Inhoudsopgave

1 Inleiding

1.1 Kader

Ongeveer honderd jaar geleden onstonden twee theorieën die het beeld van de fysica grondig veranderden. De ene theorie draagt de naam kwantummechanica. Deze theorie geeft een verklaring voor de wereld van het kleine en schept daarvoor een beeld dat sterk ingaat tegen hoe we denken over onze macroscopische wereld. Toch geven de technieken ontstaan uit de kwantummechanica de resultaten die in de praktijk worden gemeten. Fenomenen zoals het foto-elektrisch effect en de kwantisatie van het spectrum van het uitgestraalde licht van een atoom konden nu eenmaal enkel worden verklaard in het licht van deze theorie. De andere theorie, die de naam algemene relativiteitstheorie kreeg, gaf een verklaring voor het grote. Daardoor ontstond een totaal nieuw beeld van het universum zoals in [1]. Door dit nieuw beeld kon onder andere een verklaring worden gegeven voor zwaartekracht. Ook bleken nieuwe mysterieuze objecten zoals zwarte gaten mogelijk te zijn in deze theorie. Ook het beeld van een statisch universum waarin alle sterren stilstaan moest eraan geloven. Dit resulteerde onder meer in de oerknaltheorie.

Al vlug dook een zwaar probleem op tussen kwantumtheorie en relativiteitstheorie. Deze twee theorieën lijken niet met elkaar compatibel. Tussen 1950 en 1970 ontstond de kwantumveldentheorie die in staat was om elektromagnetisme en zwakke wisselwerking te verklaren zoals in [2]. Het loopt echter verkeerd in kwantumveldentheorie als deze wordt toegepast op gravitatie. Het beeld van gravitatie dat wordt geschapen door relativiteit geeft allerlei inconsistenties in kwantumveldentheorie.

Er werd vervolgens gezocht naar een theorie die in staat zou zijn om deze problemen tussen kwantumtheorie en relativiteitstheorie op te lossen. Het ziet ernaar uit dat de beste theorie om dit probleem op te lossen waarschijnlijk supersnarentheorie is. In supersnarentheorie worden de puntdeeltjes vervangen door kleine snaartjes die kunnen trillen als de snaren van een gitar, zie [3]. De elementaire deeltjes worden dan gezien als de verschillende trillingsmodusen van deze snaartjes. De ruimte waarin deze theorieën bestaan moeten om deze theorieën consistent te maken exact tien dimensies hebben. Verder blijkt het dat er vijf verschillende supersnarentheorieën mogelijk zijn die allen een goede verklaring hebben. Deze theorieën kunnen wel aan elkaar verbonden aan de hand van enkele dualiteiten zoals T-dualiteit zodat het lijkt alsof ze allemaal een verschillend aspect zijn van een theorie.

Als een supersnarentheorie bij lage energie wordt benaderd gaat deze over naar supergravitatie zoals in [4]. De schaal wordt zo genomen zodat de snaartjes opnieuw puntdeeltjes lijken. Vermits enkel de laagste energiemodus van de snaren wordt beschouwd zijn alle deeltjes in supergravitatie massaloos. Alle vijf supersnarentheorieën hebben zo een overeenstemmende effectieve supergravitatietheorie. Zoals hun overeenstemmende snarentheorie leven deze theorieën ook in tien dimensies. Ook blijken de dualiteiten in supersnarentheorie dualiteiten in deze supergravitatietheorie op te leveren. Hierdoor worden ook de verschillende supergravitatietheorieën aan elkaar verbonden. Supergravitatietheorieën moeten altijd voldoen aan een bepaalde symmetrie tussen de fermionvelden en de bosonvelden. Deze symmetrie wordt supersymmetrie genoemd. Het blijkt dat deze symmetrie tot maximaal in elf dimensies kan gehandhaafd blijven. Bijgevolg bestaan er dan ook geen supergravitietheorieën meer in een ruimte met meer dan elf dimensies.

Supergravitatietheorieën hebben echter nog één probleempje. Zoals supersnarentheorieën bestaan de meeste superagravitatietheorieën in meer dan vier dimensies. De wereld waarin wij leven bestaat slechts uit vier dimensies, namelijk één tijdsdimensie en drie ruimtelijke dimensies. Supergravitatietheorieën in tien dimensies lijken dus op het eerste zicht totaal verkeerd. In [5] stelden Kaluza en Klein om elektromagnetisme te verklaren een welbepaalde dimensionale reductiemethode voor van een vijfdimensionale ruimte naar een vierdimensionale. Deze methode bleek ook bruikbaar te zijn om dimensionele reductie uit te voeren op supergravitatietheorieën. Deze reductie veronderstelt dat de overtollige ruimtelijke richtingen kunnen worden opgerold tot een zeer kleine torus.

Dit proces heeft de naam Kaluza-Kleincompactificatie. Door deze compactificatie ontstaat er een effectieve theorie in een ruimte met een lager aantal dimensies. Op deze manier kunnen ook tiendimensionale supergravitatietheorieën worden gereduceerd naar vier dimensies waardoor ze toch een goede beschrijving kunnen geven van het universum. Er is echter een probleem met deze reductie. Het is niet bekend hoe de fysica die wij rondom ons zien, beschreven door het standaardmodel, als een effectieve theorie kan worden bekomen door deze reductie naar vier dimensies. Door deze reductie is het wel mogelijk om een bepaalde symmetrie van bepaalde supergravitatietheorieën na te gaan. Deze symmetrie geeft dan aanleiding tot de dualiteit die T-dualiteit wordt genoemd.

Er kan nu worden gezocht naar een oplossing van de verschillende supergravitatietheorieën. Na onderzoek werd een oplossing gevonden die de naam p-braan meekreeg. Dit zijn puur bosonische objecten die zich uitstrekken over p-ruimtelijke dimensies. Een p-braan is in een zekere zin een veralgemening van een snaar. Een snaar heeft ook een zekere ruimtelijke uitgebreidheid over één dimensie. Zelfs in supersnarentheorie komen branen voor. De uiteinden van open snaren kunnen zich vastzetten op D-branen. Hierdoor is het mogelijk deze theorië consistent te maken.

Branen maken het mogelijk om ons universum op een heel ander manier te zien. In [6] wordt voorgesteld onze ruimte te zien als een gekromde driebraan die leeft in een tiendimensionale ruimte. Wij zitten dan als het ware vastgeplakt op deze braan die we nooit kunnen verlaten. De dimensies die we dan ook effectief zien zijn dan ook de drie ruimtelijke dimensies van de braan en één tijdsdimensie door de bewegingen op de braan. De vraag is nu of het mogelijk is om een p-braanoplossing te construeren die dezelfde wetten erop heeft als deze die leven in ons universum. De structuur van deze braan moet dan een fysica op de braan geven die de verschillende velden bevat die wij rondom ons zien en ons universum maken tot wat het is.

Toen Einstein zijn algemene relativiteitstheorie had ontwikkeld was één van zijn conclusies dat het universum als geheel moest expanderen of inkrimpen. Om dit effect te compenseren voerde hij in zijn theorie een kosmologische constante in. Deze kosmologische constante kan gezien worden als een soort nulpuntsenergie van het vacuüm. Dit zorgde ervoor dat de ruimte een Einsteinkromming had. Door deze constante goed te kiezen kon Einstein ervoor zorgen dat het universum statisch was. Later bleek echter uit waarnemingen dat het universum in tegenstelling tot wat men tot dan dacht toch expandeerde. Maar het universum expandeerde veel sneller als voorspeld werd uit relativiteitstheorie zonder een kosmologische constante. Empirisch gezien blijkt een kosmologische constante dus nog altijd noodzakelijk te zijn.

Kwantumveldentheorie verwacht het bestaan van een nulpuntsenergie van het vacuüm. Deze nulpuntsenergie van het vacuüm komt overeen met een kosmologische constante. Hier duikt echter een probleem op dat bekend staat onder de naam probleem van de kosmologische constante. Kwantumveldentheorie voorspeld een kosmologische constante die zeer groot is met een waarde rond 10^{112}erg/cm^3. De kosmologische constante die wordt gemeten door observatie van de snelheid van de expansie van het heelal is ongeveer 10^{-8}erg/cm^3. Er is zowat 120 grootteordes verschil waardoor het niet mogelijk is om de theorie zoals die nu gekend is in overeenstemming te brengen met de waarnemingen, zie [7]. Een goede verklaring voor dit verschil is nog steeds niet gevonden.

Vermits er een kosmologische constante wordt gemeten in ons universum moet het mogelijk zijn om het model van een braanwereld consistent te maken om een kosmologische constante op de braanwereld te verkrijgen. De vraag wordt dan welke kosmologische constantes er mogelijk zijn in een gegeven bronruimte. Welke velden zijn noodzakelijk in de bronruimte om deze constructie te maken en hoe wordt deze constante bepaald tegenover deze velden?

Braanwerelden kunnen mogelijks ook op het probleem van de kosmologische constantes een antwoord formuleren. Het is namelijk mogelijk in de bronruimte waarin de braan leeft een grote kosmologische constante te hebben. Net zoals deze wordt voorspeld door de kwantummechanica. Als de braanconstructie toelaat op de braan een kleine kosmologische constante te construeren dan komt dit overeen met wat er wordt gemeten in onze wereld. Hiermee zou het probleem dus opgelost kunnen zijn. Het doel van deze thesis wordt dan ook om in kaart te brengen of zo een braan kan worden geconstrueerd en onder welke condities dit kan gebeuren.

1.2 Inhoud

Eerst zullen supergravitatietheorieën van het type IIA en IIB in tien dimensies en supergravitatie in elf dimensies worden onder de loep genomen. Type IIA en type IIB supergravitatie zal vervolgens worden gereduceerd naar negen dimensies aan de hand van Kaluza-Kleincompactificatie. Dan komen enkele dualiteiten van supergravitatie aan bod. De gereduceerde gemeenschappelijke sector van type IIA en type IIB kan worden gebruikt om de T-dualiteitsregels na te gaan. Door T-dualiteit zal blijken kunnen type IIA en type IIB in elkaar overgaan. S-dualiteit legt verbanden tussen de velden binnen type IIB supergravitatie. Door Hodgedualiteit kan de actie van een supergravitatietheorie worden uitgebreid met extra vormvelden en wordt het verband gelegd met de velden die reeds zijn opgenomen in de theorie.

Vervolgens wordt begonnen met de constructie van p-braanoplossingen. De methode om vlakke braan te construeren komt als eerste aan bod en wordt deze oplossing concreet toegepast op type IIA en type IIB supergravitatie in tien dimensies en op supergravitatie in elf dimensies.

Dan wordt gepoogd om de constructie van de vlakke p-braan stap voor stap te veralgemenen. Op de braan wordt eerst een Riccivlakke metriek gezet waardoor de braan toelaat dat er gravitatie op bestaat. Deze oplossing wordt nog eens veralgemeend tot een p-braan met naast een metriek nog een scalair veld erop.

Vermits er een metriek kan gelegd worden op de braan zou het ook mogelijk kunnen zijn om deze Einsteingekromd te maken. Daarom zal worden betracht om in een bronruimte met een kosmologische constante op een $(d-2)$-braan of domeinmuur een kosmologische constante te leggen in de hoop dat deze het probleem van de kosmologische constante kan oplossen. Dit gebeurt in een systeem dat géén scalair veld heeft in de bronruimte en in een systeem mét een scalair veld in de bronruimte. Dan volgt het vraag of het mogelijk is om op een domeinmuur naast een kosmologische constante nog een scalair veld te verkrijgen. Dit gebeurt in drie verschillende bronruimtes. De eerste bronruimte heeft één enkele kosmologische constante, de tweede heeft er twee met een verschillende koppeling aan het scalair veld in de bronruimte, en de derde heeft een kosmologische constante en een extra scalair veld. Telkens worden deze oplossingen bezien vanuit de hoek van het probleem van de kosmologische constante.

Tenslotte wordt gezocht of deze constructies die een kosmologische constante opleveren op een domeinmuur kunnen worden veralgemeend naar een p-braan met p willekeurig. Er worden opnieuw twee constructies overwogen. Eén constructie heeft twee vormvelden in de bronruimte en het andere heeft een vormveld en een extra scalair veld.

2 Supergravitatietheorieën

Supergravitatieteheorieën zoals in [9] zijn lokaal supersymmetrische theorieën. Met andere woorden er bestaat een symmetrie tussen de fermionvelden en de bosonvelden. Deze theorieën zijn gebaseerd op dezelfde principes als Einsteins algemene relativiteitstheorie maar laten toe om het beeld van deze theorie uit te breiden met nieuwe velden en in een ruimte met een groter aantal dimensies dan de vier die wij zien. Supersymmetrie en dus ook supergravitatie kunnen bestaan in ruimtes met maximum elf dimensies. In supergravitatie wordt de zwaartekracht zoals in relativiteitstheorie ook gezien als de kromming van de ruimte. De extra velden die worden ingevoerd laten toe bosonische en fermionische deeltjes te beschrijven. In supergravitatie worden de meeste bosonische velden beschreven door vormvelden, die een veralgemening zijn van het elektromagnetische veld. Gravitatie, ook een bosonisch veld, wordt echter beschreven door een metriek. Voor fermionen wordt gebruik gemaakt van spinoren. Als deze velden echter worden gelijkgesteld aan nul wordt terug een vorm van relativiteitstheorie bekomen in een bepaald aantal dimensies.

In tien dimensies kunnen door de lage energielimiet te nemen zoals in [4] van de vijf supersnarentheorieën vijf supergravitatietheorieën worden bekomen. Hierbij worden de snaren zo klein genomen zodat ze lijken punten te zijn. Deze supergravitatietheorieën dragen de naam type I, type IIA, type IIB, heterotisch $SO(32)$ en heterotisch $E_8 \times E_8$. Supersnarentheorieën zijn enkel mogelijk in tien dimensies waardoor ook deze supergravitatietheorieën in een tiendimensionale ruimte moeten bestaan. Al deze supergravitatietheorieën blijken verbonden te zijn aan de hand van dualiteiten. Hierdoor lijkt het dat deze theorieën allemaal een aspect zijn van één enkele theorie.

In elf dimensies bestaat er maar één enkele supergravitatietheorie vermits deze theorie eveneens moet voldoen zoals de theorieën in tien dimensies aan een aantal lokale supersymmetrieregels. Deze supergravitatietheorie blijkt onder dimensionele reductie over te gaan naar type IIA supergravitatie. Daarom wordt er ook aangenomen in [8] dat de elfdimensionale theorie de lage energielimiet is van een nog niet geformuleerde theorie die M-theorie wordt genoemd die onder dimensionele reductie een supersnarentheorie zou moeten opleveren. Maar de uitwerking van dit laatste is echter nog niet helemaal duidelijk voor de fysici van vandaag.

Normaal kan supergravitatie zowel bosonen als fermionen beschrijven. In dit werk wordt echter enkel gebruik gemaakt van de bosonische velden om oplossingen te construeren. Daarom zullen de spinoren, die de fermionen omschrijven, telkens worden weggelaten zodat enkel de bosonische velden overblijven.

2.1 Type IIA en type IIB supergravitatie

In tien dimensies zijn er twee supergravitatietheorieën omwille van hun vorm zeer interessant zijn vanuit het standpunt van dit werk. Deze twee theorieën type IIA en type IIB zien er min of meer hetzelfde uit. Deze theorieën maken allebei gebruik van een actieprincipe. Het bosonische stuk van deze actie is in beide gevallen opgebouwd als een som van een gemeenschappelijke sector met een aantal Ramond-Ramondvormvelden die afhangen van het type theorie.

Verder blijkt het ook dat de formulering van deze actie van type IIA en type IIB supergravitatie in tien dimensies op een aantal manieren kan gebeuren. Deze actie is namelijk te schrijven in verschillende stelsels. Alhoewel de actie verschillend is levert elk stelsel telkens weer dezelfde theorie op. De twee meest courante stelsels zijn het Einsteinframe en het stringframe. De acties van type IIA en type IIB zullen in eerste instantie worden geformuleerd in het stringframe omdat deze op de makkelijkste manier wordt verkregen uit supersnarentheorie. Daarna zullen deze acties worden omgezet naar het Einsteinframe.

Gemeenschappelijke sector Alle supergravitatietheoriën in tien dimensies hebben altijd een stuk van de actie die het zelfde is. Deze gemeenschappelijke sector wordt beschreven aan de hand van een metriek $g^{(\sigma)}_{\mu\nu}$, een scalair dilatonveld ϕ en een antisymmetrische tensor B, die de Kalb-Ramondijktensor wordt genoemd. Uit de metriek $g^{(\sigma)}_{\mu\nu}$ kan een Ricciscalar worden, die zal worden aangeduid met $R^{(\sigma)}$. De Kalb-Ramondtensor definieert een veldsterkte $H = 3\partial B$. Deze veldsterkte is invariant onder een welbepaalde ijktransformatie van het ijkveld $\delta B_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}\Sigma_{\nu]}$.

