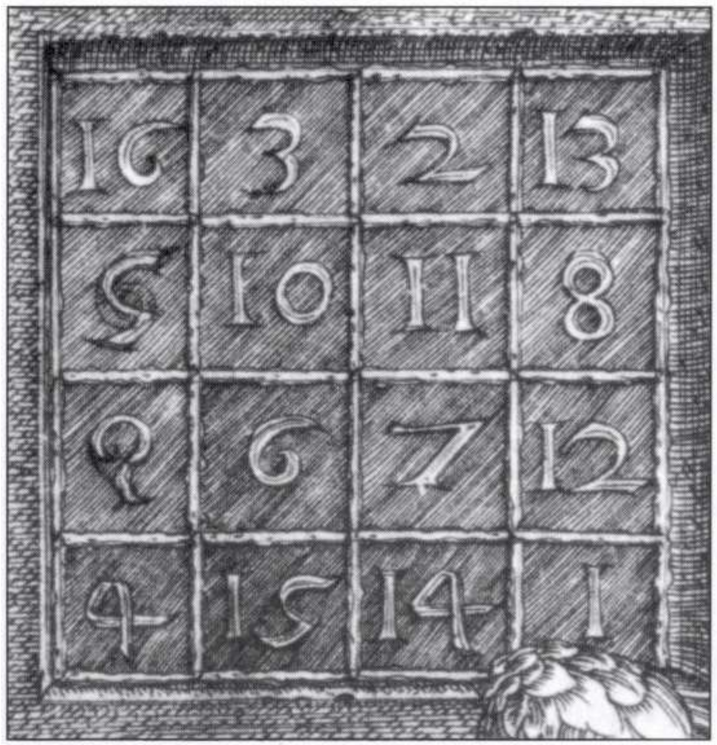
Presentación de proyecto docente

Mecánica Teórica



Bert Janssen

Universidad de Granada & CAFPE

Outlook

I. Proyec to docente: Mecánica Teórica

1. Mecánica Analítica dentro del marco de la física
2. Reforma universitaria: de Licenciatura a Grado
3. Asignatura de Mecánica Teórica
4. Temario
5. Bibliografía
6. Evaluación

II. Tema de libre elección: Mecánica lagrangiana

I. Proyecto docente

Mecánica Teórica
(troncal de 4º de Lic. de Física)

1. Mecánica Analítica dentro de la física

El *Principia* de Newton (1642-1727) es sin duda el libro más influencial de todo la historia de la física:

- descripción unificada: tres leyes de movimiento & gravedad universal explican movimientos terrestres y celestes
- planteamiento sistemático y matemático: solidez anteriormente desconocida

1. Mecánica Analítica dentro de la física

El *Principia* de Newton (1642-1727) es sin duda el libro más influencial de todo la historia de la física:

- descripción unificada: tres leyes de movimiento & gravedad universal explican movimientos terrestres y celestes
- planteamiento sistemático y matemático: solidez anteriormente desconocida

Pero:

- Problemas estéticos: rigor matemático de las demostraciones (figuras), definición circular en $\vec{F} = m\vec{a}$, ...
- Problemas prácticos: $\vec{F} = m\vec{a}$ es inservible si no todas las $\vec{F}$ son conocidas.
  Ejemplo: fuerzas de rozamiento, fuerzas de ligaduras, ... son difícilmente cuantificables

Lagrange (1736 - 1813): *Mécanique Analitique*

"Ya hay varios Tratados sobre la Mécanica, pero el planteamiento de este es completamente nuevo. Me propongo reducir la teoría de esta Ciencia & el arte de resolver los problemas que allí aparecen a fórmulas generales donde el simple desarrollo da todas las ecuaciones necesarias para la solución de cada problema.

[...]

No se encontrará ninguna Figura en esta Obra. Los métodos que expongo en ello no necesitan ni construcciones, ni razonamientos geométricos o mecánicos, sino solamente operaciones algebráicas, sometidas a un paso regular & uniforme. Los amantes del Análisis verán con placer convertirse la Mecánica en una nueva rama, & me serán agradecidos de haber entendido así el campo."

Ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q^\alpha}\right) - Q^\alpha = 0$$

- Base matemática sólida para la mecánica
- Primer paso en desarrollo de otros formalismos: Hamilton, Poisson, Jacobi, ...
- Bases de la física moderna:
  formalismo lagrangiano $\longrightarrow$ teoría (relativista) de campos
  formalismo hamiltoniano $\longrightarrow$ primera cuantización
  corchetes de Poisson $\longrightarrow$ conmutadores en mecámica cuántica
  mínima acción $\longrightarrow$ integrales de camino

- Base matemática sólida para la mecánica
- Primer paso en desarrollo de otros formalismos: Hamilton, Poisson, Jacobi, ...
- Bases de la física moderna:
  formalismo lagrangiano $\longrightarrow$ teoría (relativista) de campos
  formalismo hamiltoniano $\longrightarrow$ primera cuantización
  corchetes de Poisson $\longrightarrow$ conmutadores en mecámica cuántica
  mínima acción $\longrightarrow$ integrales de camino

Objetivos pedagógicos de mecánica analítica:

- desarrollar intuición física-matemática: métodos matemáticos para descibir física clásica
- fomentar una visión global de la física: técnicas y formalismos que vuelven en varias ramas de la física.

2. Reforma universitaria: de Licenciatura a Grado

Mundo universitario europeo esta pasando por reforma:

Adaptación al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES)

$\longrightarrow$ convergencia a hacía único sistema educactivo

2. Reforma universitaria: de Licenciatura a Grado

Mundo universitario europeo esta pasando por reforma:
Adaptación al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES)
$\longrightarrow$ convergencia a hacía único sistema educactivo

Puntos principales de la Declaración de Bolonia (1999):

- Sistema de titulaciones comparables a través de Suplemento Europeo al Título

2. Reforma universitaria: de Licenciatura a Grado

Mundo universitario europeo esta pasando por reforma:
Adaptación al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES)
$\longrightarrow$ convergencia a hacía único sistema educactivo

Puntos principales de la Declaración de Bolonia (1999):

- Sistema de titulaciones comparables a través de Suplemento Europeo al Título
- 2 ciclos: Grado = nivel adecuado para mercado laboral
  Posgrado (Master): especialización

2. Reforma universitaria: de Licenciatura a Grado

Mundo universitario europeo esta pasando por reforma:
Adaptación al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES)
$\longrightarrow$ convergencia a hacía único sistema educactivo

Puntos principales de la Declaración de Bolonia (1999):

- Sistema de titulaciones comparables a través de Suplemento Europeo al Título
- 2 ciclos: Grado = nivel adecuado para mercado laboral
  Posgrado (Master): especialización
- Sistema de Créditos ECTS

2. Reforma universitaria: de Licenciatura a Grado

Mundo universitario europeo esta pasando por reforma:
Adaptación al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES)
$\longrightarrow$ convergencia a hacía único sistema educactivo

Puntos principales de la Declaración de Bolonia (1999):

- Sistema de titulaciones comparables a través de Suplemento Europeo al Título
- 2 ciclos: Grado = nivel adecuado para mercado laboral
  Posgrado (Master): especialización
- Sistema de Créditos ECTS
- Fomentar la movilidad de estudiantes, profesores, investigadores y PAS

2. Reforma universitaria: de Licenciatura a Grado

Mundo universitario europeo esta pasando por reforma:
Adaptación al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES)
$\longrightarrow$ convergencia a hacía único sistema educactivo

