KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

Faculteit Wetenschappen

Departement Natuurkunde en Sterrenkunde

INSTITUUT VOOR THEORETISCHE FYSICA

p-branen in supergravitatie: veralgemening naar oplossingen met een kosmologische constante.

door

Stefan Knippenberg

Promotors:
Prof. dr. W. Troost
dr. B. Janssen

Eindverhandeling, voorgedragen tot het bekomen van de graad van Licentiaat in de Natuurkunde

2002-2003

Proloog

Alvorens van wal te steken en het ruime sop der theoretische fysica te kiezen, wil ik eerst al de mensen bedanken die op één of andere wijze aan mee aan de wieg van dit werk stonden. Een thesis – of “eindverhandeling”zoals het beestje officieel heet – maak je immers nooit alleen, meer nog, zonder je medemensen zou de gedachte eraan zelfs onmogelijk zijn.
In het bijzonder denk ik dan aan mijn beide promotoren, Prof. Walter Troost en post-doc Bert Janssen. Zij leidden mij binnen in de wereld van de hoge-energiefysica, zij waren het die me steeds met raad bijstonden, zij waren het òòk die hun werk even opzij legden wanneer ik met een “Euhm, sorry, ik heb een vraagje”bij hen kwam aankloppen. Bedankt!
Naast mijn beide promotoren wil ik ook alle andere leden van de zesde verdieping bedanken, altijd kon ik hen met allerlei praktische, iets minder praktische en zelfs levensbeschouwelijke vraagjes lastig vallen.
Een speciaal “dank je wel”aan Joke, die samen met mij menig uur op de zesde verdieping heeft doorgebracht. Dat elkaar ondersteunen vruchten afwerpt, dat mag wel gezegd worden.
Een portie welgemeende dank gaat niet te vergeten ook naar ’s werelds grootste dichters die mijn avonden en nachten konden opvrolijken. Dank aan Sofie en Leen, die mij te gelegener tijd de nodige poëtische teksten verschaften.
Een thesis sluit echter ook een studietijd af. Bij deze wil ik dan ook iedereen in de spotlights zetten die mij gedurende de laatste vier jaren door dik en dun gesteund hebben: mijn studiegenoten van de eerste kan tot en met de laatste lic, leden zowel als oudleden van Descartes, mijn vrienden overal te lande,... allemaal wisten ze hoe het hart op de juiste plaats te steken. Als last but certainly not least bedank ik papa, mama, Veerle en Guy voor hun steun die ze mij op ieder vlak en op elke wijze gaven.

De wereld is mijn voorstelling.
A. Schopenhauer

Inhoudsopgave

1 Inleiding

1.1 Kader

Een eeuw geleden ontstond de kwantummechanica. Deze contra-intuïtieve theorie haalde de gekende fysica niet weinig overhoop. Doch, het verloop van de eeuw gaf duidelijk aan dat het de moeite was: allerlei technieken die op de kwantumtheorie steunden, zagen het levenslicht. De wijd verspreide buislampen zijn maar een voorbeeld. De theorie bleek onontbeerlijk om de stuctuur van de materie te kunnen verklaren. Het elektro-magnetisme, de zwakke en de sterke wisselwerking kregen dan ook hun kwantumversie. Het kostte misschien wel wat moeite: er bleken hardnekkige divergenties op te treden, die men middels speciale technieken zoals renormalisatie uiteindelijk wel onder de knie kreeg. Wat de gravitatie echter betrof, kon geen middel baten; tot op heden is er geen kwantumtheorie van gravitatie bekend.

De snaartheorie ("string theory"), een onderdeel van de hoge-energiefysica, is vandaag echter de beste kandidaat om die kwantumgravitatie te vormen. Het is een perturbatieve theorie waarvan de fundamentele bouwstenen snaren zijn in plaats van puntdeeltjes. Dit zorgt er dan voor dat de divergenties wegvallen. De elementaire deeltjes zijn verschillende trillingsmodi van de snaar. De aandacht gaat steeds uit naar een theorie met supersymmetrie, waarbij bosonen en fermionen aan elkaar gerelateerd worden. Tachyonen worden hierdoor gemeden. Er bestaan vijf soorten tiendimensionale[1] supersnaartheorieën, die allemaal equivalent en zelfs door middel van dualiteiten met elkaar verbonden zijn. In 1995 [1] vond men aanwijzingen dat deze theorieën allemaal slechts verschillende expansies zijn van één unieke onderliggende elfdimensionale theorie die men M-theorie noemt.

De thesis handelt in het bijzonder over de benadering van snaartheorie bij lage energie: enkel interacties met massaloze deeltjes in de initiële en in de eindfase worden bekeken (voor een instructieve uitleg zie [2]). Tijdens de interacties kunnen naast de massaloze modes van de snaar, die zonder problemen meegenomen worden, ook massieve modes optreden. Deze laatste worden dan uitgeïntegreerd tot een effectieve interactie. Dit kan men doen omdat er een enorm energieverschil bestaat tussen massieve en niet-massieve modes: de massieve bevinden zich op de Planckschaal (10^{19} GeV/c^2). Men noemt deze effectieve theorie "supergravitatie", waarbij de snaren terug als deeltjes beschouwd worden. Het beschrijft daardoor zeker niet alle fysica die bevat is in de volledige snaartheorie, maar er zijn toch vele eigenschappen die in supergravitatie terugkomen. Zo hebben de vijf theorieën uit de snaartheorie hun equivalent in de effectieve theorie. Twee van deze theorieën zijn de zogenaamde IIA- en IIB- supergravitatie, waarvan in dit werk de bosonische delen nader bekeken worden. Ook de dualiteiten die in de snaartheorie leven, komen voor in deze limiet. Door dimensionale reductie kan men tevens vanuit een hogerdimensionale naar een lagerdimensionale wereld overgaan. In essentie is het zelfs mogelijk om vanuit $D = 10$ dimensies terug te komen tot onze bekende $D = 4$. In supergravitatie kan men zelfs verder bewijzen dat IIA de dimensionale reductie is van een elfdimensionale theorie, waarvan men misschien kan aannemen dat ze de lage-energielimiet is van de M-theorie.

Waarom zouden wij ons beperken tot snaren die slechts één ruimtelijke dimensie hebben? Inderdaad, in 1987 ontdekte men de p-branen, die stabiele, puur bosonische oplossingen zijn van

[1] Zowel het aantal als de dimensie van de theorieën is nodig om anomalieën tegen te gaan.

de niet-lineaire vergelijkingen van supergravitatie. Ze nemen, zoals de snaren, de vorm aan van objecten met een zekere uitbreiding; het gehele getal p staat voor het aantal ruimtelijke richtingen die ze beslaan. Branen zijn op een bepaalde manier noodzakelijk om de theorie consistent te maken; zo wordt het binnen snaartheorie immers bijvoorbeeld mogelijk dat snaren met Dirichlet-randvoorwaarden op zogenaamde D-branen eindigen. De motivatie om dit soort objecten te bekijken is na te gaan of het mogelijk is dat wij op een driedimensionale braan leven in de hogerdimensionale ruimtetijd [3]. Hiertoe zouden we alle fysica die wij nu in onze wereld kennen, moeten kunnen introduceren op de braan. Deze thesis kan dan gezien worden als een eerste stap in de richting van dit summum. Steeds wijzigen we iets meer aan onze vertrekpunten, wat dan in een ingewikkeldere fysica op de braan resulteert.

We vertrekken met branen uit IIA, IIB en elfdimensionale supergravitatie waarbij er een Minkowskimetriek op hun wereldvolume gevestigd is. Deze branen blijken via de technieken van dualiteiten en dimensionale reductie met elkaar verbonden te zijn. In de thesis zullen we ons verder focussen op de kromming van de branen: men weet dat branen met willekeurige dimensie vlak (dit zijn dan de branen waarvan wij vertrokken) of Riccivlak kunnen zijn en dat domeinmuren – dit zijn branen met $p = D - 2$ – constant gekromd kunnen zijn. In het geval van de Riccivlakke braan kunnen we bewijzen dat er gravitatie op de braan voorkomt; een fantastische illustratie over de modelbuilding op de braan. De domeinmuren spreken verder zelfs over een kosmologische constante op hun wereldvolume. Dit is een soort vaccuümenergie, wat we kunnen vergelijken met de nulpuntsenergie van een harmonische oscillator. Is ze positief, dan spreken we over een positieve gekromde ruimte; is ze negatief, dan gaat het om een negatief gekromde. Hierna stellen we ons de vraag wat er zou gebeuren als we niet domeinmuren, maar algemene p-branen zouden beschouwen. Of deze dan constant gekromd kunnen zijn is echter niet in de literatuur besproken. In deze thesis zullen we dan bewijzen dat gekromde branen met een willekeurig aantal ruimtelijke dimensies onmogelijk zijn wanneer we vertrekken van dezelfde aannames als die men in de literatuur voor domeinmuren gebruikt.

1.2 Opbouw

Na een hoofdstukje over supergravitatietheorieën nemen we de dualiteiten onder de loep. We zullen zien dat T-dualiteit binnen de supergravitatie gefundeerd is op de techniek van dimensionale reductie. We illustreren hoe deze laatste het gemeenschappelijk deel van de Lagrangianen van de vijf tiendimensionale theorieën omzet naar een ruimte met negen, in het algemeen $D-1$ dimensies. Hiervan maakt dan T-dualiteit gebruik: we reduceren onze theorie op één bepaalde manier naar $D-1$ dimensies, waarna we op een andere manier naar de oorspronkelijke ruimte terugkeren. Daarna komt de Hodge-dualiteit aan bod. Ze zorgt ervoor dat twee op het eerste zicht verschillende tensoren toch dezelfde informatie dragen. Als laatste komt ten slotte S-dualiteit aan bod.
In de volgende hoofdstukken komen we tot de kern van de thesis: de branen. De bedoeling is na te gaan onder welke voorwaarden constant gekromde p-branen bestaan. Dit is een proces in meerdere stappen. In hoofdstuk 4 behandelen we branen waarbij er een Minkowskimetriek op hun wereldvolume leeft. We bekomen hier tevens een web van branen dat op een elegante wijze de technieken uit het eerste hoofstuk ten tonele brengt. In het volgende hoofdstuk proberen we de metriek op de braan te veralgemenen: eerst tot een braan met een Ricci-vlakke metriek, daarna tot domeinmuren die een constante kromming hebben. Deze domeinmuren bedden we dan in in een ruimte die een kosmologische constante bevat en dus zelf ook constant gekromd wordt. We bekijken hier twee systemen: ééntje zonder dilaton, ééntje met. In de literatuur spreekt men verder niet over algemene p-branen met constante kromming. Steunend op de aannames en de werkwijzen die doorheen de verschillende stappen opgebouwd werden, gaan we hierom zelf na hoe de constant gekromde algemene p-braan eruit ziet. Het zal duidelijk worden dat het woord "algemene" in dit verband niet gebruikt mag worden: binnen onze aannames, waardoor dit geval de voorgaande situaties bevat, zijn domeinmuren de enige branen met constante kromming.

2 Supergravitatietheorieën

Zoals gemeld in de inleiding zijn er in weze vijf soorten tiendimensionale supergravitatietheorieën, die door middel van dualiteiten met elkaar verbonden zijn. Voorbeelden zijn de supergravitatietheorieën IIA en IIB die door de zogenaamde T-dualiteit met elkaar verbonden zijn. De vijf verschillende theorieën onderscheiden zich van elkaar op basis van het voorkomen van gesloten en open snaren, alsook door de chiraliteit van de fermionen. Het probleem, waarmee men dan ook nog steeds worstelt, is echter: welk van de vijf theorieën is de juiste en waarom dan wel?

Er bestaat echter ook een elfdimensionale supergravitatietheorie: wanneer men in IIA het dilaton – en daarmee ook de stringkoppeling $g_s = e^{\phi}$ – opdrijft, ontplooit men een elfde dimensie en ontstaat er een elfdimensionale theorie. Nu is iedere supergravitatietheorie de lage-energie effectieve actie van een snaartheorie, die doorgaans dezelfde naam draagt. Men hoopt dan ook dat die laatste elfdimensionale theorie de effectieve actie is van iets elfdimensionaals, dat dan M-theorie genoemd wordt.

In deze thesis houden we ons enkel bezig met de bosonische delen van de verschillende supergravitatietheorieën. Verder werken we vaak concreet met IIA, IIB, de elfdimensionale theorie en de Common Sector. Die laatste is in feite het gemeenschappelijk gedeelte uit de Lagrangianen van de tiendimensionale supergravitatietheorieën. We belichten ze daarom even (zie b.v. [4]).

De Common Sector bevat een metriek ($g_{\mu\nu}$), de scalar (ϕ) die het dilaton genoemd wordt en een Kalb-Ramondvorm. Deze laatste is een antisymmetrische tensor met twee indices – voorgesteld door $\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ – die een ijksymmetrie $\delta_{\mathrm{ijk}}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 2\partial_{[\hat{\mu}}\hat{\Sigma}_{\hat{\nu}]}$ heeft. De veldsterkte van de Kalb-Ramondvorm wordt verder gedefinieerd als $\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} = 3\partial_{[\hat{\mu}}\hat{B}_{\hat{\nu}\hat{\rho}]}$. De Common Sector ziet er ten slotte uit als

$$\mathcal{L}_{CS} = \sqrt{|g|}e^{-2\phi}\Big[R + 4(\partial\phi)^2 + \frac{1}{12}H_3^2\Big]. \tag{2.1}$$

IIA bestaat naast de Common Sector uit een éénvorm met componenten C_μ en een drievorm met componenten $C_{\mu\nu\rho}$. De veldsterkten van de laatste twee zijn

$$\begin{aligned} F_2 &= 2\partial C_1, \qquad (2.2)\\ F_4 &= 4\Big(\partial C_3 - 3\partial B C_1\Big). \qquad (2.3) \end{aligned}$$

De Lagrangiaan ziet eruit als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{IIA} &= \sqrt{|g|}\{e^{-2\phi}\Big[R + 4(\partial\phi)^2 + \frac{1}{12}H_3^2\Big] - \frac{1}{4}F_2^2 - \frac{1}{2\cdot 4!}F_4^2\} \\ &\quad -\frac{1}{144}\epsilon\partial C_3\partial C_3 B_2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Naast de Common Sector bevat IIB velden C_0, C_2 en C_4 (of in hun componenten uitgedrukt $C, C_{\mu\nu}, C_{\mu\nu\rho\sigma}$) die de veldsterkten

$$\begin{aligned} F_1 &= \partial C_0, & (2.5)\\ F_3 &= 3\Big(\partial C_2 - \partial B_2 C_0\Big), & (2.6)\\ F_5 &= 5\Big(\partial C_4 + 3\partial B_2 C_2 - 3B_2\partial C_2\Big) & (2.7)\end{aligned}$$

meebrengen. De Lagrangiaan is

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{IIB} &= \sqrt{|g|}\{e^{-2\phi}\Big[R + 4(\partial\phi)^2 + \frac{1}{12}H_3^2\Big] + \frac{1}{2}F_1^2 + \frac{1}{12}F_3^2 + \frac{1}{4\cdot 5!}F_5^2\} \\ &\quad -\frac{1}{192}\epsilon\partial(C_4 + 3B_2C_2)\partial C_2 B_2. \qquad (2.8)\end{aligned}$$

De C's die in IIA en IIB voorkomen noemt men Ramond-Ramondvormen, terwijl de termen met een ϵ Chern-Simons termen heten. In het verdere verloop van de thesis spelen deze laatste geen expliciete rol.

De Lagrangiaan van de elfdimensionale supergravitatie bevat enkel[2] gravitatie en een viervorm veldsterkte:

$$\mathcal{L}_{11} = \sqrt{|g|}\Big[R - \frac{1}{48}F_4^2\Big], \qquad (2.9)$$

waarbij $F_4 = 4\partial C_3$, waarbij C_3 hier een willekeurig drievorm ijkveld weergeeft.

In het algemeen kunnen we al deze Lagrangianen – zelfs niet alleen die wij hier concreet hebben aangehaald, maar ook die van de andere supergravitatietheorieën – samen voorstellen onder de vorm

$$\mathcal{L} = \sqrt{|g|}\{e^{-2\phi}\Big[R + \frac{4}{D-2}(\partial\phi)^2\Big] + \frac{(-)^{k-1}}{2\cdot(k)!}e^{q\phi}F_k^2\}. \qquad (2.10)$$

q, k en D zijn hierin vrije parameters: deze Langrangiaan geldt voor algemene dimensie D, voor een willekeurige k-vorm veldsterkte en een willekeurige dilatonkoppeling q. In hoofdstukken 4 en 5 van deze thesis zullen we oplossingen voor de bewegingsvergelijkingen van deze Lagrangiaan zoeken, hetgeen binnen onze overkoepelende ruimtetijd zal leiden naar meerdimensionale oppervlakten.

[2]Het dilaton bestaat slechts in theorieën met $D \leq 10$; ze is een product dat door dimensionale reductie vanuit elf dimensies verschijnt.

3 Dualiteiten

Binnen de supergravitatie bestaan er technieken die totaal verschillende theorieën aan elkaar linken, hoe anders ze op het eerste zicht ook uit zien. In dit eerste hoofdstuk bekijken we de mechanismen of beter de dualiteiten die erachter zitten. We gaan na hoe T-dualiteit ontstaat uit de notie van dimensionale reductie, waarbij als het ware een isometrierichting tot een cilinder opgerold wordt. Daarna komt Hodge-dualiteit aan de beurt en als toemaatje bekijken we ten slotte de S-dualiteitsregels.

3.1 T-dualiteit

Het principe van T-dualiteit (Eng. Target space duality) is eenvoudig: we reduceren onze tien-dimensionale supergravitatietheorie naar negen dimensies, we voeren hier een bepaalde symmetrietransformatie uit en liften vervolgens de theorie terug op naar tien dimensies. Deze stappen gaan we na voor het gemeenschappelijk gedeelte van de Lagrangianen binnen de supergravitatie, dus ook van IIA en IIB. We noemen het toepasselijk de Common Sector. In het eerste deel van deze paragraaf zoeken we een uitdrukking ervan in negen of, algemeen, $D-1$ dimensies. Op dit resultaat passen we verderop in het tweede deel een symmetrietransformatie toe: het blijkt dat het hier om $O(1,1)$-symmetrie gaat, die nog in verschillende delen kan opgesplitst worden. Eén van hen geeft dan in tien dimensies aanleiding tot de gezochte T-dualiteit.