De gemeenschappelijke sector van type IIA en type IIB heeft in tien dimensies de volgende vorm.

$$\mathcal{S}^{(\sigma)}_{\mathrm{C}} = \int d^{10}x\sqrt{|g^{(\sigma)}|}e^{-2\phi}\left[R^{(\sigma)} - 4\left(\partial\phi\right)^2 + \frac{1}{12}H^2\right] \tag{2.1}$$

Merk hierbij op dat als de velden ϕ en B nul zijn deze actie overeenkomt met een Einsteinactie in tien dimensies zonder materie. Als supergravitatie wordt beschouwd als de limiet van supersnarentheorie dan kan e^{ϕ} worden geïnterpreteerd als de koppelingsconstante van de snaar.

Type IIA Naast de gemeenschappelijke sector wordt type IIA supergravitatie in tien dimensies ook nog bepaald door een aantal Ramond-Ramondvelden. Deze Ramond-Ramondvelden bestaan uit een éénvorm ijkveld $C_{(1)}$ en een drievorm ijkveld $C_{(3)}$. Deze ijkvelden geven aanleiding tot de volgende veldsterktes.

$$F_{(2)} = 2\partial C_{(1)} \tag{2.2}$$

$$F_{(4)} = 4\left(\partial C_{(3)} - 3\partial B C_{(1)}\right) \tag{2.3}$$

Het bosonische stuk van de actie van type IIA met de Ramond-Ramondtermen heeft de volgende vorm.

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{(\sigma)}_{\mathrm{IIA}} = &\int d^{10}x\left(\sqrt{|g^{(\sigma)}|}\left\{e^{-2\phi}\left[R^{(\sigma)} - 4\left(\partial\phi\right)^2 + \frac{1}{12}H^2\right] - \frac{1}{4}F^2_{(2)} - \frac{1}{48}F^2_{(4)}\right\}\right.\\ &\left.-\frac{1}{144}\epsilon\partial C_{(3)}\partial C_{(3)}B\right)\end{aligned} \tag{2.4}$$

Het is mogelijk om bij de actie van type IIA nog een extra constant nulvorm veldsterkte toe te voegen die kan worden geïnterpreteerd als een kosmologische constante. Deze versie van type IIA krijgt soms ook wel de naam massieve IIA.

Type IIB Ook voor type IIB supergravitatie in tien dimensies moet de gemeenschappelijke sector worden uitgebreid met een aantal Ramond-Ramondvelden. Definieer daarom een nulvorm ijkveld $C_{(0)}$, een tweevorm ijkveld $C_{(2)}$ en een viervorm ijkveld $C_{(4)}$. De veldsterktes van deze ijkvelden zijn dan als volgt gedefinieerd.

$$F_{(1)} = 2\partial C_{(0)} \tag{2.5}$$

$$F_{(3)} = 3\left(\partial C_{(2)} - \partial B C_{(0)}\right) \tag{2.6}$$

$$F_{(5)} = 5\left(\partial C_{(4)} - 6\partial B C_{(2)}\right) \tag{2.7}$$

Hierin is de veldsterkte $F_{(5)}$ zelftoegevoegd onder Hodgedualiteit, die in een tiendimensionale ruimte een r-vorm veldsterkte relateert aan een $(10-r)$-vorm veldsterkte. Hierdoor heeft het slechts de helft van de vrijheidsgraden van een normale vijfvorm.

Type IIB heeft een actie waarvan het bosonische stuk gegeven is door de volgende uitdrukking.

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{(\sigma)}_{\mathrm{IIB}} = &\int d^{10}x\left(\sqrt{|g^{(\sigma)}|}\left\{e^{-2\phi}\left[R^{(\sigma)} - 4\left(\partial\phi\right)^2 + \frac{1}{12}H^2\right] + \frac{1}{2}F^2_{(1)} + \frac{1}{12}F^2_{(3)} + \frac{1}{240}F^2_{(5)}\right\}\right.\\ &\left.-\frac{1}{192}\epsilon\partial C_{(4)}\partial C_{(2)}B\right)\end{aligned} \tag{2.8}$$

Stringframe en Einsteinframe Door de metriek te transformeren aan de hand van het dilaton kan de actie van type IIA en type IIB supergravitatie in verschillende stelsels worden neergeschreven. Het stelsel dat tot nu toe werd gebruikt is het stringframe. Een ander veel gebruikt stelsel is het Einsteinframe. De transformatie van de metriek van het stringframe naar het Einsteinframe is in 10 dimensies gegeven door de volgende vergelijking.

$$g_{\mu\nu}^{(e)} = e^{\frac{1}{2}\phi} g_{\mu\nu}^{(\sigma)} \tag{2.9}$$

Hierin is $g_{\mu\nu}^{(e)}$ de metriek in het Einsteinframe en $g_{\mu\nu}^{(\sigma)}$ de metriek in het stringframe.

Als de actie van type IIA in het stringframe (2.4) wordt omgezet naar het Einsteinframe via (2.9) dan krijgt deze de volgende vorm.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{IIA}}^{(e)} &= \int d^{10}x \left\{ \sqrt{|g^{(e)}|} \left[R^{(e)} + \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{1}{12} e^{-\phi} H^2 - \frac{1}{4} e^{\frac{3}{2}\phi} F_{(2)}^2 - \frac{1}{48} e^{\frac{1}{2}\phi} F_{(4)}^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{144} \epsilon \partial C_{(3)} \partial C_{(3)} B \right\} \end{aligned} \tag{2.10}$$

De actie van type IIB in het stringframe (2.8) verkrijgt na transformatie (2.9) de volgende vorm in het Einsteinframe.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{IIB}}^{(e)} &= \int d^{10}x \left\{ \sqrt{|g^{(e)}|} \left[R^{(e)} + \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{1}{12} e^{-\phi} H^2 + \frac{1}{2} e^{2\phi} F_{(1)}^2 + \frac{1}{12} e^{\phi} F_{(3)}^2 + \frac{1}{240} F_{(5)}^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{192} \epsilon \partial C_{(4)} \partial C_{(2)} B \right\} \end{aligned} \tag{2.11}$$

De Chern-Simonstermen, telkens de laatste term in de vorige twee vergelijkingen, zullen in het vervolg worden weggelaten vermits voor de constructie van oplossingen telkens maar één ijkveld verschillend van nul zal worden genomen waardoor deze term duidelijk wegvalt.

Als de bewegingsvergelijkingen van deze theorie worden afgeleid zullen deze eenvoudiger te vinden zijn in het Einsteinframe. De gemeenschappelijke sector heeft in dit stelsel heeft immers geen voorfactor die afhangt van het dilaton. Hierdoor wordt zowel de Einsteinvergelijking als de bewegingsvergelijking van het dilaton eenvoudiger. Het stringframe daarentegen zal blijken handiger te zijn om T-dualiteit en dimensionele reductie op toe te passen.

2.2 Elfdimensionale supergravitatie

In elf dimensies is er slechts één supergravitatietheorie die lokaal supersymmetrisch is. Deze theorie wordt voor het bosonische stuk enkel bepaald door een metriek $g_{\mu\nu}$ en een drievorm ijkveld $C_{(3)}$. Het ijkveld $C_{(3)}$ geeft aanleiding tot een veldsterkte $F_{(4)} = 4\partial C_{(4)}$. Concreet heeft het bosonische stuk van de actie van deze theorie in elf dimensies dan de volgende vorm.

$$\mathcal{S}_{11} = \int d^{11}x \left[\sqrt{|g|} \left(R - \frac{1}{48} F_{(4)}^2 \right) - \frac{1}{20736} \epsilon F_{(4)} F_{(4)} C_{(3)} \right] \tag{2.12}$$

In het vervolg zal ook de Chern-Simonsterm in deze vergelijking worden weggelaten vermits deze geen bijdrage zal leveren tot de oplossingen die in dit werk worden besproken.

In elf dimensies bestaat er maar één enkel frame vermits er in elf dimensies geen dilaton bestaat dat toelaat de verandering tussen frames te doen. Dit zorgt er dan ook voor dat de theorie voor elfdimensionale supergravitatie een uniek stelsel heeft.

Zowel type IIA als type IIB supergravitatie in tien dimensies kunnen worden neergeschreven in de vorm van een actie. Een deel van het bosonische stuk van deze actie van deze twee theorieën is *gelijk en omvat een metriek, een dilaton en een Kalb-Ramondveldsterkte. Daarnaast zijn er nog enkele Ramond-Ramondvelden die afhangen van het type theorie. Ook is de actie van type IIA en type IIB in tien dimensies niet uniek maar kan door het bestaan van het dilaton in verschillende stelsels worden neergeschreven.*

Supergravitatie in elf dimensies is ook gegeven door een actie. Het bosonische stuk van deze actie is bepaald door een metriek en een viervorm veldsterkte. Deze theorie heeft echter geen dilaton. Hierdoor kan er niet worden overgegaan tussen verschillende stelsels en is de actie ervan uniek.

3 Kaluza-Kleinreductie

Zoals bleek in het vorig hoofdstuk vereisen sommige supergraviatietheorieën een tiendimensionale of zelfs een elfdimenionale ruimte. De ruimte die we rondom ons zien bestaat echter uit vier dimensies, namelijk één tijdsdimensie en drie ruimtelijke dimensies. Opdat deze supergraviatietheorieën iets zinnigs zouden kunnen beschrijven moet er een manier bestaan om zes dimensies weg te werken zodat het op het eerste zicht lijkt dat de ruimte slechts vierdimensionaal is. Dit proces om over te gaan naar een ruimte met een lager aantal dimensies wordt dimensionele reductie genoemd.

Dimensionele reductie beeldt een bronruimte met d dimensies af op een ruimte met het aantal dimensies kleiner dan d. Alle fysica in de bronruimte wordt dan ook afgebeeld naar een wereld met een kleiner aantal dimensies. Eén methode om deze reductie te doen is aan de hand van Kaluza-Kleinreductie zoals in [9]. Deze reductie veronderstelt dat er een aantal ruimtelijke richtingen opgerold zijn met een zeer kleine straal. Alle velden zijn hierdoor op grote schaal ten opzichte van de grootte van deze dimensies ervan onafhankelijk.

Kaluza-Kleinreductie maakt geen nieuwe theorie maar herschrijft de theorie zodat het lijkt een theorie te zijn in een ruimte met dimensie van de gereduceerde ruimte. Het aantal vrijheidsgraden in de gereduceerde ruimte als de bronruimte blijft dezelfde. In Kaluza-Kleinreductie worden dan ook geen nieuwe vrijheidsgraden ingevoerd. Ook gaat geen informatie over de bronruimte verloren. Het is altijd mogelijk om de theorie terug omhoog te halen naar de bronruimte.

De constructie van deze velden verloopt zo zodat deze voldoen aan bepaalde transformatieregels zoals coördinatentransformaties en ijktransformaties. Deze transformaties komen tot stand uit de transformaties van de velden in de bronruimte. Zo reduceert de metriek in d dimensies tot een nieuwe metriek, een vector en een scalar in $d-1$ dimensies.

Door de reductie van de actie kan de actie worden herschreven in functie van de gereduceerde velden. Zo ontstaat er een nieuwe actie. De afhankelijkheid van de gecompactificeerde coördinaat is dan ook volledig verdwenen uit de actie. Deze gereduceerde actie bepaalt zo een effectieve theorie op de gereduceerde ruimte.

Deze reductie over één dimensie zal vervolgens concreet worden toegepast op de gemeenschappelijke sector van type IIA en type IIB supergravitatie in tien dimensies. Dit zal immers nog van pas komen om T-dualiteit aan te tonen. Hiervoor moeten de reductieregels voor de metriek en de Kalb-Ramondtensor worden nagegaan.

3.1 Reductie van de metriek

Neem een d-dimensionale ruimte met een dilaton ϕ erop. Veronderstel dat de richting y een compacte dimensie is met straal R en x_m met m van 0 tot en met $d-2$ de overige richtingen. Op het veld ϕ kan een Fourierexpansie op de coördidinaat x worden uitgevoerd. Dit geeft

$$\phi(x,y) = \sum_k \phi_k(x) e^{\frac{iky}{R}}. \tag{3.1}$$

Hierin zijn de functies $\phi_k(x)$ de verschillende Fouriercoëficiënten.

De bewegingsvergelijking van het dilaton in een vlakke ruimte kan worden bepaald aan de hand van

$$\nabla_\mu \partial^\mu \phi = \sum_k \left[\nabla_m \partial^m - \frac{k^2}{R^2} \right] \phi_k(x) e^{\frac{iky}{R}}. \tag{3.2}$$

Deze vergelijking zegt dat de functies ϕ_k elk kunnen worden geïnterpreteerd als een gereduceerd scalair veld op een ruimte met $d-1$ dimensies voor een deeltje met massa $\frac{k^2}{R^2}$. Alle andere velden zullen een gelijkaardig gedrag vertonen als ϕ. In dit werk zal enkel de massaloze modussen van gereduceerde velden worden beschouwd. Hiervoor moeten de velden onafhankelijk worden genomen van de coördinaat y.

Beschouw een metriek $g_{\mu\nu}(x)$ op de d-dimensionale ruimte. Doe een coördinatentransformatie die voldoet aan $\delta x_m = \tilde{\xi}_m(x)$ en $\delta y = \xi(x)$. Deze transformatie geeft de volgende transformatie op de componenten de metriek.

$$\delta g_{mn} = \tilde{\xi}^p \partial_p g_{mn} + \partial_m \tilde{\xi}^p g_{pn} + \partial_n \tilde{\xi}^p g_{mp} + 2\partial_{(m}\xi g_{n)y} \tag{3.3}$$

$$\delta g_{my} = \tilde{\xi}^p \partial_p g_{my} + \partial_m \tilde{\xi}^\rho g_{\rho y} + \partial_m \xi g_{yy} \tag{3.4}$$

$$\delta g_{yy} = \tilde{\xi}^p \partial_p g_{yy} \tag{3.5}$$

Uit deze vergelijkingen kan worden berekend dat $g_{mn} - \frac{g_{my}g_{ny}}{g_{yy}}$ voldoet aan een transformatie van een $(d-1)$-dimensionale tensor. Vergelijking (3.4) geeft dat $\frac{g_{my}}{g_{yy}}$ als de term $\partial_\mu \xi$ even buiten beschouwing wordt gelaten transformeert als een vector in $d-1$ dimensies. De component g_{yy} transformeert als een scalar (3.5) in $d-1$ dimensies.

Vectoren en tensoren moeten op de correcte manier transformeren (A.4). De transformatie van de metriek onder de vorige coördinatentransformatie (3.3-3.5) geeft aan hoe $d-1$ dimensionale objecten kunnen worden gedefinieerd die goed transformeren onder een coördinatentransformatie $\delta x_m = \tilde{\xi}_m$. Definieer in $d-1$ dimensies een tensor $\tilde{g}_{mn}$, een Kaluza-Kleinvector $\tilde{A}_m$ en een Kaluza-Kleinscalar $\tilde{k}$ op de volgende manier

$$\tilde{g}_{mn} = g_{mn} - \frac{g_{my}g_{ny}}{g_{yy}} \tag{3.6}$$

$$\tilde{A}_m = \frac{g_{mx}}{g_{yy}} \tag{3.7}$$

$$\tilde{k} = \sqrt{-g_{yy}} \tag{3.8}$$

De velden $\tilde{g}_{mn}$, $\tilde{A}_m$ en $\tilde{k}$ werden hierin zo gekozen zodat deze op de correcte manier transformeerden onder een coördinatentransformatie in $d-1$ dimensies. De Kaluza-Kleinscalar $\tilde{k}$ is zo genomen dat deze kan worden geïnterpreteerd als de grootte van de compacte richting x. De tensor $\tilde{g}_{mn}$ wordt gezien als de metriek op de gereduceerde ruimte.

De reductie (3.6-3.8) kan terug worden omhooggehaald van $(d-1)$-dimensionale velden naar de d-dimensionale metriek.

$$g_{mn} = \tilde{g}_{mn} - \tilde{k}^2 \tilde{A}_m \tilde{A}_n \tag{3.9}$$

$$g_{my} = \tilde{k}^2 \tilde{A}_m \tag{3.10}$$

$$g_{yy} = -\tilde{k}^2 \tag{3.11}$$

De metriek kan veel eenvoudiger worden gereduceerd in een vlakke ruimte. Lokaal kan een metriek altijd geschreven worden door een basisverandering tegenover de Minkowskimetriek $\eta_{\alpha\beta}$. Deze verandering gebeurd aan de hand van Vielbiens e^α_μ. Concreet gebeurd deze basisverandering als in vergelijking (A.8) en (A.9). De Vielbiens en inverse Vielbiens overeenkomend met de metriek (3.6-3.8) hebben de volgende vorm.

$$e^a_m = \begin{pmatrix} \tilde{e}^a_m & \tilde{k}\tilde{A}_m \\ 0 & \tilde{k} \end{pmatrix} \qquad e^m_a = \begin{pmatrix} \tilde{e}^m_\alpha & -\tilde{e}^n_a \tilde{A}_\nu \\ 0 & \frac{1}{\tilde{k}} \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

De vlakke metriek reduceert als volgt

$$\tilde{\eta}_{ab} = \eta_{ab}. \tag{3.13}$$

Deze reductie is veel eenvoudiger. Dit formalisme is bijgevolg een handig middel om dimensionale reductie op een eenvoudige manier aan te pakken.