Puntos principales de la Declaración de Bolonia (1999):

- Sistema de titulaciones comparables a través de Suplemento Europeo al Título
- 2 ciclos: Grado = nivel adecuado para mercado laboral
  Posgrado (Master): especialización
- Sistema de Créditos ECTS
- Fomentar la movilidad de estudiantes, profesores, investigadores y PAS

$\longrightarrow$ Cambios en plan de estudios, métodos docentes, sistema de evaluación

Cambios en plan de estudio:

- Créditos (licenciatura) = medida de número de horas lectivas

  $\longrightarrow$ 1 crédito = 10 horas lectivas

  1 curso = 60 créditos

  Licenciatura = 300 créditos (180 + 120)

- Créditos ECTS (grado) = medida de númer de horas de trabajo para el estudiante

  $\longrightarrow$ 1 crédito ECTS = 25 -30 horas de trabajo

  1 curso = 60 créditos

  Grado = 240 créditos

Cambios en plan de estudio:

- Créditos (licenciatura) = medida de número de horas lectivas

  $\longrightarrow$ 1 crédito = 10 horas lectivas

  1 curso = 60 créditos

  Licenciatura = 300 créditos (180 + 120)

- Créditos ECTS (grado) = medida de númer de horas de trabajo para el estudiante

  $\longrightarrow$ 1 crédito ECTS = 25 -30 horas de trabajo

  1 curso = 60 créditos

  Grado = 240 créditos

Cambios en método de enseñanza:

- Sistema centrado en aprendizaje de estudiante, mediante clases, seminarios, trabajos en grupo ...
- Objetivos definidos en términos de competencias (generales y específicas) adquiridas por los estudiantes (véase documentos)

Licenciatura de Física en la UGR

- 2 ciclos de 3 + 2 años con 60 - 90 créditos cada uno
- Plan de estudios: (véase proyecto docente)

  troncales (53 %), obligatorias (8 %),
  optativas (29 %), libre configuración (10 %),
- Plan de estudios en vigor desde 1997

  A extinguir entre 2010-2011 y 2013-2014

Licenciatura de Física en la UGR

- 2 ciclos de 3 + 2 años con 60 - 90 créditos cada uno
- Plan de estudios: (véase proyecto docente)
  troncales (53 %), obligatorias (8 %),
  optativas (29 %), libre configuración (10 %),
- Plan de estudios en vigor desde 1997
  A extinguir entre 2010-2011 y 2013-2014

Grado de Física en la UGR

- 4 años de 60 créditos por año.
- Plan de Estudios : (véase proyecto docente)
  Formación básica (25 %), obligatorias (50 %), optativas (25 %)
  ⟶ Formación básica y obligatorias comunes en Univ. andaluzas
- Introducido de manera escalonada entre 2010-2011 y 2013-2014

Mecánica Analítica en la UGR

Licenciatura: Mécanica Teórica

- troncal en cuarto
- 6 créditos (4 teóricos + 2 prácticos)
- primer cuatrimestre

Mecánica Analítica en la UGR

Licenciatura: Mécanica Teórica

- troncal en cuarto
- 6 créditos (4 teóricos + 2 prácticos)
- primer cuatrimestre

Grado: Mécanica Analítica y de los Medios Continuos

- optativa en tercero
- 6 créditos (4 teóricos + 2 prácticos)
- primer cuatrimestre

Mecánica Analítica en la UGR

Licenciatura: Mécanica Teórica

- troncal en cuarto
- 6 créditos (4 teóricos + 2 prácticos)
- primer cuatrimestre

Grado: Mécanica Analítica y de los Medios Continuos

- optativa en tercero
- 6 créditos (4 teóricos + 2 prácticos)
- primer cuatrimestre

$\longrightarrow$ Este proyecto docente se centra en Mecánica Teórica

3. La asignatura de Mecánica Teórica

Nombre de la asignatura:	MECÁNICA TEÓRICA
Plan de estudios:	Licenciatura de Física
Tipo:	Troncal
Año en que se programa:	4^o
Calendario (semestre):	Cuatrimestral (primero)
Créditos teóricos y prácticos:	4 + 2 (= 60 h. lect. = 150 - 180 h. trabajo)
Descriptores:	Mecánica analítica.
	Formalismo lagrangiano y hamiltoniano.
	Sistemas mecánicos y continuos.

Actividad	Presenciales	No presenciales	Total
Clases teóricas	40	60	100
Clases de problemas	20	40	60
Tutorías	6	5	11
Seminarios	2	3	5
Examen	4	-	4
Total	72	108	180

- *Clases teóricas:* Sesiones donde se explica el contenido teórico.
- *Clases de problemas:* Sesiones donde se resuelven problemas y ejercicios.
- *Seminarios:* Exposiciones por parte de los alumnos de 20 minutos, en que presentan un tema relacionado con el temario (voluntario).
- *Tutorías:* Consultas individuales o en grupos reducidos. Presentación de ejercicios que suman 2 puntos a la nota final.
- *Examen:* Resolver problemas del tipo tratados en clase de problemas.

Prerrequisitos:

Física: las leyes de Newton, la conservación de la energía, el momento lineal y el momento angular, el sistema de varios cuerpos, los formalismos lagrangiano y hamiltoniano (básico), el principio de la relatividad, la mecánica relativista (básica), las leyes de Maxwell, los potenciales electromagnéticos, la conservación de la carga.

Matemáticas: álgebra lineal, espacios vectoriales, autovalores y autovectores, análisis de una y multiples variables, ecuaciones diferenciales.

- *Fundamentos de la Física I* (obligatoria anual de primero)
- *Mecánica y ondas* (troncal anual de segundo)
- *Métodos Matemáticos de la Física I & II* (troncales cuatrimestrales de primero)
- *Métodos Matemáticos de la Física IV* (troncal anual de segundo)

4. Temario

1. **Repaso de la mecánica newtoniana** (3 horas)
   $\longrightarrow$ Repaso y exposición de la notación

4. Temario

1. **Repaso de la mecánica newtoniana** (3 horas)

   $\longrightarrow$ Repaso y exposición de la notación

   a) $\mathbb{R}^N$ como espacio vectorial y las transformaciones ortogonales

   $\longrightarrow$ estructura de especio vectorial y invariancia de la base ortonormal y la métrica euclidea bajo el grupo $O(N)$

   b) Coordenadas curvilíneas

   $\longrightarrow$ conexión de Levi-Civita;
   operadores diferenciales en coord curvas

4. Temario

1. **Repaso de la mecánica newtoniana** (3 horas)

   $\longrightarrow$ Repaso y exposición de la notación

   a) $\mathbb{R}^N$ como espacio vectorial y las transformaciones ortogonales

   $\longrightarrow$ estructura de especio vectorial y invariancia de la base ortonormal y la métrica euclidea bajo el grupo $O(N)$

   b) Coordenadas curvilíneas

   $\longrightarrow$ conexión de Levi-Civita;
   operadores diferenciales en coord curvas

   c) Mecánica de una sola partícula

   $\longrightarrow$ momento lineal, angular, trabajo, energía cinética y potencial, ...

