chern-Simons term zit.

Hier is een overzicht van alle veldsterktes en ijkvariaties. Ook in negen dimensies is die strikte regelmaat behouden, wat eigenlijk te verwachten was. De veldsterktes zijn:

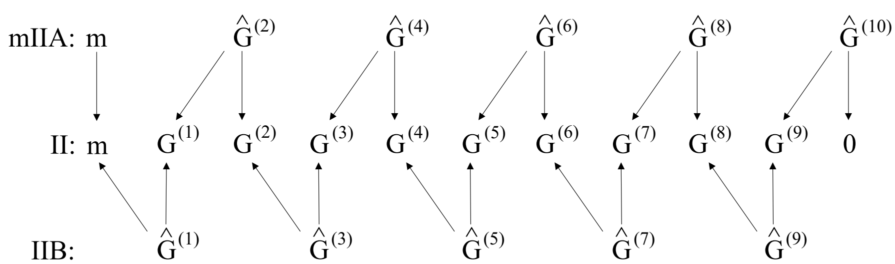
$$
\begin{aligned}
F(A) &= 2\partial A, \\
F(B) &= 2\partial B^{(1)}, \\
H &= 3\partial B^{(2)} - 3A\partial B^{(1)} - 3B^{(1)}\partial A, \\
G^{(2n)} &= 2n\partial C^{(2n-1)} + n(2n-1)F(A)C^{(2n-2)} - \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!}HC^{(2n-3)} \\
&\quad +(2n-1)!!m(B^{(2)})^{n-1}(B^{(2)} + nAB^{(1)}), \\
\\
G^{(2n+1)} &= (2n+1)\partial C^{(2n)} + n(2n+1)F(B)C^{(2n-1)} \\
&\quad -\frac{(2n+1)!}{3!(2n-2)!}HC^{(2n-2)} + (2n+1)!!m(B^{(2)})^n B^{(1)}.
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

Voor de ijkvariaties van de Ramond-Ramond potentialen is er een algemene formulering mogelijk net zoals voor de veldsterktes. Deze is echter veel ingewikkelder van vorm, zodat een opsomming van de ijkvariaties een duidelijker beeld geeft:

$$
\begin{aligned}
\delta A &= \partial\xi, \qquad (3.39)\\
\delta B^{(1)} &= \partial\Sigma^{(0)},\\
\delta B^{(2)} &= 2\partial\Sigma^{(1)} + A\partial\Sigma^{(0)} + B^{(1)}\partial\xi,\\
\delta C^{(0)} &= -m\Sigma^{(0)},\\
\delta C^{(1)} &= \partial\Lambda^{(0)} - m\Sigma^{(1)} + mA\Sigma^{(0)},\\
\delta C^{(2)} &= 2\partial\Lambda^{(1)} - 2B^{(1)}\partial\Lambda^{(0)} + 2mB^{(1)}\Sigma^{(1)} - m(B^{(2)} - AB^{(1)})\Sigma^{(0)},\\
\delta C^{(3)} &= 3\partial\Lambda^{(2)} - 6A\partial\Lambda_1 + 3(B^{(2)} + AB^{(1)})\partial\Lambda^{(0)}\\
\\
\delta C^{(4)} &= 4\partial\Lambda^{(3)} - 12B^{(1)}\partial\Lambda^{(2)} + 12(B^{(2)} - AB^{(1)})\partial\Lambda^{(1)} + B^{(2)}B^{(1)}\partial\Lambda^{(0)}\\
&\quad +12mB^{(2)}B^{(1)}\Sigma^{(1)} - 3mB^{(2)}(B^{(2)} - 2AB^{(1)})\Sigma^{(0)},\\
\\
\delta C^{(5)} &= 5\partial\Lambda^{(4)} - 20A\partial\Lambda^{(3)} + 30(B^{(2)} + AB^{(1)})\partial\Lambda^{(2)} - 60B^{(2)}A\partial\Lambda^{(1)}\\
&\quad +15B^{(2)}(B^{(2)} + 2AB^{(1)})\partial\Lambda^{(0)}\\
&\quad -15mB^{(2)}(B^{(2)} + 2A^{(1)}B^{(1)})\Sigma^{(1)} + 15mB^{(2)}B^{(2)}A\Sigma^{(0)},\\
\\
\delta C^{(6)} &= 6\partial\Lambda^{(5)} - 30B^{(1)}\partial\Lambda^{(4)} + 60(B^{(2)} - AB^{(1)})\partial\Lambda^{(3)}\\
&\quad -180B^{(2)}B^{(1)}\partial\Lambda^{(2)} + 90B^{(2)}(B^{(2)} - 2AB^{(1)})\partial\Lambda^{(1)}\\
&\quad -90B^{(2)}B^{(2)}B^{(1)}\partial\Lambda^{(0)}\\
&\quad +90mB^{(2)}B^{(2)}B^{(1)}\Sigma^{(1)} - 15mB^{(2)}B^{(2)}(B^{(2)} - 3AB^{(1)})\Sigma^{(0)},\\
\\
\delta C^{(7)} &= 7\partial\Lambda^{(6)} - 42A\partial\Lambda^{(5)} + 105(B^{(2)} + AB^{(1)})\partial\Lambda^{(4)} - 420B^{(2)}A\partial\Lambda^{(3)}\\
&\quad +315B^{(2)}(B^{(2)} + 2AB^{(1)})\partial\Lambda^{(2)} - 630B^{(2)}B^{(2)}A\partial\Lambda^{(1)}\\
&\quad +105B^{(2)}B^{(2)}(B^{(2)} + 3AB^{(1)})\partial\Lambda^{(0)}\\
&\quad -105mB^{(2)}B^{(2)}(B^{(2)} + 3AB^{(1)})\Sigma^{(1)} + 105mB^{(2)}B^{(2)}B^{(2)}A\Sigma^{(0)},\\
\\
\delta C^{(8)} &= 8\partial\Lambda^{(7)} - 56B^{(1)}\partial\Lambda^{(6)} + 168(B^{(2)} - AB^{(1)})\partial\Lambda^{(5)}\\
&\quad -840B^{(2)}B^{(1)}\partial\Lambda^{(4)} + 840B^{(2)}(B^{(2)} - 2AB^{(1)})\partial\Lambda^{(3)}\\
&\quad -2520B^{(2)}B^{(2)}B^{(1)}\partial\Lambda^{(2)} + 840B^{(2)}B^{(2)}(B^{(2)} - 3AB^{(1)})\partial\Lambda^{(1)}\\
&\quad -840B^{(2)}B^{(2)}B^{(2)}B^{(1)}\partial\Lambda^{(0)}\\
&\quad +840mB^{(2)}B^{(2)}B^{(2)}B^{(1)}\Sigma^{(1)}\\
&\quad -105mB^{(2)}B^{(2)}B^{(2)}(B^{(2)} - 4AB^{(1)})\Sigma^{(0)}.
\end{aligned}
$$