Uit de coördinatentransformatie (3.4) blijkt dat bij de vector $\tilde{A}_m$ een extra transformatie mogelijk is die kan worden geïnterpreteerd als een ijktransformatie. Een coördinatentransformatie op de compactificatierichting $\delta y = \xi$ is dan een ijktransformatie in de gereduceerde ruimte. Deze ijktransformatie gegeven door

$$\delta_\xi \tilde{A}_m = \partial_m \xi \tag{3.14}$$

komt overeen met de groep U(1). Deze vector vertoont dus een gelijkaardig gedrag als het elektromagnetisch veld in vier dimensies. Het blijkt dat een vijfdimensionale ruimte met enkel gravitatie een vierdimensionale theorie kan leveren die zowel gravitatie als elektromagnetisme kan beschrijft. Toen Kaluza en Klein deze theorie ontwikkelden [5] was dat ook wat ze voor ogen hadden. Deze methode was dus in eerste instantie bedoeld om gravitatie en elektromagnetisme te unificeren. Er dook echter een onverwacht probleem op. Uit deze reductie ontstaat er een scalair veld waarvoor toen nog geen verklaring kon voor gevonden worden. Daarom bleef deze theorie een groot aantal jaren in de kast liggen. Toen bleek dat supersnarentheorieën enkel in tien dimensies konden bestaan en dat dimensionele reductie noodzakelijk was werd deze theorie terug bekeken vanuit een nieuwe invalshoek.

Definieer van de ijkvector $\tilde{A}_m$ een veldsterkte

$$\tilde{F}_{mn} = 2\partial_{[m}\tilde{A}_{n]} \tag{3.15}$$

die volledig invariant blijft onder de ijktransformatie op het ijkveld (3.14).

Vervolgens kan de Riccitensor bepaald door (A.15) $R_{\mu\nu}$ in d dimensies geschreven worden in functie van de Riccitensor in $d-1$ dimensies $R_{\mu\nu}$ en de gereduceerde metriek, Kaluza-Kleinveldsterkte en Kaluza-Kleinscalar.

$$\begin{aligned}
R_{yy} &= -\tilde{k}\tilde{\nabla}_p\tilde{\partial}^p\tilde{k} - \frac{\tilde{k}^4}{4}\tilde{F}^2 & (3.16)\\
R_{my} &= \frac{\tilde{k}^2}{2}\tilde{\nabla}^n\tilde{F}_{mn} - \tilde{k}\tilde{A}_m\tilde{\nabla}_n\tilde{\partial}^n\tilde{k} + \frac{3k}{2}\tilde{\partial}^n\tilde{k}\tilde{F}_{mn} - \frac{\tilde{k}^4}{4}\tilde{A}_m\tilde{F}^2 & (3.17)\\
R_{mn} &= \tilde{R}_{mn} + \frac{1}{\tilde{k}}\tilde{\nabla}_m\tilde{\partial}_n\tilde{k} - \tilde{k}\tilde{A}_m\tilde{A}_n\tilde{\nabla}_p\tilde{\partial}^p\tilde{k} + \frac{\tilde{k}^2}{2}\tilde{F}_{mp}\tilde{F}^p_n - \frac{\tilde{k}^4}{4}\tilde{A}_m\tilde{A}_n\tilde{F}^2 \\
&\quad + \tilde{k}^2\tilde{\partial}^p\tilde{F}_{p[m}\tilde{A}_{n]} - 3\tilde{k}\tilde{\partial}^p\tilde{k}\tilde{F}_{p(m}\tilde{A}_{n)} & (3.18)
\end{aligned}$$

Vervolgens kan de Ricciscalar worden berekend aan de hand van (A.16). Deze scalar R heeft in d dimensies de volgende waarde in functie van de Ricciscalar in $d-1$ dimensies R en de gereduceerde velden. gegeven door

$$R = \tilde{R} + \frac{2}{\tilde{k}}\tilde{\nabla}_m\tilde{\partial}^m\tilde{k} - \frac{\tilde{k}^4}{4}\tilde{F}^2. \tag{3.19}$$

Uit de reductie van de Ricciscalar komt duidelijk naar voren dat een theorie met een metriek een gereduceerde theorie kan opleveren die een metriek een scalair veld en een tweevorm veldsterkte omvat.

3.2 Reductie van de Kalb-Ramondtensor

De reductie van de Kalb-Ramondtensor $B_{\mu\nu}(x)$ verloopt op ongeveer dezelfde manier als bij de metriek. Neem hiervoor een tiendimensionale ruimte met een compacte richting y. De overige richtingen zullen worden aangeduid met x_m met m van 0 tot en met 8. Opnieuw wordt gekeken hoe deze tensor transformeert onder een coördinatentransformatie gegeven door $\delta x_m = \xi_m(x)$

en $\delta y = \xi(x)$. Daarnaast heeft de Kalb-Ramondtensor nog een ijktransformatie gegeven door $\delta_\Sigma B_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}\Sigma_{\nu]}(x)$ met $\Sigma_\nu(x) = (\Sigma_m(x), \Sigma(x))$. Dit geeft de volgende transformatie op de Kalb-Ramondtensor.

$$\begin{aligned} \delta B_{mn} &= \tilde{\xi}^p \partial_p B_{mn} + \partial_m \tilde{\xi}^p B_{pn} + \partial_n \tilde{\xi}^p B_{mp} - 2\partial_{[m}\xi B_{n]y} + 2\partial_{[m}\Sigma_{n]} && (3.20) \\ \delta B_{my} &= \tilde{\xi}^p \partial_p B_{my} + \partial_m \tilde{\xi}^p B_{py} + \partial_m \Sigma && (3.21) \end{aligned}$$

Hieruit kan worden verkregen dat als Σ constant is $B_{mn} - \frac{g_{y[m}B_{n]y}}{g_{yy}}$ transformeert als een tensor en de componenten $B_{\mu x}$ als een vector in $d-1$ dimensies.

Definieer de volgende reductie van de tiendimensionale Kalb-Ramondtensor $B_{\mu\nu}$ naar de gereduceerde Kalb-Ramondtensor $\tilde{B}_{mn}$ en Kalb-Ramondvector $\tilde{B}_m$.

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mn} &= B_{mn} - \frac{g_{y[m}B_{n]y}}{g_{yy}} && (3.22) \\ \tilde{B}_m &= B_{mx} && (3.23) \end{aligned}$$

Onder een coördinatentransformatie $\delta x_m = \tilde{\xi}_m$ in de gereduceerde ruimte zullen $\tilde{B}_{mn}$ en $\tilde{B}_m$ correct transformeren.

Deze transformatie kan als volgt terug worden omhooggehaald.

$$\begin{aligned} B_{mn} &= \tilde{B}_{mn} - \tilde{A}_{[m}\tilde{B}_{n]} && (3.24) \\ B_{\mu x} &= \tilde{B}_m && (3.25) \end{aligned}$$

De coördinatentransformatie op de te compactificeren coördinaat $\delta y = \xi$ en $\delta x_\mu = 0$ en de ijktransformatie $\delta_\Sigma B_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}\Sigma_{\nu]}$ geven dit de volgende transformaties op de gereduceerde Kalb-Ramondvector en Kalb-Ramondtensor.

$$\begin{aligned} \delta_{\xi\Sigma} B_{mn} &= 2\partial_{[m}\Sigma_{n]} + A_{[m}\partial_{n]}\Sigma + B_{[m}\partial_{n]}\xi && (3.26) \\ \delta_\Sigma B_m &= \partial_m \Sigma && (3.27) \end{aligned}$$

Deze transformaties kunnen worden geïnterpreteerd als ijktransformaties op deze ijkvelden. Hieruit blijkt dat de Kalb-Ramondvector transformeert onder $U(1)$. De transformatie is echter anders als bij de Kaluza-Kleinvector. Bij de Kaluza-Kleinvector was de parameter van de transformatie immers afkomstig van een coördinatentransformatie op de gereduceerde coördinaat. De parameter bij de Kalb-Ramondvector komt van de ijktransformatie van de Kalb-Ramondtensor in tien dimensies. De ijktransformatie van de Kalb-Ramondtensor in negen dimensies wordt zowel bepaald door een coördinatentransformatie op de gecompactificeerde coördinaat als de ijktransformatie op de Kalb-Ramondtensor in tien dimensies.

De Kalb-Ramondvector kan vervolgens worden aangewend om een veldsterkte $\tilde{G}_{mn}$ te definiëren. Deze veldsterkte wordt geconstrueerd als de differentiaal van dit veld.

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}\tilde{B}_{\nu]} \qquad (3.28)$$

Deze veldsterkte is invariant onder de ijktransformatie (3.27).

De veldsterkte van de Kalb-Ramondtensor in tien dimensies H kan worden gereduceerd naar een veldsterkte in negen dimensies $\tilde{H}$. Deze veldsterkte wordt gedefinieerd als de projectie van de Kalb-Ramondveldsterkte in een vlakke basis bekomen door de Vielbiens (3.12) op de niet gereduceerde richtingen.

$$\tilde{e}_a^m \tilde{e}_b^n \tilde{e}_c^p \tilde{H}_{mnp} = e_a^\mu e_b^\nu e_c^\rho H_{\mu\nu\rho} \qquad (3.29)$$

Als dit wordt uitgewerkt geeft dit de volgende uitdrukking voor de veldsterkte.

$$\tilde{H}_{mnp} = 3\left(\partial_{[m}\tilde{B}_{np]} - \partial_{[m}\tilde{A}_n\tilde{B}_{p]} - \partial_m\tilde{A}_{[n}\tilde{B}_{p]}\right) \qquad (3.30)$$

Deze definitie van de Kalb-Ramondveldsterkte is invariant onder de ijktransformaties in vergelijkingen (3.14), (3.26) en (3.27).

Ook de reductie van H in functie van de gereduceerde velden kan gevonden worden aan de hand van het Vielbienformalisme. Dit geeft

$$H^2 = \tilde{H}^2 - \frac{3}{\tilde{k}^2}\tilde{G}^2. \tag{3.31}$$

Merk op dat de reductie helemaal kan worden geschreven in functie van $\tilde{H}$, $\tilde{G}$ en $\tilde{k}$. Eveneens toont dit aan dat $\tilde{H}$ en $\tilde{G}$ goed gedefinieerd zijn.

3.3 Reductie van de gemeenschappelijke sector

De gemeenschappelijke sector van de actie van type IIA en type IIB supergravitatie in het stringframe is gegeven door

$$\mathcal{S}_{\mathrm{C}} = \int d^9x dy \sqrt{|g|} e^{-2\phi} \left[R - 4(\partial\phi)^2 + \frac{1}{12} H^2 \right]. \tag{3.32}$$

Vervolgens kan betracht worden kan deze actie te herschrijven in functie van de nieuwe gereduceerde negendimensionale velden. Dit gebeurt door de Ricciscalar (3.19) en de Kalb-Ramondveldsterkte (3.31) in te vullen in de actie. De reductie van het dilaton is echter nog niet vastgelegd. Beschouw daarom de reductie van de wortel van de determinant van de metriek gegeven door

$$\sqrt{|g|} = \tilde{k}\sqrt{|\tilde{g}|}. \tag{3.33}$$

De voorfactor van de gemeenschappelijke sector wordt na de reductie zo gekozen zodat deze de vorm $\sqrt{|g|}e^{-2\phi}$ heeft. Dan reduceert de actie (3.32) in stringframe naar een actie die zich terug in stringframe bevindt. Dit geeft een verband tussen de voorfactor van de gemeenschappelijke sector in tien dimensies $\sqrt{|g|}e^{-2\phi}$ en deze in negen dimensies.

$$\sqrt{|g|}e^{-2\phi} = \sqrt{|\tilde{g}|}e^{-2\tilde{\phi}} \tag{3.34}$$

Het gereduceerde dilaton wordt vervolgens zo gekozen zodat de vorige vergelijking voldaan is. Dit geeft de definitie voor het gereduceerde dilaton die er uitziet als

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{4}\ln|g_{xx}|. \tag{3.35}$$

Dit dilaton in negen dimensies kan terug worden omhooggehaald naar tien dimensies. Dit geeft dat

$$\phi = \tilde{\phi} + \frac{1}{2}\ln\tilde{k}. \tag{3.36}$$

In de actie in tien dimensies kunnen de gereduceerde velden nu expliciet worden ingevuld. Dit geeft dan een tiendimensionale actie in functie van negendimensionale grootheden. Het blijkt dat deze actie kan geschreven worden als een product van iets dat kan worden geïnterpreteerd als een actie in negen dimensies $\mathcal{S}_{\mathrm{C}}$ en een integraal over de gereduceerde richting.

$$\mathcal{S}_{\mathrm{C}} = \int dy \tilde{\mathcal{S}}_C = 2\pi\tilde{\mathcal{S}}_C \tag{3.37}$$

Hierin is

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{C}} = \int d^9x \sqrt{|\tilde{g}|} e^{-2\tilde{\phi}} \left[\tilde{R} - 4\left(\tilde{\partial}\tilde{\phi}\right)^2 + \left(\tilde{\partial}\ln\tilde{k}\right)^2 + \frac{1}{12}\tilde{H}^2 - \frac{\tilde{k}^2}{4}\tilde{F}^2 - \frac{1}{4\tilde{k}^2}\tilde{G}^2 \right]. \tag{3.38}$$

Een theorie in tien dimensies met gravitatie, een dilaton en een Kalb-Ramondveld levert dus in negen dimensies een theorie met opnieuw gravitatie, een dilaton en een Kalb-Ramondveld en een extra scalair veld en twee ijkvectorvelden.

3.4 Reductie van de Ramond-Ramondvelden

Naast de gemeenschappelijke sector hebben de supergravitatietheorieën nog Ramond-Ramondvelden. Deze velden kunnen gereduceerd worden onder dimensionele reductie. De reductie van een r-vorm ijkveld $C_{(r)}$ levert een nieuw r-vorm ijkveld $\tilde{C}_{(r)}$ en een $(r-1)$-vorm ijkveld $C_{(r-1)}$ op. Deze reductie loopt gelijkaardig aan de reductie van het Kalb-Ramondveld. De reductie van deze Ramond-Ramondijkvelden verloopt als volgt [9].

$$\tilde{C}_{m_1\ldots m_r} = C_{m_1\ldots m_r} - (-)^{r+1} r \frac{g_{y[m_1} C_{m_2\ldots m_r]y}}{g_{yy}} \tag{3.39}$$

$$\tilde{C}_{m_1\ldots m_{r-1}} = (-)^p C_{m_1\ldots m_{r-1}y} \tag{3.40}$$

Deze gereduceerde velden $\tilde{C}_{(r)}$ en $\tilde{C}_{(r-1)}$ kunnen opnieuw worden omhooggehaald naar een r-vorm ijkveld $C_{(r)}$.

$$C_{m_1\ldots m_r} = \tilde{C}_{m_1\ldots m_r} + (-)^{r+1} r \tilde{A}_{[m_1} \tilde{C}_{m_2\ldots m_r]} \tag{3.41}$$

$$C_{m_1\ldots m_{r-1}y} = (-)^p \tilde{C}_{m_1\ldots m_{r-1}} \tag{3.42}$$

Een r-vorm veldsterkte in tien dimensies levert in negen dimensies een nieuwe r-vorm veldsterkte en een $(r-1)$-vorm veldsterkte. Dan zal ook een nulvorm veldsterkte of equivalent een kosmologische constante in tien dimensies een kosmologische constante met dezelfde waarde in negen dimensies. Uit (3.39-3.40) kan worden verwacht dat de kosmologische constante in de bronruimte en in de gereduceerde ruimte allebei dezelfde waarde zullen hebben. Als dit principe wordt veralgemeend zal een kosmologische constante in een bronruimte met d dimensies na Kaluza-Kleinreductie opnieuw een kosmologische constante opleveren op een gereduceerde ruimte met een waarde die opnieuw hetzelfde is. Om het probleem van de kosmologische constante op te lossen kan worden voorgesteld dat de kosmologische constante in de d-dimensionale ruimte zeer groot is zoals de kwantumveldentheorie deze voorspeld en de gereduceerde kosmologische constante zeer klein zoals die wordt waargenomen in onze wereld. De gereduceerde kosmologische constante heeft een waarde die dezelfde grootte heeft als deze in d dimensies. Hier blijkt dat Kaluza-Kleinreductie is dus niet in staat om dit probleem op deze manier op te lossen.

In dit hoofdstuk is aangetoond hoe de gemeenschappelijke sector kan worden gereduceerd van tien dimensies naar negen dimensies. Hiervoor wordt aangenomen dat één richting compact is. De metriek in tien dimensies reduceerde naar een nieuwe metriek in negen dimensies, een vector en een scalar. Deze Kalb-Ramondvector heeft een U(1)*-ijktransformatie. De reductie van de Kalb-Ramondtensor geeft een negendimensionale Kalb-Ramondtensor en een Kalb-Ramondvector. De gereduceerde Kalb-Ramondvector heeft eveneens een* U(1)*-ijktransformatie. De gemeenschappelijke sector in tien dimensies te reduceert naar een nieuwe actie in negen dimensies. Bovendien is deze gereduceerde actie invariant onder de ijktransformaties van de gereduceerde velden.*

Kaluza-Kleinreductie reduceert een kosmologische constante naar een kosmologische constante die dezelfde grootte heeft als die in de bronruimte. Deze reductie kan daarom ook geen oplossing geven voor het probleem van de kosmologische constantes door een grote kosmologische constante te nemen in de bronruimte, wat overeenkomt met wat wordt verwacht uit kwantumveldentheorie, en een kleine kosmologische constante, zoals deze wordt waargenomen in onze wereld.