   d) Mecánica de N partículas

   $\longrightarrow$ descomposición en parte interna y centro de masa

2. **Formalismo lagrangiano** (5 horas)

   a) Ligaduras y coordenadas generalizadas

   b) El principio de trabajo virtual y las ecuaciones de Lagrange

   c) Ejemplos concretos
   $\longrightarrow$ partícula puntual en potencial (equivalencia con Newton)
   péndulo simple, máquina de Atwood, partícula en una esfera

2. **Formalismo lagrangiano** (5 horas)

   a) Ligaduras y coordenadas generalizadas

   b) El principio de trabajo virtual y las ecuaciones de Lagrange

   c) Ejemplos concretos
   $\longrightarrow$ partícula puntual en potencial (equivalencia con Newton)
   péndulo simple, máquina de Atwood, partícula en una esfera

   d) El principio de mínima acción
   $\longrightarrow$ repaso del calculo variacional
   importancia histórica: Maupertuis, Snell, Feynman

2. **Formalismo lagrangiano** (5 horas)

a) Ligaduras y coordenadas generalizadas

b) El principio de trabajo virtual y las ecuaciones de Lagrange

c) Ejemplos concretos
$\longrightarrow$ partícula puntual en potencial (equivalencia con Newton)
péndulo simple, máquina de Atwood, partícula en una esfera

d) El principio de mínima acción
$\longrightarrow$ repaso del calculo variacional
importancia histórica: Maupertuis, Snell, Feynman

e) Interpretación y propiedades del lagrangiano
$\longrightarrow$ cantidades conservadas
interpretación como Segunda Ley de Newton en espacio de configuraciones

3. **Formalismo hamiltoniano** (5 horas)
$\longrightarrow$ formalmente equivalente a lagrangiano
ventaja: abre pasos a otros formalismos

3. **Formalismo hamiltoniano** (5 horas)
$\longrightarrow$ formalmente equivalente a lagrangiano
ventaja: abre pasos a otros formalismos

a) La transformada de Legendre
$\longrightarrow$ importancia en termodinámica

3. **Formalismo hamiltoniano** (5 horas)
$\longrightarrow$ formalmente equivalente a lagrangiano
ventaja: abre pasos a otros formalismos

a) La transformada de Legendre
$\longrightarrow$ importancia en termodinámica

b) Las ecuaciones de Hamilton

c) Curvas integrales en el espacio de fase

d) Ejemplos concretos
$\longrightarrow$ partícula en potencial (equivalencia con Newton)
oscilador armónico y pendulo matemático

3. **Formalismo hamiltoniano** (5 horas)
$\longrightarrow$ formalmente equivalente a lagrangiano
ventaja: abre pasos a otros formalismos

a) La transformada de Legendre
$\longrightarrow$ importancia en termodinámica

b) Las ecuaciones de Hamilton

c) Curvas integrales en el espacio de fase

d) Ejemplos concretos
$\longrightarrow$ partícula en potencial (equivalencia con Newton)
oscilador armónico y pendulo matemático

e) Interpretación y cantidades conservadas
$\longrightarrow$ Hamiltoniano = energía total del sistema si ligaduras constantes
Coordenadas cíclicas; formalismo de Routh

Corchetes de Poisson, Hamilton-Jacobi, ... serán tratados en capítulo 6.

4. **Potenciales centrales** (5 horas)

$\longrightarrow$ mecánica celeste, fisica atómica, teoría de dispersión, ...

4. **Potenciales centrales** (5 horas)

$\longrightarrow$ mecánica celeste, fisica atómica, teoría de dispersión, ...

a) Reducción del problema de dos cuerpos

$\longrightarrow$ problema original de Newton

cantidades conservadas: centro de masa & sistema interno

4. **Potenciales centrales** (5 horas)
$\longrightarrow$ mecánica celeste, fisica atómica, teoría de dispersión, ...

a) Reducción del problema de dos cuerpos
$\longrightarrow$ problema original de Newton
cantidades conservadas: centro de masa & sistema interno

b) Lagrangiano y ecuaciones de movimiento
$\longrightarrow$ Segunda Ley de Kepler, potencial efectivo

c) Estudio cualitativo de las trayectorias
$\longrightarrow$ diferentes potenciales: $1/r^n$, Yukawa, van der Waals, ...

4. **Potenciales centrales** (5 horas)
$\longrightarrow$ mecánica celeste, fisica atómica, teoría de dispersión, ...

a) Reducción del problema de dos cuerpos
$\longrightarrow$ problema original de Newton
cantidades conservadas: centro de masa & sistema interno

b) Lagrangiano y ecuaciones de movimiento
$\longrightarrow$ Segunda Ley de Kepler, potencial efectivo

c) Estudio cualitativo de las trayectorias
$\longrightarrow$ diferentes potenciales: $1/r^n$, Yukawa, van der Waals, ...

d) El problema de Kepler
$\longrightarrow$ importancia histórica y general
soluciones exactas, leyes de Kepler

4. **Potenciales centrales** (5 horas)
$\longrightarrow$ mecánica celeste, fisica atómica, teoría de dispersión, ...

a) Reducción del problema de dos cuerpos
$\longrightarrow$ problema original de Newton
cantidades conservadas: centro de masa & sistema interno

b) Lagrangiano y ecuaciones de movimiento
$\longrightarrow$ Segunda Ley de Kepler, potencial efectivo

c) Estudio cualitativo de las trayectorias
$\longrightarrow$ diferentes potenciales: $1/r^n$, Yukawa, van der Waals, ...

d) El problema de Kepler
$\longrightarrow$ importancia histórica y general
soluciones exactas, leyes de Kepler

e) El vector de Laplace-Runge-Lenz
$\longrightarrow$ derivación el vector conservado
derivación alternativa de trayectorias

5. **Oscilaciones pequeñas** (5 horas)

   a) Oscilaciones armónicas, amortiguadas y forzadas
   $\longrightarrow$ discusión lagrangiano, diagramas de fase

5. **Oscilaciones pequeñas** (5 horas)

a) Oscilaciones armónicas, amortiguadas y forzadas
$\longrightarrow$ discusión lagrangiano, diagramas de fase

b) Aproximación armónica

c) Lagrangiano y ecuaciones de movimiento de osciladores acoplados
$\longrightarrow$ problema de autovalores en espacio geométricamente no $\mathbb{R}^N$

d) Modos normales
$\longrightarrow$ base ortogonal de moviementos
Cfr. formalismo de Heisenberg en Mecánica cuántica

5. **Oscilaciones pequeñas** (5 horas)

a) Oscilaciones armónicas, amortiguadas y forzadas
$\longrightarrow$ discusión lagrangiano, diagramas de fase

b) Aproximación armónica

c) Lagrangiano y ecuaciones de movimiento de osciladores acoplados
$\longrightarrow$ problema de autovalores en espacio geométricamente no $\mathbb{R}^N$

d) Modos normales
$\longrightarrow$ base ortogonal de moviemientos
Cfr. formalismo de Heisenberg en Mecánica cuántica

e) Ejemplos
$\longrightarrow$ péndulo doble, molécula triatómica, cadena de muelles

6. **Formalismo hamiltoniano avanzado** (6 horas)

$\longrightarrow$ continuación del Capítulo 3

6. **Formalismo hamiltoniano avanzado** (6 horas)
   $\longrightarrow$ continuación del Capítulo 3

   a) Transformaciones canónicas
      $\longrightarrow$ simetrías de las ecn de Hamilton: cambio de coord en espacio de fase; funcion generadora, condiciones de canonicidad, ejemplo

