Relatividad General
$4^o$ de Física - UGR
Curso 2013 - 2014

**Nombre:**

# Problemas de Relatividad General

*Resuelve los tres problemas abajo y entrégalos al profesor antes del*

- *15 de noviembre 2013 (problema 1)*
- *15 de diciembre 2013 (problema 2)*
- *15 de enero 2014 (problema 3)*

*Los ejercicios entregados serán evaluados y constará un 20 % de la nota final de la asignatura (siendo el examen final el restante 80 %). Si se hace el trabajo en grupo (máximo de 3 personas), basta entregar una sola copia con los nombres de todos los colaboradores.*

1. **Relatividad especial:**
*a.* Considera la acción de una partícula relativista con masa $m_0$ y carga eléctrica $q$ en el espacio de Minkowski, acoplada al potencial electromagnético $A_\mu$,

$$S_{\text{partícula}} \;=\; -\tfrac{1}{2}\,m_0 \int d\tau\ \eta_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \;-\; q\int d\tau\ \dot{x}^\mu A_\mu(x(\tau)). \tag{1}$$

Demuestra que la ecuación de movimiento de $x^\mu$ es la Segunda Ley de Newton relativista para una masa sometida a la fuerza de Lorentz.
*b.* Considera la acción de Maxwell para el campo electromagnético, en el espacio de Minkowski,

$$S_{\text{Maxwell}} \;=\; -\frac{1}{4}\int d^4x\ F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \;-\; \int d^4x\ j_\mu(x)A^\mu(x), \tag{2}$$

donde $j^\mu$ es la densidad de corriente y $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Demuestra que la ecuación de movimiento de $A_\mu$ es la ecuación inhomogénea de Maxwell. ¿Cómo está codificada la ecuación homogénea de Maxwell en esta acción?
*c.* Demuestra que tanto la acción (1) como (2) son invariantes bajo la transformación gauge

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda. \tag{3}$$

2. **Geometría diferencial:**
*a.* Considera la métrica $\tilde{g}_{ab}$ de la esfera bidimensional $\mathbb{S}^2$ con radio $R_0$ en coordenadas esféricas,

$$d\tilde{s}^2 \;=\; R_0^2\Big(d\theta^2 \;+\; \sin^2\theta d\varphi^2\Big). \tag{4}$$

Calcula los símbolos de Christoffel, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci. Argumenta que la única componente no-trivial del tensor de Riemann es $\tilde{R}_{\theta\varphi\theta\varphi}$ y calcula su valor. Demuestra que el tensor de Riemann satisface la identidad

$$\tilde{R}_{abcd} \;=\; R_0^{-2}\Big(\tilde{g}_{ad}\,\tilde{g}_{bc} \;-\; \tilde{g}_{ac}\,\tilde{g}_{bd}\Big). \tag{5}$$

*b.* Considera ahora la métrica $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = \theta, a)$ de una esfera $N$-dimensional $\mathbb{S}^N$ con radio $R_0$ en coordenadas esféricas,

$$ds^2 \;=\; R_0^2\Big(d\theta^2 \;+\; \sin^2\theta\, \tilde{g}_{ab}(x)\, dx^a dx^b\Big), \qquad\qquad (a, b = 1, 2, ..., N-1) \tag{6}$$

donde $\tilde{g}_{ab}(x)$ es la métrica de la esfera $(N-1)$-dimensional $\mathbb{S}^{N-1}$, lo que implica que su tensor de Riemann satisface la identidad (5). Demuestra que los únicos símbolos de Christoffel no-cero son $\Gamma_{\theta a}^{b}$, $\Gamma_{ab}^{\theta}$ y $\Gamma_{ab}^{c}$. Demuestra que las únicas componentes no-triviales del tensor de Riemann son $R_{\theta b\theta d}$ y $R_{abcd}$ y demuestra que satsiface la identidad

$$R_{\mu\nu\rho\lambda} = R_0^{-2}\Big(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}\Big). \tag{7}$$

3. **El agujero negro de Reissner-Nordström:**
Considera la acción de Einstein-Maxwell en cuatro dimensiones

$$S_{EM} \;=\; \int d^4x\, \sqrt{|g|}\, \Big[\,\frac{1}{2\kappa}R \;-\; \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Big], \tag{8}$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

*a.* Calcula la ecuación de Maxwell y la ecuación de Einstein sin traza y demuestra que en general las soluciones de esta acción no son Ricci planas, pero sí tienen curvatura escalar cero, es decir, $R_{\mu\nu} \neq 0$, pero $R = 0$.

*b.* Considera el Ansatz para una métrica y un campo eléctrico esféricamente simétricos y estáticos

$$ds^2 \;=\; e^{2A(r)}dt^2 \;-\; e^{2B(r)}dr^2 - r^2\Big(d\theta^2 + \;\sin^2\theta d\phi^2\Big), \qquad\qquad F_{tr} \;=\; E(r), \tag{9}$$

donde $A(r)$, $B(r)$ y $E(r)$ son funciones a determinar. Demuestra $F_{tr}$ satisface la identidad de Bianchi para cualquier $E(r)$, pero la ecuación de Maxwell sólo si

$$E(r) \;=\; e^{(A+B)}\,\frac{Q}{r^2}, \tag{10}$$

donde $Q$ es una constante de integración, que corresponde con la carga eléctrica de la solución.

*c.* Escribe y resuelve las ecuaciones de Einstein para el Ansatz (9) con el campo eléctrico (10). ¿En qué se distingue esta solución de la de Schwarzschild?