4 Dualiteiten

Tussen en in de verschillende supergravitatietheorieën blijken er verschillende verbanden te bestaan gegeven door dualiteiten. Hierdoor is het mogelijk om van de ene oplossing naar een andere over te gaan. Eén van die dualiteiten is T-dualiteit. Deze dualiteit legt het verband tussen type IIA supergravitatie en type IIB supergravitatie door de grootte van een richting te inverteren. Binnen type IIB supergravitatie bestaat er een dualiteit, ook wel S-dualiteit genaamd, die de koppelingsconstante van de snaar inverteert. Tenslotte kan Hodgedualiteit worden aangewend om een r-vorm veldsterkte te transformeren in een $(d-r)$-vorm veldsterkte. In tegenstelling tot T-dualiteit en S-dualiteit, die een fysische interpretatie hebben, is Hodgedualiteit in essentie een wiskundige dualiteit die een verband legt tussen twee vormvelden.

4.1 T-dualiteit

Door T-dualiteit kunnen verschillende achtergronden aan elkaar worden verbonden. Concreet inverteert het de grootte van een compacte richting. Door deze verandering van achtergrond kunnen type IIA en type IIB supergravitatie aan elkaar worden gerelateerd.

Beschouw de gereduceerde gemeenschappelijke sector van type IIA en type IIB supergravitatie in negen dimensies.

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{C}} = \int d^9x\sqrt{|\tilde{g}|}e^{-2\tilde{\phi}}\left[\tilde{R} - 4\left(\tilde{\partial}\tilde{\phi}\right)^2 + \left(\tilde{\partial}\ln\tilde{k}\right)^2 + \frac{1}{12}\tilde{H}^2 - \frac{\tilde{k}^2}{4}\tilde{F}^2 - \frac{1}{4\tilde{k}^2}\tilde{G}^2\right] \tag{4.1}$$

Deze actie heeft een aantal symmetrieën. Onder andere de groep $\mathrm{O}(1,1)$ heeft een representatie die een symmetrie vormt van deze actie maar deze symmetrie is in deze vorm niet direct duidelijk. Om deze symmetrie duidelijker te maken wordt de actie eerst herschreven in een vorm die expliciet invariant is onder $\mathrm{O}(1,1)$.

Definieer de metriek

$$\tilde{\eta}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Deze metriek blijft invariant onder de groep $\mathrm{O}(1,1)$ of anders gezegd geldt voor alle operatoren $\mathcal{T}^k{}_i$ in de groep $\mathrm{O}(1,1)$ dat

$$\tilde{\eta}_{ij} = \mathcal{T}^k{}_i\mathcal{T}^l{}_j\tilde{\eta}_{kl}. \tag{4.3}$$

De Kaluza-Kleinvector A_μ en de Kalb-Ramondvector B_μ kunnen worden samengenomen in een doublet $\mathcal{A}^i_\mu$ die er uit ziet als

$$\tilde{\mathcal{A}}^i_m = \begin{pmatrix} \tilde{A}_m \\ \tilde{B}_m \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Allebei de componenten van $\mathcal{A}^i_\mu$ zijn een ijkveld. Daarom kan er een veldsterkte $\mathcal{F}^i_{\mu\nu}$ worden gedefinieerd van dit doublet die voldoet aan

$$\tilde{\mathcal{F}}^i_{mn} = 2\partial_{[m}\tilde{\mathcal{A}}^i_{n]} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{mn} \\ \tilde{G}_{mn} \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Van de Kaluza-Kleinscalar k kan een nieuwe tensor $\mathcal{M}_{ij}$ worden geconstrueerd de ruimte van $\mathrm{O}(1,1)$ waarvoor geldt

$$\tilde{\mathcal{M}}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{k}^2} & 0 \\ 0 & \tilde{k}^2 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Het ijkveld $\mathcal{A}^i_\mu$ en de tensor $\mathcal{M}_{ij}$ zullen transformeren onder een operator $\mathcal{T}^k{}_i$ van de groep $\mathrm{O}(1,1)$. Deze transformatie gebeurd als volgt.

$$\tilde{\mathcal{A}}^i_\mu \mapsto \mathcal{T}_k{}^i\tilde{\mathcal{A}}^k_\mu \tag{4.7}$$

$$\tilde{\mathcal{M}}_{ij} \mapsto \mathcal{T}^k{}_i\mathcal{T}^l{}_j\tilde{\mathcal{M}}_{kl} \tag{4.8}$$

De gereduceerde gemeenschappelijke sector van type IIA en type IIB kan worden geformuleerd in functie van het veld $\mathcal{F}^i_{\mu\nu}$ en de tensor $\mathcal{M}_{ij}$.

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{C}} = \int d^9x\sqrt{|\tilde{g}|}e^{-2\phi}\left[\tilde{R} - 4\left(\tilde{\partial}\tilde{\phi}\right)^2 + \frac{1}{8}\partial_m\tilde{\mathcal{M}}_{ij}\tilde{\partial}^m\tilde{\mathcal{M}}^{ij} + \frac{1}{12}\tilde{H}^2 - \frac{1}{4}\left(\tilde{\mathcal{M}}^{-1}\right)_{ij}\tilde{\mathcal{F}}^i_{\mu\nu}\tilde{\mathcal{F}}^{j\mu\nu}\right] \quad (4.9)$$

Hierin is $\left(\tilde{\mathcal{M}}^{-1}\right)_{ij}$ de inverse van $\tilde{\mathcal{M}}_{ij}$ en $\tilde{\mathcal{M}}^{jk}$ is omhooggehaald met de inverse metriek $\tilde{\eta}_{ij}$ zodat $\tilde{\mathcal{M}}^{ij} = \tilde{\eta}_{ik}\tilde{\eta}_{il}\tilde{\mathcal{M}}_{kl}$.

Deze vorm van de actie staat is expliciet invariant onder de transformaties van $\mathrm{O}(1,1)$ gegeven door vergelijkingen (4.7) en (4.8).

De groep $\mathrm{O}(1,1)$ kan worden opgesplitst als een direct product van drie andere groepen.

$$\mathrm{O}(1,1) = \mathrm{SO}^+(1,1) \otimes \mathbf{Z}_2^{(S)} \otimes \mathbf{Z}_2^{(T)} \quad (4.10)$$

Hierin is $\mathrm{SO}^+(1,1)$ de groep van de matrices $\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Lambda} \end{pmatrix}$ met Λ een positief reëel getal. De groep $\mathbf{Z}_2^{(S)}$ wordt voortgebracht door de matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{Z}_2^{(T)}$ door $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Elk van deze subgroepen kan door de gereduceerde velden terug omhoog te halen gezien worden als een operatie op de velden van de bronruimte. Deze omhooggehaalde transformatie kan dan worden gezien als een coördinatentransformatie voor $\mathrm{SO}^+(1,1)$ en $\mathbf{Z}_2^{(S)}$ en als de generator van T-dualiteit in het geval van $\mathbf{Z}_2^{(T)}$.

De groep $\mathrm{SO}^+(1,1)$ De transformatie $\mathrm{SO}^+(1,1)$ kan worden toegepast op de vectoren A_μ en B_μ en de Kaluza-Kleinvector k door vergelijkingen (4.7) en (4.8) uit te werken voor de operator $\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Lambda} \end{pmatrix}$ met Λ een positieve reële parameter. Dit geeft de volgende transformaties.

$$\tilde{A}_m \mapsto \Lambda\tilde{A}_m \qquad \tilde{B}_m \mapsto \frac{\tilde{B}_m}{\Lambda} \qquad \tilde{k} \mapsto \frac{\tilde{k}}{\Lambda} \quad (4.11)$$

Als de verschillende gereduceerde velden terug worden omhooggehaald aan de hand van vergelijkingen (3.9-3.11), (3.36) en (3.24-3.25) kunnen terug velden in de bronruimte worden bekomen. Deze velden zijn echter niet meer dezelfde als de velden voor de reductie. Door de transfomatie in de gereduceerde ruimte is er ook na het omhooghalen een transformatie gebeurd in de bronruimte. De velden in de bronruimte hebben dan de volgende transformatie ondergaan.

$$\begin{array}{lll} g_{mn} \mapsto g_{mn} & & B_{mn} \mapsto B_{mn} \\ g_{my} \mapsto \frac{g_{my}}{\Lambda} & & B_{my} \mapsto \frac{B_{my}}{\Lambda} \\ g_{yy} \mapsto \frac{g_{yy}}{\Lambda^2} & & \phi \mapsto \phi - \frac{1}{2}\ln\Lambda \end{array} \quad (4.12)$$

Deze transformatie van de componenten van de velden komt in de bronruimte simpelweg overeen met een coördinatentransformatie. Neem deze transformatie als in de volgende vergelijkingen.

$$x^\mu \mapsto x^\mu \qquad x \mapsto \Lambda x \quad (4.13)$$

Deze coördinatentransformatie (4.13) en transformatie (4.12) zijn equivalent. Een transformatie onder de groep in negen dimensies wordt dus in tien dimensies een coördinatentransformatie.

De groep $\mathbf{Z}_2^{(S)}$ De groep $\mathbf{Z}_2^{(S)}$ geeft de volgende transformatie op de gereduceerde velden.

$$\tilde{A}_m \mapsto -\tilde{A}_m \qquad \tilde{B}_m \mapsto -\tilde{B}_m \qquad \tilde{k} \mapsto \tilde{k} \quad (4.14)$$

Zoals bij de uitwerking van de groep $SO^+(1,1)$ kan $\mathbf{Z}_2^{(S)}$ ook worden gezien als een transformatie op de bronruimte. Deze transformatie wordt dan als volgt gegeven.

$$\begin{array}{lll} g_{mn} & \mapsto & g_{mn} \\ g_{my} & \mapsto & -g_{my} \\ g_{yy} & \mapsto & g_{yy} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} B_{mn} & \mapsto & B_{mn} \\ B_{\mu x} & \mapsto & -B_{my} \\ \phi & \mapsto & \phi \end{array} \tag{4.15}$$

Deze transformatie komt opnieuw overeen met een coördinatentransformatie in de bronruimte.

$$x_\mu \mapsto x_\mu \qquad x \mapsto -x \tag{4.16}$$

De groep $\mathbf{Z}_2^{(T)}$ De transformatie van groep $\mathbf{Z}_2^{(T)}$ kan opnieuw expliciet worden neergeschreven in functie van A_μ, B_μ en k.

$$\tilde{A}_m \mapsto \tilde{B}_m \qquad \tilde{B}_m \mapsto \tilde{A}_m \qquad \tilde{k} \mapsto \frac{1}{\tilde{k}} \tag{4.17}$$

Deze transformatie wijkt echter af van deze van $SO^+(1,1)$ en $\mathbf{Z}_2^{(T)}$ omdat het de velden A_μ en B_μ omwisselt in plaats van A_μ en B_μ in functie te zetten van zichzelf. Deze transformatie geeft dan aanleiding tot de volgende transformaties op de velden in de bronruimte na het terug omhooghalen.

$$\begin{array}{lll} g_{mn} & \mapsto & g_{mn} - \frac{g_{my}g_{yn}+B_{my}B_{yn}}{g_{yy}} \\ g_{my} & \mapsto & B_{my} \\ g_{yy} & \mapsto & \frac{1}{g_{yy}} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} B_{\mu\nu} & \mapsto & B_{mn} - \frac{g_{y[m}B_{n]y}}{g_{yy}} \\ B_{my} & \mapsto & \frac{g_{my}}{g_{yy}} \\ \phi & \mapsto & \phi - \frac{1}{2}\ln|g_{yy}| \end{array} \tag{4.18}$$

Deze transformatie is na het omhooghalen echter niet meer te zien als een coördinatentransformatie in de bronruimte. Dit is duidelijk een totaal andere symmetrie dan deze bekomen door $SO^+(1,1)$ en $\mathbf{Z}_2^{(S)}$.

Door deze transformatie wordt de Kaluza-Kleinscalar in negen dimensies k geïnverteerd. Deze scalar kan gezien als een maat voor de grootte van de compactifiseringsrichting. T-dualiteit compactificeert dus een theorie over een richting met straal R en haalt deze terug omhoog over een richting met een grootte bepaald door de straal $\frac{1}{R}$. De grootte van een compacte richting wordt door T-dualiteit geïnverteerd.

Het doet er niet toe of de straal van een compactificatierichting nu groot of klein wordt genomen tegenover de grootte van de snaren in supersnarentheorie. T-dualiteit zorgt ervoor dat het telkens mogelijk is de grootte ervan te inverteren. Zo wordt de ruimte, die de achtergrond vormt waarin de velden worden beschouwd, door T-dualiteit omgevormd.

De componenten van metriek en de Kalb-Ramondtensor worden door T-dualiteit dooreengehaald. Zo worden bijvoorbeeld de componenten g_{my} en B_{my} op de factor $\frac{1}{g_{yy}}$ na omgewisseld. Hierdoor is het mogelijk dat een puur gravitationele oplossing door T-dualiteit getransformeerd wordt naar een oplossing met een Kalb-Ramondtensor die niet nul is. In een oplossing met een metriek die geen componenten verschillend van nul heeft buiten de diagonaal en een Kalb-Ramondtensor verschillend van nul kunnen na T-dualiteit de componenten van de metriek weg van de diagonaal wel verschillend van nul zijn.

De velden van de gemeenschappelijke sector worden terug door de T-dualiteitsregels (4.18) afgebeeld op velden van de gemeenschappelijke sector. Nu kan T-dualiteit ook worden toegepast op de Ramond-Ramondijkvelden van type IIA en type IIB supergravitatie. Hiervoor moeten deze velden eerst worden gereduceerd via vergelijkingen (3.39-3.40). De T-duale ijkvelden kunnen dan worden bekomen door na een $\mathbf{Z}_2^{(T)}$-transformatie de gereduceerde ijkvelden terug omhoog te halen via (3.41-3.42). Een r-vorm ijkveld zal na deze procedure niet terug worden afgebeeld een r-vorm. Dit ijkveld transformeert naar een $(r-1)$-vorm ijkveld en een $(r+1)$-vorm ijkveld. Het is echter zo dat type IIA enkel oneven vormen en type IIB enkel even vormen heeft als Ramond-Ramondijkvelden.

De Ramond-Ramondvormen van type IIA en type IIB worden dus door T-dualiteit op elkaar afgebeeld. Als T-dualiteit wordt toegepast op de volledige actie van type IIA supergravitatie dan gaat deze over naar de actie van type IIB. Deze twee theorieën en hun oplossingen worden zo door T-dualiteit aan elkaar verbonden.

4.2 S-dualiteit

Type IIB supergravitatie heeft intern nog een dualiteit. Zoals T-dualiteit is S-dualiteit of 'strong-weak coupeling duality' gebaseerd op een symmetrie van de actie van type IIB. De actie van type IIB blijft invariant onder een representatie van $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Beschouw de actie

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(e)}_{\mathrm{IIB}} &= \int d^{10}x \left\{ \sqrt{|g^{(e)}|} \left[R^{(e)} + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{12}e^{-\phi}H^2 + \frac{1}{2}e^{2\phi}F^2_{(1)} + \frac{1}{12}e^{\phi}F^2_{(3)} + \frac{1}{240}F^2_{(5)} \right] \right. \\ & \left. -\frac{1}{192}\epsilon\partial C_{(4)}\partial C_{(2)}B \right\} \end{aligned} \tag{4.19}$$

van type IIB supergravitatie in tien dimensies in het Einsteinframe.

Voor een operator $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ wordt de volgende representatie gedefinieerd op de Kalb-Ramondtensor en de Ramond-Ramondijkvelden [9].

$$\begin{array}{rcl} \lambda & \mapsto & \frac{a\lambda+b}{c\lambda+d} \\ H & \mapsto & \left(cC_{(0)}+d\right)H + cF_{(3)} \\ F_{(3)} & \mapsto & \frac{1}{|c\lambda+d|^2}\left[\left(cC_{(0)}+d\right)F_{(3)} - ce^{-2\phi}H\right] \\ C_{(4)} & \mapsto & C_{(4)} - 3\left(acC_{(2)}C_{(2)} + 2bcBC_{(2)} + bdBB\right) \end{array} \tag{4.20}$$

Hierin wordt aangenomen dat $\lambda = C_0 + ie^{-\phi}$.

Als de transformatie (4.20) wordt uitgevoerd op actie (4.19) dan gaat deze terug naar zichzelf. De actie van type IIB dus is in het Einsteinframe invariant onder deze transformatie.