6. **Formalismo hamiltoniano avanzado** (6 horas)
$\longrightarrow$ continuación del Capítulo 3

a) Transformaciones canónicas
$\longrightarrow$ simetrías de las ecn de Hamilton: cambio de coord en espacio de fase; funcion generadora, condiciones de canonicidad, ejemplo

b) Corchetes de Poisson
$\longrightarrow$ formalismo; equivalencia con Hamilton;
invariancia bajo transf canónicas
cantidades conservadas y teorema de Poisson (corchetes de Lie)
ejemplo: momento angular, vector de Laplace-Runge-Lenz

6. **Formalismo hamiltoniano avanzado** (6 horas)

$\longrightarrow$ continuación del Capítulo 3

a) Transformaciones canónicas

$\longrightarrow$ simetrías de las ecn de Hamilton: cambio de coord en espacio de fase; funcion generadora, condiciones de canonicidad, ejemplo

b) Corchetes de Poisson

$\longrightarrow$ formalismo; equivalencia con Hamilton;
invariancia bajo transf canónicas
cantidades conservadas y teorema de Poisson (corchetes de Lie)
ejemplo: momento angular, vector de Laplace-Runge-Lenz

c) Teorema de Liouville

d) Formalismo de Hamilton-Jacobi

$\longrightarrow$ buscar transf canónica que deja $H = 0$
función principal de Hamilton, separación de variables

$\longrightarrow$ Marcar la relación con formalismos de mecánica cuántica

7. **Relatividad especial** (5 horas)
$\longrightarrow$ formalismo lagrangiano; notación covariante

7. **Relatividad especial** (5 horas)
$\longrightarrow$ formalismo lagrangiano; notación covariante

a) Repaso de la relatividad del tiempo y el espacio
$\longrightarrow$ postulados de Einstein; efectos relativistas

b) Correcciones relativistas a la mecánica newtoniana

7. **Relatividad especial** (5 horas)
$\longrightarrow$ formalismo lagrangiano; notación covariante

a) Repaso de la relatividad del tiempo y el espacio
$\longrightarrow$ postulados de Einstein; efectos relativistas

b) Correcciones relativistas a la mecánica newtoniana

c) Espacio de Minkowski y transformaciones de Lorentz
$\longrightarrow$ cuadrivectores y transf de Lorentz como cambio de base

d) Mecánica relativista en formulación covariante
$\longrightarrow$ formalismo lagrangiano y desventaja del hamiltoniano

8. **Sistemas continuos** (6 horas)

   a) El límite continuo de sistemas discretos

   $\longrightarrow$ cadena de masas y muelles

8. **Sistemas continuos** (6 horas)

   a) El límite continuo de sistemas discretos
   $\longrightarrow$ cadena de masas y muelles

   b) Lagrangiano y hamiltoniano de sistemas continuos
   $\longrightarrow$ derivada funcional, principio de mínima acción
   ecuaciones de Euler-Lagrange y Hamilton

8. **Sistemas continuos** (6 horas)

   a) El límite continuo de sistemas discretos

   $\longrightarrow$ cadena de masas y muelles

   b) Lagrangiano y hamiltoniano de sistemas continuos

   $\longrightarrow$ derivada funcional, principio de mínima acción
   ecuaciones de Euler-Lagrange y Hamilton

   c) Teorema de Noether

   $\longrightarrow$ derivación general, ejemplos

   d) Ejemplo: Teoría de Maxwell

   $\longrightarrow$ lenguaje covariante, lagrangiano
   invariancia gauge y conservación de carga
   partícula cargada en campo electromagnético

5. Bibliografía

- H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1980
- F.R. Gantmájer, *Mecánica analítica*, Ed. URSS, 2003
- L.D. Landau & E.M. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press, 1960
- L.D. Landau & E.M. Lifshitz, *Mechanics and Electrodynamics*, Pergamon Press, 1972.

5. Bibliografía

- H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1980
- F.R. Gantmájer, *Mecánica analítica*, Ed. URSS, 2003
- L.D. Landau & E.M. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press, 1960
- L.D. Landau & E.M. Lifshitz, *Mechanics and Electrodynamics*, Pergamon Press, 1972.

- Varios libros más (véase proyecto docente)
- Varios cursos disponibles en internet (véase proyecto docente)

5. Bibliografía

- H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1980
- F.R. Gantmájer, *Mecánica analítica*, Ed. URSS, 2003
- L.D. Landau & E.M. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press, 1960
- L.D. Landau & E.M. Lifshitz, *Mechanics and Electrodynamics*, Pergamon Press, 1972.

- Varios libros más (véase proyecto docente)
- Varios cursos disponibles en internet (véase proyecto docente)

- Notas detalladas del profesor
  (véase mis notas de Relatividad General y Mecánica Analítica)

6. Evaluación

- **Examen:** 3 ó 4 problemas, parecidos a los tratados en clase de problemas.
  Libro abierto: evaluar asimilación y compresión
  Examenes anteriores disponibles a través de la página web

6. Evaluación

- **Examen:** 3 ó 4 problemas, parecidos a los tratados en clase de problemas.
  Libro abierto: evaluar asimilación y compresión
  Examenes anteriores disponibles a través de la página web
- **Entrega de problemas:** Resolución de problemas de cálculo en tutorías
  Individual; voluntario; Máximo de 2 puntos
  Fomenta tutorías & proporciona seguimiento de los alumnos

6. Evaluación

- **Examen:** 3 ó 4 problemas, parecidos a los tratados en clase de problemas.
  Libro abierto: evaluar asimilación y compresión
  Examenes anteriores disponibles a través de la página web
- **Entrega de problemas:** Resolución de problemas de cálculo en tutorías
  Individual; voluntario; Máximo de 2 puntos
  Fomenta tutorías & proporciona seguimiento de los alumnos
- **Seminarios:** Exposiciones de temas relacionados con temario
  Voluntario; Máximo de 2 puntos

6. Evaluación

- **Examen:** 3 ó 4 problemas, parecidos a los tratados en clase de problemas.
  Libro abierto: evaluar asimilación y compresión
  Examenes anteriores disponibles a través de la página web
- **Entrega de problemas:** Resolución de problemas de cálculo en tutorías
  Individual; voluntario; Máximo de 2 puntos
  Fomenta tutorías & proporciona seguimiento de los alumnos
- **Seminarios:** Exposiciones de temas relacionados con temario
  Voluntario; Máximo de 2 puntos
- **Evaluación final:** Examen: 80 % (con nota de corte 4/10)
  Seminarios & problemas: 20 %
  Nota necesaria para aprobar: 5/10.

II. Tema de libre elección

Mecánica lagrangiana

(capítulo 2 del temario)

7. Mecánica Lagrangiana dentro de Física

Mecánica Lagrangiana es central dentro de mecánica analítica
y dentro de la física

- Más cercano a mecánica newtoniana: $L = \frac{1}{2} g_{ij}(q)\, \dot{q}^i\, \dot{q}^j \; - \; V(q)$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \;=\; 0 \;\;\Longleftrightarrow\;\; \ddot{q}^{\,i} \;+\; \Gamma^i_{jk}\, \dot{q}^j\, \dot{q}^k \;=\; -\partial^i V(q)$$

7. Mecánica Lagrangiana dentro de Física

Mecánica Lagrangiana es central dentro de mecánica analítica

y dentro de la física

- Más cercano a mecánica newtoniana: $L = \frac{1}{2} g_{ij}(q)\, \dot{q}^i\, \dot{q}^j \; - \; V(q)$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \; = \; 0 \;\; \Longleftrightarrow \;\; \ddot{q}^{\,i} \; + \; \Gamma^i_{jk}\, \dot{q}^j\, \dot{q}^k \; = \; -\partial^i V(q)$$

- Puente a otros formalismos:

  Lagrangiano $\longrightarrow$ Hamiltoniano

  $\longrightarrow$ Corchetes de Poisson, Hamilton-Jacobi, Liouville, ...