Figuur 3.4: Schema van de reductie van de Ramond-Ramond potentialen. Vergeleken met het schema 3.1 blijkt dit een lijnrechte voortzetting.



Figuur 3.5: Schema van de reductie van de Ramond-Ramond veldsterktes. Ook hier ziet men een duidelijke voortzetting van de reductie.

3.3.2 T-dualiteitsregels voor alle Ramond-Ramond potentialen

De combinatie van de reductieregels geeft de T-dualiteitsregels. Omwille van de duidelijkheid hernemen we de T-dualiteitsregels van de elektrische Ramond-Ramond vormen. De Ramond-Ramond velden van Type IIA in functie van de Type IIB velden zien er zo uit:

$$\begin{aligned}
\hat{C}^{(1)}{}_{x} &= \hat{C}^{(0)} + mx, \qquad (3.40)\\
\hat{C}^{(1)}{}_{\mu_1} &= -\hat{C}^{(2)}{}_{\mu_1 x} + \hat{\mathcal{B}}_{\mu_1 x}\hat{C}^{(0)},\\
\hat{C}^{(3)}{}_{\mu_1\mu_2 x} &= \hat{C}^{(2)}{}_{\mu_1\mu_2} + 2\frac{\hat{\jmath}_{[\mu_1|x|}\hat{C}^{(2)}{}_{\mu_2]x}}{\hat{\jmath}_{xx}} + mx\mathcal{B}_{\mu_1\mu_2} + 2mx\frac{\hat{\jmath}_{[\mu_1|x|}\hat{\mathcal{B}}_{\mu_2]x}}{\hat{\jmath}_{xx}},\\
\hat{C}^{(3)}{}_{\mu_1\ldots\mu_3} &= -\hat{C}^{(4)}{}_{\mu_1\ldots\mu_3 x} + 3\hat{\mathcal{B}}_{[\mu_1|x|}\hat{C}^{(2)}{}_{\mu_2\mu_3]} + 6\frac{\hat{\mathcal{B}}_{[\mu_1|x|}\hat{\jmath}_{\mu_2|x|}\hat{C}^{(2)}{}_{\mu_3]x}}{\hat{\jmath}_{xx}},\\
\hat{C}^{(5)}{}_{\mu_1\ldots\mu_4 x} &= \hat{C}^{(4)}{}_{\mu_1\ldots\mu_4} + 4\frac{\hat{\jmath}_{[\mu_1|x|}\hat{C}^{(4)}{}_{\mu_2\ldots\mu_4]x}}{\hat{\jmath}_{xx}}\\
&\quad +3mx\hat{\mathcal{B}}_{[\mu_1\mu_2}\hat{\mathcal{B}}_{\mu_3\mu_4]} + 12mx\frac{\hat{\jmath}_{[\mu_1|x|}\hat{\mathcal{B}}_{\mu_2|x|}\hat{\mathcal{B}}_{\mu_3\mu_4]}}{\hat{\jmath}_{xx}},\\
\hat{C}^{(5)}{}_{\mu_1\ldots\mu_5} &= -\hat{C}^{(6)}{}_{\mu_1\ldots\mu_5 x} + 5\hat{\mathcal{B}}_{[\mu_1|x|}\hat{C}^{(4)}{}_{\mu_2\ldots\mu_5]}\\
&\quad +20\frac{\hat{\mathcal{B}}_{[\mu_1|x|}\hat{\jmath}_{\mu_2|x|}\hat{C}^{(4)}{}_{\mu_3\ldots\mu_5]x}}{\hat{\jmath}_{xx}},\\
\hat{C}^{(7)}{}_{\mu_1\ldots\mu_6 x} &= \hat{C}^{(6)}_{\mu_1\ldots\mu_6} + 6\frac{\hat{\jmath}_{[\mu_1|x|}\hat{C}^{(6)}{}_{\mu_2\ldots\mu_6]x}}{\hat{\jmath}_{xx}} + 15mx\hat{\mathcal{B}}_{[\mu_1\mu_2}\hat{\mathcal{B}}_{\mu_3\mu_4}\hat{\mathcal{B}}_{\mu_5\mu_6]}\\
&\quad +90mx\frac{\hat{\jmath}_{[\mu_1|x|}\hat{\mathcal{B}}_{\mu_2|x|}\hat{\mathcal{B}}_{\mu_3\mu_4}\hat{\mathcal{B}}_{\mu_5\mu_6]}}{\hat{\jmath}_{xx}},\\
\hat{C}^{(7)}{}_{\mu_1\ldots\mu_7} &= -\hat{C}^{(8)}_{\mu_1\ldots\mu_7 x} + 7\hat{\mathcal{B}}_{[\mu_1|x|}\hat{C}^{(6)}{}_{\mu_2\ldots\mu_7]} + 42\frac{\hat{\mathcal{B}}_{[\mu_1|x|}\hat{\jmath}_{\mu_2|x|}C^{(6)}{}_{\mu_3\ldots\mu_7]x}}{\hat{\jmath}_{xx}},\\
\hat{C}^{(9)}{}_{\mu_1\ldots\mu_8 x} &= \hat{C}^{(8)}{}_{\mu_1\ldots\mu_8} + 8\frac{\hat{\jmath}_{[\mu_1|x|}\hat{C}^{(8)}{}_{\mu_2\ldots\mu_8]x}}{\hat{\jmath}_{xx}}\\
&\quad +105mx\hat{\mathcal{B}}_{[\mu_1\mu_2}\hat{\mathcal{B}}_{\mu_3\mu_4}\hat{\mathcal{B}}_{\mu_5 u\mu_6}\hat{\mathcal{B}}_{\mu_7\mu_8]}\\
&\quad +840mx\frac{\hat{\jmath}_{[\mu_1|x|}\hat{\mathcal{B}}_{\mu_2|x|}\hat{\mathcal{B}}_{\mu_3\mu_4}\hat{\mathcal{B}}_{\mu_5\mu_6}\hat{\mathcal{B}}_{\mu_7\mu_8]}}{\hat{\jmath}_{xx}}.
\end{aligned}$$