Als $C_{(0)} = 0$, $b = -c = 1$ en $a = d = 0$ worden genomen in transformatie (4.20) transformeren de overige velden als volgt.

$$\begin{array}{rclcrcl} B & \mapsto & -C_{(2)} & \qquad & C_{(2)} & \mapsto & B \\ \phi & \mapsto & -\phi & & C_{(4)} & \mapsto & C_{(4)} + 6BC_{(2)} \end{array} \tag{4.21}$$

Deze transformatie genereert S-dualiteit. De koppelingsconstante e^{ϕ} wordt duidelijk door deze transformatie geïnverteerd. Een veld dat zwak koppelt aan het dilaton zal plots sterk koppelen en een veld dat sterk koppelt zwak. Eveneens worden de velden B en $C_{(2)}$ omgewisseld. Vermits het veld H koppelt met een factor $e^{-\phi}$ en $F_{(3)}$ met e^{ϕ} koppelt aan het dilaton in actie (4.19) en het dilaton een tegengesteld teken krijgt wordt dan ook verwacht dat deze velden worden omgewisseld om de actie invariant te laten. Tenslotte is er een transformatie op $C_{(4)}$ die de effecten van de omwisseling van B en $C_{(2)}$ compenseert zodat de veldsterkte $F_{(3)}$ invariant blijft onder S-dualiteit.

Omdat S-dualiteit het teken van het dilaton omdraait wordt de koppelingsconstante in supersnarentheorie $\mathrm{g} = e^{\phi}$ door deze transformatie vervangen door zijn inverse $\mathrm{g}^{-1} = e^{-\phi}$. Perturbatieve supersnarentheorie is opgebouwd rond een reeksontwikkeling in de koppelingsconstante g. Om deze reeks convergent te maken moet g dus klein genoeg zijn. S-dualiteit laat toe om van een grote koppelingsconstante, die geen perturbatieve theorie toelaat, te inverteren tot een kleine koppelingsconstante. Dit laat toe door S-dualiteit toe te passen op een perturbatieve supersnarentheorie iets te zeggen over niet perturbatieve supersnarentheorieën.

4.3 Hodgedualiteit

Tenslotte kan Hodgedualiteit worden beschouwd. Deze dualiteit zegt dat een actie van een r-vorm veldsterkte in een supergravitatietheorie kan worden hergeformuleerd tot een andere actie van een $(d-r)$-vorm veldsterkte die dezelfde theorie geeft.

Beschouw een veldsterkte $F_{(r)}$. De actie van dit veld wordt opgesteld zodat deze een veralgemening is van de actie van een vormveld als van het Kalb-Ramondveld of een Ramond-Ramondveld in type IIA en type IIB supergravitatie (2.10-2.11). Er wordt dan ook een veralgemening opgesteld van deze actie die de volgende vorm heeft.

$$\mathcal{S} = \int dx \sqrt{|g|} \left[R + \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{(-)^{r+1}}{2r!} e^{a\phi} F_{(r)}^2 \right] \tag{4.22}$$

Hierin is a de sterkte van de koppeling van het veld met het dilaton ϕ.

Het veld $F_{(r)}$ wordt als een onafhankelijk veld behandeld dat niet noodzakelijk kan geschreven worden als de differentiaal van een ijkveld. Bij deze actie wordt een Lagrangemultiplicator $C_{(d-r-1)}$ toegevoegd. De actie met $C_{(d-r-1)}$ wordt

$$\mathcal{S} \quad = \quad \int dx \sqrt{|g|} \left[R + \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{(-)^{r+1}}{2r!} e^{a\phi} F_{(r)}^2 + \frac{(-)^{\frac{d}{2}+r+1}}{r!(d-r)!} \epsilon \hat{C} \partial F_{(r)} \right]. \tag{4.23}$$

Hierin is de extra term al genormaliseerd met een factor $\frac{(-)^{\frac{d}{2}+r+1}}{r!(d-r)!}$. Deze normalisatie zal later nog van pas komen. De bewegingsvergelijking voor $C_{(d-r-1)}$ geeft dat $F_{(r)}$ moet voldoen aan de Bianchi-identiteit

$$\partial_{[\mu_1} F_{\mu_2 \dots \mu_{r+1}]} = 0. \tag{4.24}$$

Als deze conditie op $F_{(r)}$ wordt ingevuld in de actie met een Lagrangemuliplicator (4.27) vereenvoudigd deze tot actie (4.22). Deze twee acties zijn bijgevolg equivalent.

De Lagrangemultiplicator $\hat{C}_{(d-r-1)}$ kan worden beschouwd als een ijkveld vermits deze multiplicator de actie (4.27) invariant laat onder een ijktransformatie $\hat{C}_{\mu_1 \dots \mu_{d-r-1}} = \partial[\mu_1 \hat{\Sigma}_{\mu_2 \dots \mu_{d-r-1}]}$. Definieer dan de veldsterkte van deze multiplicator als de differentiaal ervan.

$$\hat{F}_{\mu_1 \dots \mu_{d-r}} = \partial_{[\mu_1} \hat{C}_{\mu_2 \dots \mu_{d-r}]} \tag{4.25}$$

Op de actie van dit systeem (4.27) kan het variatieprincipe worden toegepast voor het veld $F_{(r)}$. De vergelijking die dan ontstaat levert een dualiteit die de veldsterkte $F_{(r)}$ verbindt met de veldsterkte van de Lagrangemultiplicator $\hat{F}_{(d-r)}$. Deze dualiteit legt tussen deze veldsterktes een relatie die er uitziet als

$$F^{\mu_1 \dots \mu_r} = \frac{(-)^{\frac{d}{2}}}{(d-r)!} \frac{e^{-a\phi}}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_d} \hat{F}_{\mu_{r+1} \dots \mu_d}. \tag{4.26}$$

De veldsterkte $\hat{F}_{(d-r)}$ wordt dan ook de Hodgeduale van de veldsterkte $F_{(r)}$ genoemd. Deze Hodgedualiteit relateert een r-vorm veldsterkte aan een $(d-r)$-vorm veldsterkte. Een r-vorm veldsterkte heeft net het zelfde aantal vrijheden als een $(d-r)$-vorm veldsterkte. Dus maakt deze dualiteit geen nieuw onafhankelijk veld maar herschikt de elementen het r-vorm veldsterkte als een $(d-r)$-vorm.

De componenten van de veldsterkte van het type $F_{ti_1 \dots i_{r-1}}$, met $i_1 \dots i_{r-1}$ willekeurige ruimtelijke richtingen, noemt men meestal de elektrische componenten van dit veld, en een oplossing waarin enkel deze componenten van het veld verschillen van nul zijn elektrisch geladen ten opzichte van dit veld. Veldsterktes van het type $F_{i_1 \dots i_r}$, met $i_1 \dots i_r$ ruimtelijke richtingen, zijn de magnetische componenten van een veld. De oplossingen met enkel deze componenten verschillend van nul zijn dan ook magnetisch geladen ten opzichte van dit veld. Hodgedualiteit identificeert de elektrische componenten van de veldsterkte met de magnetische van zijn duale en de magnetische met de elektrische van zijn duale. Daaruit blijkt ook dat als een veld elektrisch geladen is tegenover een veldsterkte het in zijn Hodgeduale formulering magnetisch geladen is en vica versa.

Als in de actie de relatie (4.26) expliciet wordt ingevuld kan de actie kan worden herschreven in functie van de Hodgeduale van het r-veld. Na uitwerking geeft dit de volgende uitdrukking.

$$\mathcal{S} = \int dx \sqrt{|g|} \left[R + \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{(-)^{d-r+1}}{2(d-r)!} e^{-a\phi} \hat{F}^2_{(d-r)} \right] \tag{4.27}$$

Deze actie (4.27) kom dan overeen met de actie die wordt verwacht van een $(d-r)$-vorm veldsterkte. Een actie van de vorm (4.22) of een actie met de Hodgeduale van de veldsterkte (4.27) zijn dus volledig equivalent.

Door middel van Hodgedualiteit kan type IIA en type IIB supergravitatie worden uitgebreid. Hodgedualiteit kan immers worden toegepast op het Kalb-Ramondveld en de verschillende Ramond-Ramondvelden. Zo is de Kalb-Ramondveldsterkte H duaal aan een zevenvorm veldsterkte $\hat{H}$. De Ramond-Ramondtermen van type IIA kunnen worden geformuleerd met een zesvorm veldsterkte en achtvorm veldsterkte. In type IIB komt er een extra zevenvorm en negenvorm bij. De vijfvorm veldsterkte in type IIB supergravitatie wordt echter onder Hodgedualiteit terug afgebeeld op zichzelf.

Als de actie van IIA en IIB wordt gereduceerd naar negen dimensies blijkt dat deze een $\mathrm{O}(1,1)$*-symmetrie bezit. Deze symmetrie brengt T-dualiteit voort. Deze dualiteit inverteerd de grootte van een richting en verbindt zo twee verschillende achtergronden aan elkaar. Dit zorgt er onder andere voor dat type IIA en type IIB supergravitatie in elkaar kunnen overgaan.*

Ook S-dualiteit komt voort uit een symmetrie van de actie van IIB. Deze wisselt het teken van het dilaton om waardoor velden die zwak gekoppeld waren aan het dilaton sterk gekoppeld zijn en sterk gekoppelde worden zwak gekoppeld.

Hodgedualiteit laat toe om aan r*-vorm veldsterkte een* $(d-r)$*-vorm veldsterkte te associëren. Deze twee veldsterktes geven allebei dezelfde theorie alleen maar in een andere vorm. Hodgedualiteit geeft de mogelijkheid om een supergravitatietheorie uit te breiden met extra velden. Deze velden beschrijven hetzelfde op een andere manier.*

5 Vlakke p-braanoplossingen

Supergravitatietheorieën blijken een zeer interessante oplossing te hebben. Deze oplossing is de vlakke p-braanoplossing. Een p-braan kan fysisch worden geïnterpreteerd een puur bosonisch object dat zich uitstrekt over p verschillende richtingen. Deze braan is elektrisch geladen ten opzichte van een $(p+2)$-vorm veldsterkte en heeft een lading die gelijk is aan zijn massa.

Om een p-braanoplossing te construeren wordt uitgegaan van een modeloplossing of ansatz. Als deze ansatz goed gekozen is levert deze een oplossing op als deze wordt ingevuld in de bewegingsvergelijkingen van de theorie.

Voor elke supergravitatietheorie is het mogelijk p-braanoplossingen te construeren. In type IIA en type IIB supergravitatie kunnen zowel het Kalb-Ramondveld als de verschillende Ramond-Ramondvelden een braanoplossing opleveren. Op de braanoplossingen bekomen voor type IIA en type IIB kan vervolgens T-dualiteit worden toegepast in de hoop dat dit een oplossing oplevert die buiten de ansatz van de braan valt. Ook de elfdimensionale theorie levert enkele branen op. Eenmaal al deze oplossingen zijn geconstrueerd kan worden nagegaan of er verbanden bestaan tussen al de verschillende oplossingen die zijn gevonden.

5.1 Constructie van braanoplossingen

In een vierdimensionale ruimte bestaat een oplossing van relativiteitstheorie die een zwart gat beschrijft met een massa en een elektrische lading. De eenvoudigste oplossing voor een geladen zwart gat wordt verkregen als de massa en de lading van het object gelijk zijn. Deze constructie is een extreem Reissner-Nordstrøm zwart gat. De metriek en de vectorpotentiaal van het elektromagnetisch veld kunnen voor deze oplossing als volgt worden uitgedrukt [1].

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= H^2(x,y,z)dt^2 - H^2(x,y,z)\left(dx^2+dy^2+dz^2\right) && (5.1)\\
A_t &= 2H^{-1}(x,y,z) && (5.2)
\end{aligned}
$$

Hierin is $H(r) = 1 + \frac{Q}{r}$ met $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ en Q stelt zowel de elektrische lading als de massa voor van het zwart gat.

Het model van het extreem Reissner-Nordstrøm zwart gat kan mogelijks worden veralgemeend in een d-dimensionale ruimte en daarbij worden uitgesmeerd over p verschillende richtingen. Dit object wordt een p-braan genoemd. Een extreem Reissner-Nordstrøm zwart gat, dat kan gezien worden als een nulbraan, is elektrisch geladen ten opzichte van een tweevorm veldsterkte. Van een p-braan wordt dan aangenomen dat deze elektrisch geladen is onder een $(p+2)$-vorm veldsterkte waarin de p extra indices overeenkomen met de p wereldvolumerichtingen op de braan.

Neem een actie in d dimensies, bepaald door een metriek, een dilaton ϕ en een $(p+2)$-vorm veldsterkte $F_{(p+2)}$, die er uitziet als

$$
\mathcal{S} = \int d^dx\sqrt{|g|}\left[R + \frac{1}{2}\left(\partial\phi\right)^2 + \frac{(-)^{p+1}}{2(p+2)!}e^{a\phi}F^2_{(p+2)}\right] \tag{5.3}
$$

waarbij a een numerieke waarde is bepaald door de theorie, die momenteel niet gespecifiëerd wordt. Als in type IIA of type IIB supergravitatie in het Einsteinframe er enkel één Ramond-Ramondveld of het Kalb-Ramondveld verschillend wordt genomen van nul krijgt de actie de vorm als in de vorige vergelijking. Deze actie kan gezien worden als een generale vorm van een actie van een $(p+2)$-vorm veldsterkte.

Door variatie van de vorige actie (5.3) naar de verschillende velden worden de bewegingsvergelijkingen bekomen. Deze vergelijkingen voor het ijkveld, het dilaton en de metriek hebben de volgende vorm [11].

- De ijkveldvergelijking bekomen door (B.2)

$$
\nabla_{\mu_1}\left(e^{a\phi}F^{\mu_1\cdots\mu_{p+2}}\right) = 0 \tag{5.4}
$$

- De dilatonvergelijking bekomen door (B.2)

$$
\nabla_\mu\partial^\mu\phi - \frac{(-)^{p+1}a}{2(p+2)!}e^{a\phi}F^2 = 0 \tag{5.5}
$$

- De vereenvoudigde Einsteinvergelijking (B.5)

$$
R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{(-)^{p+1}}{2(p+1)!}e^{a\phi}\left[F_{\mu\mu_2\cdots\mu_{p+2}}F_\nu^{\mu_2\cdots\mu_{p+2}} - \frac{p+1}{(p+2)(d-2)}g_{\mu\nu}F^2\right] = 0 \tag{5.6}
$$

Deze vergelijkingen bepalen de volledige evolutie van het systeem en leggen de interactie vast tussen de verschillende velden.

De bewegingsvergelijkingen (5.4-5.6) zijn niet lineaire differentiaalvergelijkingen. Deze vergelijkingen zijn bijgevolg zeer moeilijk oplosbaar. Eén mogelijkheid om toch een oplossing te kunnen vinden is net een modeloplossing of ansatz voor de verschillende velden voor te stellen en deze in te vullen in de bewegingsvergelijkingen. Deze ansatz wordt bepaald door een aantal parameters. Vervolgens is het de bedoeling deze parameters zo te proberen bepalen zodat de ansatz een oplossing wordt. Voor een goed gekozen ansatz zou dit moeten mogelijk zijn.

De ansatz van de vlakke p-braan wordt zo geconstrueerd zodat deze zo eenvoudig mogelijk is en dat deze mits de juiste keuze van de parameters terug de oplossing van een extreem Reissner-Nordstrøm zwart gat (5.1-5.2) geeft. Het coördinatenstelsel wordt zo gekozen zodat de braan statisch is waardoor geen rekening moet worden gehouden met invloed van de beweging van de braan. Om de velden van de oplossing te beschrijven wordt aangenomen dat, zoals dat het geval was voor een extreem Reissner-Nordstrøm zwart gat, deze afhangen van één enkele functie H van de coördinaten. De ruimte van de $p+1$ coördinaten op de braan wordt zo genomen zodat deze invariant is onder de Pointcarégroep $\mathrm{SO}(1,p)\oplus T_{p+1}$ omdat dit de oplossing zal eenvoudiger maken. Daarom wordt de ruimte op de braan Minkowskivlak en wordt de functie H onafhankelijk genomen van de wereldvolumerichtingen op de braan en de tijd. Vermits het dilaton ϕ kan koppelen aan de veldsterkte $F_{(p+2)}$ wordt verwacht dat deze voor een p-braanoplossing mogelijks niet nul zal zijn. Het dilaton krijgt daarom een waarde die wordt bepaald door H. Dit alles in rekening brengende wordt de volgende ansatz voorgesteld.

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^\alpha(y)(dt^2 - dx_1^2 \ldots - dx_p^2) - H^\beta(y)(dy_{p+1}^2 + \ldots + dy_{d-1}^2) && (5.7)\\ e^{2\phi} &= H^\gamma(y) && (5.8)\\ C_{tx_1\ldots x_p} &= \delta H^\epsilon(y) && (5.9)\end{aligned}$$

Hierin zijn x_m met m van 0 tot en met p de tijd en de wereldvolumerichtingen op de braan en zijn y_i met i van $p+1$ tot en met $d-1$ de transversale richtingen. De waarden α, β, γ, δ en γ zijn constanten die nog moeten worden bepaald om een oplossing te verkrijgen.