7. Mecánica Lagrangiana dentro de Física

Mecánica Lagrangiana es central dentro de mecánica analítica
y dentro de la física

- Más cercano a mecánica newtoniana: $L = \frac{1}{2} g_{ij}(q)\, \dot{q}^i\, \dot{q}^j \;-\; V(q)$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \;=\; 0 \;\;\Longleftrightarrow\;\; \ddot{q}^{\,i} \;+\; \Gamma^i_{jk}\, \dot{q}^j\, \dot{q}^k \;=\; -\partial^i V(q)$$

- Puente a otros formalismos:

  Lagrangiano $\longrightarrow$ Hamiltoniano
  $\longrightarrow$ Corchetes de Poisson, Hamilton-Jacobi, Liouville, ...

- Facilmente generalizable a sistemas relativistas

  $\longrightarrow$ relatividad especial & general, teoría cuántica de campos, ...

7. Mecánica Lagrangiana dentro de Física

Mecánica Lagrangiana es central dentro de mecánica analítica
y dentro de la física

- Más cercano a mecánica newtoniana: $L = \frac{1}{2} g_{ij}(q)\, \dot{q}^i\, \dot{q}^j \; - \; V(q)$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \;=\; 0 \;\;\Longleftrightarrow\;\; \ddot{q}^{\,i} \;+\; \Gamma^i_{jk}\, \dot{q}^j\, \dot{q}^k \;=\; -\partial^i V(q)$$

- Puente a otros formalismos:

  Lagrangiano $\longrightarrow$ Hamiltoniano

  $\longrightarrow$ Corchetes de Poisson, Hamilton-Jacobi, Liouville, ...

- Facilmente generalizable a sistemas relativistas

  $\longrightarrow$ relatividad especial & general, teoría cuántica de campos, ...

- Lagrangiano $\simeq$ teoría física / modelo físico

  Ecuaciones de Euler-lagrange $\simeq$ leyes de la física

$\longrightarrow$ Remarcar esta importancia

Capítulo 2

Formalismo lagrangiano

Hemos visto que la segunda ley de Newton (1.3), junto el principio de la relatividad, forma la base de la mecánica clásica. En la práctica, sin embargo, hay muchos casos donde no es fácil utilizar la segunda ley, puesto que algunas de las fuerzas no son conocidas. En este capítulo desarrollaremos un formalismo para resolver los problemas de la dinámica si las fuerzas desconocidas son del tipo que imponen ligaduras holónomas.

2.1. Ligaduras y coordenadas generalizadas

La segunda ley de Newton (1.3) relaciona las fuerzas que actúan sobre un sistema con los cambios de velocidad de ese sistema. Dado que un sistema de N partículas tiene en general la forma de un conjunto de $3N$ ecuaciones diferenciales parciales acopladas de segundo orden,

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a = \vec{F}_a^{(tot)}, \tag{2.1}$$

el sistema queda completamente determinado con $6N$ constantes de integración, habitualmente tomadas las N posiciones iniciales y N velocidades iniciales. Esto es lo que llevó Laplace (1749-1827) a expresar su determinismo al decir que una vez conocida las posiciones y velocidades de todas las partículas en un momento $t = t_0$, toda la historia y todo el futuro del universo están determinados y son calculables.[1]

Sin embargo hay muchos casos donde en la práctica es imposible aplicar la segunda ley para resolver un problema de dinámica, simplemente porque hay más variables que ecuaciones. Ilustremos esto con el ejemplo sencillo del péndulo matemático plano (véase Figura 2.1): una masa m cuelga de una cuerda inelástica y sin masa de longitud L en un campo gravitacional. La fuerza gravitatoria $\vec{F} = m\vec{g}$ no es la única fuerza actuando sobre la masa, puesto que la cuerda misma también ejerce una fuerza $\vec{f}$ sobre m. (En realidad la fuerza $\vec{f}$ de la cuerda es una fuerza efectiva que describe las interacciones de las partículas de la cuerda con la masa m, dado que el sistema de la masa y las partículas individuales de la cuerda es inmanejable). El problema ahora es que para determinar el movimiento de la masa m a través de la segunda ley, es necesario conocer también una expresión para $\vec{f}$, pero dado que $\vec{f}$ es una fuerza efectiva que surge de las interacciones de la cuerda con la masa, no tenemos esa expresión.

El efecto de la fuerza desconocida $\vec{f}$ es mantener la masa a distancia L del origen o. El movimiento de la masa por lo tanto está restringida en su movimiento debido a la fuerza $\vec{f}$. Decimos que la masa está sometida a una *ligadura* y a las fuerzas efectivas que restringen los movimientos de sistemas las llamamos *fuerzas de ligaduras*.

[1] Y cuando Napoleón le preguntó dónde en su visión del mundo estaba Dios, contestó Laplace: “No necesito esa hipótesis.”

20

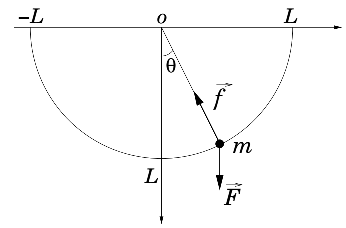


Figura 2.1: *El péndulo matemático plano: una masa m cuelga de una cuerda con longitud L y está sometida a las fuerzas $\vec{F}$ de la gravedad y $\vec{f}$ de la tensión de la cuerda.*

Hay varios tipos de ligaduras y varias maneras de clasificarlas. Una manera de distinguir las ligaduras es a base de su dependencia en el tiempo: las ligaduras que no dependen explicitamente de t se llaman *esclerónomas*, mientras las que sí dependen explicitamente se llaman *reónomas*. Ejemplos de un sistema con una ligadura esclerónoma son el péndulo plano mencionado arriba o un gas en el contenedor. Ejemplos de sistemas reónomas son una masa sobre una superficie que cambia con el tiempo o un gas en un contenedor deformable.

Otra manera de clasificar las ligaduras es según su expresión matemática. A las ligaduras que pueden escribirse como una ecuación en función de las coordenadas

$$S_n(\vec{r}_a, t) = 0 \tag{2.2}$$

se llaman *ligaduras holónomas*. Matemáticamente, la ligadura (2.2) define una superficie o una curva en el espacio $\mathbb{R}^{3N}$ a la que las partículas están restringidas. Ejemplos de ligaduras holónomas son el péndulo plano mencionado arriba, una partícula que se mueve por una superficie o un cuerpo rígido. Ejemplos de sistemas no-holónomas son un gas en un contenedor, proyectiles que se caen a la tierra o una rueda que rueda sin resbalar. Las ligaduras en los dos primeros casos no-holónomas son de la forma $S_n(\vec{r}_a, t) \leq 0$, mientras el tercer ejemplo tiene una ligadura que conecta las coordenadas con las velocidades de una forma que no es integrable a una condición (2.2).