3.1.1 Dimensionale reductie van de Common Sector

Een theorie in D dimensies impliceert soms het bestaan van een theorie in $D-1$ dimensies. Het kan immers zijn dat er in de eerste ruimte een isometrie-richting bestaat, waarin ieder object constant blijft. In dat geval kunnen we deze D-dimensionale ruimte als het ware over de isometrierichting oprollen tot een $(D-1)$-dimensionale cilinder. Hetzelfde geldt voor de oplossingen van de bewegingsvergelijkingen van de hogerdimensionale theorie: er bestaan situaties waarbij ze omgezet kunnen worden in oplossingen van de Lagrangiaan in de lagerdimensionale theorie. Hoe deze compactificatie eruit ziet in de taal der tensoren en wat de consequenties ervan zijn, volgt in dit hoofdstuk. Als doel willen we uiteindelijk weten hoe de Common Sector eruit ziet in $D-1$ dimensies. Het is, met $D=10$, immers deze uitdrukking die we nodig hebben om straks, in het volgende deel, de symmetrieoperatie ervan te kunnen bekijken.

De taal der tensoren Alvorens de compactificatie zelf aan te vatten, is het belangrijk eerst het formalisme ervan onder de loep te nemen: wat zijn die tensoren?

Een tensor is niet meer dan een stel geïndexeerde functies op een zekere ruimte die op een bepaalde manier transformeren. Stel immers dat op een ruimte $\widetilde{U}$ met coördinaten $(\widetilde{x}^\iota)$ een stel geïndexeerde functies gegeven is:

$$\widetilde{Q}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l}(\widetilde{x}^\iota)$$

dan vormt dit stel de componenten van een tensorveld enkel en alleen indien dit stel voldoet aan de transformatieregel

$$Q_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_q}(x) = \widetilde{Q}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_q}(\widetilde{x})\frac{\partial\widetilde{x}^{\mu_1}}{\partial x^{\sigma_1}}\cdots\frac{\partial\widetilde{x}^{\mu_q}}{\partial x^{\sigma_q}} \tag{3.1}$$

en dit voor elke coördinatentransformatie $f : U \to \tilde{U} : x \to \tilde{x}$.

Infinitesimaal schrijft men (3.1) als

$$\delta Q_{\mu_1\cdots\mu_q} = \xi^\rho \partial_\rho Q_{\mu_1\cdots\mu_q} + \partial_{\mu_1}\xi^\rho Q_{\rho\mu_2\cdots\mu_q} + \cdots + \partial_{\mu_q}\xi^\rho Q_{\mu_1\cdots\mu_{(q-1)}\rho}. \tag{3.2}$$

Opmerking: In hetgeen volgt, nemen we aan dat de ruimte één isometrierichting x bevat, waarin geen enkele tensor een afhankelijkheid heeft. We nemen dus aan dat de Lieafgeleide $\mathcal{L}_x$ van ieder object K nul geeft. Door aangepaste coördinaten te kiezen, wordt deze voorwaarde $\partial_x K = 0$. Vervolgens spreken we voor deze sectie 3.1 af dat D-dimensionale objecten en de indices die al de D dimensies doorlopen, een hoed ($\hat{}$) krijgen. $(D-1)$-dimensionale objecten en indices die slechts $D-1$ dimensies doorlopen, schrijven we dan zonder hoed. Zo spreken we over $\hat{y} = (y^\mu, y^x)$ en weten we dat een tensor $\hat{C}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ meer componenten heeft dan $C_{\mu\nu}$.

We bekijken verder wat (3.2) in dergelijke ruimte met zich meebrengt: bij dimensionale reductie gedraagt de D-dimensionale algemene coördinatentransformatie zich immers als een samenstelling van een lagerdimensionale algemene coördinatentransformatie met een ijksymmetrie. We gaan dit na voor alle objecten die in de Common Sector voorkomen. In casu gaat het dan over de scalar ϕ die men het dilaton noemt, de metriek $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, de Ricciscalar R, de Kalb-Ramondvorm en de veldsterkte van deze laatste. De Ricciscalar vormt een maat voor de kromming van een ruimte. Formules (A.3)-(A.5) geven weer hoe deze scalar volledig bepaald wordt door de metriek $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$.

Reductie van de metriek en de krommingstensoren De verschillende componenten van $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ transformeren volgens (3.2) met $p = 2$ als

$$\begin{aligned}
\delta\hat{g}_{xx} &= \hat{\xi}^\rho \partial_\rho \hat{g}_{xx}, && (3.3)\\
\delta\hat{g}_{\mu x} &= \hat{\xi}^\lambda \partial_\lambda \hat{g}_{\mu x} + \partial_\mu \hat{\xi}^\lambda \hat{g}_{\lambda x} + \partial_\mu \hat{\xi}^x \hat{g}_{xx}, && (3.4)\\
\delta\hat{g}_{\mu\nu} &= \underbrace{\hat{\xi}^\lambda \partial_\lambda \hat{g}_{\mu\nu} + \partial_\mu \hat{\xi}^\lambda \hat{g}_{\lambda\nu} + \partial_\nu \hat{\xi}^\lambda \hat{g}_{\mu\lambda}}_{c.tr.} + \underbrace{\partial_\mu \hat{\xi}^x \hat{g}_{x\nu} + \partial_\nu \hat{\xi}^x \hat{g}_{\mu x}}_{extra}. && (3.5)
\end{aligned}$$

Het valt duidelijk op dat de transformatie een coördinatentransformatie *(c.tr.)* bevat in $D-1$ dimensies plus *extra* termen. Om dit geheel vanuit die lagerdimensionale wereld te bekijken, dienen we deze laatste weg te transformeren of te verklaren.

Definieer de $(D-1)$-dimensionale objecten

$$\begin{aligned}
-k^2 &= \hat{g}_{xx}, && (3.6)\\
A_\mu &= \frac{\hat{g}_{\mu x}}{\hat{g}_{xx}}, && (3.7)\\
g_{\mu\nu} &= \hat{g}_{\mu\nu} - \frac{\hat{g}_{\mu x}\hat{g}_{\nu x}}{\hat{g}_{xx}}, && (3.8)
\end{aligned}$$

waarbij k en A_μ de Kaluza-Klein scalar respectievelijk vector heten, genoemd naar de personen die tachtig jaar geleden voor het eerst dit idee van compactificatie geuit hebben [5] in een poging om gravitatie en elektromagnetisme te unificeren. De scalar k kan geïnterpreteerd worden als de straal van de richting waarover men compactificeert. Bemerk verder dat dimensionale reductie van de metriek een scalar, een vector en een andere tweetensor met zich meebrengt.

Uit (3.7) en (3.4) volgt dat de $(D-1)$-dimensionale A_μ een ijktransformatie heeft

$$\begin{aligned} \delta_{\text{ijk}} A_\mu &= \partial_\mu \hat{\xi}^x, \\ &\equiv \partial_\mu \xi. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Vermits het hier gaat om een $U(1)$-ijktransformatie, kan A_μ met de Maxwellpotentiaal geïdentificeerd worden. De extra termen uit (3.5) daarentegen vallen weg; een berekening van de ijktransformatie van $g_{\mu\nu}$ levert dan ook $\delta_{\text{ijk}} g_{\mu\nu} = 0$.

Een andere manier om de reductie van de metriek aan te pakken steunt op het inzicht dat het reduceren in een vlakke ruimte – door de triviale metriek – eenvoudiger is dan in een gekromde. Daarom tracht men een willekeurige metriek $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ te schijven in functie van een vlakke metriek $\hat{\eta}_{\hat{A}\hat{B}}$. Lokaal kan men deze basisveranderingen weergeven met behulp van de matrices $\hat{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{A}}$ die Vielbeins genoemd worden: ze drukken de transformatie in de raakruimte uit van een basis, die bestaat uit de differentialen van de coördinaten op de variëteit en die noch genormeerd noch orthogonaal is, naar een nieuwe basis, die dit keer wel orthonormaal is. Mathematisch drukt men dit uit d.m.v.[3]

$$\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{A}} \hat{e}_{\hat{\nu}}^{\hat{B}} \hat{\eta}_{\hat{A}\hat{B}} \tag{3.10}$$

of –via inverse Vielbeins– d.m.v.

$$\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{e}_{\hat{A}}^{\hat{\mu}} \hat{e}_{\hat{B}}^{\hat{\nu}} \hat{\eta}^{\hat{A}\hat{B}}. \tag{3.11}$$

Men kan steeds de bases zo kiezen dat

$$\hat{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{A}} = \begin{pmatrix} e_\mu^A & kA_\mu \\ 0 & k \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad \hat{e}_{\hat{A}}^{\hat{\mu}} = \begin{pmatrix} e_A^\mu & -A_\mu e_A^\mu \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Men kan dan gemakkelijk de reductie van de metriek narekenen d.m.v. dit nieuwe formalisme. De dimensionale reductie van de inverse metriek volgt even eenvoudig. De Vielbeins vormen een uitermate elegant formalisme om dimensonale reductie aan te pakken, zoals we zullen merken aan de reductie van de Ricciscalar en de veldsterkte van de Kalb-Ramondvorm.

Nu de reductie van de metriek gekend is, kunnen we de reductie van de Riccitensor $\hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ en de Ricciscalar bepalen, die beide in ((A.3)-(A.5)) op basis van de metriek gefundeerd worden. De connectiecoëfficiënten, die we via (3.6-3.8) berekenen, zijn

[3]Bemerk de notatie: Griekse indices gebruiken we wanneer het gaat om "gekromde ruimte", terwijl we de hoofdletters $A, B, \ldots$ aanwenden in het geval van een "vlakke ruimte". De woorden "gekromd"respectievelijk "vlak"slaan, zoals blijkt uit bovenstaand betoog, op de metriek. Het spreken over een "vlakke ruimte"i.p.v. "in geval van een orhonormale metriek"en het analoge voor de "gekromde ruimte"is dan ook slechts woordgebruik.

$$
\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^x_{xx} &= -kA^\rho\partial_\rho k && (3.13)\\
\hat{\Gamma}^x_{\lambda x} &= \frac{k^2}{2}A^\rho F_{\lambda\rho} - kA^\rho\partial_\rho(k)A_\lambda + \frac{1}{k}\partial_\lambda k && (3.14)\\
\hat{\Gamma}^x_{\mu\nu} &= -A_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu} + \frac{1}{2}A^\rho k^2(A_\nu F_{\mu\rho} + F_{\nu\rho}A_\mu)\\
&\quad -A^\rho k\partial_\rho(k)A_\mu A_\nu + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu)\\
&\quad +\frac{1}{k}(\partial_\mu(k)A_\nu + \partial_\nu(k)A_\mu) && (3.15)\\
\hat{\Gamma}^\lambda_{xx} &= kg^{\lambda\rho}\partial_\rho k && (3.16)\\
\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu x} &= \frac{k^2}{2}g^{\lambda\rho}F_{\rho\mu} + kA_\mu g^{\lambda\rho}\partial_\rho k && (3.17)\\
\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} &= \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{k^2}{2}g^{\rho\lambda}(A_\mu F_{\rho\nu} + A_\nu F_{\rho\mu}) + kg^{\lambda\rho}\partial_\rho(k)A_\mu A_\nu, && (3.18)
\end{aligned}
$$

waarbij $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ het $(D-1)$-dimensionale Christoffelsymbool voorstelt en $F_{\mu\nu}$ de veldsterkte van de Kaluza-Kleinvector A_μ.

Dit geeft ons

$$
\begin{aligned}
\hat{R}_{xx} &= -k\nabla_\lambda(\partial^\lambda k) - \frac{k^4}{4}F^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda} && (3.19)\\
\hat{R}_{\mu x} &= -\nabla_\lambda(g^{\lambda\rho}F_{\rho\mu})\frac{k^2}{2} - kA_\mu\nabla_\lambda\partial^\lambda k - \frac{k^4}{4}A_\mu F^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda} + \frac{3k}{2}g^{\rho\sigma}\partial_\rho(k)F_{\mu\sigma} && (3.20)\\
\hat{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + \frac{1}{k}\nabla_\mu(\partial_\nu k) - k\nabla_\lambda\partial^\lambda kA_\mu A_\nu + 3kA_{(\mu}\partial^\lambda kF_{\nu)\lambda}\\
&\quad +k^2A_{[\mu}\partial^\rho F_{\nu]\rho} + \frac{k^2}{2}g^{\lambda\rho}F_{\rho\mu}F_{\nu\lambda} - \frac{k^4}{4}A_\mu A_\nu F^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda}, && (3.21)
\end{aligned}
$$

met $R_{\mu\nu}$ de $(D-1)$-dimensionale Riccitensor.

Om de Ricciscalar $\hat{R}$ te berekenen, beschikken we op dit punt over twee methodes. Ten eerste kan men $\hat{R} = \hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ door middel van de set $\{\hat{R}_{xx}, \hat{R}_{\mu x}, \hat{R}_{\mu\nu}\}$ berekend uit (3.19-3.21) volledig uitwerken. Een tweede, kortere manier volgt echter door met de Vielbeins te werken. We berekenen eerst de component van het respectievelijke object, uitgedrukt in de vlakke basis, die we via de Minkowskimetriek samenstellen tot $\hat{R}$:

$$
\begin{aligned}
\hat{R} &= \eta^{AB}\hat{R}_{AB} + \eta^{XX}\hat{R}_{XX},\\
&= \eta^{AB}e^\mu_A e^\nu_B\Big[R_{\mu\nu} + \frac{1}{k}\nabla_\mu(\partial_\nu k) + g^{\lambda\rho}\frac{k^2}{2}F_{\rho\mu}F_{\nu\lambda}\Big],\\
&\quad +\eta^{XX}e^x_X e^x_X\Big[-k\nabla_\lambda\partial^\lambda k - \frac{k^4}{4}F^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda}\Big],\\
&= R + \frac{2}{k}\nabla_\lambda(\partial^\lambda k) - \frac{k^4}{4}F^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda}, && (3.22)
\end{aligned}
$$

met R de $(D-1)$-dimensionale Ricciscalar.

Dit geeft duidelijk weer dat een Ricciscalar in D dimensies geïnterpreteerd wordt als een $(D-1)$-dimensionale Ricciscalar annex twee velden, die we kunnen typeren als een veld afkomstig van een Kaluza-Klein scalar en een Maxwellveld. We hebben hier dus uit zuivere gravitatie via dimensionale reductie naast een scalaire veld elektromagnetisme verkregen! Het gaat hier om de enige unificatie die gelukt is tussen gravitatie en elektromagnetisme. Wat de theorie van Kaluza en Klein echter de das heeft omgedaan is de interpretatie van het scalair veld. Het was niet mogelijk om toen hiervoor een fysische verklaring te vinden[4] .

Reductie van de Kalb-Ramondvorm $\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ en de veldsterkte $\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}$ De reductie van de Kalb-Ramondvorm gaat volgens hetzelfde stramien als bij de metriek, zij het dat er nu moet rekening gehouden worden met de D-dimensionale ijktransformatie $\delta_{\text{ijk}}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 2\partial_{[\hat{\mu}}\hat{\Sigma}_{\hat{\nu}]}$. Wanneer we tevens de anti-symmetrie van $\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ in het oog houden, worden de variaties van de verschillende componenten

$$\delta\hat{B}_{\mu x} = \delta_C\hat{B}_{\mu x} + \partial_\mu\hat{\Sigma}_x \tag{3.23}$$

$$\delta\hat{B}_{\mu\nu} = \delta_C\hat{B}_{\mu\nu} - 2\partial_{[\mu}\hat{\xi}^x\hat{B}_{\nu]x} + 2\partial_{[\mu}\hat{\Sigma}_{\nu]}, \tag{3.24}$$

waarbij $\delta_C\hat{B}_{\mu x}$ en $\delta_C\hat{B}_{\mu\nu}$ de variatie onder een $(D-1)$-dimensionale coördinatentransformatie aangeeft van respectievelijk een vector en een tensor. We definiëren verder

$$B_\mu = \hat{B}_{\mu x}, \tag{3.25}$$

$$B_{\mu\nu} = \hat{B}_{\mu\nu} + \frac{\hat{g}_{x[\mu}\hat{B}_{\nu]x}}{\hat{g}_{xx}}, \tag{3.26}$$

zodanig dat we kunnen zeggen dat B_μ – de winding vector – een ijkvariatie heeft

$$\begin{aligned} \delta_{\text{ijk}}B_\mu &= \partial_\mu\hat{\Sigma}_x \\ &\equiv \partial_\mu\Sigma. \end{aligned} \tag{3.27}$$

De ijktransformatie voor de $(D-1)$-dimensionale Kalb-Ramondvorm is ten slotte

$$\delta_{\text{ijk}}B_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}\Sigma_{\nu]} + A_{[\mu}\partial_{\nu]}\Sigma + B_{[\mu}\partial_{\nu]}\xi, \tag{3.28}$$

waarbij we reeds onmiddellijk naar een $(D-1)$-dimensionale notatie overgingen.

Met behulp van de reductieregels voor de Kalb-Ramondvorm kan berekend worden hoe de veldsterkte $\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} = 3\partial_{[\hat{\mu}}\hat{B}_{\hat{\nu}\hat{\rho}]}$ reduceert. We steunen hier tevens op de Vielbeins: we berekenen eerst

[4]De theorie is dan ook lang tot de vergetelheid teruggedrongen, maar de ontwikkeling van stringtheorie en supergravitatie gaf een nieuwe impuls: de k kon geïnterpreteerd worden als de straal van de richting waarover men compactificeert.

hoe de veldsterkte eruit ziet in de vlakke basis, dan identificeren we de componenten van het D-dimensoniale object met deze van het $(D-1)$-dimensionale object die ook in de vlakke basis uitgedrukt is (we laten als het ware de hoedjes weg) en we gaan terug naar de gekromde basis.

In de vlakke basis geldt:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{ABX} &= \hat{e}_A^\mu \hat{e}_B^\nu \hat{e}_X^x \hat{H}_{\mu\nu x} \\ &= e_A^\mu e_B^\nu e_X^x F_{\mu\nu}(B), \qquad (3.29)\\ \hat{H}_{ABC} &= \hat{e}_A^\mu \hat{e}_B^\nu \hat{e}_C^\rho \hat{H}_{\mu\nu\rho} + \hat{e}_A^\mu \hat{e}_B^\nu \hat{e}_C^x \hat{H}_{\mu\nu x} + \hat{e}_A^\mu \hat{e}_B^x \hat{e}_C^\rho \hat{H}_{\mu x\rho} + \hat{e}_A^x \hat{e}_B^\nu \hat{e}_C^\rho \hat{H}_{x\nu\rho}, \\ &= 3 e_A^\mu e_B^\nu e_C^\rho \Big(\partial_{[\mu}\hat{B}_{\nu\rho]} - A_{[\mu}F_{\nu\rho]}(B)\Big), \qquad (3.30)\end{aligned}$$

waarbij $F_{\nu\rho}(B) = \partial_\nu B_\rho - \partial_\rho B_\nu$.

Hierna kan de dimensionale reductie in de vlakke ruimte toegepast worden: $\hat{H}_{ABC} = H_{ABC}$. Door nu met behulp van de inverse Vielbeins terug te keren naar de gekromde ruimte volgt

$$H_{\mu\nu\rho} = 3(\partial_{[\mu}B_{\nu\rho]} - \partial_{[\mu}A_\nu B_{\rho]} - A_\mu \partial_{[\nu}B_{\rho]}). \qquad (3.31)$$

Het valt duidelijk op dat de veldsterkte in $D-1$ dimensies niet alleen een Kalb-Ramondtensor $B_{\mu\nu}$ en de vector B_μ bevat, maar ook de Kaluza-Klein vector A_μ, die in de uitdrukking voorkomt omdat een coördinatentransformatie in tien dimensies een coördinatentransformatie in negen dimensies wordt samen met een ijktransformatie. De extra termen, waarin de Kaluza-Kleinvector voorkomt, zijn nodig om de veldsterkte ijkinvariant te maken.