Rest ons nog een lijst van de Type IIB Ramond-Ramond velden in functie van de velden uit IIA:

$$\begin{aligned}
\hat{C}^{(0)} &= \hat{C}^{(1)}{}_x - mx, \qquad (3.41)\\
\hat{C}^{(2)}{}_{\mu_1 x} &= -\hat{C}^{(1)}{}_{\mu_1} + \frac{\hat{g}_{\mu_1 x}\hat{C}^{(1)}{}_x}{\hat{g}_{xx}} - mx\frac{\hat{g}_{\mu x}}{\hat{g}_{xx}},\\
\hat{C}^{(2)}{}_{\mu_1\mu_2} &= \hat{C}^{(3)}{}_{\mu_1\mu_2 x} + 2\hat{B}_{[\mu_1|x|}\hat{C}^{(1)}{}_{\mu_2]} - 2\frac{\hat{B}_{[\mu_1|x|}\hat{g}_{\mu_2]x}\hat{C}^{(1)}{}_x}{\hat{g}_{xx}}\\
&\quad -mx\hat{B}_{\mu_1\mu_2} - 2mx\frac{\hat{g}_{[\mu_1|x|}\hat{B}_{\mu_2]x}}{\hat{g}_{xx}},\\
\hat{C}^{(4)}{}_{\mu_1\ldots\mu_3 x} &= -\hat{C}^{(3)}{}_{\mu_1\ldots\mu_3} + 3\frac{\hat{g}_{[\mu_1|x|}\hat{C}^{(3)}{}_{\mu_2\mu_3]x}}{\hat{g}_{xx}} - 3mx\frac{\hat{g}_{[\mu_1|x|}\hat{B}_{\mu_2\mu_3]}}{\hat{g}_{xx}},\\
\hat{C}^{(4)}{}_{\mu_1\ldots\mu_4} &= \hat{C}^{(5)}{}_{\mu_1\ldots\mu_4 x} + 4\hat{B}_{[\mu_1|x|}\hat{C}^{(3)}{}_{\mu_2\ldots\mu_4]} - 12\frac{\hat{B}_{[\mu_1|x|}\hat{g}_{\mu_2|x|}\hat{C}^{(3)}{}_{\mu_3\mu_4]x}}{\hat{g}_{xx}}\\
&\quad -3mx\hat{B}_{[\mu_1\mu_2}\hat{B}_{\mu_3\mu_4]} - 12mx\frac{\hat{g}_{[\mu_1|x|}\hat{B}_{\mu_2|x|}\hat{B}_{\mu_3\mu_4]}}{\hat{g}_{xx}},\\
\hat{C}^{(6)}{}_{\mu_1\ldots\mu_5 x} &= -\hat{C}^{(5)}{}_{\mu_1\ldots\mu_5} + 5\frac{\hat{g}_{[\mu_1|x|}\hat{C}^{(5)}{}_{\mu_2\ldots\mu_5]x}}{\hat{g}_{xx}} - 15mx\frac{\hat{g}_{[\mu_1|x|}\hat{B}_{\mu_2\mu_3}\hat{B}_{\mu_4\mu_5]}}{\hat{g}_{xx}},\\
\hat{C}^{(6)}{}_{\mu_1\ldots\mu_6} &= \hat{C}^{(7)}{}_{\mu_1\ldots\mu_6 x} + 6\hat{B}_{[\mu_1|x|}\hat{C}^{(5)}{}_{\mu_2\ldots\mu_6]} - 30\frac{\hat{B}_{[\mu_1|x|}\hat{g}_{\mu_2|x|}\hat{C}^{(5)}{}_{\mu_3\ldots\mu_6]x}}{\hat{g}_{xx}}\\
&\quad -15mx\hat{B}_{[\mu_1\mu_2}\hat{B}_{\mu_3\mu_4}\hat{B}_{\mu_5\mu_6]} - 90mx\frac{\hat{g}_{[\mu_1|x|}\hat{B}_{\mu_2|x|}\hat{B}_{\mu_3\mu_4}\hat{B}_{\mu_5\mu_6]}}{\hat{g}_{xx}},\\
\hat{C}^{(8)}{}_{\mu_1\ldots\mu_7 x} &= -\hat{C}^{(7)}{}_{\mu_1\ldots\mu_7} + 7\frac{\hat{g}_{[\mu_1|x|}\hat{C}^{(7)}{}_{\mu_2\ldots\mu_7]x}}{\hat{g}_{xx}}\\
&\quad -105mx\frac{\hat{g}_{[\mu_1|x|}\hat{B}_{\mu_2\mu_3}\hat{B}_{\mu_4\mu_5}\hat{B}_{\mu_6\mu_7]}}{\hat{g}_{xx}},\\
\hat{C}^{(8)}{}_{\mu_1\ldots\mu_8} &= \hat{C}^{(9)}{}_{\mu_1\ldots\mu_8 x} + 8\hat{B}_{[\mu_1|x|}\hat{C}^{(7)}{}_{\mu_2\ldots\mu_8]} - 56\frac{\hat{B}_{[\mu_1|x|}\hat{g}_{\mu_2|x|}\hat{C}^{(7)}{}_{\mu_3\ldots\mu_8]x}}{\hat{g}_{xx}}\\
&\quad -105mx\hat{B}_{[\mu_1\mu_2}\hat{B}_{\mu_3\mu_4}\hat{B}_{\mu_5\mu_6}\hat{B}_{\mu_7\mu_8]}\\
&\quad -840mx\frac{\hat{g}_{[\mu_1|x|}\hat{B}_{\mu_2|x|}\hat{B}_{\mu_3\mu_4}\hat{B}_{\mu_5\mu_6}\hat{B}_{\mu_7\mu_8]}}{\hat{g}_{xx}}.
\end{aligned}$$