Los sistemas con ligaduras holónomas son mucho más fáciles de tratar, porque estas ligaduras imponen relaciones exactas entre las coordenadas que permiten escribir algunas en función de las otras. Esta propiedad hace que exista un sistema de coordenadas preferidas, las llamadas *coordenadas generalizadas*, y que en estas coordenadas las fuerzas efectivas se eliminen de la descripción, tal que el problema sea resoluble. En este curso nos restringiremos a sistemas con ligaduras holónomas.

El número de coordenadas generalizadas es igual al número de *grados de libertad*. Una partícula libre, sin ligaduras, tiene 3 grados de libertad, uno por cada dirección espacial en que se puede mover. Un sistema de N partículas sin ligaduras tiene $3N$ grados de libertad, pero si el sistema está sometida a k ligaduras holónomas, podemos utilizar estas ligaduras para eliminar k de los $3N$ grados de libertad. Un sistema de N partículas sometido a k ligaduras holónomas tiene $3N - k$ grados de libertad.

Existen por lo tanto $3N - k$ coordenadas generalizadas $q_\alpha(t)$ que están relacionadas con las coordenadas originales $\vec{r}_a$ a través de

$$\vec{r}_a = \vec{r}_a(q_\alpha(t), t). \tag{2.3}$$

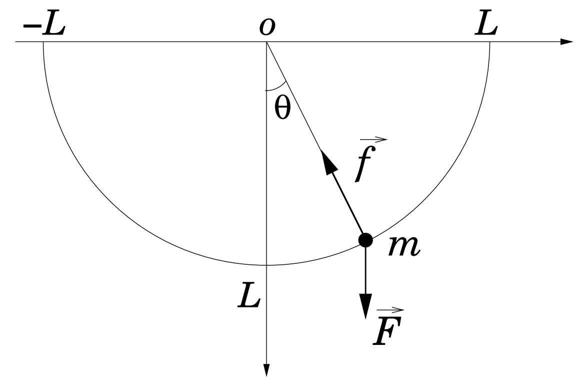
Una manera de pensar en esta relación consiste en verlo como un cambio de coordenadas $\vec{r}_a$ a coordenadas q_α. Efectivamente el conjunto de las relaciones (2.3) y las ligaduras (2.2) es invertible.

En el caso del péndulo plano, tenemos dos ligaduras ($\sqrt{x^2 + y^2} = L$ y $z = 0$) y por lo tanto

9. Contenido

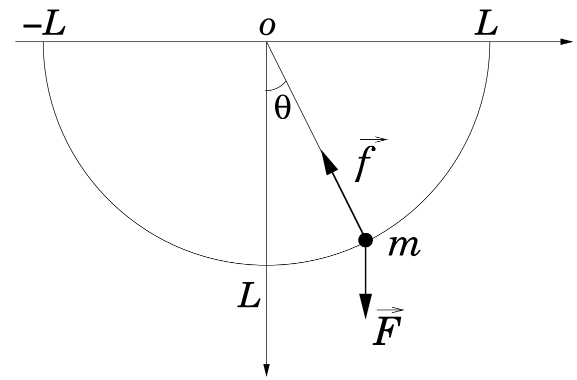
2.1 Ligaduras y coordenadas generalizadas

- $\vec{F}_a = m_a \ddot{\vec{r}}_a$ $3N$ ecuaciones diferenciales inhomogéneas de segundo orden
- Muchas veces no hay expresión para $\vec{F}_a$
- Distinguir entre fuerzas físicas y ligaduras



9. Contenido

2.1 Ligaduras y coordenadas generalizadas



- $\vec{F}_a = m_a \ddot{\vec{r}}_a$ $3N$ ecuaciones diferenciales inhomogéneas de segundo orden
- Muchas veces no hay expresión para $\vec{F}_a$
- Distinguir entre fuerzas físicas y ligaduras
- Ligaduras holónomas: $S_i(\vec{r}_a, t) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$
  $\longrightarrow$ restringen el sistema a subvariedad $(3N - n)$-dimensional de $\mathbb{R}^{3N}$
  $\longrightarrow$ $3N - n$ grados de libertad
- Coordenadas generalizadas:

$$\vec{r}_a = \vec{r}_a(q_\alpha(t), t) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} q_\alpha = q_\alpha(\vec{r}_a, t), & \qquad (\alpha = 1, \ldots, 3N - n) \\ S_i(\vec{r}_a, t) = 0 & \end{array} \right.$$

2.2 Principio de Trabajo Virtual y Ecuaciones de Lagrange

Fuerzas de ligadura: $\vec{f} = \sum_n \lambda_n \vec{\nabla} S_n(\vec{r}_a, t)$

$\longrightarrow$ no ejercen trabajo en desplazamiento virtual: $W_f = \int \vec{f} \cdot \delta\vec{r} = 0$

2.2 Principio de Trabajo Virtual y Ecuaciones de Lagrange

Fuerzas de ligadura: $\vec{f} = \sum_n \lambda_n \vec{\nabla} S_n(\vec{r}_a, t)$

$\longrightarrow$ no ejercen trabajo en desplazamiento virtual: $W_f = \int \vec{f} \cdot \delta\vec{r} = 0$

$$
\begin{aligned}
0 = \sum_a (\vec{F}_a + \vec{f}_a - \dot{\vec{p}}_a) \cdot \delta\vec{r}_a \quad &= \quad \sum_a (\vec{F}_a - \dot{\vec{p}}_a) \cdot \delta\vec{r}_a \\
&= \quad \Big\{ Q_\alpha - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\Big) + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \Big\} \delta q_\alpha
\end{aligned}
$$

Si $Q_\alpha \equiv \sum_a \vec{F}_a \cdot \partial\vec{r}_a / \partial q_\alpha = \partial_\alpha V(q) \Longrightarrow L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t) = T - V$

Ecn de Euler-Lagrange: $\displaystyle \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$

2.2 Principio de Trabajo Virtual y Ecuaciones de Lagrange

Fuerzas de ligadura: $\vec{f} = \sum_n \lambda_n \vec{\nabla} S_n(\vec{r}_a, t)$

$\longrightarrow$ no ejercen trabajo en desplazamiento virtual: $W_f = \int \vec{f} \cdot \delta\vec{r} = 0$

$$0 = \sum_a (\vec{F}_a + \vec{f}_a - \dot{\vec{p}}_a) \cdot \delta\vec{r}_a = \sum_a (\vec{F}_a - \dot{\vec{p}}_a) \cdot \delta\vec{r}_a$$

$$= \Big\{ Q_\alpha - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\Big) + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \Big\} \delta q_\alpha$$

Si $Q_\alpha \equiv \sum_a \vec{F}_a \cdot \partial\vec{r}_a / \partial q_\alpha = \partial_\alpha V(q) \Longrightarrow L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t) = T - V$

Ecn de Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$

Lagrange (1736 - 1813): *Mécanique Analitique*

" Me propongo reducir la teoría de esta Ciencia & el arte de resolver los problemas que allí aparecen a fórmulas generales donde el simple desarrollo da todas las ecuaciones necesarias para la solución de cada problema."