Als deze ansatz wordt ingevuld in de Riccitensor wordt het volgende verkregen.

$$\begin{aligned} R_{mn} &= -\eta_{mn}H^{\alpha-\beta-1}\left[\frac{\alpha}{2}\partial_i\partial^i H + \frac{\alpha(M-\beta-1)}{2}H^{-1}\partial_i H\partial^i H\right] && (5.10)\\ R_{im} &= 0 && (5.11)\\ R_{ij} &= H^{-1}\left\{\frac{\beta}{2}\delta_{ij}\partial_k\partial^k H + (M-\beta)\partial_i\partial_j H + \frac{\beta(M-\beta-1)}{2}H^{-1}\delta_{ij}\partial_k H\bar{\partial}^k H\right.\\ &\quad\left. + \left[\frac{\alpha^2(p+1)+\beta^2(d-p+1)}{4} - M(\beta+1)+\beta\right]H^{-1}\partial_i H\partial_j H\right\} && (5.12)\end{aligned}$$

Hierin geldt dat $M = \frac{\alpha(p+1)+\beta(d-p-1)}{2}$.

Als deze ansatz (5.7-5.9) wordt ingevuld in de bewegingsvergelijkingen (5.4-5.6) worden de volgende gelijkheden bekomen.

- De ijkveldvergelijking

$$\partial_i\partial^i H + \left[M - \alpha(p+1) - \beta + \frac{a\gamma}{2} + \epsilon - 1\right]H^{-1}\partial_i H\partial^i H = 0 \qquad (5.13)$$

- De dilatonvergelijking

$$\frac{\gamma}{2}\partial_i\partial^i H + \left[\frac{\gamma(M-\beta-1)}{2}H^{-1} + \frac{a\delta^2\epsilon^2}{2}H^{-\alpha(p+1)+\frac{a\gamma}{2}+2\epsilon-1}\right]\partial_i H\partial^i H = 0 \qquad (5.14)$$

- De (m,n)-component van de Einsteinvergelijking

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha}{2}\partial_i\partial^i H + \left[\frac{\alpha(M-\beta-1)}{2}H^{-1}\right.\\ &\left.+\frac{\delta^2\epsilon^2(d-p-3)}{2(d-2)}H^{-\alpha(p+1)+\frac{a\gamma}{2}+2\epsilon-1}\right]\partial_i H\partial^i H = 0 \qquad (5.15)\end{aligned}$$

- De (i,j)-component van de Einsteinvergelijking

$$
\begin{aligned}
&\frac{\beta}{2}\delta_{ij}\partial_k\partial^k H + (M-\beta)\partial_i\partial_j H \\
&+\left[\frac{\beta(M-\beta-1)}{2}H^{-1} + \frac{\delta^2\epsilon^2(p+1)}{2(d-2)}H^{-\alpha(p+1)+\frac{a\gamma}{2}+2\epsilon-1}\right]\delta_{ij}\partial_k H\partial^k H \\
&+\left\{\left[\frac{\alpha^2(p+1)}{4} + \frac{\beta^2(d-p+1)}{4} - M(\beta+1) + \beta + \frac{\gamma^2}{8}\right]H^{-1}\right. \\
&\left.-\frac{\delta^2\epsilon^2}{2}H^{-\alpha(p+1)+\frac{a\gamma}{2}+2\epsilon-1}\right\}\partial_i H\partial_j H \quad = \quad 0
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Deze bewegingsvergelijkingen zijn slechts oplosbaar voor welbepaalde waarden van de parameters α, β, γ, δ en ϵ.

Het blijkt dat vergelijkingen (5.13-5.15) en het spoor van de transversale Einsteinvergelijking (5.16) allemaal ruwweg dezelfde vorm hebben. Dit stelsel zal slechts oplosbaar zijn als deze alle vergelijkingen hetzelfde zijn. Alle functies zullen moeten worden genomen zodat deze de vorm

$$\partial_i\partial^i H + CH^{-1}\partial_i H\partial^i H = 0 \tag{5.17}$$

krijgen met C een constante van de oplossing. Deze conditie legt dan bepaalde voorwaarden op de parameters van de ansatz. Uit vergelijkingen (5.13-5.15) volgt dan het volgende stelsel van voorwaarden.

$$-\alpha(p+1) + \frac{a\gamma}{2} + 2\epsilon - 1 \quad = \quad -1 \tag{5.18}$$

$$M - \alpha(p+1) - \beta + \frac{a\gamma}{2} + \epsilon - 1 \quad = \quad C \tag{5.19}$$

$$\frac{\gamma(M-\beta-1)}{2} + \frac{a\delta^2\epsilon^2}{2} \quad = \quad \frac{\gamma C}{2} \tag{5.20}$$

$$\frac{\alpha(M-\beta-1)}{2} + \frac{\delta^2\epsilon^2(d-p-3)}{2(d-2)} \quad = \quad \frac{\alpha C}{2} \tag{5.21}$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{\beta(M-\beta-1)}{2} + \frac{\delta^2\epsilon^2(p+1)}{2(d-2)}\right](d-p-1) + \frac{\alpha^2(p+1)}{4} \\
&+\frac{\beta^2(d-p+1)}{4} - M(\beta+1) + \beta + \frac{\gamma^2}{8} - \frac{\delta^2\epsilon^2}{2} \quad = \quad \frac{[2M+\beta(d-p-3)]C}{2}
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

Dit stelsel bestaat uit vijf vergelijkingen en heeft zes variabelen α, β, γ, δ, ϵ en C. Minstens één van de variabelen kan dus vrij worden gekozen. De variabele C wordt genomen zodat $C = 0$. Hierdoor krijgt vergelijking (5.17) de vorm

$$\partial_i\partial^i H = 0. \tag{5.23}$$

Een functie die aan deze vergelijking voldoet is een harmonische functie. Om de functie H eenvoudig te maken wordt deze zodat deze sferisch harmonisch genomen. Een sferisch harmonische functie in $d-p-1$ dimensies ziet er uit als

$$H(r) = P + \frac{Q}{r^{d-p-3}}. \tag{5.24}$$

Hierin is r de afstand ten opzichte van de braan in de transversale ruimte $\sqrt{y_{p+1}^2 + \ldots + y_{d-1}^2}$. Hierin wordt de waarde P meestal gelijk gesteld aan 1 omdat in de limiet r naar oneindig wordt verondersteld dat de metriek gaat naar de Minkowskimetriek (A.7). De waarde voor Q kan willekeurig gekozen worden en stelt in essentie de elektrische lading voor van de braan ten opzichte van de veldsterkte $F_{(p+2)}$.

Het stelsel van vergelijkingen (5.18-5.22) met $C = 0$ hebben volgens [13] een oplossing voor de volgende waarden van α, β, γ en δ.

$$\begin{array}{lllllll} \alpha & = & -\frac{4(d-p-3)}{N} & \quad & \beta & = & \frac{4(p+1)}{N} \\ \gamma & = & \frac{4a(d-2)}{N} & & \delta & = & \sqrt{\frac{4(d-2)}{N}} \\ \epsilon & = & -1 & & & & \end{array} \tag{5.25}$$

Hierin is N gedefinieerd aan de hand van de gelijkheid $N = a^2(d-2) + 2\,(p+1)\,(d-p-3)$.

Deze procedure levert zo een methode om een p-braanoplossing te construeren. De waarden van de parameters zijn bepaald in functie van d, p en a door de vergelijkingen (5.25). De oplossing is zo geconstrueerd zodat de functie $H(y)$ sferisch harmonisch is (5.24). Deze methode kan nu worden toegepast op de verschillende vormvelden in een paar supergravitatietheorieën

5.2 Oplossingen van type IIA en type IIB supergravitatie

De constructie van de vlakke p-braan kan nu worden toegepast op enkele specifieke gevallen. Als eerste voorbeeld wordt deze constructie toegepast op type IIA en type IIB supergravitatie in tien dimensies.

De gemeenschappelijke sector blijkt twee verschillende braanoplossingen toe te laten namelijk de fundamentele snaar, die elektrisch geladen is ten opzichte van de Kalb-Ramondveldsterkte, en de Neveu-Schwarzvijfbraan, die magnetisch geladen is ten opzichte van de Kalb-Ramondveldsterkte. Via T-dualiteit worden dan uit deze oplossingen de gravitatiegolf en de Kaluza-Kleinmonopool bekomen. De verschillende Ramond-Ramondvelden in type IIA en type IIB supergravitatie leveren een D-branen op.

5.2.1 Oplossingen van de gemeenschappelijke sector

De gemeenschappelijke sector van type IIA en type IIB supergravitatie heeft een Kalb-Ramondveld voorgesteld door een drievorm veldsterkte. Op dit veld kan de methode ontwikkeld in het vorig hoofdstuk worden toegepast. het Kalb-Ramondveld is een drievorm veldsterkte. Dit zou dus een éénbraanoplossing of snaar moeten toelaten.

Het Kalb-Ramondveld kan worden hergeformuleerd als een zevenvorm aan de hand van zijn Hodgeduale. Hierdoor zou het ook moeten mogelijk zijn om een vijfbraanoplossing op te stellen met het Kalb-Ramondveld.

De fundamentele snaar Beschouw de gemeenschappelijke sector van type IIA en type IIB supergravitatie in het Einsteinframe in tien dimensies.

$$\mathcal{S} = \int d^{10}x\sqrt{|g|}\left(R + \frac{1}{2}\,(\partial\phi)^2 + \frac{1}{12}e^{\phi}H^2\right) \tag{5.26}$$

De oplossing bekomen door het invullen van de ansatz (5.7-5.9) met $d = 10$, $p = 1$ en $a = 1$ in de bewegingsvergelijkingen (5.4-5.6) ziet er als volgt uit [14].

$$ds^2 = H^{-\frac{3}{4}}(y)(dt^2 - dx^2) - H^{\frac{1}{4}}(y)(dy_2^2 + \ldots + dy_9^2) \tag{5.27}$$
$$e^{2\phi} = H^{-1}(y) \tag{5.28}$$
$$B_{tx} = H^{-1}(y) \tag{5.29}$$

De functie H moet dan ook voldoen aan

$$H(r) = 1 + \frac{Q}{r^6} \tag{5.30}$$

met Q een willekeurige constante.

Als in (5.30) de positie r naar nul gaat dan wordt de functie H oneindig. Hierdoor vertoont de metriek singulier gedrag in dit punt. Als de Ricciscalar (A.16) wordt berekend in dit punt blijkt dat in dit punt een fysische singulariteit heerst. Als r naar oneindig gaat wordt de Kalb-Ramondveldsterkte gelijk aan nul. Deze oplossing stelt dus een elektrisch geladen singulariteit ten opzichte van het Kalb-Ramondveld H voor dat een veld heeft dat geleidelijk afneemt naarmate de afstand van het object. Dit object heeft ongeveer het zelfde gedrag als een geladen zwart gat met een massa gelijk aan de lading. Deze singulariteit strekt zich echter oneindig ver uit over één ruimtelijke richting x. Deze oplossing wordt dan ook een fundamentele snaar of F1 genoemd.

Als op deze oplossing T-dualiteit wordt toegepast op een transversale richting wordt deze terug afgebeeld op dezelfde oplossing. Met andere woorden de fundamentele snaar is zelfduaal voor T-dualiteit over een transversale richting.

De gravitatiegolf De oplossing van de fundamentele snaar geeft na toepassen van T-dualiteit op de wereldvolumerichting een zuiver gravitationele oplossing met de volgende metriek.

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - \frac{Q}{r^6}(dt + dx)^2 - dy_2^2 - \ldots - dy_9^2 \tag{5.31}$$

Hierin geldt dat $r = \sqrt{dy_2^2 + \ldots + dy_9^2}$.

Deze oplossing gedraagt zich als een zuiver gravitationele golf in tien dimensies die zich voortplant over de x-richting met de lichtsnelheid. Deze oplossing wordt dan ook de gravitatiegolf genoemd [15] en wordt aangeduid met W.

Na het toepassen van T-dualiteit is een totaal nieuwe oplossing bekomen. De oplossing voor een gravitatiegolf valt echter helemaal buiten de ansatz voor een p-braan (5.7-5.9). Dit toont aan dat deze dualiteit de kracht heeft om op een simpele manier van een bestaande oplossing een totaal nieuwe oplossing te genereren.

De Neveu-Schwarzvijfbraan Beschouw de gemeenschappelijke sector in het Einsteinframe in tien dimensies met de Hodgeduale van het Kalb-Ramondveld.

$$\mathcal{S} = \int d^{10}x\sqrt{|g|}\left(R + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{10080}e^{\phi}\hat{H}^2\right) \tag{5.32}$$

De oplossing bekomen door het invullen van de ansatz van een braan met $d = 10$, $p = 5$ en $a = 1$ in de bewegingsvergelijkingen wordt gegeven door de volgende vergelijkingen [16].

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^{-\frac{1}{4}}(y)(dt^2 - dx_1^2 - \ldots - dx_5^2) - H^{\frac{3}{4}}(y)(dy_6^2 + \ldots + dy_9^2) \\ e^{2\phi} &= H(y) \\ \hat{B}_{tx_1\ldots x_5} &= H^{-1}(y) \end{aligned} \tag{5.33}$$

Deze oplossing stemt overeen met een vijfdimensionaal object die de naam NS5-braan draagt. Bovendien is deze braan magnetisch geladen tegenover het Kalb-Ramondveld.

T-dualiteit toegepast op een wereldvolumerichting van de braan beeldt deze oplossing op zichzelf af.

De Kaluza-Kleinmonopool Als T-dualiteit echter wordt toegepast op een transversale richting z van de NS5-braan geeft dit de volgende zuiver gravitationele oplossing [17].

$$ds^2 = dt^2 - dx_1^2 - \ldots - dx_5^2 - H^{-1}(y)(A_i dy^i + dz)^2 - H(y)(dy_6^2 + \ldots + dy_8^2) \tag{5.34}$$

Hierin is $\partial_i A_j = \epsilon_{ijk}\delta^{kl}\partial_l H(y)$ en loopt i van 6 tot 8.
Opnieuw werd door het toepassen van T-dualiteit een nieuwe oplossing gegenereerd die buiten de ansatz van de p-braan (5.7-5.9) valt.

Wanneer er dimensionele reductie wordt toegepast over de richting z worden de vergelijkingen de volgende.

$$d\tilde{s}^2 = dt^2 - dx_1^2 - \ldots - dx_5^2 - H(y)(dy_6^2 + \ldots + dy_8^2) \tag{5.35}$$

$$e^{2\tilde{\phi}} = H(y) \tag{5.36}$$

$$\tilde{k} = H^{-\frac{1}{2}}(y) \tag{5.37}$$

$$\tilde{A}_i = A_i \tag{5.38}$$

De gereduceerde oplossing in negen dimensies strekt zich uit over vijf dimensies. Deze oplossing heeft een magnetische lading ten opzichte van de Kaluza-Kleinveldsterkte. De oplossing die hiermee overeenkomt (5.34) wordt dan ook de Kaluza-Kleinmonopool genoemd en zal worden aangeduid met KK.

5.2.2 D-braanoplossingen

Naast de gemeenschappelijke sector bevat type IIA en type IIB supergravitatie ook nog Ramond-Ramondvelden. Deze vormen leveren elk ook een vlakke braanoplossing. Als er telkens één van de Ramond-Ramondijkvelden verschillend van nul wordt genomen met de ansatz (5.7-5.9) kunnen de verschillende D-branen of Dirichletbranen worden bekomen [18].

De Dp-braanoplossing in het Einsteinframe voldoet aan de volgende vergelijkingen.

$$ds^2 = H^{\frac{p-7}{8}}\eta_{mn}dx^m dx^n - H^{\frac{p+1}{8}}\delta_{ij}dy^i dy^j \tag{5.39}$$

$$e^{-2\phi} = H^{\frac{p-3}{2}} \tag{5.40}$$

$$C_{tx_1\ldots x_p} = H^{-1} \tag{5.41}$$

Door de vorm van de Ramond-Ramond termen kunnen in type IIA en type IIB supergravitatie slechts bepaald D-branen voorkomen. In type IIA supergravitatie kan deze enkel D0, D2, D4 en D6-branen bevatten. Type IIB heeft enkel D1, D3, D5, en D7-branen.

5.3 Oplossingen van de elfdimensionale supergravitatie

Ook in elf dimensies door de braanconstructie worden toegepast. Dit levert twee branen op, namelijk de M2 en M5. Door oplossingen van type IIA supergravitatie omhoog te halen worden nog andere oplossingen bekomen. Op deze manier kan een elfdimensionale gravitatiegolf en een elfdimensionale Kaluza-Kleinmonopool worden bekomen.

De M2-braan De elfdimensionale supergravitatie heeft een actie die de volgende vorm aanneemt.

$$\mathcal{S}_{11} = \int d^{11}x\sqrt{|g|}\left(R - \frac{1}{48}F_{(4)}^2\right) \tag{5.42}$$

De actie in elf dimensies bevat een veldsterkte $F_{(4)}$ die de mogelijkheid heeft een tweebraan te construeren. Er kan een oplossing worden bekomen met de braanansatz met $d = 11$, $p = 2$ en $a = 0$. Deze oplossing heeft dan de volgende vorm [19].

$$ds^2 = H^{-\frac{2}{3}}(y)(dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2) - H^{\frac{1}{3}}(y)(dy_1^2 + \ldots + dy_8^2) \tag{5.43}$$

$$B_{tx_1x_2} = H^{-1}(y) \tag{5.44}$$

Deze oplossing stelt opnieuw een braan voor. Deze braan strekt zich uit over twee richtingen en is elektrisch geladen ten opzichte van het veld $F_{(4)}$. Deze oplossing wordt meestal de M2-braan genoemd.