Reductie van de Common Sector Nu zijn we in staat de reductie van het gemeenschappelijk gedeelte uit de Lagrangianen van de tiendimensionale supergravitatietheorieën IIA en IIB aan te vatten. In concreto geldt

$$\mathcal{L}_{10} = \sqrt{|\hat{g}|} e^{-2\hat{\phi}} \Big[\hat{R} + 4(\partial\hat{\phi})^2 + \frac{1}{12}\hat{H}_3^2\Big]. \qquad (3.32)$$

Vervolgens worden de reductieregels uit vorige paragrafen toegepast. In detail:

- De reductie van $\sqrt{|\hat{g}|}$ verloopt vlot via het Vielbeinformalisme. Door de rekenregels van de determinant alsook door gebruik te maken van de absolute waarde, verkrijgt men

$$\sqrt{|\hat{g}|} = k\sqrt{|g|} \qquad (3.33)$$

- Om de reductieregel voor het dilaton $\hat{\phi}$ te vinden, merken we op dat het handig zou zijn wanneer

$$\sqrt{|\hat{g}|} e^{-2\hat{\phi}} = \sqrt{|g|} e^{-2\phi}. \qquad (3.34)$$

  Uit (3.33) volgt dat we ϕ kunnen kiezen als

$$\hat{\phi} = \phi + \frac{1}{2}\log k \qquad (3.35)$$

en bijgevolg ook

$$(\partial\hat{\phi})^2 = \partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi + \frac{1}{k}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda k + \frac{1}{4k^2}\partial_\lambda k\partial^\lambda k. \tag{3.36}$$

- Ook de reductie van $\frac{1}{12}\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}\hat{H}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}$ is vrij eenvoudig via het Vielbeinformalisme. Er volgt:

$$\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}\hat{H}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} = H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} + \frac{3}{k^2}F_{\mu\nu}(B)F^{\mu\nu}(B). \tag{3.37}$$

Samen met (3.22) zijn nu alle componenten van (3.32) bekend. Na partiële integratie van de term $\frac{2}{k}\nabla_\lambda(\partial^\lambda k)$ volgt uiteindelijk de gezochte negendimensionale Lagrangiaan

$$\mathcal{L}_9 = \sqrt{|g|}e^{-2\phi}\Big[R + (\partial\log k)^2 - 4(\partial\phi)^2 + \frac{1}{12}H_3^2 - \frac{k^2}{4}F^2(A) - \frac{1}{4k^2}F^2(B)\Big]. \tag{3.38}$$

Zoals we reeds opmerkten bij (3.22) en (3.31), brengt de dimensionale reductie van een object allerlei bijdragen mee die niet direct van dezelfde natuur zijn. (3.38) geeft nu aan dat deze hun weerklank hebben op de reductie van de Common Sector, waarin de Kaluza-Klein scalar voorkomt, alsook de veldsterkten van A_μ en van B_μ.

Besluit: In deze paragraaf werden het formalisme, de voorwaarden en de consequenties van dimensionale reductie besproken om uiteindelijk te komen tot de reductie van de Common Sector. De aanname dat de ruimte één apart gelabelde isometrierichting x bevat, vormt de grondslag. Wat betreft de metriek, de Kalb-Ramondvorm en de Riccitensor, hebben we gemerkt dat deze tweetensoren onder dimensionale reductie een scalar, een vector en een andere tweetensor in het leven roepen. Dat dit gevolgen heeft voor vele objecten die met tweevormen geassocieerd kunnen worden, merkten we aan de veldsterkte $H_{\mu\nu\rho}$ en de Ricciscalar, die we beide via het handige formalisme van de Vielbeins berekenden. De veldsterkte, gedefinieerd op basis van de Kalb-Ramondvorm, blijkt immers één dimensie lager te maken te hebben met de Kaluza-Kleinvector, die van een andere natuur is dan de Kalb-Ramondtensor en -vector. De Ricciscalar, van nature gestoeld op gravitatie, geeft in $D-1$ dimensies aanleiding tot extra velden. Dit alles heeft gevolgen voor de reductie van de Common Sector, waarin de Kaluza-Klein scalar, de veldsterkte van de Kaluza-Klein vector en de veldsterkte van de winding vector voorkomen.

We vatten nog even de reductieregels samen:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
\hat{g}_{xx} & = & -k^2 & \hat{B}_{\mu x} & = & B_\mu \\
\frac{\hat{g}_{\mu x}}{\hat{g}_{xx}} & = & A_\mu & \hat{B}_{\mu\nu} + \frac{\hat{g}_{x[\mu}\hat{B}_{\nu]x}}{\hat{g}_{xx}} & = & B_{\mu\nu} \\
\hat{g}_{\mu\nu} - \frac{\hat{g}_{\mu x}\hat{g}_{\nu x}}{\hat{g}_{xx}} & = & g_{\mu\nu} & \hat{\phi} & = & \phi + \frac{1}{2}\log k
\end{array}$$

3.1.2 Symmetrieën op de negendimensionale Lagrangiaan

Na de dimensionale reductie van de Common Sector tot (3.38) vormt het bekijken van de symmetrieën op deze Lagrangiaan de volgende stap op weg naar T-dualiteit.

Wanneer we naar (3.38) kijken, valt het onmiddellijk op dat de Lagrangiaan invariant is onder de operaties

$$\begin{array}{llll} 1) & k \to \Lambda^{-1} k, & A_\mu \to \Lambda\; A_\mu, & B_\mu \to \Lambda^{-1} B_\mu, \\ 2) & k \to k, & A_\mu \to -\; A_\mu, & B_\mu \to -\; B_\mu, \\ 3) & k \to k^{-1}, & A_\mu \to B_\mu, & B_\mu \to A_\mu. \end{array} \tag{3.39}$$

Deze drie invarianties vormen samen de $O(1,1)$-groep, die verder opgesplitst kan worden: [6]

$$O(1,1) = SO^+(1,1) \times \mathbb{Z}_2^{(S)} \times \mathbb{Z}_2^{(T)} \tag{3.40}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{pmatrix} | \Lambda \in \mathbb{R}_0^+ \right\}$$

$$\times \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{3.41}$$

Dit brengt mee dat de groep niet-samenhangend is: ze bestaat uit vier delen waarvan enkel $SO^+(1,1)$ een samenhangende groep vormt. De vier delen van de groep worden door de $\mathbb{Z}_2$-transformaties in elkaar getransformeerd. Als illustratie kunnen we iedere groepscomponent door een willekeurig element ervan voorstellen; met Λ een willekeurige parameter verkrijgen we dan het schema

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{\left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{pmatrix} \right\}}^{SO^+(1,1)} & \leftrightarrow & \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ \Lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \left\{ \begin{pmatrix} -\Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda^{-1} \end{pmatrix} \right\} & \leftrightarrow & \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda \\ -\Lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{array} \tag{3.42}$$

De horizontale pijlen geven een $\mathbb{Z}_2^{(T)}$ transformatie weer, de vertikale een $\mathbb{Z}_2^{(S)}$. Dit komt neer op een vermenigvuldiging langs rechts met respectievelijk

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.43}$$

De actie van de verschillende subgroepen van $O(1,1)$ op de negendimensionale velden gaat precies volgens (3.39), waarbij 1) de actie van $SO^+(1,1)$ weergeeft, 2) die van $\mathbb{Z}_2^{(S)}$ en 3) $\mathbb{Z}_2^{(T)}$.

We onderzoeken nu welke effecten deze drie $O(1,1)$-transformaties met zich meebrengen in tien dimensies. We liften daartoe (3.39) terug op:

$$
\begin{array}{llll}
SO^+(1,1): & \hat{g}_{xx} \to \Lambda^{-2}\hat{g}_{xx}, & \hat{g}_{\mu x} \to \Lambda^{-1}\hat{g}_{\mu x}, & \hat{B}_{\mu x} \to \Lambda^{-1}\hat{B}_{\mu x}, \\
\mathbb{Z}_2^{(S)}: & \hat{g}_{xx} \to \hat{g}_{xx}, & \hat{g}_{\mu x} \to -\hat{g}_{\mu x}, & \hat{B}_{\mu x} \to -\hat{B}_{\mu x}, \\
\mathbb{Z}_2^{(T)}: & \hat{g}_{xx} \to \hat{g}_{xx}^{-1}, & \hat{g}_{\mu x} \to \frac{\hat{B}_{\mu x}}{\hat{g}_{xx}}, & \hat{B}_{\mu x} \to \frac{\hat{g}_{\mu x}}{\hat{g}_{xx}}.
\end{array}
\tag{3.44}
$$

Vullen we de transformaties $SO^+(1,1)$ en $\mathbb{Z}_2^{(S)}$ in de algemene transformatieregel (3.1) in, dan kunnen we achterhalen wat ze voorstellen. Het zijn coördinatentransformaties:

$$
SO^+(1,1): \qquad \left\{ \begin{array}{ll} x^\mu & \to \tilde{x}^\mu = x^\mu \\ x^x & \to \tilde{x}^x = \Lambda x^x \end{array} \right\}, \tag{3.45}
$$

waaruit volgt dat $SO^+(1,1)$ een dilatatie weergeeft in de tiende richting, en

$$
\mathbb{Z}_2^{(S)}: \qquad \left\{ \begin{array}{ll} x^\mu & \to \tilde{x}^\mu = x^\mu \\ x^x & \to \tilde{x}^x = -x^x \end{array} \right\}, \tag{3.46}
$$

wat een spiegeling voorstelt van de tiende dimensie ten opzichte van de andere negen.

Voor $\mathbb{Z}_2^{(T)}$ kan dit niet gedaan worden: het is geen coördinatentransformatie . De werkwijze wordt hier gegeven door expliciet van de tiendimensionale objecten te vertrekken, deze te reduceren, vervolgens de $\mathbb{Z}_2^{(T)}$-transformatie toepassen en terug opliften. Wanneer we naast het dilaton ook alle componenten van de metriek en de Kalb-Ramondvorm meenemen, dan vinden we:

$$
\begin{array}{lll lll}
\tilde{\hat{g}}_{xx} & = & \hat{g}_{xx}^{-1}, & \tilde{\hat{\phi}} & = & \hat{\phi} - \frac{1}{2}\log(-\hat{g}_{xx}), \\
\tilde{\hat{g}}_{\mu x} & = & \frac{\hat{B}_{\mu x}}{\hat{g}_{xx}}, & \tilde{\hat{B}}_{\mu x} & = & \frac{\hat{g}_{\mu x}}{\hat{g}_{xx}}, \\
\tilde{\hat{g}}_{\mu\nu} & = & \hat{g}_{\mu\nu} - \frac{\hat{g}_{\mu x}\hat{g}_{\nu x}}{\hat{g}_{xx}} + \frac{\hat{B}_{\mu x}\hat{B}_{\nu x}}{\hat{g}_{xx}}, & \tilde{\hat{B}}_{\mu\nu} & = & \hat{B}_{\mu\nu} - \frac{\hat{B}_{x[\nu}\hat{g}_{\mu]x}}{\hat{g}_{xx}}.
\end{array}
\tag{3.47}
$$

Deze regels geven de gezochte T-dualiteit weer. Het gaat hier duidelijk om een nieuwe symmetrie die, in tegenstelling tot de andere twee, niet met een operatie in de ruimtetijd te maken heeft. Het is dan ook geen triviale zaak dat een theorie invariant is onder T-dualiteit: ten eerste moet er sprake zijn van een compacte richting en ten tweede moet de Lagrangiaan invariant zijn onder $O(1,1)$. Het is ook enkel onder deze twee voorwaarden dat (3.47) toegepast mag worden.

In het licht van de negendimensionale transformatie $\tilde{k} = k^{-1}$ spreekt deze dualiteit tot de verbeelding: zoals in paragraaf 3.1.1 aangegeven, kan k immers gezien worden als de straal van de compactificatierichting. De transformatie die T-dualiteit geeft, is dus niets anders dan een compactificatie over een richting met straal R, gevolgd door een decompactificatie over een richting met straal $\frac{1}{R}$; de theorie kan dus via (3.47) geen verschil maken tussen een compactificatie over een cirkel met een zekere straal en een cirkel met de inverse straal. De T-dualiteit (Eng. Target space duality) vormt in feite de ruimte om, die de "achtergrond" vormt van al wat je erin beschouwt, zoals branen of snaren.
Tevens worden componenten van de Kalb-Ramondvorm in de metriek gebracht en omgekeerd. Dit

gebeurt d.m.v. de niet-diagonale termen $\hat{B}_{\mu x}$ en $\hat{g}_{\mu x}$. Wanneer men bijgevolg de niet-diagonale termen van bijvoorbeeld de Kalb-Ramondvorm nul stelt, bezit de T-duale ervan tòch een niet-diagonale component $\hat{\tilde{B}}_{\mu x}$ terwijl de component $\hat{\tilde{g}}_{\mu x}$ van de metriek plots wel nul is. Het analoge geldt in het andere geval.

Om de globale $O(1,1)$ symmetrie van $\mathcal{L}_9$ duidelijker te laten uitkomen, kunnen we deze Lagrangiaan in een expliciet $O(1,1)$ invariante vorm schrijven. Bemerk daartoe dat de vectoren A_μ en B_μ een doublet vormen onder deze groep: (3.39) zegt ons immers dat A_μ in B_μ kan overgaan en vice versa. We stellen

$$\mathcal{A}^i = \begin{pmatrix} A_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix}. \tag{3.48}$$

De Kaluza-Klein scalar k parametriseert een $O(1,1)$-matrix M_{ij}, terwijl η de metriek is op de $O(1,1)$-groep met

$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix} -k^{-2} & 0 \\ 0 & -k^2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad (\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.49}$$

Na een weinig rekenen, vinden we nu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_9 \;=\; & \sqrt{|g|}e^{-2\phi}\Big[R - 4(\partial\phi)^2 - \frac{1}{8}\partial_\mu M_{ij}\partial^\mu M^{ij} \\ & + \frac{1}{12}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}(\mathcal{A}^i)(M^{-1})_{ij}\mathcal{F}^{\mu\nu}(\mathcal{A}^j)\Big]. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Beschouw verder een algemene $O(1,1)$-transformatie $T^i{}_j$, waarbij

$$\begin{array}{lll} M_{ij} & \rightarrow & M'_{kl} = T^i{}_k M_{ij} T^j{}_l, \\ (M^{-1})_{ij} & \rightarrow & (M^{-1})'_{kl} = T^i{}_k M^{(-1)}_{ij} T^j{}_l, \\ \mathcal{A}^i & \rightarrow & (\mathcal{A}^k)' = T_j{}^k \mathcal{A}^j, \\ M^{ij} & \rightarrow & (M^{kl})' = T_i{}^k M^{ij} T_j{}^l. \end{array} \tag{3.51}$$

Uit $T^t\eta T = \eta$ volgt dan dat de Common Sector na dimensionale reductie naar negen dimensies invariant is onder $O(1,1)$-symmetrie.

Opmerking: De T-dualiteit zoals we die nu voor de Common Sector afgeleid hebben, kan men uitbreiden voor volledige IIA en IIB supergravitatie. De regels voor de RR-velden (zie b.v. [4]) hebben ruwweg de vorm

$$\left\{ \begin{array}{lll} C_{\mu_1\cdots\mu_n} & = & C_{\mu_1\cdots\mu_n x} + \cdots, \\ C_{\mu_1\cdots\mu_n x} & = & C_{\mu_1\cdots\mu_n} + \cdots. \end{array} \right\} \tag{3.52}$$

Wanneer men deze regels toepast, wordt het duidelijk dat IIA en IIB T-duaal aan elkaar zijn [7]. De C_0 uit IIB gaat immers naar de C_1 van IIA, die op haar beurt naar C_2 uit IIB kan overgebracht worden,...:

$$\begin{aligned} C_0 &\leftrightarrow C_1, \qquad C_1 \leftrightarrow C_2, \\ C_2 &\leftrightarrow C_3, \qquad C_1 \leftrightarrow C_4. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Besluit: Het dimensionaal reduceren van de tiendimensionale Common Sector brengt een Lagrangiaan met zich mee die $O(1,1)$-invariantie bezit. Een analyse ervan geeft aan dat we in feite te doen hebben met drie symmetrieën, waarvan er twee in tien dimensies een coördinatentransformatie uitdrukken. De derde is echter minder triviaal: het is T-dualiteit, die een equivalentie belichaamt tussen bepaalde objecten in twee verschillende ruimten, op voorwaarde dat deze laatste een isometrierichting hebben.

3.2 Hodge-dualiteit

Als tweede bekijken we de constuctie van de Hodge-dualiteit, die ervoor zorgt dat informatie die in een veldsterkte met $p+2$ indices voorkomt ook d.m.v. een veldsterkte met $D-p-2$ indices kan uitgedrukt worden. We illustreren de werkwijze aan hand van de Common Sector, waarbij de drievorm door Hodge-dualiteit in een zevenvorm wordt omgezet. Voor het algemene geval is de werkwijze analoog, we geven hiervan enkel de resultaten van de berekening.

Om de Hodge-duale van de veldsterkte van de Kalb-Ramondvorm te zoeken, beschouwen we de Common Sector, waaraan we een term met een Lagrangemultiplicator toevoegen:

$$\mathcal{L}' = \sqrt{|g|}e^{-2\phi}\Big[R - 4(\partial\phi)^2 + \frac{1}{12}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}\Big] + \frac{1}{6\cdot 6!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{10}}B_{\mu_1\cdots\mu_6}\partial_{\mu_7}H_{\mu_8\mu_9\mu_{10}}, \tag{3.54}$$

waarbij B_6 de Lagrangemultiplicator voorstelt. De noemer $6\cdot 6!$ wordt gebruikt om te normaliseren; ze zal later van pas komen. Wanneer nu $H_{\mu\nu\rho}$ onafhankelijk beschouwd wordt – dus wanneer we 'vergeten' dat het om de veldsterkte van de Kalb-Ramondvorm gaat –, kan men twee paden bewandelen: de bewegingsvergelijking oplossen van enerzijds de Lagrangemultiplicator of anderzijds de veldsterkte.

In het eerste geval verkrijgen we de vergelijking

$$\partial_{[\mu_7}H_{\mu_8\mu_9\mu_{10}]} = 0, \tag{3.55}$$

waaruit volgt dat H_3 een veldsterkte is omdat zo aan deze vergelijking triviaal voldaan wordt door de Bianchi-identiteit. Het ijkveld van H_3 kunnen we verder $B_{\mu\nu}$ noemen. Zo vinden we dat (3.54) equivalent is met de Common Sector (3.32) zonder extra Lagrangeterm.