Deze relaties vindt men tot $\hat{C}^{(6)}$ terug in [15].

3.4 Iets over de duale Kalb-Ramond vorm

In sectie 2.2.1 hebben we Kalb-Ramond veldsterkte gedualiseerd in de common sector. Waarom wordt deze niet meegenomen in de democratische formulering? De elektrische en magnetische Ramond-Ramond potentialen vormen een mooi gesloten geheel; en als zij allemaal meegenomen worden vermijden we een Chern-Simons term. Een andere, en waarschijnlijk belangrijker reden hebben we al vermeld in sectie 2.2.2: de combinatie met T-dualiteit geeft problemen. Laat ons dit verduidelijken. We beperken ons tot de massaloze Type IIA (2.3). Een on-shell dualisatie van $\hat{H}^{(3)}$ geeft de dualiteitsconditie

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{|\hat{g}|}}\frac{1}{7!}e^{2\hat{\phi}}\hat{\epsilon}\hat{H}^{(7)}, \qquad (3.42)\\ \hat{H}^{(7)} &= 7\partial\hat{B}^{(6)} + 42\partial\hat{C}^{(5)}\hat{C}^{(1)} - 70\partial\hat{C}^{(3)}\hat{C}^{(3)} - 420\partial\hat{B}^{(2)}\hat{C}^{(3)}C^{(1)}. \end{aligned}$$

De ijktransformatie van $\hat{B}^{(6)}$ is zo gekozen dat $\hat{H}^{(7)}$ invariant is:

$$\delta\hat{B}^{(6)} = 6\partial\hat{\Sigma}^{(5)} - 6\hat{C}^{(5)}\partial\Lambda^{(0)} + 30\hat{C}^{(3)}\partial\hat{\Lambda}^{(2)} + 30\hat{C}^{(3)}\hat{B}^{(2)}\partial\hat{\Lambda}^{(0)}. \qquad (3.43)$$

Een intermediaire actie vinden die deze dualiteitsconditie oplevert is niet eenvoudig. De reden is dat afleiden naar $\hat{H}^{(3)}$ nooit een term met $\partial\hat{B}^{(2)}$ zal geven. De gemakkelijkste methode om een duale actie te vinden is de veldherdefinitie

$$\hat{C}^{(5)} = \tilde{C}^{(5)} + 10\hat{B}^{(2)}\hat{C}^{(3)}. \qquad (3.44)$$

Daarmee is

$$\hat{H}^{(7)} = \partial\hat{B}^{(6)} + 42\partial\tilde{C}^{(5)}\hat{C}^{(1)} + 420\partial\hat{C}^{(3)}\hat{C}^{(1)}\hat{B}^{(2)} - 70\partial\hat{C}^{(3)}\hat{C}^{(3)}. \qquad (3.45)$$

Een intermediaire actie die dit oplevert is deze:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \sqrt{|\hat{g}|}e^{-2\hat{\phi}}\frac{1}{4\cdot 3!}(\hat{H}^{(3)})^2 - \frac{1}{2\cdot 144}\hat{\epsilon}\partial\hat{C}^{(3)}\hat{C}^{(3)}\partial B^{(2)} \qquad (3.46)\\ &\quad -\frac{1}{2\cdot 3!\cdot 5!}\hat{\epsilon}(\partial\tilde{C}^{(5)} + 10\partial\hat{C}^{(3)}\hat{B}^{(2)})\hat{H}^{(3)}\hat{C}^{(1)} - \frac{1}{2\cdot 3!\cdot 6!}\hat{\epsilon}\hat{B}^{(6)}\partial\hat{H}^{(3)}. \end{aligned}$$