2.3 Ejemplos

- Partícula en potencial:

$$L = \tfrac{1}{2} m\, \dot{x}_i \dot{x}^i - V(x) \qquad \Longrightarrow \qquad m\ddot{x}^i = -\partial^i V(x)$$

$$L = \tfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r,\theta) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} m\ddot{r} = mr\dot{\theta} - \partial_r V \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = -\partial_\theta V \end{cases}$$

2.3 Ejemplos

- Partícula en potencial:

$$L = \tfrac{1}{2} m\, \dot{x}_i \dot{x}^i - V(x) \qquad \Longrightarrow \qquad m\ddot{x}^i = -\partial^i V(x)$$

$$L = \tfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r,\theta) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{r} = mr\dot{\theta} - \partial_r V \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = -\partial_\theta V \end{cases}$$

- Péndulo matemático:

$$L = \tfrac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + mgL\cos\theta \qquad \Longrightarrow \qquad L\ddot{\theta} = -g\sin\theta$$

$\longrightarrow$ aproximación armónica: $\sin\theta \approx \theta$

2.3 Ejemplos

- Partícula en potencial:

$$L = \tfrac{1}{2} m\, \dot{x}_i \dot{x}^i - V(x) \qquad \Longrightarrow \qquad m\ddot{x}^i = -\partial^i V(x)$$

$$L = \tfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r,\theta) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{r} = mr\dot{\theta} - \partial_r V \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = -\partial_\theta V \end{cases}$$

- Péndulo matemático:

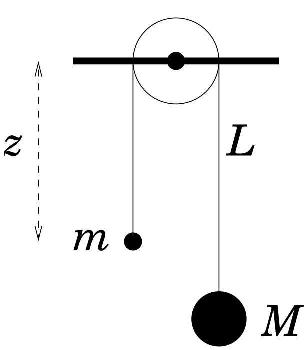
$$L = \tfrac{1}{2} mL^2\dot{\theta}^2 + mgL\cos\theta \qquad \Longrightarrow \qquad L\ddot{\theta} = -g\sin\theta$$

$\longrightarrow$ aproximación armónica: $\sin\theta \approx \theta$

- Máquina de Atwood:

$$L = \tfrac{1}{2} m\dot{z}^2 + \tfrac{1}{2} M\dot{z}^2 + mgz + Mg(L-z)$$

$$\Longrightarrow \qquad \ddot{z} = \frac{m-M}{M+m} g,$$



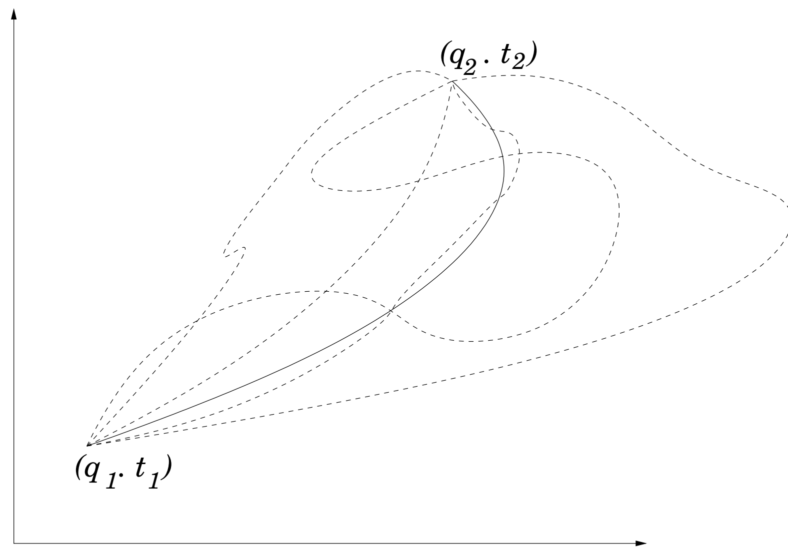
2.4 Principio de Mínima Acción

Acción $S(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t)dt$ es mínima para la curva física

2.4 Principio de Mínima Acción

Acción $S(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t)dt$ es mínima para la curva física

Bajo $q_\alpha(t) \to q_\alpha(t) + \delta q_\alpha(t)$:



$$
\begin{aligned}
0 = \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t)dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}) \Big) \delta q_\alpha dt \\
&\qquad + \Big[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \Big]_{t_1}^{t_2}
\end{aligned}
$$

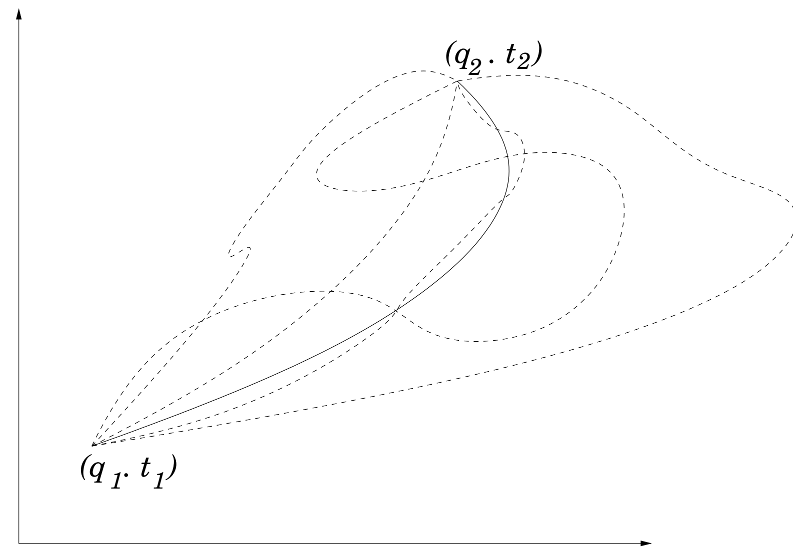
$\longrightarrow L$ y $\tilde{L} = L + df(q)/dt$ dan misma física

2.4 Principio de Mínima Acción

Acción $S(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t)dt$ es mínima para la curva física

Bajo $q_\alpha(t) \to q_\alpha(t) + \delta q_\alpha(t)$:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}) \Big) \delta q_\alpha dt \\ & \qquad + \Big[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \Big]_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$



$\longrightarrow L$ y $\tilde{L} = L + df(q)/dt$ dan misma física

Importancia histórica:

- Cálculo variacional: problema de braquistócrona, catenaria, ...
- Principio de Fermat (mímino tiempo) $\longrightarrow$ Ley de Snel
- Mínima acción en mecánica cuántica $\longrightarrow$ Integrales de camino

2.5 Interpretación y propiedades de Lagrangiano

- Ligaduras independientes de t: $L = \frac{1}{2} g_{ij}(q)\, \dot{q}^i\, \dot{q}^j \; - \; V(q)$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \; = \; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{q}^{\,i} \; + \; \Gamma^i_{jk}\, \dot{q}^j\, \dot{q}^k \; = \; -\partial^i V(q)$$

$\longrightarrow$ interpretación geométrica de la ecuación de Euler-Lagrange:
Formalismo lagrangiano es 2ª Ley de Newton en espacios curvos

2.5 Interpretación y propiedades de Lagrangiano

- Ligaduras independientes de t: $L = \frac{1}{2} g_{ij}(q)\, \dot{q}^i\, \dot{q}^j \; - \; V(q)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \; = \; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{q}^{\,i} \; + \; \Gamma^i_{jk}\, \dot{q}^j\, \dot{q}^k \; = \; -\partial^i V(q)$$

$\longrightarrow$ interpretación geométrica de la ecuación de Euler-Lagrange:
Formalismo lagrangiano es 2ª Ley de Newton en espacios curvos

- $L = L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t))$ no depende explícitamente de t:

$$\dot{E} \; = \; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t))\right) \; = \; 0$$