Wanneer we de bewegingsvergelijking voor de veldsterkte oplossen, verkrijgen we de betrekking die de Hodge-dualiteit weergeeft tussen H_3 en de veldsterkte H_7 van de Lagrangemultiplicator:

$$H^{\xi\zeta\eta} = -\frac{1}{7!\sqrt{|g|}}\epsilon^{\xi\zeta\eta\sigma_1\cdots\sigma_7}e^{2\phi}H_{\sigma_1\cdots\sigma_7}. \tag{3.56}$$

Stoppen we deze uitdrukking in $\mathcal{L}'$ in, dan kunnen we de Common Sector met de Hodge-duale van de drievorm bijgevolg schrijven als

$$\mathcal{L}'' = \sqrt{|g|}\{e^{-2\phi}\Big[R + 4(\partial\phi)^2\Big] + \frac{e^{2\phi}}{2\cdot 7!}H_7^2\}. \tag{3.57}$$

Op dezelfde manier kan men steeds een $(p+2)$-vorm veldsterkte omzetten in zijn Hodge-duale, die een $(D-p-2)$-vorm veldsterkte is: wanneer we vertrekken van een Lagrangiaan

$$\mathcal{L}_1 = \sqrt{|g|}\Big[\frac{(-)^{p+1}}{2(p+2)!}e^{-l\phi}F_{p+2}^2\Big], \tag{3.58}$$

dan kunnen we ze door de Hodge-duale van de veldsterkte schrijven als[5]

$$\mathcal{L}_2 = \sqrt{|g|}\Big[\frac{(-)^{D-p-1}}{2(D-p-2)!}e^{+l\phi}F_{D-p-2}^2\Big]. \tag{3.59}$$

Het teken van de willekeurige parameter l is hierbij omgedraaid, wat ook naar voren komt in (3.57).De betrekking analoog aan (3.56) is[6]

$$F^{\rho_1\cdots\rho_{p+2}} = \frac{(-)^{\frac{D}{2}}e^{+l\phi}}{(D-p-2)!\sqrt{|g|}}\epsilon^{\rho_1\cdots\rho_{p+2}\sigma_1\cdots\sigma_{D-p-2}}F_{\sigma_1\cdots\sigma_{D-p-2}}. \tag{3.60}$$

Bemerk dat veldsterkten via Hodge-dualiteit lokaal aan elkaar gerelateerd zijn, ijkvelden niet. Wanneer we spreken over de Hodge-duale van een $(p+1)$-vorm ijkveld, dienen we steeds de bijhorende veldsterkte aan te spreken en deze te dualiseren tot een veldsterkte die dan weer te maken heeft met een $(D-p-3)$-ijkveld. Hodge-dualiteit zegt in feite dat alle informatie die in de ene veldsterkte zit, volledig voorkomt in de andere: iets dat met een ingewikkelde zevenvorm beschreven wordt, kan net zo goed via een drievorm bestudeerd worden!

Opmerking: Dit heeft ook zijn invloed op de acties van IIA en IIB: men kan ze zonder problemen, maar ook zonder informatiewinst, uitbreiden met de Hodge-duale van de Ramond-Ramondvormen. Zo kan men aan (2.4) een C_5- en een C_7-vorm toevoegen en (2.8) verrijken met een C_6 en een C_8. Dit is hetgeen men de democratische formulering noemt [8].

Hodge-dualiteit zet een vorm met dimensie kleiner dan of gelijk aan $\frac{D}{2}$ om in een vorm met dimensie groter dan $\frac{D}{2}$, terwijl in beide gevallen dezelfde fysica beschreven wordt. De terminologie die men in dit kader gebruikt, spreekt in het geval waarbij de dimensie kleiner of gelijk is aan $\frac{D}{2}$ over de elektrische *formulering*. In het andere geval, waarbij er duidelijk meer indices aanwezig zijn dan

[5]Bemerk dat we hier de standaardnormalisatie van de veldsterkte verkrijgen. De expliciete factor 2 in de noemer is analoog aan de $\frac{1}{2}$ in de klassieke kinetische energie $\frac{mv^2}{2}$. De benoeming van F_p^2 als "kinetische termen"zet dit extra in de verf. De $p!$ in de noemer gebruikt men omdat er in deze termen $p!$ gelijke componenten aanwezig zijn. Het teken is nodig omwille van de vereiste positiviteit van de term omdat we werken met een mostly-minus metriek.

[6]Wanneer D oneven is, kan men het teken van de Lagrangemultiplicator aanpassen zodat er sprake is van $(-)^{\frac{D+1}{2}}$ i.p.v. $(-)^{\frac{D}{2}}$.

in het eerste, wordt dan gesproken over de magnetische formulering. De Hodge-dualisering die in deze paragraaf bekeken werd, beschreef dus de overgang in tien dimensies van de elektrische naar de magnetische formulering in het geval van de Kalb-Ramondvorm.
Los hiervan gebruikt men ook benamingen die slaan op het al dan niet voorkomen van de tijd tussen de indices: wanneer de van nul verschillende componenten steeds de tijdsdimensie bevatten, spreekt men over de elektrische *componenten.* Wanneer daarentegen de niet nulle componenten van een vorm de tijd niet bevatten, dan noemt men ze magnetische componenten. Het valt op dat Hodge-dualiteit door het gebruik van de ϵ een vorm met index t omzet in een vorm zonder t. Dus, Hodge-dualiteit doet niet alleen een veldsterkte van formulering veranderen, maar ze zet ook de elektrische component om in de magnetische component en vice versa.
Dit laatste woordgebruik wordt duidelijker als je de analogie bekijkt met de Maxwelltensor $F_{\mu\nu}$ in vier dimensies. De tensor is zodanig opgebouwd dat – en bemerk de prachtige structurele overeenkomst met (3.56)! –

$$^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}, \tag{3.61}$$

waarin * aangeeft dat het om de Hodge-duale van $F^{\mu\nu}$ gaat. De termen elektrische en magnetische componenten worden uiteindelijk verklaard door

$$F^{0i} = E_i \qquad \text{en} \qquad F^{ij} = \epsilon^{ijk}B_k, \tag{3.62}$$

waarbij $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3\}$ en de index 0 de tijdsdimensie voorstelt. Betrekking (3.61) geeft nu weer dat $^*E_i = B_i$.

Opmerking: Uit $^*F_p = F_{D-p}$, waarbij * de Hodge-dualiteit weergeeft, volgt dat er bij een ruimte-tijd met een even aantal dimensies in het algemeen een zelfduale vorm aanwezig is[7]: $^*F_{\frac{D}{2}} = F_{\frac{D}{2}}$.

Besluit: Beschouwt men de veldsterkte die men wil Hodge-dualiseren als een zwarte doos en breidt men de Lagrangiaan waarin ze voorkomt uit door middel van een term met een Lagrangemultiplicator, dan geeft de bewegingsvergelijking van de multiplicator de natuur van de veldsterkte weer, terwijl de vergelijking van de veldsterkte leidt tot de gewenste Hodge-duale. Zo kan de informatie die in veldsterkten met $p + 2$ indices aanwezig is, ook uit zijn duale veldsterkte met $D - p - 2$ indices gehaald worden.

3.3 S-dualiteit

Een derde dualiteit die in het daglicht gesteld wordt is de S-dualiteit. Voluit in het Engels klinkt dit “Strong-weak coupling duality”. De naam komt uit de snaartheorie (waarvan supergravitatie een lage-energie effectieve actie vormt), waar $e^\phi = g$ met g de koppelingsconstante. S-dualiteit doet nu g overgaan in zijn omgekeerde $\frac{1}{g}$. Zoals reeds aangegeven, bestaat ze enkel in IIB.

Ze komt het best tot uiting wanneer we afstappen van het frame dat we tot nu gebruikten, dat stringframe genoemd wordt, en overgaan op het zogenaamde Einsteinframe. Dit doen we via een conforme transformatie waarin het dilaton voorkomt:

[7]Dit is in het algemeen geen componentsgewijze gelijkheid. Ruwweg gezegd betekent dit dat alles wat links zit ook rechts voorkomt, maar dan wel eventueel op een andere plaats.

$$g^{(\sigma)}_{\mu\nu} = e^{\frac{4}{D-2}\phi} g^{(E)}_{\mu\nu} \qquad g^{\mu\nu(\sigma)} = e^{\frac{-4}{D-2}\phi} g^{\mu\nu(E)}. \tag{3.63}$$

De index E duidt op Einsteinframe, de Griekse letter σ op stringframe. De dilatonkoppeling die in dit nieuwe frame niet bij de termen R en $(\partial\phi)^2$ voorkomt, zorgt ervoor dat de bewegingsvergelijkingen in geval van E-frame eenvoudiger worden: in de bewegingsvergelijking voor ϕ komen geen R of $(\partial\phi)^2$ voor en, zoals we verder in sectie 4.1 zullen zien, in Einsteinframe is het niet nodig de Ricciscalar te berekenen. Het is echter òòk de dilatonkoppeling die het stringframe interessant maakt voor T-dualiteit en dimensionale reductie: de Kaluza-Kleinscalar die uit de determinant van de metriek komt valt op deze manier weg met de k waarvoor de dilaton verantwoordelijk is (zie (3.34)).

Afgezien van de Chern-Simonsterm, is de Lagrangiaan van IIB in Einsteinframe

$$\mathcal{L}^{E}_{IIB} = \sqrt{|g|}\{R + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{e^{-\phi}}{12} H_3^2 + \frac{e^{2\phi}}{2} F_1^2 + \frac{e^{\phi}}{12} F_3^2 + \frac{1}{4\cdot 5!} F_5^2\}, \tag{3.64}$$

waarbij de Ramond-Ramond veldsterkten nog steeds voldoen aan (2.5) en $H_3 = \partial B_2$.

Wanneer $C_0 = 0$, valt het onmiddellijk op dat de Lagrangiaan (3.64) invariant is onder de S-dualiteitstransformatie

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \phi & \to & -\phi, \\ B_{\mu\nu} & \to & C_{\mu\nu}, \\ C_{\mu\nu} & \to & -B_{\mu\nu}. \end{array} \right\} \tag{3.65}$$

We zeggen bijgevolg dat IIB-supergravitatie zelfduaal is onder S-dualiteit (zie b.v. ook [4]).

4 Vlakke p-braanoplossingen

Vorig hoofdstuk handelde over de mogelijkheden waarover men beschikt om uit bestaande theorieën en oplossingen nieuwe te ontwikkelen. In dit en in het volgende hoofdstuk wensen we ons speciaal te focussen op die oplossingen. Na eerst de bewegingsvergelijkingen afgeleid te hebben, gaan we er verschillende soorten oplossingen voor zoeken. We stellen als het ware verschillende soorten modeloplossingen of Ansätze[8] voor. Steeds maken we de Ansatz een beetje gecompliceerder. Een oplossing, die in feite de Ansatz is waarbij de parameters bepaald zijn, geeft dan een braan weer. Dit is een meerdimensionaal oppervlak in de hogerdimensionale ruimtetijd. Vaak spreekt men dan ook over een p-braan, waarbij het prefix duidt op het aantal ruimtelijke dimensies van de braan[9]. Men mag dus niet vergeten dat de braan ook altijd de tijdsdimensie bevat.
Een p-braanoplossing is puur bosonisch, wat de reden weergeeft waarom we in deze thesis enkel de bosonische sector van de supergravitatie belichten. Welke p-branen in welke theorieën voorkomen hangt af van de velden die in de theorie aanwezig zijn. Een p-braanoplossing draagt immers typisch de lading van een (p+1)-vorm ijkveld (zowel in de elektrische als de magnetische formulering), die dan ook in de Lagrangiaan moet voorkomen. We verwachten dus dat IIA branen levert die verbonden zijn aan de Kalb-Ramondvorm, de C_2 en de C_4. Analoog voor IIB. Bemerk dat er steeds met een (p+2)-veldsterkte een p-braan geassocieerd is: de veldsterkte impliceert een (p+1)-ijkveld, die uiteindelijk aanleiding geeft tot een p-braan.
Vertrekkend van vlakke branen, maken we steeds de Ansatz een beetje gecompliceerder. Het doel, dat we op het einde van volgend hoofdstuk bereiken, is uiteindelijk komen tot branen met een constante kromming. Deze thesis kan dan ook gezien worden als een stap in de richting van het concept waarbij ons universum een braan is in een overkoepelende meerdimensionale ruimtetijd. Verder onderzoek op het resultaat van deze thesis zou bijvoorbeeld dan ook de zoektocht kunnen zijn naar oplossingen waarbij op de braan niet alleen gravitatie leeft, maar ook een soort elektromagnetisme.

In eerste instantie beschouwen we in dit hoofdstuk het eenvoudige, maar heel interessante geval waarbij de ruimte vlakke branen bevat. Op de bekomen oplossingen laten we de technieken uit de vorige hoofdstukken los, waarbij, naast oplossingen van IIA en IIB, ook deze van 11-dimensionale supergravitatie aan bod komen. Het is dan interessant om dit alles samen te brengen in één tabel.

4.1 Het opstellen van de bewegingsvergelijkingen

In dit deel leiden we de bewegingsvergelijkingen af waarvan de oplossingen ons in de volgende paragrafen naar de branen brengen. De Langrangiaan waarmee we werken is de algemene vorm (2.10), die er in Einsteinframe uitziet als

$$\mathcal{L}^E = \sqrt{|g|}\Big[R + \frac{4}{D-2}(\partial\phi)^2 + \frac{(-)^{p+1}}{2\cdot(p+2)!}e^{l\phi}F^2_{(p+2)}\Big], \tag{4.1}$$

waarbij $F_{(p+2)}$ de veldsterkte is van een $p+1$ ijkveld en $\{l,p,D\}$ vrije parameters voorstellen, die bepalen om welke (stukken uit welke) Lagrangiaan het gaat. Bemerk bijvoorbeeld dat als

[8] Een Ansatz is aanname, een "educated guess".

[9] Dit woord is afkomstig van "de membraan", waarbij mem- aangeeft dat het twee ruimtelijke dimensies bezit. Een puntdeeltje is een 0-braan, een string een 1-braan, een membraan is dan een 2-braan, enz.

$l=-1, p=1, D=10$ deze Lagrangiaan de Common Sector weergeeft.

Men bekomt drie vergelijkingen:

- de bewegingsvergelijking voor het ijkveld

$$\nabla_\rho\Big(e^{l\phi}F^{\rho\mu_1\cdots\mu_{p+1}}\Big)=0. \tag{4.2}$$

- de bewegingsvergelijking voor het dilaton

$$\frac{8}{D-2}\nabla^2\phi = le^{l\phi}\frac{(-)^{p+1}}{2(p+2)!}F^2_{p+2}. \tag{4.3}$$

- de bewegingsvergelijking voor de metriek

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}-\frac{2}{D-2}(\partial\phi)^2g_{\mu\nu}+\frac{4}{D-2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \\ -\frac{e^{l\phi}}{4(p+2)!}F^2_{(p+2)}g_{\mu\nu}+\frac{e^{l\phi}(-)^{p+1}}{2(p+1)!}F_{\mu\mu_2\cdots\mu_{p+2}}F^{\xi\mu_2\cdots\mu_{p+2}}g_{\xi\nu}=0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

  die de Einsteinvergelijking genoemd wordt. Ze kan nog vereenvoudigd worden door de trace te nemen, waardoor men een uitdrukking voor R krijgt:

$$R=\frac{1}{D-2}\Big[\frac{e^{l\phi}(-)^{p+1}}{2(p+2)!}F^2_{(p+2)}(2p+4-D)-4(\partial\phi)^2\Big]. \tag{4.5}$$

  Wanneer R in (4.4) door middel van (4.5) geëlimineerd wordt, dan luidt het resultaat

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}+\frac{4}{D-2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-\frac{p+1}{2(D-2)}g_{\mu\nu}\frac{e^{l\phi}(-)^{p+1}}{2(p+2)!}F^2_{(p+2)} \\ +\frac{e^{l\phi}(-)^{p+1}}{2(p+1)!}F_{\mu\mu_2\cdots\mu_{p+2}}F^{\xi\mu_2\cdots\mu_{p+2}}g_{\xi\nu}=0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

  Door de eenvoud werken we verder met (4.6) in plaats van (4.4).

In deze vergelijkingen vullen we nu een Ansatz voor de metriek, het dilaton en het ijkveld in. We nemen als het ware aan dat deze grootheden afhangen van een zekere functie H en van een aantal parameters. We verwachten dat de oplossing voor de metriek een grote symmetrie heeft, maar dat ze toch niet vlak is; de metriek moet duidelijk aangeven dat we te maken hebben met een braan in een ruimte, wat betekent dat er binnen de volledige uitdrukking voor de metriek een kleinere eenheid bestaat die ook alle kenmerken van een metriek in zich draagt[10]. Verder gaan we ervan

[10] In dit kleiner geheel (dat straks de braan wordt), is er zowel translatie- als rotatieinvariantie. We hebben hier te doen met een $ISO(1,p)$-symmetrie. In de ruimte die niet in dit geheeltje zit, is er enkel nog rotatiesymmetrie; in dit geval spreekt men dan ook over $SO(D-p-1)$.

uit dat het dilaton en het ijkveld enkel afhangen van de transversale ruimte. In dit hoofdstuk betekent dit dat we werken vanuit de Ansatz[11]

$$ds^2 = H^\alpha(y)\eta_{ab}dx^a dx^b - H^\beta(y)\delta_{ij}dy^i dy^j, \tag{4.7}$$
$$e^{-2\phi} = H^\gamma(y), \tag{4.8}$$
$$B_{01\cdots p} = \theta H^\delta(y), \tag{4.9}$$

met $B_{01\cdots p}$ een willekeurig $p+1$-vorm ijkveld van een veldsterkte F_{p+2}, $\{a,b\} = \{0,\cdots,p\}$ en $\{i,j\} = \{p+1,\cdots,D-1\}$. De Latijnse indices $a,b,(c,d)\cdots$ worden gebruikt voor alles wat het wereldvolume van de branen aangaat, terwijl $i,j,(k,m,)\cdots$ gebruikt worden in verband met de transversale ruimte dimensies (die dus niet in de braan zitten). Wanneer Griekse indices μ,ν,ρ,σ gebruikt worden, betekent dit dat er niet gekeken wordt naar het gedrag van de metriek specifiek op branen of in de transversale ruimte. Ze zijn algemene indices, geldig voor de ganse ruimte.

Als eerste stap bekijken we de algemene oplossingen die deze vergelijkingen hebben wanneer we uitgaan van (4.7). In een tweede deel zoeken we enkele specifieke gevallen van deze oplossingen. Uit deze laatste kunnen we daarna ook nieuwe oplossingen construeren die niet in de Ansatz opgenomen zijn; we hebben in vorige immers methodes bekeken hoe we theorieën – en dus ook oplossingen ervan – met elkaar kunnen verbinden. Wanneer we een theorie in D dimensies bezitten, kan men over een isometrierichting reduceren tot ééntje in $D-1$ dimensies of we kunnen dualiteiten[12] gebruiken.