Deze regels combineren met de Lagrangiaan (2.3) van Type IIA geeft de volgende Lagrangiaan:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sqrt{|\hat{g}|}e^{-2\hat{\phi}}\Big(\hat{R} - 4(\partial\hat{\phi})^2 + \frac{1}{4\cdot 3!}(\hat{H}^{(3)})^2 + \frac{1}{4\cdot 7!}e^{4\hat{\phi}}(\hat{H}^{(7)})^2\Big) \qquad (3.47)\\ &\quad -\sqrt{|\hat{g}|}\Big(\frac{1}{2\cdot 2!}(\hat{G}^{(2)})^2 + \frac{1}{2\cdot 4!}(\hat{G}^{(4)})^2\Big)\\ &\quad -\frac{1}{2\cdot 144}\hat{\epsilon}\partial\hat{C}^{(3)}\partial\hat{C}^{(3)}\hat{B}^{(2)} + \frac{1}{2\cdot 3!\cdot 5!}\hat{\epsilon}\hat{G}^{(6)}\hat{H}^{(3)}\hat{C}^{(1)}. \end{aligned}$$

Om deze te reduceren hebben we enkel nog de reductieregels van $\hat{H}^{(7)}$ nodig. Anders dan bij de reductie van $\hat{B}^{(2)}$ en de Ramond-Ramond vormen zullen we hier wel correctietermen voor de component met een index x gebruiken. Een extra term $-5C^{(3)}C^{(2)}$ zorgt er namelijk voor dat de veldsterktes en de ijktransformaties van een eenvoudiger vorm worden. In feite is dit niets anders dan een basiskeuze voor de potentiaal $B^{(5)}$:

$$\begin{aligned} \hat{B}^{(6)}{}_{\mu_1\ldots\mu_5 x} &= B^{(5)} - 5C^{(3)}C^{(2)}, \\ \hat{B}^{(7)}{}_{\mu_1\ldots\mu_6} &= B^{(6)} - 6AB^{(5)} + 30AC^{(3)}C^{(2)}. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Reductie van de veldsterktes gaat zoals steeds via de vlakke coördinaten:

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(7)}{}_{A_1\ldots A_6 X} &= k^{-1}F^{(6)}{}_{A_1\ldots A_6}, \\ \hat{H}^{(7)}{}_{A_1\ldots A_7} &= H^{(7)}{}_{A_1\ldots A_7}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Daarmee zijn de veldsterktes van de volgende vorm:

$$\begin{aligned} F^{(6)} &= 6\partial B^{(5)} + 6\partial C^{(5)}C^{(0)} - 30\partial C^{(4)}C^{(1)} - 60\partial C^{(3)}C^{(2)} \\ &\quad -20H^{(3)}C^{(3)}C^{(0)} + 60H^{(3)}C^{(2)}C^{(1)} - 60F(B)C^{(3)}C^{(1)} \\ &\quad +15F(A)C^{(4)}C^{(0)} - 45F(A)C^{(2)}C^{(2)}, \\ H^{(7)} &= 7\partial B^{(6)} - 70\partial C^{(3)}C^{(3)} + 42\partial C^{(5)}C^{(1)} \\ &\quad -140H^{(3)}C^{(3)}C^{(1)} - 21F(A)B^{(5)} + 105F(A)C^{(4)}C^{(1)}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Zij zijn invariant onder de volgende ijktransformaties:

$$\begin{aligned} \delta B^{(5)} &= 5\partial\Sigma^{(4)} + 20C^{(3)}\partial\Lambda^{(1)} + 5C^{(4)}\partial\Lambda^{(0)} - 20C^{(3)}B^{(1)}\partial\Lambda^{(0)}, \\ \delta B^{(6)} &= 6\partial\Sigma^{(5)} + 30A\partial\Sigma^{(4)} + 30C^{(3)}\partial\Lambda^{(2)} + 60AC^{(3)}\partial\Lambda^{(1)} \\ &\quad -6C^{(5)}\partial\Lambda^{(0)} + 30C^{(3)}(B^{(2)} + AB^{(1)})\partial\Lambda^{(0)}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

De negendimensionale Lagrangiaan wordt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sqrt{|g|}e^{-2\phi}\Big(R - 4(\partial\phi)^2 + (\partial\log k)^2 + \frac{1}{4\cdot 3!}(H^{(3)})^2 \\ &\quad +\frac{1}{4\cdot 7!}e^{4\phi}(H^{(7)})^2 - \frac{1}{4}k^2F^2(A) - \frac{1}{8}k^{-2}F^2(B) - \frac{1}{4\cdot 6!}k^{-2}e^{4\phi}(F^{(6)})^2\Big) \\ &\quad +\sqrt{|g|}\Big(\frac{k^{-1}}{2\cdot 1!}(G^{(1)})^2 - \frac{k}{2\cdot 2!}(G^{(2)})^2 + \frac{k^{-1}}{2\cdot 3!}(G^{(3)})^2 - \frac{k}{2\cdot 4!}(G^{(4)})^2\Big) \\ &\quad +\frac{1}{2\cdot 3!\cdot 5!}\,\epsilon\,\Big(G^{(6)}H^{(3)}C^{(1)} - 6AG^{(5)}H^{(3)}C^{(1)} + G^{(6)}H^{(3)}AC^{(0)}\Big). \end{aligned} \tag{3.52}$$