De M5-braan Als deze actie wordt herschreven zodat deze staat in functie van de Hodgeduale $\hat{F}_{(7)}$ van de veldsterkte $F_{(4)}$ ziet deze er als volgt uit.

$$\mathcal{S}_{11} = \int d^{11}x\sqrt{|g|}\left(R + \frac{1}{10080}\hat{F}^2_{(7)}\right) \tag{5.45}$$

De braanansatz met $d = 11$, $p = 2$ en $a = 0$ heeft opnieuw een oplossing van de volgende vorm [20].

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^{-\frac{1}{3}}(y)(dt^2 - dx_1^2 - \ldots - dx_5^2) - H^{\frac{2}{3}}(y)(dy_1^2 + \ldots + dy_5^2) && (5.46)\\ \hat{B}_{tx_1\ldots x_5} &= H^{-1}(y) && (5.47) \end{aligned}$$

Deze braanoplossing draagt de naam M5-braan.

De gravitatiegolf Als de gravitatiegolf in tien dimensies wordt omhooggehaald via (3.9-3.11) dan wordt opnieuw een zuiver gravitationele oplossing bekomen die er uitziet als

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - \frac{Q}{r^6}(dt + dx)^2 - dy_2^2 - \ldots - dy_{10}^2. \tag{5.48}$$

Hierin geldt dat $r = \sqrt{dy_2^2 + \ldots + dy_9^2}$.
Deze oplossing stelt opnieuw een gravitatiegolf [15] voor maar nu in elf dimensies.

De Kaluza-Kleinmonopool Ook de Kaluza-Kleinmonopool in tien dimensies kan worden omhooggehaald [17]. Dit geeft dan

$$ds^2 = dt^2 - dx_1^2 - \ldots - dx_6^2 - H^{-1}(y)(A_i dy^i + dz)^2 - H(y)(dy_7^2 + \ldots + dy_9^2). \tag{5.49}$$

Hierin geldt opnieuw $\partial_i A_j = \epsilon_{ijk}\delta^{kl}\partial_l H(y)$ en loopt i van 7 tot 9.
Als deze oplossing wordt gereduceerd over een z-richting wordt een object bekomen dat zich uitstrekt over zes dimensies en dat magnetisch geladen is ten opzichte van de Kaluza-Kleinveldsterkte. Deze oplossing wordt daarom opnieuw de Kaluza-Kleinmonopool genoemd.

5.4 Verbanden tussen oplossingen

In de hoofdstukken 3 en 4 is gebleken dat het mogelijk was om verschillende vormvelden aan elkaar te verbinden via T-dualiteit, S-dualiteit en dimensionele reductie. Daarom moet het ook mogelijk zijn om door deze dualiteiten en reductiemethodes toe te passen op de verschillende oplossingen, die werden bekomen voor type IIA en type IIB in tien dimensies en elfdimensionale supergravitatie, relaties te vinden tussen deze oplossingen. In figuur 5.1 worden deze verbanden grafisch weergegeven.

T-dualiteit De oplossingen van de gemeenschappelijke sector zijn allemaal aan elkaar gerelateerd aan de hand van T-dualiteit. Zo is bekomen dat de fundamentele string T-duaal aan een gravitatiegolf over de wereldvolumerichting en zelfduaal over een transversale richting. De NS5-braan gaf dat deze transformeert via T-dualiteit over een transversale richting in een Kaluza-Kleinmonopool en deze braan is zelfduaal over een wereldvolumerichting.

Figuur 5.1: Verbanden tussen de verschillende oplossingen van de 11 dimensionale supergravitatie, IIA en IIB door T-dualiteit, S-dualiteit en dimensionele reductie

Binnen type II supergravitatie wordt een $(p+1)$-vorm Ramond-Ramondijkveld van de ene theorie door T-dualiteit afgebeeld op p-vorm en een $(p+2)$-vorm van de ander theorie. Van de vlakke D-braanoplossingen kan dan ook worden verwacht dat deze ook T-duaal zijn aan branen met een dimensie meer of minder in de andere theorie. Als de berekening expliciet wordt gedaan wordt via T-dualiteit een Dp-braan afgebeeld op een D$(p-1)$-braan als de transformatie wordt uitgevoerd op een wereldvolumerichting en een D$(p+1)$-braan op een transversale richting.

S-dualiteit Binnen type IIB supergravitatie zijn de verschillende oplossingen gerelateerd door S-dualiteit. S-dualiteit transformeert de Kalb-Ramondtensor B in het Ramond-Ramondijkveld $C_{(2)}$. Hierdoor gaat de fundamentele string onder S-dualiteit over naar de D1-braan en de NS5-braan is S-duaal aan de D5-braan. De D3-braan tenslotte is zelfduaal onder S-dualiteit omdat het Ramond-Ramondijkveld $C_{(4)}$ onder S-dualiteit transformeert naar zichzelf.

Dimensionele reductie Elfdimensionale supergravitatie reduceert tot type IIA supergravitatie. De gereduceerde oplossingen van deze theorie zouden dan ook oplossingen moeten zijn van type IIA supergravitatie.
Het blijkt dat een M2-braan onder dimensionele reductie over een transversale richting transformeert in een D2-braan en onder reductie onder een wereldvolumerichting naar de fundamentele snaar. Een M5 reduceert onder een wereldvolumerichting in een D4-braan en onder een transversale richting tot een NS5-oplossing.
De reductie van de gravitatiegolf in elf dimensies geeft in de voortplantingsrichting een D0-braan en een gravitatiegolf in tien dimensies over een transversale richting. Een elfdimensionale Kaluza-Kleinmonopool reduceert in een wereldvolumerichting tot een tiendimensionale Kaluza-Kleinmonopool en reductie over een y-richting geeft een D6-braan.

De bewegingsvergelijkingen van een actie met een metriek, een dilaton en een vormveld zijn oplosbaar. Er bestaat een oplossing voor dit systeem dat een vlakke braan voorstelt. Deze braan *heeft enkel een Minkowskimetriek erop. In tien dimensies blijkt de gemeenschappelijke sector twee vlakke braanoplossingen te hebben namelijk de fundamentele snaar en de NS5. Door het toepassen van T-dualiteit op deze laatste oplossingen wordt de gravitatiegolf en de Kaluza-Kleinmonopool bekomen. Daarnaast bestaan er in type IIA en type IIB supergravitatie in tien dimensies ook nog D-branen. Daarenboven zijn deze D-branen van de twee theorieën gerelateerd via T-dualiteit. Het blijkt eveneens dat het mogelijk is om de oplossingen binnen type IIB te relateren via S-dualiteit. In elf dimensies blijken ook twee braanoplossingen te bestaan namelijk de M2 en de M5 en een gravitatiegolf en Kaluza-Kleinmonopool. Bovendien blijkt dat deze oplossingen onder dimensionele reductie gaan naar een oplossing in type IIA supergravitatie in tien dimensies.*

6 Gekromde p-braanoplossingen

Het idee bestaat onze wereld te zien als een braan in een hogerdimensionaal universum waarop wij en alle materie en velden rondom ons vastgeplakt zijn zoals in [6]. Hiervoor wordt de fysica die zich effectief manifesteert op de braan zelf bestudeerd. Het model van een vlakke braan moet eerst wel nog wat veralgemeend worden tot een gekromde braan. Vlakke branen hebben immers geen echte fysica erop. Op een vlakke braan bestaan er geen velden of kosmologische constante. Door kromming aan te brengen op de braan kan betracht worden om er velden op te krijgen

Om een braanwereld enigszins realistisch te maken moet deze in staat zijn om de krachten te beschrijven die worden waargenomen in onze wereld. In de eerste plaats moet er gravitatie op de braan kunnen bestaan. Ook blijkt dat een kosmologische constante nodig is om ons universum te beschrijven vermits deze wordt waargenomen. Daarnaast kan nog betracht worden ander velden zoals een scalair veld en een kosmologische constante op de braan te plakken.

Ook laten braanwerelden toe om het probleem van de kosmologische constantes vanuit een ander perspectief te bekijken. Uit kwantumveldentheorie wordt verwacht dat er een grote kosmologische constante is. Neem daarom aan dat er in de bronruimte waarin de braan leeft een grote kosmologische constante bestaat. De kosmologische constante die wordt waargenomen is echter 120 grootteordes kleiner dan deze voorspeld door de kwantumveldentheorie. Als de kosmologische constante op de braan hieraan blijkt te voldoen is het probleem opgelost. Dan kan zowel de grote kosmologische constante van kwantumveldentheorie worden verklaard en is de theorie in overeenstemming met de waarneming. Het doel wordt dus na te gaan of het mogelijk is om zo een constructie op touw te zetten. Merk op dat de kosmologische constante op de braanwereld de fundamentele kosmologische constante is die de energie van het vacuüm voorstelt. De kosmologische constante op de braan is slechts een geïnduceerde waarde die effectief wordt gemeten en de kromming op de braan bepaald.

De vlakke braan kan stap voor stap worden veralgemeend. Ten eerste kan een braan worden veralgemeend zodat er zicht een metriek op bevindt die toelaat zwaartekracht op de braan te beschrijven. Vervolgens wordt gezocht naar een braan met een scalair veld erop. Dan wordt nagegaan of het mogelijk is om op een $(d-2)$-braan of domeinmuur het mogelijk is een kosmologische constante te zetten. Dit gebeurt eerst op een domeinmuur zonder scalair veld en vervolgens op een domeinmuur met scalair veld. Tenslotte wordt nog even nagegaan of de modellen voor een domeinmuur met een scalair veld en een kosmologische constante kunnen worden veralgemeend naar een p-braan.

6.1 Riccivlakke p-branen

Een eerste veralgemening van een p-braan werd uitgevoerd in [21]. Deze veralgemening beschouwt een braan met een geïnduceerde interne metriek $\tilde{g}_{mn}$ erop en een externe metriek $\bar{h}_{ij}$ voor de transversale ruimte.

Beschouw de volgende actie op de bronruimte van een metriek $g_{\mu\nu}$, een dilaton en een veldsterkte

$F_{(p+2)}$.

$$S = \int dxdy\sqrt{|g|}\left[R + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{(-)^{p+1}}{2(p+2)!}e^{a\phi}F^2_{(p+2)}\right] \tag{6.1}$$

Deze actie heeft dezelfde vorm als de actie van de vlakke p-braan (5.3). De bewegingsvergelijkingen die met deze actie overeenstemmen zullen dan ook hetzelfde zijn (5.6-5.4).

Om een oplossing te construeren wordt er opnieuw een ansatz voorgesteld. Deze ansatz wordt bepaald voor de metriek op de braan $\tilde{g}_{mn}$ en op de transversale ruimte $\bar{h}_{ij}$, het dilaton ϕ en de veldsterkte $F_{(p+2)}$. De ansatz wordt zo geconstrueerd zodat als de metriek op de braan $\tilde{g}_{mn}$ gaat naar de Minkowskimetriek η_{mn} en de externe metriek op de transversale ruimte $\bar{h}_{ij}$ gaat naar δ_{ij} deze ansatz teruggaat naar de ansatz voor een vlakke braan (5.7-5.9). De metriek op de braan $\tilde{g}_{mn}$ wordt enkel afhankelijk genomen van de coördinaten op de braan en de metriek van de transversale ruimte $\bar{h}_{ij}$ enkel van transversale coördinaten. Er wordt opnieuw onderscheid gemaakt tussen de coördinaten op de braan x^m met m gaande van 0 tot en met p en de coördinaten op de transversale ruimte y_i met i gaande van $p+1$ tot en met $d-1$. Concreet heeft de ansatz die wordt gekozen de volgende vorm.

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^\alpha(y)\tilde{g}_{mn}(x)dx^m dx^n - H^\beta(y)\bar{h}_{ij}(y)dy^i dy^j && (6.2)\\ e^{2\phi} &= H^\gamma(y) && (6.3)\\ F_{itx_1\ldots x_p} &= \delta\sqrt{|\tilde{g}(x)|}\partial_i H^\epsilon(y) && (6.4) \end{aligned}$$

Nu kan deze ansatz worden gebruikt om een uitdrukking te bekomen voor de Riccitensor (A.15).

$$\begin{aligned} R_{mn} &= \tilde{R}_{mn} - \tilde{g}_{mn}H^{\alpha-\beta-1}\left[\frac{\alpha}{2}\bar{\nabla}_i\bar{\partial}^i H + \frac{\alpha(M-\beta-1)}{2}H^{-1}\partial_i H\bar{\partial}^i H\right] && (6.5)\\ R_{im} &= 0 && (6.6)\\ R_{ij} &= \bar{R}_{ij} + H^{-1}\left\{\frac{\beta}{2}\bar{h}_{ij}\bar{\nabla}_k\bar{\partial}^k H + (M-\beta)\bar{\nabla}_i\partial_j H + \bar{h}_{ij}\frac{\beta(M-\beta-1)}{2}H^{-1}\partial_k H\bar{\partial}^k H\right.\\ &\quad \left.+\left[\frac{\alpha^2(p+1)+\beta^2(d-p+1)}{4} - M(\beta+1)+\beta\right]H^{-1}\partial_i H\partial_j H\right\} && (6.7) \end{aligned}$$

Hierin is $\tilde{R}_{mn}$ de Riccitensor van de interne metriek $\tilde{g}_{mn}$, $\bar{R}_{ij}$ de Riccitensor van de externe metriek $\bar{h}_{ij}$. De afgeleide $\bar{\partial}^i$ is omhooggehaald door de inverse metriek $\bar{h}^{ij}$ en $\bar{\nabla}_i$ is de covariante afgeleide (A.11) van de metriek $\bar{h}_{ij}$. De waarde M voldoet aan $M = \frac{\alpha(p+1)+\beta(d-p-1)}{2}$.

De mn-componenten van de Riccitensor R_{mn} geven een som een Riccitensor $\tilde{R}_{mn}$ van de metriek op de braan en een term die gefactoriseerd is in een x-afhankelijk deel en een y-afhankelijk deel. Net zoals voor de vlakke braan blijken de im-componenten van de Riccitensor R_{im} nul te zijn. De ij-componenten van de Riccitensor R_{ij} blijken enkel afhankelijk te zijn van y.

Als deze ansatz (6.2-6.4) wordt ingevuld in de bewegingsvergelijkingen (5.6-5.4) worden de volgende gelijkheden bekomen.

- De i-componenten van de ijkveldvergelijking

$$\bar{\nabla}_i\bar{\partial}^i H + \left[M - \alpha(p+1) - \beta + \frac{a\gamma}{2} + \epsilon - 1\right]H^{-1}\partial_i H\bar{\partial}^i H = 0 \tag{6.8}$$

- De dilatonvergelijking

$$\frac{\gamma}{2}\bar{\nabla}_i\bar{\partial}^i H + \left[\frac{\gamma(M-\beta-1)}{2}H^{-1} + \frac{a\delta^2\epsilon^2}{2}H^{-\alpha(p+1)+\frac{a\gamma}{2}+2\epsilon-1}\right]\partial_i H\bar{\partial}^i H = 0 \tag{6.9}$$

- De mn-componenten van de Einsteinvergelijking

$$\tilde{R}_{mn} - \tilde{g}_{mn} H^{\alpha-\beta-1} \left\{ \frac{\alpha}{2} \bar{\nabla}_i \bar{\partial}^i H + \left[\frac{\alpha(M-\beta-1)}{2} H^{-1} + \frac{\delta^2\epsilon^2(d-p-3)}{2(d-2)} H^{-\alpha(p+1)+\frac{\alpha\gamma}{2}+2\epsilon-1} \right] \partial_i H \bar{\partial}^i H \right\} = 0 \quad (6.10)$$

- De ij-componenten van de Einsteinvergelijking

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ij} + H^{-1} \Bigg(& \frac{\beta}{2} \bar{h}_{ij} \bar{\nabla}_k \bar{\partial}^k H + (M-\beta) \bar{\nabla}_i \partial_j H \\ & + \bar{h}_{ij} \left[\frac{\beta(M-\beta-1)}{2} H^{-1} + \frac{\delta^2\epsilon^2(p+1)}{2(d-2)} H^{-\alpha(p+1)+\frac{\alpha\gamma}{2}+2\epsilon-1} \right] \partial_k H \bar{\partial}^k H \\ & + \left\{ \left[\frac{\alpha^2(p+1)+\beta^2(d-p+1)}{4} - M(\beta+1) + \beta + \frac{\gamma^2}{8} \right] H^{-1} \right. \\ & \left. - \frac{\delta^2\epsilon^2}{2} H^{-\alpha(p+1)+\frac{\alpha\gamma}{2}+2\epsilon-1} \right\} \partial_i H \partial_j H \Bigg) = 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

De ijkveldvergelijkingen met een afgeleide naar een x-richting worden door de factor $\sqrt{|\tilde{g}|}$ in de ansatz (6.4) gelijk aan nul. Dit motiveert de keuze van deze factor in deze ansatz. Ook de im-componenten van de Einsteinvergelijking zijn net zoals in het vlakke geval nul.