4.2 Algemene oplossing

De meest algemene oplossing voor de Ansatz (4.7-4.9) vinden we door ze in de bewegingsvergelijkingen (4.2), (4.3) en (4.6) in te vullen. We vinden naast voorwaarden op de willekeurige parameters $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ en θ, ook een betrekking waaraan de functie H moet voldoen [16]:

$$\alpha = -\frac{4}{N}(D-p-3), \tag{4.10}$$
$$\beta = \frac{4}{N}(p+1), \tag{4.11}$$
$$\gamma = -\frac{(D-2)^2}{2N}l, \tag{4.12}$$
$$\delta = -1, \tag{4.13}$$
$$\theta^2 = \frac{4}{N}(D-2), \tag{4.14}$$
$$N = \frac{(D-2)^2 l^2}{8} + 2(p+1)(D-p-3), \tag{4.15}$$
$$\partial_k\partial^k H = 0, \tag{4.16}$$

[11] In het volgende hoofdstuk vertrekken we in feite van dezelfde Ansatz voor de metriek als hier, waarbij dan wel de η vervangen wordt door een algemene metriek $\tilde{g}_{ab}$. Het woord "vlak "uit de titel van deze paragraaf mag men enkel interpreteren op basis van die vlakke (Minkowski-) metriek die we hier op de braan beschouwen. Het heeft m.a.w. niet te maken met het nul zijn van krommingstensoren van de ganse ruimte, maar wel van de braan zelf.

[12] T- en S- dualiteit kunnen op theorieën toegepast worden, Hodge-dualiteit daarentegen is enkel op veldsterkten gedefinieerd.

waarbij k loopt over alle transversale richtingen. Deze waarden voor de parameters geven wegens (4.7) een vlakke algemene p-braan weer, ingebed in een hogere D-dimensionale wereld.

4.3 Specifieke voorbeelden

In dit deel gaan we enkele specifieke gevallen na, die allen in (4.10-4.15) zitten. We bekijken de fundamentele string of kortweg "F1", die elektrisch geladen[13] is onder de Kalb-Ramondvorm, en de NS5-braan, die onder $B_{\mu\nu}$ magnetisch geladen is. Ook de oplossingen voor algemene (nog steeds vlakke) p-branen die men Dp-branen noemt en geladen zijn onder een Kalb-Ramondvorm, komen aan bod. Na deze drie tiendimensionale voorbeelden, bekijken we ook even de M2- en M5-branen uit de elfdimensionale supergravitatie.

Nota: Voor de klasse van oplossingen die wij bekijken, volgt uit supersymmetrie-overwegingen [10] dat $\theta = 1$. Dit kan middels (4.10-4.15) voor ieder van de gevallen nagegaan worden.

4.3.1 De fundamentele string

Bij wijze van voorbeeld doen we de berekening expliciet: we gaan na voor welke waardes van de parameters α, β, γ en δ en voor welke uitdrukking voor H de Ansatz (4.7-4.9) met $D = 10, p = 1$ en $l = -1$ een oplossing geeft van de bewegingsvergelijkingen van de Lagrangiaan (4.1), die zodoende de Common Sector voorstelt.

Vult men deze Ansatz in de vergelijkingen van 4.1 in, dan bekomt men een nieuwe set van vergelijkingen

$$\begin{aligned}
\partial_k\partial^k H &= \Big[-\frac{\gamma}{2} - \delta + \alpha + 1 - 3\beta\Big] H^{-1}\partial_k H \partial^k H, && (4.17)\\
-\gamma\partial_k\partial^k H &= \Big[\delta^2 H^{\frac{\gamma}{2}+2\delta-2\alpha-1} + \gamma(\alpha + 3\beta - 1)H^{-1}\Big]\partial_k H\partial^k H, && (4.18)\\
\alpha\partial_k\partial^k H &= \Big[-\alpha^2 - 3\alpha\beta + \alpha + \frac{3}{4}\delta^2 H^{2\delta-2\alpha+\frac{\gamma}{2}}\Big] H^{-1}\partial_k H\partial^k H && (4.19)
\end{aligned}$$

voor respectievelijk de ijkveld-, de dilaton- en de ab-Einsteinvergelijking . De gemengde ai-component van de Einsteinvergelijking geeft is identiek 0, de ij-component daarentegen ziet er uit als

$$\begin{aligned}
&\Big(-\alpha - 3\beta - \beta\alpha + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{3\beta^2}{2} + \frac{\gamma^2}{8} - \frac{\delta^2}{2}H^{2\delta-2\alpha+\frac{\gamma}{2}}\Big)H^{-2}\partial_i H\partial_j H + (\alpha + 3\beta)H^{-1}\partial_i\partial_j H = \\
&\qquad \delta_{ij}\Big(\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{3\beta^2}{2} - \frac{\delta^2}{8}H^{2\delta-2\alpha+\frac{\gamma}{2}}\Big)\partial_k H\partial^k H H^{-2} - \delta_{ij}\frac{\beta}{2}H^{-1}\partial_k\partial^k H. \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

De gemeenschappelijke vorm van (4.18-4.19) en het spoor van (4.20) laat toe te komen tot algebraïsche vergelijkingen in α, β, γ en δ. We vinden hieruit

$$\alpha = -\frac{3}{4}\gamma \qquad \delta = -\gamma \qquad \beta = \frac{\gamma}{4}, \tag{4.21}$$

[13] Voluit: waarbij het ijkveld de Kalb-Ramondvorm is in de elektrische formulering.

waardoor het stelsel $\{(4.18), (4.17), (4.19), (4.20)\}$ zich reduceert tot één vergelijking

$$H\partial_k\partial^k H = (1-\gamma)\partial_k H\partial^k H. \tag{4.22}$$

Het enige dat nu nog kan bepaald worden is H^γ. Of anders gezegd, afhankelijk van de keuze van γ vinden we een andere H, die dan door de overblijvende vergelijking bepaald kan worden. Hier zien we dat deze zich gemakkelijk laat oplossen voor $\gamma = 1$: H moet harmonisch zijn, waardoor

$$H = Ar^{-6} + 1 \tag{4.23}$$

met A een positieve integratieconstante en r de straal in de transversale richting. We hebben dus[14] [11]

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^{\frac{-3}{4}}\eta_{ab}dx^a dx^b - H^{\frac{1}{4}}\delta_{ij}dy^i dy^j, && (4.24)\\ e^{-2\phi} &= H, && (4.25)\\ B_{01} &= H^{-1}, && (4.26) \end{aligned}$$

waarbij natuurlijk $\{a,b\} = \{0,1\}$ en $\{i,j\} = \{2,\cdots,9\}$. Vergelijking (4.26) geeft weer dat de fundamentele string elektrisch geladen is onder de Kalb-Ramondvorm. Het valt duidelijk op dat de resultaten dezelfde zijn als die we bekomen door de parameters $D = 10, p = 1$ en $l = -1$ in (4.10-4.15) in te vullen.

Hoe kan dit resultaat fysisch geïnterpreteerd worden? Bemerk dat H rotatie-invariant is in de transversale richtingen. We zien ook dat we, als we $r = 0$ zouden invullen, in de nulde en eerste component van de metriek een divergentie uitkomen. Een berekening van de Ricciscalar leert dat het systeem (enkel) een fysische singulariteit heeft in $r = 0$. We zien verder ook dat op $r = \infty$ de veldsterkte nul wordt. Dit komt overeen met ons aanvoelen bij elektromagnetisme: op de plaats waar het elektron zich bevindt, is er geen veld gedefinieerd, terwijl ver van de bron het veld verwaarloosbaar is. Vanuit het vlak van de transversale richtingen is het bijgevolg alsof er zich een puntmassa in de oorsprong bevindt; in de negendimensionale ruimtelijke wereld is er een rechte die geladen is onder de Kalb-Ramondvorm en die loopt van $-\infty$ tot $+\infty$ in de richting van de eerste coördinaat. Er wordt in dit geval dan ook gesproken over een "kosmische string"die men met F1 noteert. Ze kan bekeken worden als een in de tien-dimensionale wereld levend oppervlak dat naast de tijdsdimensie nog één ruimtelijke dimensie bevat.

[14] In feite is er nog een andere oplossing mogelijk, waarop we echter niet nader ingaan. Ze luidt

$$\begin{aligned} H &= r^2,\\ ds^2 &= H^{-\frac{9}{4}}\eta_{ab}dx^a dx^b - H^{-\frac{5}{4}}\delta_{ij}dy^i dy^j,\\ e^{-2\phi} &= H^3,\\ B_{01} &= H^{-3}. \end{aligned}$$

4.3.2 NS5-braan

In de vorige paragraaf zochten we naar een oplossing die elektrisch geladen is onder de Kalb-Ramondvorm. Nu zoeken we naar het object dat er magnetisch onder geladen is.

Hiertoe steunen we op deel 3.2 vermits we de Hodge-duale van de Common Sector nodig hebben. Vergelijking (3.57) geeft de duale in stringframe; in Einsteinframe wordt dit vergelijking (4.1) met[15] $D = 10, l = +1$ en $p = 5$. Dit maakt dat we de bewegingsvergelijkingen van 4.1 kunnen gebruiken.

Een uitwerking, analoog aan deze van F1, geeft een oplossing die de NS5-braan genoemd wordt [12] [13]:

$$
\begin{aligned}
H &= Ar^{-2} + 1 && (4.27)\\
ds^2 &= H^{-\frac{1}{4}} \eta_{ab} dx^a dx^b - H^{\frac{3}{4}} \delta_{ij} dy^i dy^j, && (4.28)\\
e^{-2\phi} &= H^{-1}, && (4.29)\\
B_{01\cdots 5} &= H^{-1}. && (4.30)
\end{aligned}
$$

Ook deze oplossing komt overeen met (4.10-4.15).

In de tiendimensionale ruimtetijd stelt het een vijfbraan voor die geladen is onder de Kalb-Ramondvorm in de magnetische formulering. In de elektrische formulering geschreven, geven we de lading weer door te zeggen dat

$$
H_{ijk} = \bar{\epsilon}_{ijkl} \delta^{lm} \partial_m H, \tag{4.31}
$$

waarbij de $\bar{\epsilon}$ niets meer is dan een verkorte, handige schrijfwijze[16]:

$$
\bar{\epsilon}_{ijkl} = H^{-4} g_{ii'} g_{jj'} g_{kk'} g_{ll'} \epsilon^{01\cdots 5 i'j'k'l'}. \tag{4.32}
$$

Opmerking: Het is door het voorkomen van de $\epsilon^{01\cdots 5i'j'k'l'}$ in de laatste vergelijking dat we rekentechnisch onmogelijk het ijkveld kunnen geven dat de veldsterkte H_{ijkl} in betrekking (4.31) genereert.

4.3.3 Dp-branen

In de vorige twee paragrafen werden alle Ramond-Ramondvormen in de Lagrangianen van IIA en IIB nul gesteld. Hier willen we echter oplossingen zoeken van eenzelfde Ansatz waarbij echter selectief één Ramond-Ramond q-vorm van nul verschilt door $C_q = H^{-1}$, terwijl alle andere velden wel nul zijn.

De Ansatz wordt bijgevolg gegeven door (4.7-4.9), waarbij het ijkveld $B_{01\cdots p}$ een Ramond-Ramondvorm voorstelt. Verder geldt $D = 10$ en $l = \frac{3-p}{2}$.

---

[15] Bemerk dat deze parameters vast liggen door de Hodge-dualiteit met de Kalb-Ramondvorm.

[16] De factor H^{-4} zorgt ervoor dat er in (4.31) geen macht van H voorkomt.

Vult men dit in de bewegingsvergelijkingen in, dan bekomt men branen die, vanwege de keuze van het van nul verschillende ijkveld, geladen zijn onder de Ramond-Ramond $(p+1)$-vorm. Bij deze – zogenaamde Dp- – branen [14] geeft (4.10-4.15) dat

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= H^{\frac{1}{8}(p-7)}\eta_{ab}dx^a dx^b - H^{\frac{1}{8}(p+1)}\delta_{ij}dy^i dy^j, && (4.33)\\
e^{-2\phi} &= H^{\frac{1}{2}(p-3)}, && (4.34)\\
B_{01\cdots p} &= H^{-1}. && (4.35)
\end{aligned}
$$

Verder voldoet H aan

$$\partial_k \partial^k H = 0 \qquad (4.36)$$

waarbij k alle transversale ruimtelijke dimensies doorloopt. Door de structuur van de Lagrangianen (zie vergelijking (2.4) en opmerking pagina 20) is het verder duidelijk dat in IIA enkel $D0, D2, D4$ en $D6$-branen[17] kunnen voorkomen, terwijl IIB alleen $D1, D3, D5$ en $D7$ bevat.

4.3.4 Oplossingen uit elfdimensionale supergravitatie:

In elf dimensies kunnen we een redenering opzetten, analoog aan deze van de vorige paragrafen 4.3.1-4.3.3, vertrekkend van de bewegingsvergelijkingen van de Lagrangiaan (4.1) waarbij dan naast $D = 11$, $p = 2$ en $l = 0$ ook rekening gehouden wordt met de afwezigheid van een dilaton in elf dimensies[18]. De Lagrangiaan werd reeds gegeven in (2.9). Wanneer we de voorwaarden ook in rekening brengen in deel 4.1, kunnen we de bewegingsvergelijkingen die daar afgeleid werden, behouden.

Aan hand van (4.10-4.15) kunnen we bekijken wat een Ansatz van de vorm (4.7 & 4.9)in dit geval meebrengt voor de oplossing die onder het drievorm-ijkveld

1. elektrisch geladen is: We spreken over een M2-braan die voldoet aan [17]

$$
\begin{aligned}
\partial_k \partial^k H &= 0, && (4.37)\\
ds^2 &= H^{-\frac{2}{3}}\eta_{ab}dx^a dx^b - H^{\frac{1}{3}}\delta_{ij}dy^i dy^j, && (4.38)\\
B_{012} &= H^{-1}, && (4.39)
\end{aligned}
$$

   met $\{a, b\} = \{0, 1, 2\}$ en $\{i, j, k\} = \{3, \cdots, 10\}$.

[17] In Romans theorie is ook een $D8$-braan mogelijk: men breidt IIA uit men een kosmologische constante, waarmee een $D8$-braan Hodge-duaal is. Het is dit principe dat straks ook bij het onderzoek naar constant gekromde branen in hoofdstuk 5 gebruikt wordt.

[18] Het dilaton in tien dimensies komt immers overeen met $\hat{\hat{g}}_{xx}$, waarbij de twee hoeden aangeven dat het om de elfdimensionale metriek gaat.

2. magnetisch geladen is: In dit geval is de braan een M5-braan waarvoor, onder de voorwaarde $\{a,b\} = \{0,\cdots,5\}$ en $\{i,j,k\} = \{6,\cdots,10\}$, geldt dat [18]

$$\begin{aligned}
\partial_k \partial^k H &= 0, & (4.40)\\
ds^2 &= H^{-\frac{1}{3}} \eta_{ab} dx^a dx^b - H^{\frac{2}{3}} \delta_{ij} dy^i dy^j, & (4.41)\\
B_{0\cdots 5} &= H^{-1}. & (4.42)
\end{aligned}$$

4.4 Andere oplossingen

Nu we enkele oplossingen van de tien- en elfdimensionale supergravitatie kennen, is het mogelijk om hieruit nieuwe oplossingen te construeren die niet in de Ansatz (4.7-4.9) zitten. Dit doen we door T-dualiteit op F1 en NS5 te bekijken:

1. Passen we T-dualiteit toe op de fundamentele string in de richting van de eerste ruimtelijke coördinaat, dan bekomen we na een triviale coördinatentransformatie

$$ds^2 = -(1-H)dt^2 + 2H dt dz + (1-H)dz^2 - \delta_{ij} dy^i dy^j, \qquad (4.43)$$

   waarbij de functie H nog steeds een harmonische functie is die enkel van de y^i afhangt en $\{i,j\} = \{2,\cdots,9\}$. (4.43) stelt een schokgolf voor die zich in de z-richting voortplant, terwijl alle andere velden nul zijn; in de literatuur wordt ze dan ook omschreven als de gravitationele golf [19], die met het symbool $\mathcal{W}$ aangeduid wordt.

2. Het gebruiken van deze dualiteit om via NS5 tot een nieuwe oplossing te komen, genereert de zogenaamde Kaluza-Klein monopool [20] bij dualizering over een ruimtelijke dimensie:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \eta_{ab} dx^a dx^b - H^{-1}(dw + A_i dx^i)^2 - H \delta_{ij} dx^i dx^j \\
F_{ij}(A) &= \epsilon_{ijk} \delta^{kl} \partial_l H, & (4.44)
\end{aligned}$$

   waarbij $\{a,b\} = \{0\cdots 5\}$ en $\{i,j,k\} = \{6,7,8\}$. H is onafhankelijk van de richting w, maar is verder wel een harmonische functie van i,j en k. Om wille van de vijf wereldvolume dimensies $1\cdots 5$ wordt deze monopool afgekort met $\mathcal{KK}_5$.

De Kaluza-Kleinmonopool en de gravitationele golf zijn beide puur gravitationele oplossingen: hun energie-momentumtensor is nul. Dit zorgt ervoor dat de Riccitensor van beide oplossingen nul is; men zegt dat $\mathcal{W}$ en $\mathcal{KK}$ Riccivlak zijn. Het betekent echter niet dat ze ook werkelijk *vlak* zijn, wat op zicht duidelijk is vermits deze laatste voorwaarde enkel weggelegd is voor de Minkowskimetriek.
De eenvoud van deze oplossingen – vanaf het ogenblik dat er sprake is van gravitatie, bestaan de Kaluza-Kleinmonopool en de gravitationele golf – zorgt ervoor dat ze in eender welke dimensie kunnen voorkomen. Zo zullen wij gebruik maken van de triviale uitbreiding van $\mathcal{KK}$ en $\mathcal{W}$ tot elf dimensies: men plakt er in het eerste geval een wereldvolume coördinaat bij zodat $\mathcal{KK}_6$ eruit ziet als (4.44) maar met $\{a,b\} = \{0\cdots 6\}$ en $\{i,j,k\} = \{7,8,9\}$, terwijl het tweede geval een ruimtelijke coördinaat bijkrijgt: ze voldoet aan (4.43) met $\{i,j\} = \{2,\cdots,10\}$.

4.5 Schema der vlakke branen

Volgens hoofdstuk 3 beelden de T- en S-dualiteit, evenals de dimensionale reductie theorieën op elkaar af. Dit betekent echter ook dat de verschillende oplossingen van deze theorieën met elkaar verbonden zijn. We hebben reeds in vorig deel gezien dat T-dualiteit ons naar de twee nieuwe oplossingen $\mathcal{W}$ en $\mathcal{KK}$ brengt. We gaan nu na hoe deze dualiteit de verschillende oplossingen van IIA met deze van IIB verbindt. Wat S-dualiteit betreft weten we dat IIB eronder zelfduaal is, hetgeen betekent dat iedere oplossing uit IIB op eentje van dezelfde theorie dient afgebeeld te worden. Ten slotte is er ook nog de dimensionale reductie die IIA uit de elfdimensionale supergravitatie genereert. We gaan na hoe de oplossingen van IIA met de elfdimensionale in verband worden gebracht. Het geheel brengt ons uiteindelijk naar een bevattelijk schema.