De common sector is niet meer manifest invariant voor verwisselen van A en $B^{(1)}$. Er zijn twee manieren om dat op te lossen. De eerste mogelijkheid is

Hodge-dualiteit toepassen en de gebruikelijke actie (3.4) van Type II terug te vinden. Dan komen we terug in de situatie uit sectie 3.1 van de "gewone" T-dualiteit tussen Type IIA en IIB.
De tweede manier is ook de Kaluza-Klein vector A dualiseren. In tien dimensies komt dit echter overeen met een stuk uit de metriek, waarvoor geen Hodge-dualisatie mogelijk is. Wat men wel kan doen, is de Hodge-dualiteitsrelatie opliften naar tien dimensies. Dan bekomt men een relatie die alleen geldt als er een isometrie is. De T-duale van $\hat{H}^{(7)}$ is dus een nieuwe vorm, die men $\hat{N}^{(7)}$ noemt. Daar blijft het niet bij, en al deze vormen nauwkeurig bestuderen zou ons te ver voeren. Hier is dieper op ingegaan in [16].

3.5 Een uitstapje naar 11 dimensies

De Type IIA supergravitatie vindt men als dimensionele reductie van de elfdimensionale supergravitatie[17]. Een vraag die zich stelt is, of er een democratische versie van deze theorie bestaat. En zo ja: reduceert deze naar de democratische Type IIA?

De actie van de elfdimensionale theorie[1] is

$$\mathcal{L} \;=\; \sqrt{|\bar{g}|}\Big(\bar{R}-\frac{1}{2\cdot 4!}(\bar{G}^{(4)})^2\Big)-\frac{1}{144^2}\bar{\epsilon}\bar{G}^{(4)}\bar{G}^{(4)}\bar{C}^{(3)}. \tag{3.53}$$

De veldsterkte wordt gedefinieerd door

$$\bar{G}^{(4)} \;=\; 4\partial\bar{C}^{(3)}. \tag{3.54}$$

De drievorm potentiaal heeft als ijkvariatie

$$\delta\bar{C}^{(3)} \;=\; 3\partial\bar{\Lambda}^{(2)}. \tag{3.55}$$

Laten we de actie dimensioneel reduceren. Dit gebeurt via de reductieregels

$$\bar{e}_{\bar{\mu}}{}^{\bar{A}} \;=\; \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{3}\hat{\phi}}\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{A}} & e^{\frac{2}{3}\hat{\phi}}\hat{C}_{\hat{\mu}} \\ 0 & e^{\frac{2}{3}\hat{\phi}} \end{pmatrix} \tag{3.56}$$

De Kaluza-Klein scalar wordt onder de vorm van een e-macht geschreven. Het zal namelijk de rol spelen van het dilaton in Type IIA. De herschaling van de metriek is zodanig gekozen dat de dilatonkoppeling van Type IIA gegeven door (2.3) eruit volgt. De Kaluza-Klein vector wordt de Ramond-Ramond éénvorm:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= e^{-\frac{2}{3}\hat{\phi}}\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - e^{\frac{4}{3}\hat{\phi}}\hat{C}_{\hat{\mu}}\hat{C}_{\hat{\nu}}, \\ \bar{g}_{\hat{\mu}\hat{x}} &= -e^{\frac{4}{3}\hat{\phi}}\hat{C}_{\hat{\mu}}, \\ \bar{g}_{\hat{x}\hat{x}} &= -e^{\frac{4}{3}\hat{\phi}}. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Ook hier krijgt de Kaluza-Klein vector een ijktransformatie vanuit een coördinatentransformatie in de elfde dimensie. Laten we de parameter van deze transformatie $\hat{\Lambda}^{(0)}$ noemen, zodat de overeenkomst met Type IIA duidelijk is:

$$\delta\hat{C}^{(1)} \;=\; \partial\hat{\Lambda}^{(0)}. \tag{3.58}$$

[1] Voor alle duidelijkheid: de velden met een streep zijn elfdimensionaal.

De drievorm $\bar{C}^{(3)}$ reduceert naar de Ramond-Ramond drievorm en het axion. De reductieregel verschilt van deze van de vormen uit Type IIA en Type IIB. Nu komt er geen correctie bij de drievorm. De scalaire ijkvariatie die van de elfdimensionale coördinatentransformatie komt, hoeft niet weggetransformeerd te worden:

$$\begin{aligned} \bar{C}^{(3)}{}_{\mu\nu x} &= \hat{B}_{\mu\nu}, \\ \bar{C}^{(3)}{}_{\mu\nu\rho} &= \hat{C}^{(3)}{}_{\mu\nu\rho}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Voor de reductie van de parameter van de ijktransformatie stellen we voor:

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}^{(2)}{}_{\mu x} &= \hat{\Sigma}^{(1)}{}_{\mu}, \\ \bar{\Lambda}^{(2)}{}_{\mu\nu} &= \hat{\Lambda}^{(2)}{}_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Bij elkaar nemen van de reductieregels levert deze actie [17]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sqrt{|\hat{g}|}\; e^{-2\hat{\phi}}\Big(\hat{R} - 4(\partial\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2\cdot 3!}\hat{H}^2\Big) \\ &\quad -\sqrt{|\hat{g}|}\;\Big(\frac{1}{2\cdot 2!}(\hat{G}^{(2)})^2 + \frac{1}{2\cdot 4!}(\hat{G}^{(4)})^2\Big) \\ &\quad -\frac{1}{144}\;\hat{\epsilon}\;\partial\hat{C}^{(3)}\;\partial\hat{C}^{(3)}\;\hat{B}. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Dit is inderdaad de actie (2.3) van Type IIA.