2.5 Interpretación y propiedades de Lagrangiano

- Ligaduras independientes de t: $L = \frac{1}{2} g_{ij}(q)\, \dot{q}^i\, \dot{q}^j \; - \; V(q)$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \; = \; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{q}^{\,i} \; + \; \Gamma^i_{jk}\, \dot{q}^j\, \dot{q}^k \; = \; -\partial^i V(q)$$

$\longrightarrow$ interpretación geométrica de la ecuación de Euler-Lagrange:
Formalismo lagrangiano es 2ª Ley de Newton en espacios curvos

- $L = L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t))$ no depende explícitamente de t:

$$\dot{E} \; = \; \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t))\Big) \; = \; 0$$

- Coordenada cíclica $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \Longrightarrow$ Momento generalizado $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ = cte

2.5 Interpretación y propiedades de Lagrangiano

- Ligaduras independientes de t: $L = \frac{1}{2} g_{ij}(q)\, \dot{q}^i\, \dot{q}^j \;-\; V(q)$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \;=\; 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \ddot{q}^{\,i} \;+\; \Gamma^i_{jk}\, \dot{q}^j\, \dot{q}^k \;=\; -\partial^i V(q)$$

$\longrightarrow$ interpretación geométrica de la ecuación de Euler-Lagrange:
Formalismo lagrangiano es 2ª Ley de Newton en espacios curvos

- $L = L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t))$ no depende explícitamente de t:

$$\dot{E} \;=\; \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t))\Big) \;=\; 0$$

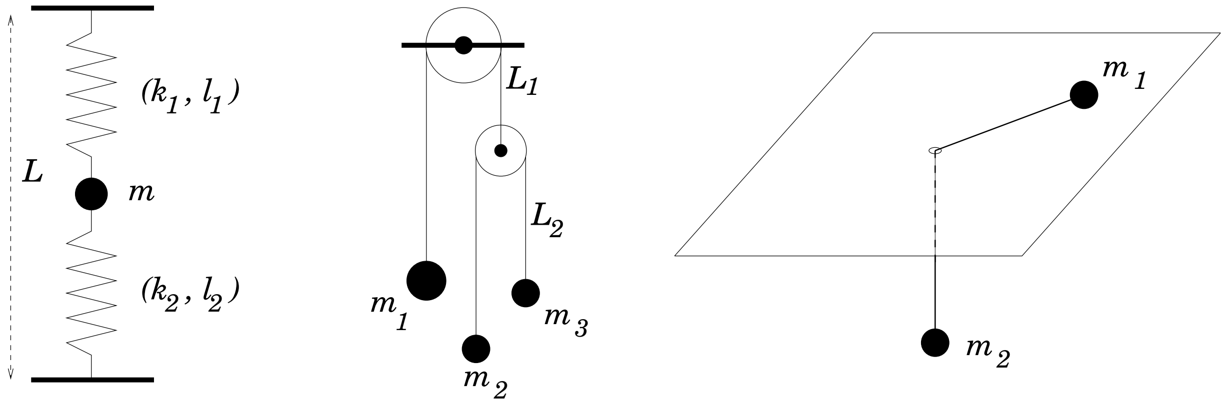
- Coordenada cíclica $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \;\Longrightarrow\;$ Momento generalizado $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ = cte

- Ejemplos de Teorema de Noether:
  Simetría $t \longrightarrow t + \Delta t \quad\Longleftrightarrow\quad$ Conservación de energía
  Simetría $q_\alpha \longrightarrow q_\alpha + \Delta q_\alpha \quad\Longleftrightarrow\quad$ Conservación de momento (angular)

2.6 Problemas

Toda una lista de problemas...

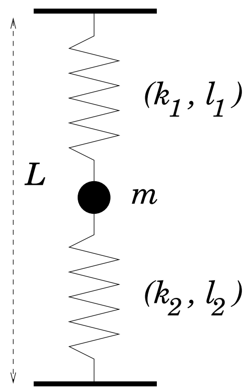
- Problemas de dinámica:

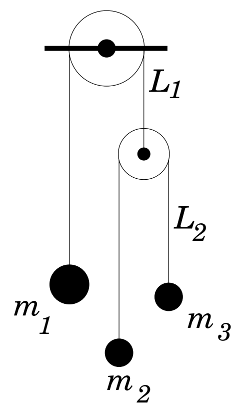


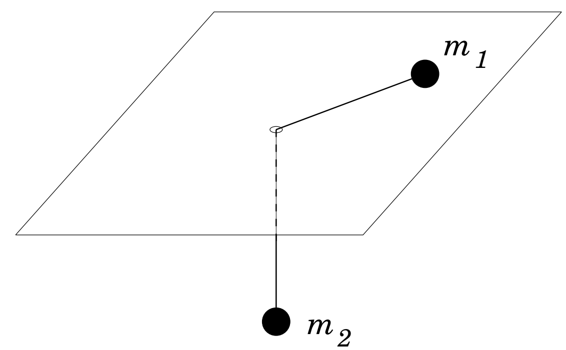
2.6 Problemas

Toda una lista de problemas...

- Problemas de dinámica:





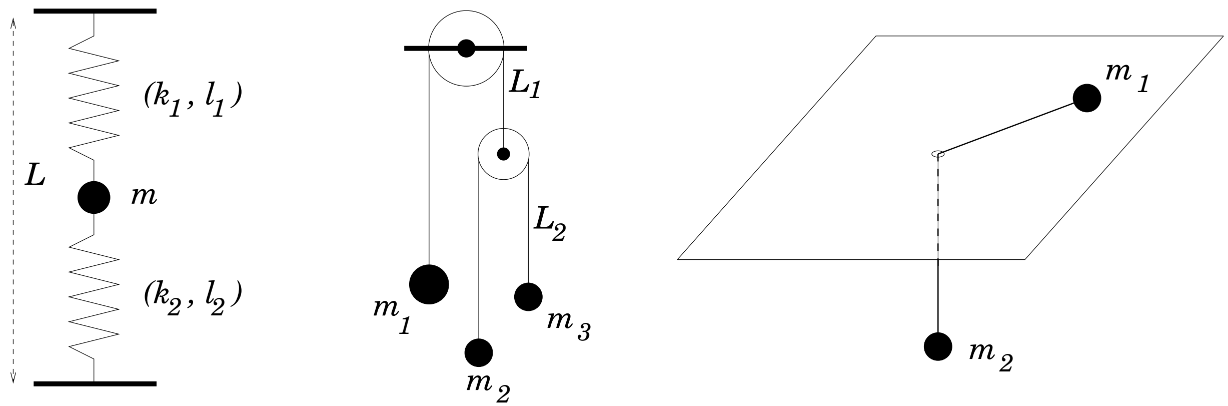


- Problemas de formalismo:
  $\longrightarrow$ Reproducir geodésica en casos sencillos
  $\longrightarrow$ Dedudir Euler-Lagrange para $\tilde{L} = L + df(q)/dt$

2.6 Problemas

Toda una lista de problemas...

- Problemas de dinámica:



- Problemas de formalismo:
  $\longrightarrow$ Reproducir geodésica en casos sencillos
  $\longrightarrow$ Dedudir Euler-Lagrange para $\tilde{L} = L + df(q)/dt$

- Problemas de simetrías:
  $\longrightarrow$ Sistema de dos cuerpos en sistema de centro de masa
  $\longrightarrow$ Partícula en campo electromagnético

Muchas gracias!