T-dualiteit: Uit deel 4.4 kennen we reeds het T-duaal verband tussen $\mathcal{W}$ en $\mathcal{KK}$. Laten we nu de uitwerking van T-dualiteit bekijken op de Dp-branen. Hiervoor gebruiken we een veralgemening [9] van de T-dualiteitsregels tussen IIA en IIB, die we in hoofdstuk 3 uit de Common Sector afgeleid hebben.
Na een kleine berekening blijkt dat het toepassen van T-dualiteit op het wereldvolume van een Dp-braan uit de ene theorie een $D(p-1)$-braan van de andere geeft. Bij dualisering over de transversale ruimte, gaat echter een Dp-braan uit de ene over in een $D(p+1)$-braan van de andere.

S-dualiteit: Vermits deze dualiteit alleen in IIB bestaat, dient de uitwerking ervan enkel te worden nagegaan op $D1$-, $D3$- en $D5$-branen. We vinden:

1. De S-duale van een $D1$-braan is de fundamentele string.

2. Op $D3$ toegepast, geeft de bewerking opnieuw de $D3$-braan.

3. $D5$ wordt door S-dualiteit op NS5 afgebeeld.

Dimensionale reductie: M2, M5, $\mathcal{KK}_6$ en $\mathcal{W}_{11}$ kunnen gereduceerd worden naar tien dimensies via de gepaste Kaluza-Kleinreductie[19](zie b.v. [4]).
Een berekening leert [15] ons dat M2 terugvalt tot een $D2$-braan bij een reductie over een transversale ruimtelijke coördinaat, terwijl een reductie over een wereldvolume-coördinaat F1 geeft. M5 reduceert zich over haar wereldvolume tot een $D4$-braan, terwijl ze tot NS5 verwordt bij een herleiding in de transversale ruimte.
Een reductie over een braanachtige coördinaat brengt $\mathcal{KK}_6$ tot $\mathcal{KK}_5$, terwijl een reductie over w leidt tot een $D6$. $\mathcal{W}_{11}$ herleidt zich enerzijds tot een $D0$ bij het reduceren over de voortplantingsrichting en anderzijds tot $\mathcal{W}_{10}$ over de transversale ruimte.

Schema Wanneer ten slotte alle resultaten van 4.5 bij elkaar geplaatst worden, bekomen we een bevattelijk zicht op het web van de vlakke branen. Het is weergegeven in figuur 1.

[19]Deze regels zijn conceptueel dezelfde als de voorschriften die in hoofdstuk 3.1.1 afgeleid werden voor het algemene geval van D naar $D-1$ dimensies. De expliciete formulering is echter verschillend: bij de laatste maken we rechtstreeks gebruik van het feit dat het dilaton bestaat, terwijl we bij een reductie naar tien dimensies rekening moeten houden met de afwezigheid van het dilaton in de elfdimensionale supergravitatie. De regels van hoofdstuk 3.1.1 voldoen dus voor een reductie van D naar $D-1$ voor $D \leq 10$.

Figuur 1: Het schema der vlakke branen. De streepjeslijnen stellen dimensionale reductie voor, waarbij vertikale pijlen de reductie over het wereldvolume aanduiden en schuine over de transversale ruimte. De volle geven T-dualiteit weer en de blokjes S-dualiteit.

Besluit: In hoofdstuk 4 zochten we branen, oplossingen van de bewegingsvergelijkingen, met een Minkowski-metriek op hun wereldvolume. Het rechtstreeks oplossen van de vergelijkingen voor welbepaalde parameters p, D en l, alsook het toepassen van T- dualiteit, leverden in tien dimensies de fundamentele strings, de NS5-branen, de Dp-branen, de gravitational waves en de Kaluza-Kleinmonopolen op. Wanneer we echter ook keken naar de oplossingen van de elfdimensionale supergravitatie – zijnde M2, M5, de elfdimensionale Kaluza-Kleinmonopool $\mathcal{KK}_6$ en gravitational wave – en tevens S-dualiteit en dimensonale reductie in rekening brachten, manifesteerde zich duidelijk het web van de fundamentele vlakke branen.

5 Gekromde p-braanoplossingen

Vorig hoofdstuk handelde over vlakke branen; nu proberen we te komen tot branen met een constante kromming. In de literatuur is dit probleem enkel voor het meest eenvoudige geval behandeld; men heeft zich steeds beperkt tot domeinmuren. Deze laatste zijn branen die alle ruimtelijke dimensies van de ruimte innemen op één na. Wij stellen hier uiteindelijk de vraag of het mogelijk is algemene p-branen met een constante kromming te beschouwen. Door te steunen op de bekende resultaten bij domeinmuren kunnen we in deel 5.3 het antwoord geven. Het werk dat hier geleverd wordt, kadert in een programma om de ruimtetijd zoals wij ze kennen te bekijken als een driebraan in een hogerdimensionale wereld. We bouwen daarom een steeds ingewikkeldere Ansatz, die stap per stap meer fysica op de braan beschrijft. Zoals vermeld behelst deze thesis slechts enkel de kromming, maar in extremis zou men kunnen pogen om uiteindelijk te komen tot een soort van standaardmodel op de braan.
In vergelijking met vorig hoofdstuk veranderen we hier de Ansatz van onze metriek: in plaats van een Minkowskimetriek op de braan te beschouwen, gaan we nu uit van een algemene metriek $\tilde{g}_{ab}$. We onderzoeken onder welke voorwaarde we dan te doen hebben met branen. In de eerste stap vinden we een oplossing als de braan Riccivlak[20] is. Dan focussen we ons op de domeinmuren, waarbij we zowel een Ansatz zonder als met een dilaton beschouwen. We vinden dat constant gekromde domeinmuren mogelijk zijn. Een veralgemening van de werkwijze bij deze speciale branen leidt dan tot het antwoord op de vraag wat er gebeurt als we toch trachten de algemene p-braanoplossing met constante kromming te construeren.

5.1 Riccivlakke p-braanoplossingen

We vervangen in de ansatz voor de metriek (4.7) de η_{ab} door een algemene $\tilde{g}_{ab}$. Verder nemen we aan dat bij de substitutie van de nieuwe metriek door de Minkowskimetriek steeds de vlakke branen, beschreven door deel 4.2, bekomen dienen te worden. Dit betekent dat de parameters α, β, γ en δ al bekend zijn.

In het bijzonder vertrekken we van de Ansatz [22]

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^\alpha(y)\tilde{g}_{ab}(x)dx^a dx^b - H^\beta(y)\delta_{ij}dy^i dy^j, && (5.1)\\ e^{-2\phi} &= H^\gamma(y), && (5.2)\\ B_{01\cdots p} &= \sqrt{|\tilde{g}|}H^{-1}(y), && (5.3) \end{aligned}$$

De bewegingsvergelijking voor het ijkveld (4.2) wordt voor $\rho = a$ identisch nul door de toegevoegde $\sqrt{|\tilde{g}|}$, die er ook voor zorgt dat voor $\rho = i$ deze vergelijking niet méér blijkt te zijn dan de ijkveldvergelijking van het vlakke geval. Hetzelfde geldt voor de de dilaton- en de ij-Einsteinvergelijking . Dit brengt met zich mee dat ook H ten opzichte van het vlakke gval niet verandert:

$$\partial_k \partial^k H = 0. \tag{5.4}$$

[20] Een braan is intrinsiek vlak wanneer de Riemanntensor $R_{\mu\nu\rho\lambda}$ nul is. Wanneer echter de Riccitensor $R_{\mu\nu}$ – die een contractie is van de Riemann – nul is, spreekt men over Riccivlak, hetgeen niet noodzakelijk Riemann-vlak impliceert.

De ab-Einsteinvergelijking van haar kant factoriseert in een gedeelte dat van het wereldvolume en in een gedeelte dat van de transversale ruimte afhangt. Dit laatste is door onze aanname echter nul, wat leidt tot de voorwaarde [21]

$$\tilde{R}_{ab} = 0. \tag{5.5}$$

Hoewel deze vergelijking in de D-dimensionale ruimte geen bewegingsvergelijking is, kan ze wel als zodanig beschouwd worden voor de op de braan gedefinieerde Lagrangiaan

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sqrt{|\tilde{g}|}\tilde{R}. \tag{5.6}$$

Deze effectieve Lagrangiaan geeft weer dat er op de braan gravitatie leeft! Dit betekent dat alle gravitationele oplossingen op de braan kunnen voorkomen. Dan spreken we over monopolen, gravitationele golven, (niet geladen) zwarte gaten,...

Besluit: De vlakke p-braanoplossingen uit deel 4.2 kunnen we veralgemenen tot oplossingen met gelijk welke braanmetriek, op voorwaarde dat deze laatste Riccivlak is. We hebben dus een nieuwe klasse van oplossingen verkregen! De Ansatz voor het ijkveld krijgt verder een wereldvolume-afhankelijkheid in de vorm van $\sqrt{|\tilde{g}|}$. Deze procedure geeft als resultaat dat het voor een waarnemer op de braan lijkt alsof er zich op het object gravitatie handhaaft.

5.2 Domeinmuren met constante kromming

Op weg naar het vraagstuk over de algemene p-braan met constante kromming, bekijken we vervolgens de domeinmuren met een constante kromming. Domeinmuren (Eng. Domain Walls) zijn branen die de gehele ruimtetijd op één ruimtelijke dimensie na bevatten. In het jargon van dit hoofdstuk komt dit neer op $p = D - 2$, hetgeen in onze tiendimensionele ruimtetijd vertaald wordt als een 8-braan. Domeinmuren delen de ruimte in twee, op dezelfde manier als waarop een gordijn in het midden van een kamer dat doet. Ze worden beschreven door een F_D-vorm, die Hodge-duaal is aan een constante. Het is van deze laatste elektrische – want een constante heeft geen indices – formulering dat wij gebruik maken...
In eerste instantie vertrekken we nu van een Lagrangiaan die geen dilaton bevat, daarna focussen we ons op het geval mèt dilaton. In beide situaties werken we tevens met een kosmologische constante Λ, die de overkoepelende tiendimensionale ruimte kromming geeft. Dit betekent dat we nog steeds verder kunnen met (4.1), waarbij we logischerwijze ϕ al dan niet nul stellen: $\sqrt{\Lambda}$ komt overeen met F_0, die Hodge-duaal is aan F_D. Deze laatste vorm verkrijgen we ten slotte door in de Lagrangiaan $p = D - 2$ te stellen.

5.2.1 Systeem zonder dilaton

Beschouw de Lagrangiaan

$$\mathcal{L} = \sqrt{|g|}\Big[R - \Lambda\Big], \tag{5.7}$$

waarbij Λ de kosmologische constante voorstelt. We werken in principe met dezelfde metriek- en ijkveldansatz als vorige paragraaf. In het geval van domeinmuren wordt de Ansatz (5.1) echter

$$ds^2 = H^\alpha \tilde{g}_{ab}(x)dx^a dx^b - dy^2, \tag{5.8}$$

waarbij $\{a, b\} = \{0 \cdots D-2\}$ en $\tilde{g}_{ab}$ een willekeurige metriek is die van de wereldvolumecoördinaten x afhangt.

De yy-Einsteinvergelijking is

$$\begin{aligned} H^{-2}\partial_y H \partial_y H\Big[-\frac{\alpha}{2}(D-1) + \frac{\alpha^2}{4}(D-1)\Big] \\ +H^{-1}\partial_y\partial_y H\frac{\alpha}{2}(D-1) + \frac{\Lambda}{D-2} = 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Wanneer we $\alpha = 2$ stellen, vereenvoudigt ze tot [23]

$$\partial_y\partial_y H = \chi^2 H, \qquad \text{waarbij} \tag{5.10}$$

$$\chi^2 = -\frac{\Lambda}{(D-2)(D-1)}. \tag{5.11}$$

Voor de ab-component volgt

$$\tilde{R}_{ab} - \tilde{g}_{ab}\Big(H\partial_y\partial_y H + (D-2)\partial_y H \partial_y H + \frac{\Lambda}{D-2}H^2\Big) = 0. \tag{5.12}$$

In deze vergelijking hangt het gedeelte tussen haken af van de transversale coördinaat y, terwijl $\tilde{R}_{ab}$ en $\tilde{g}_{ab}$ functie vormen van de wereldvolume-coördinaten. Het gedeelte tussen haken dient dus constant te zijn:

$$H\partial_y\partial_y H + (D-2)\partial_y H \partial_y H + \frac{\Lambda}{D-2}H^2 = \tilde{\Lambda}. \tag{5.13}$$

Daar waar we in de vorige paragraaf de Riccivlak-voorwaarde verkregen, bekomen we nu

$$\tilde{R}_{ab} = \tilde{\Lambda}\tilde{g}_{ab}. \tag{5.14}$$

Deze vergelijking kan je vervolgens interpreteren als een bewegingsvergelijking op de braan, afkomstig van de Lagrangiaan

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sqrt{|\tilde{g}|}\Big[\tilde{R} - (D-3)\tilde{\Lambda}\Big]. \tag{5.15}$$

De integratieconstante $\tilde{\Lambda}$ uit (5.13) kan dus één dimensie lager geïnterpreteerd worden als een kosmologische constante, die hier een geometrische interpretatie krijgt: ze geeft de kromming van de braan weer.

Er rest ons het oplossen van het stelsel $\{(5.10),(5.13)\}$. Wat het geval van de Riccivlakke braan[21] betreft, dit wordt opgelost door

[21] Dat dit resultaat duidelijk anders is dan (5.4), is te wijten aan het verschil in Ansatz tussen paragrafen 5.1 en 5.2.1. Het is enkel het woordgebruik dat overeen komt.

$$H(y) = e^{\pm\chi y}, \tag{5.16}$$

waarbij χ reëel is, wat neerkomt op $\Lambda < 0$. In dit geval hebben we dus te maken met een D-dimensionale ruimte-tijd die anti-de Sitter is.

Om de oplossing te vinden bij $\tilde{\Lambda} \neq 0$, definiëren we

$$\tilde{\chi}^2 = -\frac{\tilde{\Lambda}}{D-2}, \tag{5.17}$$

en na een kleine berekening vinden we

$$H(y) = \frac{1}{2}\sqrt{\pm\frac{\tilde{\chi}^2}{\chi^2}}\left(e^{\chi y} \pm e^{-\chi y}\right). \tag{5.18}$$

Het teken moet zo gekozen worden dat H reëel wordt. Bemerk dat dit enkel onmogelijk is wanneer χ imaginair is en $\tilde{\chi}$ reëel. Dit betekent dat de combinatie $\{\Lambda > 0, \tilde{\Lambda} < 0\}$ niet mogelijk is: het is niet mogelijk een anti-de Sitter braan te hebben in een de Sitter achtergrond. Verder zijn er drie gevallen:

$$\left\{\begin{array}{llll} 1) & \chi, \tilde{\chi} \in \mathbb{R}: & \{\Lambda < 0, \tilde{\Lambda} < 0\}, & H(y) = \frac{\tilde{\chi}}{\chi}\cosh(\chi y), \\ 2) & \chi \in \mathbb{R}, \tilde{\chi} \in i\mathbb{R}: & \{\Lambda < 0, \tilde{\Lambda} > 0\}, & H(y) = \frac{i\tilde{\chi}}{\chi}\sinh(\chi y), \\ 3) & \chi, \tilde{\chi} \in i\mathbb{R}: & \{\Lambda > 0, \tilde{\Lambda} > 0\}, & H(y) = \frac{\tilde{\chi}}{\chi}\cos(i\chi y). \end{array}\right\} \tag{5.19}$$

Geval 1) betekent dat we de negatief gekromde overkoepelende ruimte kunnen opbouwen[22] met negatief gekromde domeinmuren, terwijl Geval 2) weergeeft dat hetzelfde met positief gekromde domeinmuren. 3) zegt dat een positieve ruimte kan bestaan uit positief gekromde muren.

Als afsluiter is het even de moeite waard te beschouwen wat er gebeurt wanneer we de D-dimensionale kosmologische constante in de Lagrangiaan nul stellen. Het moge opvallen dat de oplossing in dit verband moet voldoen aan

$$\tilde{\Lambda} = (D-2)\partial_y H \partial_y H, \tag{5.20}$$

waardoor de braan duidelijk nog steeds gekromd is. De kosmologische constante Λ draagt bijgevolg zeker bij tot de kromming van de braan, maar ze is in het algemeen niet onmisbaar. De oplossingen zijn in dit geval van de vorm

$$H(y) = i\tilde{\chi}y. \tag{5.21}$$

Vermits de metriek reëel moet zijn, betekent deze vergelijking dat $\tilde{\chi} \in i\mathbb{R}$ of $\tilde{\Lambda} > 0$; het is met andere woorden mogelijk de vlakke ruimte op te bouwen met positief gekromde branen.

Opmerking: Deze paragraaf leert ons iets over ons eigen universum wanneer we aannemen dat we zelf op een vierdimensionale braan leven in een vijfdimensionale ruimtetijd. Bemerk immers dat

[22] In het Engels spreekt men over "slicing", wat letterlijk betekent "in plakjes snijden"

àls de kosmologische constante in ons universum, $\tilde{\Lambda}$ dus, negatief was, dan kon de overkoepelende ruimtetijd niet positief gekromd zijn. Of nog, stel dat $\tilde{\Lambda}$ nul was, zoals men lange tijd aannam, en we bijgevolg op een Riccivlakke braan leefden, dan moest de ruimtetijd in de achtergrond noodzakelijkerwijze negatief gekromd zijn. Men heeft echter de kosmologische constante kunnen meten [24]: ze blijkt niet nul, doch zeer klein en positief te zijn. Dit betekent in concreto dat alle mogelijkheden nog open zijn wat betreft de kromming van onze vijfdimensionale overkoepelende ruimtetijd.

Besluit: Beschouwt men in de D-dimensionale ruimtetijd enkel gravitatie en – niet noodzakelijk – een kosmologische constante, dan zijn er mits de voorwaarden (5.19) of (5.21) positief en negatief gekromde domeinmuren mogelijk: in een gekromde achtergrond zijn alle combinaties mogelijk, behalve een negatief gekromde braan in een positief gekromde ruimtetijd. Is de D-dimensionale ruimte echter vlak, dan moeten de domeinmuren positief gekromd zijn.