Een democratische elfdimensionale theorie verkrijgen we door de techniek van de on-shell dualisatie, zoals in sectie 2.2.2:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sqrt{|\bar{g}|}\Big(\bar{R} - \frac{1}{4\cdot 4!}(\bar{G}^{(4)})^2 + \frac{1}{4\cdot 7!}(\bar{G}^{(7)})^2\Big) \\ &\quad +\frac{1}{3^4\;2^9}\bar{\epsilon}\bar{G}^{(4)}\bar{G}^{(4)}\bar{C}^{(3)}. \end{aligned} \tag{3.62}$$

De zevenvorm-veldsterkte is de Hodge-duale van de viervorm. De potentiaal is door de on-shell dualisatie bepaald:

$$\begin{aligned} \bar{G}^{(7)} &= \frac{1}{\sqrt{|\bar{g}|}}\frac{1}{4!}\bar{\epsilon}\bar{G}^{(4)}, \\ \bar{G}^{(7)} &= 7\partial\bar{G}^{(6)} - 70\partial\bar{C}^{(3)}\bar{C}^{(3)}. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Zal deze actie reduceren naar de actie (3.30) van de democratische Type IIA? Voor we beginnen te rekenen kunnen we al enkele dingen weten. De veldsterkte $\bar{G}^{(7)}$ zal reduceren naar een zevenvorm en een zesvorm. De laatste kan de $\hat{G}^{(6)}$ uit (3.30) worden. De eerste is door Hodge-dualiteit verbonden met de componenten met x uit $\bar{G}^{(4)}$, dus met $\hat{H}^{(3)}$. We kunnen dus een $\hat{H}^{(7)}$ verwachten. $\hat{G}^{(8)}$ zal dan weer niet in de reductie verschijnen. Er is geen enkele vorm van orde acht of negen, die bij reductie een achtvorm zou kunnen geven. In tien dimensies is de achtvorm de Hodge duale van $\hat{G}^{(2)}$. Deze laatste is echter de veldsterkte van de Kaluza-Klein vector, dus in elf dimensies is de Hodge-dualiteitsrelatie niet evident. In feite is dit hetzelfde probleem als bij de reductie van $\hat{H}^{(7)}$ naar negen dimensies (zie sectie 3.4).

Stellen we de volgende reductieregels voor:

$$\begin{aligned} \bar{C}^{(6)}{}_{\hat{\mu}_1\ldots\hat{\mu}_5 X} &= -\hat{C}^{(5)}{}_{\hat{\mu}_1\ldots\hat{\mu}_5} + 5\hat{C}^{(3)}{}_{[\hat{\mu}_1\ldots\hat{\mu}_3}\hat{B}^{(2)}{}_{\hat{\mu}_4\hat{\mu}_5]}, \\ \bar{C}^{(6)}{}_{\hat{\mu}_1\ldots\hat{\mu}_6} &= \hat{B}^{(6)}{}_{\hat{\mu}_1\ldots\hat{\mu}_6}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

De hulpvelden zijn zo gekozen dat de veldsterktes de gekende vorm (2.35) krijgen. De reductie van de veldsterktes in vlakke indices is:

$$\begin{aligned} \bar{G}^{(7)}{}_{A_1\ldots A_6 X} &= -\hat{G}^{(6)}{}_{A_1\ldots A_6}, \\ \bar{G}^{(7)}{}_{A_1\ldots A_7} &= \hat{H}^{(7)}{}_{A_1\ldots A_7}. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Dit zorgt voor de volgende veldsterktes in functie van tiendimensionale velden:

$$\begin{aligned} \hat{G}^{(6)} &= 6\partial\hat{C}^{(5)} - 60\partial\hat{B}^{(2)}\hat{C}^{(3)}, \\ \hat{H}^{(7)} &= 7\partial\hat{B}^{(6)} - 70\partial\hat{C}^{(3)}\hat{C}^{(3)} + 42\partial\hat{C}^{(5)}\hat{C}^{(1)} - 420\partial\hat{B}^{(2)}\hat{C}^{(3)}\hat{C}^{(1)}. \end{aligned} \tag{3.66}$$

De Lagrangiaan die uit de reductie volgt is

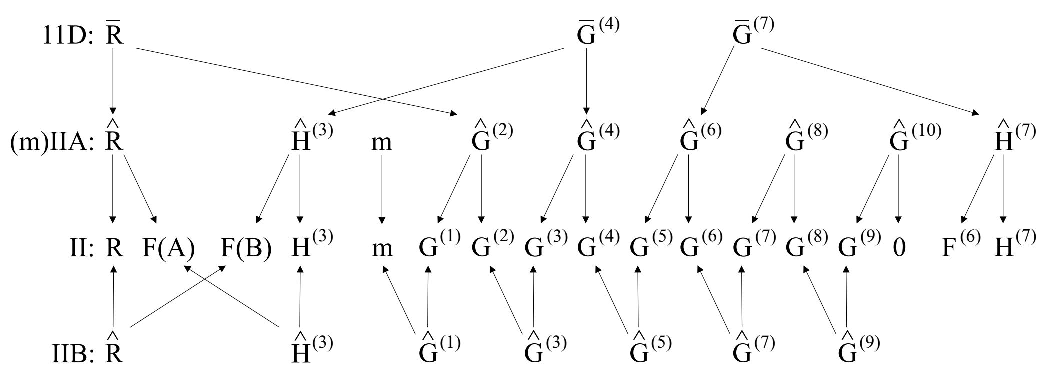
$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sqrt{|\hat{g}|}\; e^{-2\hat{\phi}}\Big(\hat{R} - 4(\partial\hat{\phi})^2 + \frac{1}{4\cdot 3!}(\hat{H}^{(3)})^2 + \frac{1}{4\cdot 7!}e^{4\hat{\phi}}(\hat{H}^{(7)})^2\Big) \\ & -\sqrt{|\hat{g}|}\;\Big(\frac{1}{2\cdot 2!}(\hat{G}^{(2)})^2 + \frac{1}{4\cdot 4!}(\hat{G}^{(4)})^2 + \frac{1}{4\cdot 6!}(\hat{G}^{(6)})^2\Big) \\ & +\frac{1}{2\cdot 144}\;\hat{\epsilon}\;\partial\hat{C}^{(3)}\;\partial\hat{C}^{(3)}\;\hat{B}^{(2)}. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Deze actie zou equivalent moeten zijn aan deze van Type IIA. Combineren van de on-shell dualisatie van $\hat{G}^{(4)}$ (sectie 2.2.2) en deze van $\hat{H}^{(3)}$ (sectie 3.4) leert ons dat het inderdaad zo is.

