

MECÁNICA ANALÍTICA

Osciladores acoplados

1. De un péndulo de masa m y longitud ℓ cuelga otro péndulo de la misma masa y la misma longitud. Hallar el lagrangiano y las ecuaciones de Lagrange de este péndulo doble. Resolver las ecuaciones en el límite de oscilaciones pequeñas.
2. Sean dos cuerpos de masa m y otro de masa M unidos por tres muelles formando una circunferencia de radio R en el plano horizontal. Los muelles son idénticos con constante elástica k y longitud natural a . La longitud de equilibrio de los muelles en la circunferencia es $b = 2\pi R/3$.
 - (a) Escribir el Lagrangiano del sistema, y las ecuaciones de movimiento.
 - (b) Encontrar los modos normales de oscilación (frecuencias y amplitudes) alrededor de la posición de equilibrio e interpretarlos.
 - (c) Discutir el caso cuando $M = m$.
3. Sean dos masas m_1 y m_2 unidas por un muelle de constante elástica k . Cada una de las masas a su vez está unida por un muelle a la pared de constante elástica k_1 y k_2 respectivamente.
 - (a) Escribir el Lagrangiano del sistema, y las ecuaciones de movimiento.
 - (b) Encontrar e interpretar los modos normales de oscilación.
 - (c) Si inicialmente el sistema está en reposo y desplazamos m_1 una distancia l hacia la derecha, escribir la ecuación de la trayectoria para cada una de las masas.
4. Un péndulo está formado por una barra de masa despreciable y longitud ℓ , unida a dos masas m iguales. Una de ellas puede oscilar en un plano, la otra está restringida a moverse verticalmente unida a un muelle de constante elástica k y longitud natural a (ver Figura 1). Escribir las ecuaciones del movimiento hasta orden cuadrática en la serie perturbativa e interpretarlas.
5. Un modelo para una molécula triatómica es una masa M unida por muelles con constante k y longitud ℓ con dos masas m . Si las masas sólo se pueden mover longitudinalmente, escribir las ecuaciones del movimiento para este sistema y hallar los automodos.
6. Sean dos osciladores acoplados de masa m con energía cinética y potencial respectivamente:

$$\begin{aligned} T &= ma^2(2\dot{x}^2 - 10\dot{x}\dot{y} + 13\dot{y}^2), \\ V &= mga(5x^2 - 22xy + 25y^2), \end{aligned}$$

donde a es una constante y g la aceleración de la gravedad. Determinar los modos normales de oscilación (frecuencias y amplitudes), y las coordenadas normales.

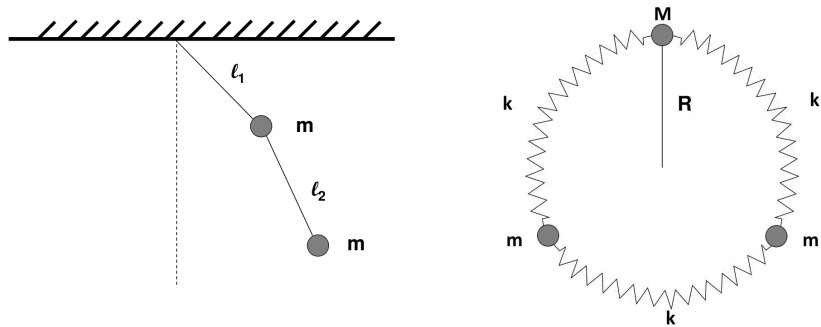


Figura 1: El problema del péndulo doble (problema 1), y de los 3 muelles (problema 2).

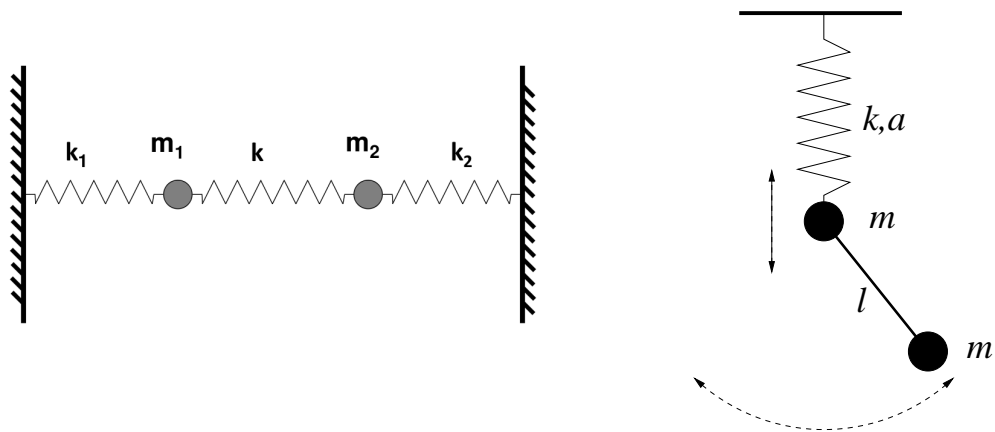


Figura 2: El problema de las masas entre muelles (problema 3), y de péndulo-muelle (problema 4).