5.2.2 Systeem met dilaton

Vervolgens bekijken we de domeinmuren die oplossingen zijn van een systeem dat wel een dilaton bevat: de Lagrangiaan is [25]

$$\mathcal{L} = \sqrt{|g|}\Big[R + \frac{4}{D-2}(\partial\phi)^2 - e^{l\phi}\Lambda\Big]. \tag{5.22}$$

De metriekansatz is dezelfde als in 5.2.1, terwijl we voor het dilaton (5.2) aannemen:

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^\alpha \tilde{g}_{ab} dx^a dx^b - dy^2, \\ e^{-2\phi} &= H^\gamma(y). \end{aligned} \tag{5.23}$$

Wanneer dit ingevuld wordt in de bewegingsvergelijkingen, bekomen we drie vergelijkingen die opgelost dienen te worden, namelijk

- de dilatonvergelijking, waarbij de aanname $\gamma \neq 0$, waarvan we verder uitgaan, met zich meebrengt dat ook $l \neq 0$:

$$\partial_y\partial_y H = H^{-1}\partial_y H \partial_y H\Big[1 - \frac{\alpha}{2}(D-1)\Big] - \frac{l(D-2)}{4\gamma} H^{-\frac{l\gamma}{2}+1}\Lambda. \tag{5.24}$$

- de ij-Einsteinvergelijking:

$$\begin{aligned} 0 &= H^{-2}\partial_y H\partial_y H\Big[-\frac{\alpha}{2}(D-1) + \frac{\alpha^2(D-1)}{4} + \frac{\gamma^2}{D-2}\Big] \\ &\quad + \frac{\alpha(D-1)}{2} H^{-1}\partial_y\partial_y H + \frac{H^{-\frac{l\gamma}{2}}}{D-2}\Lambda. \end{aligned} \tag{5.25}$$

- de ab-Einsteinvergelijking, waarbij we dezelfde gedachtengang volgen als in paragraaf 5.2.1:

$$\tilde{R}_{ab} = \tilde{\Lambda}\tilde{g}_{ab} \qquad \text{waarbij} \tag{5.26}$$

$$\tilde{\Lambda} = \frac{\alpha}{2}H^{\alpha-1}\partial_y\partial_y H - \frac{\alpha}{2}H^{\alpha-2}\partial_y H\partial_y H\Big[1 - \frac{\alpha(D-1)}{2}\Big] + \frac{H^{-\frac{l\gamma}{2}+\alpha}}{D-2}\Lambda. \tag{5.27}$$

Deze analogie met (5.12-5.14) geeft verder aan dat dat de waarnemer op de braan dezelfde effectieve Lagrangiaan (5.15) waarneemt.

Wanneer de uitdrukking (5.27) voor $\tilde{\Lambda}$ in de dilatonvergelijking gestopt wordt, volgt

$$\gamma = \frac{2\alpha}{l}, \tag{5.28}$$

terwijl dan de dilatonvergelijking reduceert tot

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda\Big[\frac{16 - l^2(D-2)^2}{16(D-2)}\Big]. \tag{5.29}$$

De ij-Einsteinvergelijking, waarbij we $\alpha = 2$ kozen om de afhankelijkheid van Λ erin te verliezen, wordt

$$\Big[-\frac{16}{l^2(D-2)^2} + (D-1)\Big]\partial_y\partial_y H = 0. \tag{5.30}$$

Een oplossing voor H die zowel aan deze laatste vergelijking[23] als aan ab-Einstein voldoet en daarmee dit geval oplost, is uiteindelijk[24]

$$H = 1 - \frac{l}{4}\sqrt{-\Lambda}y, \tag{5.31}$$

die duidelijk weergeeft dat $\Lambda = 0$ overeenkomt met een vlakke D-dimensionale ruimte.

(5.29) geeft in vergelijking met paragraaf 5.2.1 een schril contrast aan. In de vorige paragraaf zagen we dat $\tilde{\Lambda}$ een integratieconstante was waarop verder in weze geen voorwaarde lag. Ook was het daar duidelijk dat de aanwezigheid van de D-dimensionale kosmologische constante niet noodzakelijk was om een lagerdimensionale $\tilde{\Lambda}$ te verkrijgen. Beide vaststellingen worden door hier door het verband tussen $\tilde{\Lambda}$ en Λ te niet gedaan. Geldt dus in de overkoepelende ruimte in het bijzonder $\Lambda = 0$, dan is de braan noodzakelijkerwijze Riccivlak. We bekomen dit ook wanneer Λ willekeurig is en $l = \pm\frac{4}{D-2}$. In het algemeen zien we bijgevolg dat het teken van $\tilde{\Lambda}$ bepaald wordt door dat van Λ èn door de waarde van zowel l als D.
Uit figuur 2, waarbij de breuk tussen de vierkante haakjes in (5.29) voor $D = 10$ weergegeven wordt, is het verder duidelijk dat voor $-\frac{1}{2} < l < +\frac{1}{2}$ de kromming van de domeinmuur hetzelfde teken heeft als de kromming van de 10-dimensionale ruimtetijd, terwijl voor andere waarden de kromming tegengesteld is. Laten we D stijgen, dan daalt het gebied waar de functie tussen tussen rechte haken positief is: de kans op hetzelfde teken tussen domeinmuur en achtergrondruimte daalt. Laten we D zakken, dan gebeurt het tegenovergestelde.
De waarnemer op de braan ziet bijgevolg wel dezelfde Lagrangiaan als in de vorige paragraaf 5.2.1, maar de samenhang met de hogerdimensionale ruimte is duidelijk anders.

Besluit: We bewezen in (5.31) dat een domeinmuur met constante kromming mogelijk is wanneer we vertrekken van een Lagrangiaan die naast een gravitationele term en een kosmologische constante, ook een dilaton bevat. Voor de waarnemer op de braan wijzigt de effectieve Lagrangiaan

[23] Is echter de voorfactor van (5.30) door een gepaste waarde van l nul, dan is de enige vergelijking die H bepaalt de ab-Einsteinvergelijking, die enkel zegt dat de oplossing lineair is.

[24] De constante term 1 en het teken van de tweede term uit deze vergelijking zijn arbitrair.

Figuur 2: Schets voor de coëfficiënt van $\tilde{\Lambda}$ in (5.29) voor $D = 10$.

die zich schijnbaar op de braan handhaaft echter niet. De interpretatie ervan is echter wel anders: nu is er een rechtstreeks verband tussen de twee kosmologische constanten, waarbij de specifieke theorie, waarmee men wenst te werken en die l bepaalt, ook zijn invloed heeft.

5.3 Algemene p-braanoplossingen met constante kromming

Tot op dit punt kon men eventueel steunen op geleverd werk in de literatuur. Het was dan ook een open vraag wat er zou gebeuren indien men geen domeinmuren, maar algemene p-branen met constante kromming wilde zoeken. Het is duidelijk dat in dat geval de resulterende bewegingsvergelijkingen een stuk moeilijker worden: de ijkveld-, de dilaton- en de ab-Einsteinvergelijking zijn nog wel scalaire vergelijkingen, maar de ij-Einstein is een partiële differentiaalvergelijking. We kunnen dan natuurlijk eventueel wel werken met het spoor van deze laatste, maar dan is het nog niet duidelijk of de oplossing ervan wel aan de volledige ij-Einsteinvergelijking voldoet. Ten slotte moeten we op basis van het al dan niet consistent zijn van de verschillende voorwaarden toch kunnen aantonen dat òf zulke oplossingen bestaan òf dat ze niet mogelijk zijn.

Door echter een goede Ansatz te kiezen die toelaat terug te keren naar de reeds besproken gevallen, kunnen we concrete stappen uit onze berekening staven met hun equivalent uit de vorige paragrafen. We verkiezen hier bijgevolg een Lagrangiaan die naast de Ricciscalar en het dilaton een F_{p+2}-vorm bevat, zodat het op eender welk ogenblik mogelijk is terug te keren naar 5.2.2 in geval $p = D - 2$. Bij dit laatste steunen we op de Hodge-dualiteit die een kosmologische constante equivalent stelt aan een F_D-vorm.

Het bepalen van de Ansatz: Als Ansatz voor de metriek en het dilaton gebruiken we dezelfde Ansätze als in voorgaande delen 5.1 en 5.2:

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^{\alpha}(y)\tilde{g}_{ab}(x)dx^a dx^b - H^{\beta}(y)\delta_{ij}dy^i dy^j, & (5.32)\\ e^{-2\phi} &= H^{\gamma}(y). & (5.33) \end{aligned}$$

Wat de aanname voor het ijkveld of de veldsterkte F_{p+2} betreft, tasten we in het duister[25]. We steunen best op hetgeen we kennen: de domeinmuren. De strategie is nu de Hodge-duale te zoe-

[25]Een vlugge berekening leert bijvoorbeeld dat een eenvoudige Ansatz zoals (5.3) niet volstaat.

ken van de kosmologische constante[26] Λ, hetgeen ons een F_D geeft. Deze kunnen we vervolgens veralgemenen naar de gezochte F_{p+2}.

De Hodge-duale van de Lagrangiaan met de kosmologische constante kunnen we aan hand van (3.58-3.59) berekenen. Λ komt nu overeen met F_0^2, dus $p = -2$ in $\mathcal{L}_1$. $\mathcal{L}_2$, aangevuld met de Ricciscalar en het dilaton, geeft de Lagrangiaan die we nodig hebben

$$\mathcal{L} = \sqrt{|g|}\Big[R + \frac{4}{D-2}(\partial\phi)^2 + \frac{(-)^{D+1}}{2\cdot(D)!}e^{+l\phi}F_D^2\Big], \tag{5.34}$$

wat overeen komt met (4.1). Dit betekent dat we de expliciete bewegingsvergelijkingen uit paragraaf 4.1 kunnen behouden.

Wanneer we nu aannemen dat[27] $F_D \equiv \sqrt{2}\lambda$, dan vinden we na het invullen van de metriek- en dilatonansatz

$$F_{0\cdots(D-1)y} = \frac{(-)^{\frac{3D}{2}}D!\sqrt{2}}{(D-1)!}H^{\frac{\alpha(D-1)}{2}+\frac{l\gamma}{2}}\sqrt{|\tilde{g}|}\lambda\epsilon^{(\mathrm{vl})}_{0\cdots(D-2)}, \tag{5.35}$$

waarbij $\epsilon^{(\mathrm{vl})}$ aangeeft dat we gebruik maken van het antisymmetriserende ϵ-symbool met de conventie $\epsilon^{(\mathrm{vl})}_{0\cdots(q-1)} = 1$ (zie (A.13)).

We veralgemenen vervolgens (5.35) tot een algemene $(p+2)$-vorm: we weten dat voor $p = D-2$ de vorige vergelijking bekomen dient te worden. Dit brengt ons bij de gezochte

$$F_{0\cdots pi} = N\sqrt{|\tilde{g}|}\lambda_i H^{\frac{\alpha(p+1)}{2}+\frac{l\gamma}{2}+\frac{\beta}{2}}\epsilon^{(\mathrm{vl})}_{0\cdots p}, \tag{5.36}$$

waarbij λ_i, met $\lambda_i\lambda^i = \lambda^2$, de veralgemening is van λ voor de i^{de} transversale richting. N hangt verder van de parameters p en D af:

$$N = (-)^{\frac{D}{2}+p+2}(p+2)\sqrt{2}[(D-p-3)!]. \tag{5.37}$$

Bewegingsvergelijkingen: Wordt de Ansatz in de ijkveldvergelijking ingevuld, dan volgt

$$\partial_i\Big[\sqrt{|g|}H^{-\frac{l\gamma}{2}}(-1)^{p+1}\delta^{ik}\frac{N}{\sqrt{|\tilde{g}|}}\lambda_k H^{-\frac{\alpha(p+1)-l\gamma+\beta}{2}}\Big] = 0. \tag{5.38}$$

Na vereenvoudiging wordt dit

$$\partial_i\Big(H^{\frac{\beta(D-p-2)}{2}}\Big) = 0, \tag{5.39}$$

wat betekent dat we met twee gevallen te doen hebben:

[26]Omdat F^2 in de Lagrangiaan overeen moet komen met Λ, zoeken we in feite de Hodge-duale van $\sqrt{\Lambda}$.
[27]De $\sqrt{2}$ gebruiken we om te compenseren voor de $\frac{1}{2}$ uit de kinetische term.

- $p = D-2$: Dit neemt ons neemt ons terug mee naar domeinmuren, waarbij we weten dat β vrij te kiezen is. Nemen we $\beta = 0$, dan vallen we rechtstreeks in paragraaf 5.2.2, waarbij geldt dat

$$\Lambda = D^2 \lambda_y \lambda_y. \tag{5.40}$$

  Vermits we dit geval reeds bekeken hebben, laten we het nu links liggen.

- $p \neq D-2$: Dit is het geval van de algemene branen, waarop we verder wensen door te gaan. Uit (5.39) volgt dan noodzakelijkerwijze dat $\beta = 0$.

De dilatonvergelijking wordt

$$\partial_k \partial^k H = \Big[1 - \frac{\alpha(p+1)}{2}\Big] H^{-1} \partial_k H \partial^k H + \frac{D-2}{8\gamma} l H^{\frac{l\gamma}{2}+1} N^2 \lambda_k \lambda^k, \tag{5.41}$$

de Einsteinvergelijking voor het wereldvolume, waarbij we dezelfde strategie volgen als in deel 5.2,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ab} &= \tilde{\Lambda} \tilde{g}_{ab} \qquad \text{waarbij} & (5.42)\\ \tilde{\Lambda} &= -\frac{N^2}{2} \frac{D-p-3}{D-2} \lambda_k \lambda^k H^{\frac{l\gamma}{2}+\alpha} \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} H^{\alpha-1} \Big[\partial_k \partial^k H + \{\frac{\alpha}{2}(p+1) - 1\} H^{-1} (\partial H)^2\Big] & (5.43) \end{aligned}$$

en ten slotte de ij-Einstein

$$\begin{aligned} \frac{N^2}{2} \lambda_i \lambda_j H^{\frac{l\gamma}{2}} &= \frac{N^2}{2} \delta_{ij} \frac{p+1}{D-2} \lambda_k \lambda^k H^{\frac{l\gamma}{2}} \\ &\quad + H^{-2} \partial_i H \partial_j H \Big[-\frac{\alpha}{2}(p+1) + \frac{\alpha^2}{4}(p+1) + \frac{\gamma^2}{D-2}\Big] \\ &\quad + \frac{\alpha(p+1)}{2} H^{-1} \partial_i \partial_j H. & (5.44) \end{aligned}$$

Op zoek naar oplossingen: Met behulp van (5.43) elimineren we $\partial_k \partial^k H$ uit vergelijking (5.41). We verkrijgen

$$\tilde{\Lambda} - \frac{N^2}{2} \lambda_i \lambda^i H^{\frac{l\gamma}{2}+\alpha} \Big(-\frac{D-p-3}{D-2} + \frac{D-2}{8\gamma} \alpha l\Big) = 0 \tag{5.45}$$

Omdat $\tilde{\Lambda}$ constant is, moet vervolgens de macht van H nul zijn. Dit bepaalt α, terwijl de resulterende vergelijking een verband geeft tussen $\tilde{\Lambda}$ en Λ. We vinden

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{l\gamma}{2}, & (5.46)\\ \tilde{\Lambda} &= -\frac{N^2}{2} \lambda_k \lambda^k \Big[\frac{16(D-p-3) + (D-2)^2 l^2}{16(D-2)}\Big], & (5.47) \end{aligned}$$

waarbij de tweede vergelijking het analogon is van vergelijking (5.29).

γ bepalen we door de eerste term van het rechterlid uit de dilatonvergelijking nul te stellen:

$$\gamma = -\frac{4}{l(p+1)}. \tag{5.48}$$

Op dit ogenblik hebben we nog twee vergelijkingen die opgelost dienen te worden: enerzijds de dilatonvergelijking

$$\partial_k \partial^k H = -\frac{(D-2)(p+1)}{32} l^2 N^2 \lambda_k \lambda^k H^{-\frac{2}{p+1}+1} \tag{5.49}$$

en anderzijds de Einsteinvergelijking voor de transversale ruimte

$$\begin{aligned} H^{-1}\partial_i \partial_j H &= -\frac{N^2}{2} H^{-\frac{2}{p+1}} \Big[\delta_{ij}\lambda_k\lambda^k \frac{p+1}{D-2} - \lambda_i\lambda_j\Big] \\ &\quad -H^{-2}\partial_i H \partial_j H \Big[\frac{-p(p+1)l^2(D-2)+16}{l^2(p+1)^2(D-2)}\Big]. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Mits we eraan denken dat er informatie verloren gaat, kunnen we deze moeilijke en lange differentiaalvergelijking eventueel in rekening brengen door haar spoor te nemen, die aanleiding geeft tot de vergelijking

$$\partial_k H \partial^k H = m^2 H^{2-\frac{2}{p+1}}, \tag{5.51}$$

waarbij m^2 een gigantische coëfficiënt vertegenwoordigt:

$$m^2 = \frac{N^2\lambda_k\lambda^k l^2 (p+1)^2 \Big[-16(D-p-1)(p+1) + 16(D-2) + (D-2)^2 l^2 (p+1)\Big]}{32\Big[-l^2 p(p+1)(D-2)+16\Big]}. \tag{5.52}$$

Door de wortel te nemen van beide leden uit (5.51) en daarna te integreren, vinden we de bolsymmetrische oplossing

$$H = \Big([\pm\frac{m}{p+1}]r + c\Big)^{p+1} \tag{5.53}$$

met c een willekeurige constante. Vermits de straal r bij domeinmuren overeen komt met de enige transversale richting y, is (5.53) precies het analoge van (5.31), wat we ook kunnen zien door $p = D-2$ te stellen alsook rekening te houden met de verschillen in parametrisatie tussen[28] (5.48) en (5.28). Tevens beschouwen we

$$\Lambda = D^2 \lambda_y \lambda_y. \tag{5.54}$$

We gaan vervolgens na of (5.53) ook een oplossing is van (5.49), waarbij we rekening houden met de natuur van de Laplaciaan in bolcoördinaten:

[28] Let hierbij op: de $-l$ uit de ene formule komt overeen met de $+l$ uit de andere.

$$\partial^2 H = \frac{D-p-2}{r}\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial^2 H}{\partial r^2}. \tag{5.55}$$

De oplossing (5.53) voldoet aan de dilatonvergelijking – waarbij we om de gedachten te focussen $c = 0$ kozen – wanneer

$$m^2 = -\frac{l^2(p+1)^2}{32} N^2 \lambda_k \lambda^k. \tag{5.56}$$

Uitwerken van deze vergelijking geeft ons de voorwaarde opdat (5.53) een oplossing is van de (5.49). Het vertelt dus in welk geval er p-branen met constante kromming kunnen bestaan. We vinden

$$p = D - 2, \tag{5.57}$$

oftewel dat constante-krommingsbranen binnen onze Ansatz altijd domeinmuren zijn!

Het enige bestaande geval is met andere woorden hetgeen in paragraaf 5.2.2 uit de doeken gedaan werd. Het is immers niet meer nodig de “volledige”Einsteinvergelijking voor de transversale ruimte na te gaan. Vermits het volgens (5.57) altijd over domeinmuren gaat, valt de partiële differentiaalvergelijking samen met zijn spoor.