3.6 Besluit

We hebben de T-dualiteit tussen Type IIA en Type IIB in verschillende formuleringen aangetoond. Als eerste resultaat hebben we de T-dualiteit tussen Type IIA en Type IIB, wat overeenkomt met [14]. Vervolgens is er de massieve T-dualiteitsrelatie tussen de massieve Type IIA en Type IIB, zoals ook aangetoond in [7]. Het belangrijkste werk was echter de T-dualiteitsrelaties opstellen voor de democratische formulering. Dat is gebeurd in sectie 3.3.
Tenslotte reduceerden we de democratische versie van de elfdimensionale theorie naar een actie die via Hodge-dualiteit equivalent is aan Type IIA.
On-shell Hodge-dualiteit commuteert dus, voor de meeste potentialen althans, met dimensionele reductie en T-dualiteit. Een veld dat hierin problemen oplevert is het Kalb-Ramond veld $\hat{H}^{(3)}$, zoals even aangehaald is in sectie 3.4.

Een overzicht van de uitgevoerde reducties vindt u hier.



Figuur 3.6: Schema van de reducties

Bibliografie

[1] T. Busher, *Quantum Corrections and Extended Supersymmetry in New Sigma Models*, Phys. Lett. **B159** (1985) 127; *A Symmetry of the String Background Field Equations*, ibid. **B194**(1987) 59; *Path Integral derivation of Quantum Duality in Non-Linear Sigma Models*, ibid. **B201** (1988) 466.

[2] E. Lozano Tellechea, *Solitons, Vacua and Gauge Duals in Supergravity*, PhD-thesis aan de Univeridad Autonóma de Madrid (2003).

[3] T. Ortín Miguel, *Gravity and Strings*, in voorbereiding; dit boek zal gepubliceerd worden door de Cambridge University Press.

[4] E. Bergshoeff, H.-J. Boonstra; T. Ortín, *S Duality and Dyonic p-Brane Solutions in Type II String Theory*, Phys. Rev. **D53**(1996) 7206-7212, hep-th/9508091.

[5] E.C.G. Stückelberg, Helv. Phys. Acta **11**, (1983) 225.

[6] L.J. Romans, *Massive N=2a Supergravity in Ten Dimensions*, Phys. Lett. **B196** (1986) 374.

[7] E. Bergshoeff, M. de Roo, M.B. Green, G. Papadopoulos, P.K. Townsend, *Duality of Type II 7-Branes and 8-Branes*, Nucl. Phys. **B470** (1996) 113-135, hep-th/9601150.

[8] E. Bergshoeff, R. Kallosh, T. Ortín, D. Roest, A. Van Proeyen, *New Formulations of D=10 Supersymmetry and D8-O8 Domain Walls*, Class. Quant. Grav. 18 (2001) 3359-3382, hep-th/0103233.

[9] L. Randall, R. Sundrum, *An Alternative to Compactification*, Phys.Rev.Lett. **83** (1999) 4690-4693, hep-th/ 9906064.

[10] T. Kaluza, *On the problem of Unity in Physics*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Klasse (1921) 966.
O.Klein, *Quantum Theory and Five-dimensional Theory of Relativity*, Z.F. Physik 37 (1926) 895.

[11] J. Maharana, J.H. Schwarz, *Non-Compact Symmetries in String Theory*, Nucl. Phys **390** (1993) 3.

[12] S.F. Hassan, A. Sen, *Marginal Deformations of WZNW and Coset Models from O(d,d) Transformation*, Nucl.Phys. **B405** (1993) 143-165, hep-th/9210121.

[13] J. Scherk, J.H. Schwarz, *How to Get Masses from Extra Dimensions*, Phys. Lett. **B153** (1979) 61-88.

[14] E. Bergshoeff, C. M. Hull, T. Ortín, *Duality in the Type-II superstring effective action*, Nucl. Phys **B451** (1995) 547-578, hep-th/9504081.

[15] E. Eyras, Y. Lozano, *The Kaluza-Klein Monopole in a Massive IIA Background*, Nucl.Phys. **B546** (1999) 197-218

[16] C.M. Hull, JHEP9807 (1998) 018, hep-th/9712075.

[17] E. Cremmer,*U-Duality and BPS Spectrum of Super Yang-Mills Theory and M-Theory* B. Julia, J. Scherk, *Supergravity Theory in 11 Dimensions*, Phys. Lett. **B76** (1987) 409. 467, 471, 630.