Bemerk dat in het bijzonder de visie van de waarnemer op de braan dezelfde blijft als in deel 5.2: hij kan de vergelijking (5.42) interpreteren als een bewegingsvergelijking van de Lagrangiaan (5.15). Door $p = D - 2$ is vergelijking (5.47) tevens identiek aan (5.29), waarbij dan (5.54) geldt. We kunnen dus ook zonder meer de analyse volgens pagina 39 overnemen.

Besluit: Na de vorige paragraaf waarin we het bestaan aantoonden van domeinmuren die constant gekromd waren, rees de vraag of er vanuit dezelfde Ansatz ook branen zouden bestaan die inderdaad een constante kromming hadden, maar die toch geen domeinmuren waren. Het antwoord op deze vraag, die we in deze paragraaf gaven, was een nieuw resultaat dat nog niet bekend was in de literatuur. Door de Hodge-duale te nemen van de kosmologische constante vonden we een geschikte Ansatz die ons alleszins in het ene geval van de vorige paragraaf – het geval van de domeinmuren – garandeerde dat er oplossingen waren. Analoog aan de andere delen uit dit hoofdstuk, stelden we de ijkveld-, de dilaton-, de ij-Einstein- en de ab-Einsteinvergelijkingen op. Die laatste nam de vorm $\tilde{R}_{ab} = \tilde{\Lambda}\tilde{g}_{ab}$ aan, waardoor de braan de gezochte constante kromming kreeg.
Om de moeilijkheid van de partiële differentiaalvergelijking, in casu de Einsteinvergelijking voor de transversale ruimte, het hoofd te bieden werkten we met het spoor ervan. Uiteindelijk konden we besluiten dat het stelsel der bewegingsvergelijkingen slechts consistent was in het geval van domeinmuren. Er zijn binnen de Ansatz die ook paragraaf 5.2.2 omvat, bijgevolg geen algemene branen mogelijk met constante kromming.

6 Besluit

In deze thesis hielden we ons in essentie bezig met oplossingen van bewegingsvergelijkingen uit supergravitatietheorieën. Deze vormen de p-branen, waarbij p het aantal ruimtelijke dimensies uitdrukt waarin de braan zich uitbreidt. De motivatie voor deze thesis is dan ook de gedachte dat het driedimensionale ruimtelijke universum waarin wij leven slechts een braan, een oppervlak, is in een hogerdimensionale ruimtetijd. Het ging dan over modelbuilding, waarbij we steeds ingewikkeldere fysica op de braan introduceerden. In het bijzonder legden we ons toe op de kromming van de branen. We wilden hiertoe vooral weten of algemene branen met constante kromming mogelijk waren. Als voorbeelden van theorieën waarover we vaak in het algemeen verder in dit werkstuk zouden praten, haalden we IIA, IIB en elfdimensionale supergravitatie aan. Het gemeenschappelijke stuk in de tiendimensionale Lagrangianen noemden we toepasselijk de Common Sector.

In het eerste hoofdstuk bekeken we enkele mechanismen die ons vertelden hoe we uit bestaande oplossingen nieuwe zouden kunnen construeren. Het ging dan over dualiteiten, die hele theorieën op andere konden afbeelden. Als eerste was T-dualiteit aan de beurt. Toegepast op de Common Sector zagen we hoe ze steunde op de notie van dimensionale reductie, waarbij het voorkomen van een isometrierichting in een hogerdimensionale ruimte toeliet deze dimensie te compactificeren. Het was duidelijk dat T-dualiteit in feite bestond uit een compactificatie over een cirkel met straal R, gevolgd door een decompactificatie over eentje met straal $\frac{1}{R}$. Uitgedrukt op basis van symmetrieën, kon dit ook verwoord worden als een gevolg van de $O(1,1)$-invariantie van de negen-, of in het algemeen $D-1$-, dimensionale Lagrangiaan. Deze groep gaf dan aanleiding tot een drietal symmetrie-transformaties, waarbij er twee een coördinatentransformatie weergaven en de derde uiteindelijk aanleiding gaf tot de T-dualiteit. Als tweede item in dat hoofdstuk werd de Hodge-dualiteit in het daglicht gesteld. Het was een dualiteit die weergaf dat dezelfde fysica beschreven kon worden door een q-vorm tensor alsook door een $D-q$-vorm. Een vorm met meer dan $\frac{D}{2}$ indices, waarop men het etiket "elektrische formulering" plakt, werd dus omgezet in een vorm in de "magnetische formulering" met minder dan $\frac{D}{2}$ indices. We verkregen Hodge-dualiteit door aan de Langrangiaan een term met een Lagrangemultiplicator toe te voegen. De bewegingsvergelijking voor de veldsterkte gaf ons uiteindelijk de Hodge-dualteit. Als laatste onderdeel van het eerste hoofdstuk wierpen we ook even een blik op de S-dualiteit die in IIB bestond.

In de volgende hoofdstukken begonnen we uiteindelijk te zoeken naar oplossingen van de bewegingsvergelijkingen van een algemene Lagrangiaan, die, mits concretiseren van de parameters, eender welke supergravitatietheorie kon voorstellen. We namen steeds aan dat de oplossing voor de metriek van de D-dimensionale ruimtetijd een bepaalde symmetrische vorm had, waardoor we konden spreken over een kleiner geheel, dat we het wereldvolume van de braan konden noemen, en een gedeelte dat ermee vergeleken de transversale richtingen voorstelde. De braanmetriek kreeg in de Ansatz een coëfficiënt mee die enkel afhankelijk was van de transversale ruimte. Het was dezelfde functie die ook in de Ansatz voor het dilaton en het ijkveld voorkwam. In hoofdstuk 4 plaatsten we een Minkowskimetriek op de braan. Naast een algemene oplossing bekeken we ook enkele specifieke oplossingen: fundamentele strings, NS5-branen, Dp-branen en elfdimensionale M2- alsook M5-branen. Door middel van de technieken uit vorig hoofdstuk waren we in staat nieuwe oplossingen te vinden die niet in onze Ansatz zaten. Hierdoor konden we alle equivalente "vlakke" branen in één instuctief web plaatsen.

Het laatste hoofdstuk behandelde de kern van de thesis: hoe zat het met gekromde branen? We wilden de Minkowskimetriek op de vlakke branen van vorig hoofdstuk veralgemenen naar een willekeurige metriek. In eerste instantie zagen we dat zelfs de volledige oplossing van vorig hoofdstuk, op het ijkveld na, kon behouden worden indien de branen Riccivlak waren. De voorwaarde kon geïnterpreteerd worden als een bewegingsvergelijking die bij een effectieve Lagrangiaan op de braan hoorde. In dit geval bleek dat de waarnemer op de braan reeds gravitatie zag.

Daarna bekeken we de domeinmuren, die zoals gordijnen in het midden van een kamer de ruimte als het ware in twee deelt. In eerste instantie beschouwden we een D-dimensionale Lagrangiaan die enkel gravitatie en een kosmologische constante bezitte. Om constant gekromde branen te verkrijgen was deze laatste constante echter geen noodzakelijke voorwaarde. De constante braankromming bracht mee dat we op de braan, naast gravitatie, ook van een lagerdimensionale kosmologische constante konden spreken. Dit leidde tot een discussie over het voorkomen van Riccivlakke, de Sitter of anti-de Sitter domeinmuren in een ruimte die ook Riccivlak, de Sitter of anti-de Sitter kon zijn. Hierna beschouwden we in tweede instantie een D-dimensionale Lagrangiaan die zowel gravitatie, een kosmologische constante als een dilaton bevatte. De effectieve Lagrangiaan op de domeinmuur zag er hetzelfde uit als in de situatie zonder dilaton, maar de relatie met de hogerdimensionale kosmologische constante bleek anders. In dit geval immers was het voorkomen van de D-dimensionale kosmologische constante een noodzakelijke voorwaarde opdat de domeinmuur constant gekromd kon zijn. Bemerk verder hoe ver we reeds gevorderd zijn: we vertrokken van algemene vlakke branen zonder bijzonder fysica, maar door steeds een ingewikkelder model te bouwen, waren we nu al erin geslaagd gravitatie en die kosmologische constante op een domeinmuur te huisvesten.

Tot hier konden we op resultaten uit de literatuur steunen; voortgaand op de technieken uit vorige stappen, waren we echter toch in staat algemene p-branen met constante kromming te onderzoeken. Omdat we steeds op het voorgaande wilden terugvallen, zochten we naar een Ansatz die een veralgemening vormde van deze bij domeinmuren met dilaton. Een veralgemening van de Hodge-duale van de D-dimensionale kosmologische constante leverde hetgeen we zochten. Het oplossen van de bewegingsvergelijkingen bracht ons wederom bij de effectieve Lagrangiaan die enkel gravitatie en een lagerdimensionale kosmologische constante bevatte. Deze laatste kon dan weer met een constante braankromming in verband gebracht worden. Verder werd het duidelijk dat de Einsteinvergelijking voor de transversale ruimte ons voor een moeilijk rekentechnisch probleem stelde. Daarom werkten we verder met het spoor ervan. Het resulterende stelsel bleek ten slotte enkel oplosbaar te zijn... in het geval van domeinmuren! Hierdoor was er geen nood meer voor het oplossen van de moeilijke partiële differentiaalvergelijking. We hadden bewezen dat constant gekromde branen binnen onze Ansatz steeds domeinmuren zijn.

Het spreekt voor zich dat de modelbuilding op het einde van deze thesis, bij de constant gekromde domeinmuren, niet stopt. Men zou bijvoorbeeld kunnen zoeken naar Ansätze die extra scalaire velden op de braan mogelijk maken. Misschien – al is het op het eerste zicht niet duidelijk hoe – kan men een weg vinden om elektromagnetisme op de braan te brengen. En ja, ... wat dacht u dan van de implicatie van het standaardmodel op de braan? Ten slotte is het misschien mogelijk dat wij allen als levende Egyptische figuurtjes op onze driebraan vastgeplakt zitten in een hogerdimensionale wereld...

A Conventies

Doorheen deze thesis hebben we consequent volgende conventies in acht genomen:

De Einsteinconventie en de metriek

Om de notatie te verlichten, spreken we af dat we geen sommatieteken $\sum$ schrijven wanneer twee dezelfde indices binnen één term voorkomen (de Einsteinconventie). Eén van beide indices dient dan beneden te staan, de ander vanboven.

Wanneer beide factoren dezelfde zijn in één term onder de bovenstaande som, dan vereenvoudigen we vaak nogmaals:

$$X^2 \equiv X_\mu X^\mu. \tag{A.1}$$

De gebruikte metriek is de mostly minus metriek: de tt-component van de metriek heeft een positief teken, terwijl alle andere diagonale –noodzakelijkerwijze ruimtelijke– elementen een negatief teken hebben. In het geval van Minkowski betekent dit:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

De krommingstensoren

Wanneer de metriek bekend is, kunnen de krommingstensoren berekend worden. De eerste stap in de berekening hiervan vormen de Christoffelsymbolen:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \tag{A.3}$$

Eénmaal de Christoffels bekend, volgt na een kleine berekening niet alleen de Riccitensor

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\lambda\nu} - \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma}, \tag{A.4}$$

maar ook de Ricciscalar

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{A.5}$$

Covariante afgeleide

De notatieconventie die in dit werk voor covariante afgeleiden gebruikt wordt, voldoet aan

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} V_\rho, \tag{A.6}$$

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\rho} V^\rho. \tag{A.7}$$

De covariante afgeleide van een willekeurige tensor $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$ volgt hetzelfde stramien: het resultaat is steeds de gewone afgeleide plus de contractie van de tensor met een Γ in geval de gecontraheerde index contravariant is en min de contractie van de tensor met een Γ in geval van een covariante index.

Symmetrisatie & antisymmetrisatie

Om symmetrisatie aan te geven, gebruikt men de kromme haakjes $(\cdots)$, terwijl men in het geval van antisymmetrisatie de rechte haken $[\cdots]$ aanwendt. In het bijzonder stellen we voor een tensor X:

$$X_{(a_1 a_2 \cdots a_r)} = \frac{1}{r!}(\text{som over alle permutaties van de indices } a_1\text{-}a_r), \tag{A.8}$$

$$X_{[a_1 a_2 \cdots a_r]} = \frac{1}{r!}(\text{alternerende som over alle permutaties van de indices } a_1\text{-}a_r). \tag{A.9}$$

Gebruik makend van dit formalisme, schrijft men bijvoorbeeld voor de Maxwell-tensor $F_{\mu\nu}(A) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ook $F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}$.

Een ander voorbeeld van een antisymmetrische q-tensor is een veldsterkte van de vorm $\partial_{[\mu} B_{\nu\rho]}$ met $B_{\nu\rho}$ een antisymmetrisch ijkveld. Uitgewerkt volgt

$$\begin{aligned}
\partial_{[\mu} B_{\nu\rho]} &= \frac{1}{3!}(\partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\rho B_{\mu\nu} + \partial_\nu B_{\rho\mu} - \partial_\mu B_{\rho\nu} - \partial_\rho B_{\nu\mu} - \partial_\nu B_{\mu\rho}) \\
&= \frac{1}{6}(2\partial_\mu B_{\nu\rho} + 2\partial_\rho B_{\mu\nu} + 2\partial_\nu B_{\rho\mu}) \\
&= \frac{1}{3}(\partial_\mu B_{\nu\rho} + \text{cyclische permutatie}).
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Om wille van die $\frac{1}{3}$ werkt men gewoonlijk met $3\partial_{[\mu} B_{\nu\rho]}$.

Ten slotte dienen we in dit verband de conventie omtrent het anti-symmetrisatiesymbool bij uitstek $\epsilon^{\mu_0 \cdot \mu_{q-1}}$ zeker ook aan te halen. We spreken af dat een epsilon met de indices van boven onafhankelijk is van de metriek, m.a.w.

$$\epsilon^{0 \cdots (q-1)} = 1, \tag{A.11}$$

terwijl het naar beneden halen van de indices met behulp van metrieken $g^{\mu\nu}$ impliceren. Er geldt op deze manier

$$\epsilon_{\mu_0 \cdots \mu_{q-1}} = g. \tag{A.12}$$

Er zijn echter ook vergelijkingen waarbij men expliciet wil uitdrukken dat een covariante grootheid $V_{0\cdots(q-1)}$ antisymmetrisch is. Om de indexstructuur – in het linkerlid staan de indices onderaan, dus rechts ook – in dat geval te behouden, voeren we ook een $\epsilon^{(\mathrm{vl})}$ in, die voldoet aan

$$\epsilon^{(\mathrm{vl})}_{0\cdots(q-1)} = 1, \tag{A.13}$$

terwijl in dit geval het omhoog halen van de indices met metrieken gepaard gaat. Deze "vlakke" (vl) epsilon hebben we in vergelijking met de ϵ van (A.11) als het ware verkregen door de metrieken eruit te halen.

Referenties

[1] E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, Nucl. Phys. B443 (1995) 85 (hep-th/9503124).

[2] E. Lozano, *Solitons, vacua and gauge duals in supergravity*, Ph.D. thesis, Universidad Autónoma de Madrid, 2002.

[3] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos en G. Dvali, *The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*, Phys. Lett. B429 (1998) 263 (hep-ph/9803315).
I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos en G. Dvali, *New dimensions at a millimeter to a fermi and superstrings at a TeV*, Phys. Lett. B436 (1998) 257 (hep-ph/984398).

[4] T. Ortín, *Gravity and strings*, in voorbereiding, wordt binnenkort gepubliceerd bij Cambridge University Press.

[5] T. Kaluza,*Zur Unitätsproblem der Physik*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Klasse (1921) 966.
O. Klein, *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*, Z.F. Physik 37 (1926) 895.

[6] E. Bergshoeff, B. Janssen en T. Ortín, *Solution-generating transformations and the string effective action*, Class. Quant. Grav. 13 (1996) (hep-th/9506156).

[7] J. Adam, *T-dualiteit in de democratische formulering van type IIA en type IIB supergravitatie*, licentiaatsthesis, Katholieke Universiteit Leuven, 2003.

[8] E. Bergshoeff, R. Kallosh, T. Ortín, D. Roest, A. Van Proeyen, *New formulations of D=10 supersymmetry and D8-O8 domain walls*, Class. Quant. Grav. 18 (2001) 3359-3382 (hep-th/0103233).

[9] E. Bergshoeff, C. M. Hull en T. Ortín, *Duality in the Type-II superstring effective action*, Nucl. Phys B451 (1995) 547-578 (hep-th/9504081).

[10] E. Bergshoeff, M. de Roo, E. Eyras, B. Janssen en J.P. van der Schaar, *Multiple intersections of D-branes and M-branes*, Nucl. Phys. B494 (1997) 119-143 (hep-th/9612095).

[11] A. Dabholkar, G. W. Gibbons, J. A. Harvey en F. Ruiz-Ruiz, *Superstrings and solitons*, Nucl. Phys. B340 (1990) 33.

[12] C. G. Callan, J. A. Harvey en A. Strominger, Nucl. Phys. B340 (1990) 611.

[13] M. J. Duff en J. X. Lu, *Elementary five-brane solutions of $D = 10$ supergravity*, Nucl. Phys. B354 (1991) 141.

[14] J. Polchinski, *Dirichlet branes and Ramond-Ramond charges* ,Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 184 (hep-th/9510017).

[15] P. K. Townsend, *The eleven-dimensional supermembrane revisited*, Phys. Lett. B350 (1995) 184 (hep-th/9501068).

[16] E. Bergshoeff, *p-branes, D-branes and M-branes* (hep-th/9611099).

[17] M. J. Duff en K. S. Stelle, *Multi-membrane solutions of $D = 11$ supergravity*, Phys. Lett. B253 (1991) 113.

[18] R. Güven, *Black p-brane solutions of $D = 11$ supergravity theory*, Phys. Lett. B276 (1992) 49.

[19] H. W. Brinkmann, Proc. Nat. Acad. Sci. 9 (1923) 1.

[20] R. D. Sorkin, *Kaluza-Klein monopole*, Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 87.
D. J. Gross en M. J. Perry, *Magnetic monopoles in Kaluza-Klein theories*, Nucl. Phys. B226 (1983) 29.

[21] D. Brecher en M. J. Perry, *Ricci-flat branes*, Nucl. Phys. B566 (2000) 151 (hep-th/9908018)

[22] B. Janssen, *Curved branes and cosmological (a, b)-models*, JHEP 01 (2000) 044 (hep-th/9910077).

[23] N. Alonso-Alberca, P. Meessen en T. Ortín, *Supersymmetric Brane-Words*, Phys. Lett. B482 (2000) 400 (hep-th/0003248).

[24] J. Peterson, *Universe in the balance. At last we know just how much the cosmos weighs...*, New Scientist, december 2000

[25] N. Alonso-Alberca, B. Janssen en P. Silva, *Curved dilatonic brane-worlds and the cosmological constant problem*, Class. Quant. Grav. 17 (2000) L163 (hep-th/0005116).