De bewegingsvergelijkingen (6.8-6.11) geven dat als $\tilde{g}_{mn}(x) = \eta_{mn}$ en $\bar{h}_{ij} = \delta_{ij}$ deze teruggaan naar de bewegingsvergelijkingen voor de vlakke p-braan (5.13-5.16). Voor de waarden α, β, γ, δ en ϵ worden dan ook gekozen zoals deze bij de vlakke braan 5.25. De functie H wordt dan opnieuw genomen als een sferisch harmonische functie zoals in (5.24). Door deze keuze zal dan enkele condities opleggen op de metrieken $\tilde{g}_{mn}$ en $\bar{h}_{ij}$. Als de waarden worden ingevuld dan reduceren de bewegingsvergelijkingen (6.8-6.11) tot de volgende voorwaarden op de Riccitensoren op de braan $\tilde{R}_{mn}$ en op de transversale ruimte.

$$\tilde{R}_{mn} = 0 \qquad \bar{R}_{ij} = 0 \quad (6.12)$$

Hieruit blijkt dat zowel de metriek op de braan als die op de transversale ruimte moeten Riccivlak zijn of anders gezegd de Riccitensor ervan moet nul zijn. De voorwaarde voor het de Riccitensor $\tilde{R}_{mn}$ kan worden geïnterpreteerd als een bewegingsvergelijking op de braanwereld. De actie die hiermee overeenkomt is

$$\mathcal{S} = \int dx \sqrt{|\tilde{g}|} \tilde{R}. \quad (6.13)$$

Deze actie geeft aan dat er gravitatie bestaat op de braan. Oplossingen zoals gravitatiegolven, Kaluza-Kleinmonopolen en ongeladen zwarte gaten kunnen bijgevolg voorkomen op deze braan.

De keuze van de metriek op de transversale ruimte $\bar{h}_{ij}$ heeft echter in deze oplossing geen invloed op de fysica op de braan. Op het eerste zicht is er ook niets dat duidt dat in een andere oplossing het zinnig is veel rekening te moeten houden met deze metriek. Daarom zal deze altijd worden gekozen zodat deze voldoet aan $\bar{h}_{ij} = \delta_{ij}$.

Een p-braan kan zodanig veralgemeend worden zodat er een metriek bestaat op deze braan. Er wordt een voorwaarde bekomen op de metriek die kan worden geïnterpreteerd als een effectieve bewegingsvergelijking op de braan. Deze voorwaarde zegt dat de Riccitensor van de metriek nul is. Als de metriek teruggaat naar een vlakke metriek wordt terug de oplossing van een vlakke braan bekomen. De fysica die op de braan leeft blijkt zodanig te zijn dat deze gravitatie toelaat.

6.2 p-Branen met scalair veld

Naast een metriek $\tilde{g}_{mn}$ kan er worden geprobeerd ook nog een scalair veld $\tilde{\chi}$ op de braan te verkrijgen. Er werd zo een oplossing gevonden door Lidsey in [24]. Een scalair veld beschrijft een bosonisch deeltje met spin nul. Als er een scalair veld is kunnen er bijgevolg ook bepaalde deeltjes bestaan op de braan. Bijgevolg is het zeer interessant als het mogelijk is er een op de braan te hebben.

Neem opnieuw een actie in de bronruimte bepaald door een metriek $g_{\mu\nu}$, een dilatonveld ϕ en een veldsterkte $F_{(p+2)}$ zoals in het Riccivlakke geval (6.1).

Om een oplossing te construeren wordt de ansatz (6.2-6.4) nogmaals veralgemeend. Hiervoor wordt een functie $\tilde{\chi}$ ingevoerd die enkel afhangt van de wereldvolumecoördinaten. De afhankelijkheid van deze functie wordt gekozen zodat als deze nul wordt de ansatz teruggaat naar de ansatz van de Riccivlakke braan (6.2-6.4). Concreet wordt een ansatz voor de metriek, het dilaton en de veldsterkte genomen van de volgende vorm.

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^\alpha(y)e^{A\tilde{\chi}(x)}\tilde{g}_{mn}(x)dx^m dx^n - H^\beta(y)e^{B\tilde{\chi}(x)}\delta_{ij}dy^i dy^j && (6.14)\\ e^{2\phi} &= H^\gamma(y)e^{\Gamma\tilde{\chi}(x)} && (6.15)\\ F_{itx_1\ldots x_p} &= \delta\sqrt{|\tilde{g}(x)|}e^{\Delta\tilde{\chi}(x)}\partial_i H^\epsilon(y) && (6.16)\end{aligned}$$

Hierin zijn A, B, Γ en Δ een aantal nieuwe parameters.

Opnieuw kunnen de verschillende componenten van de Riccitensor worden berekend.

$$\begin{aligned} R_{mn} &= \tilde{R}_{mn} - \tilde{g}_{mn}H^{\alpha-\beta-1}e^{(A-B)\chi}\left[\frac{\alpha}{2}\partial_i\partial^i H + \frac{\alpha(M-\beta-1)}{2}H^{-1}\partial_i H\partial^i H\right]\\ &+\frac{(p-1)A+(d-p-1)B}{2}\tilde{\nabla}_m\partial_n\tilde{\chi} + \left[\frac{(p-1)A^2+(d-p-1)B^2}{4}\right]\partial_m\tilde{\chi}\partial_n\tilde{\chi}\\ &+\frac{A}{2}\tilde{g}_{mn}\left[\tilde{\nabla}_p\tilde{\partial}^p\tilde{\chi} + \frac{(p-1)A+(d-p-1)B}{2}\partial_p\tilde{\chi}\tilde{\partial}^p\tilde{\chi}\right] && (6.17)\\ R_{im} &= \frac{\alpha(d-2)B}{4}H^{-1}\partial_i H\partial_m\tilde{\chi} && (6.18)\\ R_{ij} &= R_{ij} + H^{-1}\left\{\frac{\beta}{2}\delta_{ij}\partial_k\partial^k H + (M-\beta)\partial_i\partial_j H + \frac{\beta(M-\beta-1)}{2}H^{-1}\delta_{ij}\partial_k H\bar{\partial}^k H\right.\\ &+\left.\left[\frac{\alpha^2(p+1)+\beta^2(d-p+1)}{4} - M(\beta+1)+\beta\right]H^{-1}\partial_i H\partial_j H\right\}\\ &-\frac{B}{2}\delta_{ij}e^{-(A-B)\tilde{\chi}}H^{-\alpha+\beta}\left[\tilde{\nabla}_m\tilde{\partial}^m\tilde{\chi} + \frac{(p-1)A+(d-p-1)B}{2}\partial_m\tilde{\chi}\tilde{\partial}^m\tilde{\chi}\right] && (6.19)\end{aligned}$$

Hierin is $\tilde{R}_{mn}$ de Riccitensor van de interne metriek $\tilde{g}_{mn}$. De afgeleide $\tilde{\partial}^m$ is omhooggehaald door $\tilde{g}^{mn}$ en $\tilde{\nabla}_m$ is de covariante afgeleide (A.11) van de metriek $\tilde{g}_{mn}$. De waarde M is opnieuw $M = \frac{\alpha(p+1)+\beta(d-p-1)}{2}$.

Merk op dat in (6.18) de componenten R_{im} in tegenstelling tot het Riccivlakke geval (6.6) niet meer nul is maar wordt bepaald door het scalair veld $\tilde{\chi}$.

Deze ansatz (6.14-6.16) wordt vervolgens eerst in de ijkveldvergelijkingen (5.4) en de dilatonvergelijking (5.5). Dit geeft het volgende resultaat.

- De ijkveldvergelijking (5.4)

$$\begin{aligned} \left[\Delta + \frac{a\Gamma-(p+1)A+(d-p-3)B}{2}\right]\partial_m\tilde{\chi} &= 0 && (6.20)\\ \partial_i\partial^i H + \left[M-\alpha(p+1)-\beta+\frac{a\gamma}{2}+\epsilon-1\right]H^{-1}\partial_i H\partial^i H &= 0 && (6.21)\end{aligned}$$

- De dilatonvergelijking (5.5)

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{2}\partial_i\partial^i H + \Bigg[\frac{\gamma(M-\beta-1)}{2}H^{-1} & \\
+\frac{a\delta^2\epsilon^2}{2}H^{-\alpha(p+1)+\frac{a\gamma}{2}+2\epsilon-1}e^{\left[-(p+1)A+\frac{a\Gamma}{2}+2\Delta\right]\tilde{\chi}}\Bigg]\partial_i H\partial^i H & \\
-\frac{\Gamma}{2}H^{-\alpha+\beta+1}e^{-(A-B)\tilde{\chi}}\left[\tilde{\nabla}_m\tilde{\partial}^m\tilde{\chi}-\frac{(p-1)A-(d-p-1)B}{2}\partial_m\tilde{\chi}\tilde{\partial}^m\tilde{\chi}\right] &= 0 \quad (6.22)
\end{aligned}$$

De waarden voor α, β, γ, δ en ϵ worden opnieuw als in het geval (5.25) gekozen. Hierdoor reduceren de vergelijking 6.21 naar 0.

Vergelijking (6.22) moet opsplitsen in een stuk dat afhankelijk is van x en een stuk dat afhankelijk is van y. Opdat dit zou oplosbaar zijn geeft dit een conditie op de waarde van Γ. Daarnaast legt vergelijking (6.20) in de veronderstelling dat $\partial_m\tilde{\chi}\neq 0$ ook nog een conditie op Γ en Δ. Dit alles geeft het volgende stelsel.

$$\begin{aligned}
-(p+1)A+\frac{a\Gamma}{2}+2\Delta &= 0 \quad (6.23)\\
\Delta+\frac{a\Gamma-(p+1)A+(d-p-3)B}{2} &= 0 \quad (6.24)
\end{aligned}$$

De waarden voor Γ en Δ kunnen vervolgens worden bepaald uit dit stelsel.

$$\Gamma = \tfrac{2(d-p-3)B}{a} \qquad \Delta = \tfrac{(p+1)A+3(d-p-3)B}{2} \quad (6.25)$$

met bovenstaande waardes voor Γ en Δ en de keuze voor de waarden α, β, γ, δ en ϵ reduceert vergelijking (6.22) tot

$$\tilde{\nabla}_m\tilde{\partial}^m\tilde{\chi}-\frac{(p-1)A-(d-p-1)B}{2}\partial_m\tilde{\chi}\tilde{\partial}^m\tilde{\chi}=0. \quad (6.26)$$

Hierin zijn A en B vrije parameters. Kies deze waarden zodat voldaan is aan Als voldaan is aan

$$\frac{(p-1)A-(d-p-1)B}{2}=0. \quad (6.27)$$

Dan wordt deze vergelijking

$$\tilde{\nabla}_m\tilde{\partial}^m\tilde{\chi}=0 \quad (6.28)$$

en kan deze worden geïnterpreteerd als een effectieve bewegingsvergelijking voor een scalair veld $\tilde{\chi}$ op de braan.

Door de voorwaarden (5.25), (6.25), (6.26) en (6.27) worden de im-componenten en de ij-componenten van de Einsteinvergelijking (5.6) met ansatz (6.14-6.16) gelijk aan nul. De mn-Einsteinvergelijking met de ansatz (6.14-6.16) erin ingevuld ziet er uit als

$$\tilde{R}_{mn}+\left[\frac{(p-1)A^2+(d-p-1)B^2}{4}+\frac{(d-p-3)^2B^2}{2a^2}\right]\partial_m\tilde{\chi}\partial_n\tilde{\chi}=0. \quad (6.29)$$

Door de term $\tilde{R}_{mn}$ zou deze vergelijking nu kunnen worden gezien als een effectieve Einsteinvergelijking op de braan. De normalisatie van het scalair veld in deze vergelijking staat echter nog niet helemaal op punt. Als de parameters A en B worden bepaald zodat deze voldoen aan

$$\frac{(p-1)A^2+(d-p-1)B^2}{4}+\frac{(d-p-3)^2B^2}{2a^2}=\frac{1}{2} \quad (6.30)$$

wordt de vergelijking

$$\tilde{R}_{mn} + \frac{1}{2}\partial_m \tilde{\chi} \partial_n \tilde{\chi} = 0 \tag{6.31}$$

met de correcte normalisatie van het scalair veld.

De voorwaarden (6.27) en (6.30) bepalen de waarden van A en B als volgt

$$A = -\tfrac{(d-p-1)B}{p-1} \qquad B = a\sqrt{\tfrac{2(p-1)}{a^2(d-p-1)(d-2)+2(p-1)(d-p-3)^2}} \tag{6.32}$$

Vergelijkingen (6.28) en (6.31) konden worden geïnterpreteerd als respectievelijk een effectieve dilatonvergelijking en een Einsteinvergelijking op de braan. Deze beide bewegingsvergelijkingen blijken afleidbaar te zijn van een actie die er uitziet als

$$\tilde{S} = \int dx \sqrt{|\tilde{g}|}\left[\tilde{R} + \frac{1}{2}\left(\tilde{\partial}\tilde{\chi}\right)^2\right]. \tag{6.33}$$

Deze actie kan dus worden gezien als een effectieve actie op de braan. Er bestaat dus een fysica op de braan met gravitatie en een scalair veld.

Als het scalair veld op de braan $\tilde{\chi}$ nul wordt verdwijnt de dilatonvergelijking (6.28) en moet volgens (6.31) de metriek opnieuw Riccivlak zijn. De oplossing gaat dus terug naar de Riccivlakke braan bekomen in paragraaf 6.1.

Een braanwereld kan zo worden geconstrueerd zodat er op deze braan gravitatie en een scalair veld bestaat. De theorie die hiervoor werd opgesteld bestaat uit een aantal geïnduceerde bewegingsvergelijkingen. Deze bewegingsvergelijkingen op de braan komen overeen met een actie die door variatie naar de verschillende velden deze bewegingsvergelijkingen opleveren. Als het scalair veld in deze theorie wordt gelijk gesteld aan nul moet de braan opnieuw Riccivlak zijn.

6.3 Domeinmuren met kosmologische constante

De volgende stap wordt het invoeren van een geïnduceerde kosmologische constante op de braan. Voor deze veralgemening wordt in eerste instantie een speciale braan beschouwd namelijk een domeinmuur. In een ruimte met d dimensies is een domeinmuur een $(d-2)$-braan en heeft slechts één transversale dimensie. De ruimte wordt dus door deze braan als het ware twee stukken verdeeld. Het blijkt echter dat de bewegingsvergelijkingen een stuk makkelijker oplosbaar zijn als de ansatz van een domeinmuur erin is ingevuld. Hierom wordt dan ook eerst de domeinmuur beschouwd.

Domeinmuren koppelen met een d-vorm veldsterkte. De duale van deze veldsterkte is een kosmologische constante. De beschrijving van een domeinmuur kan dus gebeuren door een actie in de bronruimte met een d-vorm veldsterkte of een kosmologische constante. Meestal wordt voor een domeinmuur een model beschouwd met een kosmologische constante in de bronruimte omdat de bewegingsvergelijkingen eenvoudiger blijken te zijn als in het andere geval.

Naast een metriek en een kosmologische constante kan er in de bronruimte echter nog een dilaton worden beschouwd. Het kan zijn dat het mogelijk is om een model op te stellen dat geen dilaton nodig heeft. In paragraaf 6.3.1 wordt zo een model uitgewerkt. Daarna wordt in paragraaf 6.3.2 een model uitgewerkt dat wel een dilaton heeft in de bronruimte.

6.3.1 Bronruimte zonder dilaton

Er wordt eerst een kosmologische constante geconstrueerd op een domeinmuur in een bronruimte zonder scalair veld. De volgende oplossing werd hiervoor bekomen in [23].

Neem de volgende actie voor de bronruimte bepaald door een metriek $g_{\mu\nu}$ en een kosmologische constante Λ.

$$S = \int dx \sqrt{|g|}\,(R - \Lambda) \tag{6.34}$$

Door het variatieprincipe toe te passen op deze actie wordt de volgende Einsteinvergelijking bekomen.

$$R_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{d-2} g_{\mu\nu} = 0 \tag{6.35}$$

De bronruimte is dus Einsteingekromd. De sterkte van de kromming wordt bepaald door de grootte van de kosmologische constante. Een negatieve kosmologische constante geeft een negatief gekromde ruimte en een positieve constante geeft een positief kromming.

Een Einsteinvergelijking van de vorm (6.35) laat toe een oplossing te construeren met een metriek

$$ds^2 = dt^2 - R(y)\delta_{ij} dx^i dx^j \tag{6.36}$$

met i en j van 1 tot en met $d-1$ en $R(t) = e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{d-1}}t}$. Een oplossingen van deze vorm is een voorbeeld van het de-Sittermodel. Zo een oplossing met $\Lambda > 0$ is de-Sittergekromd en met $\Lambda < 0$ anti-de-Sittergekromd.

Kies de volgende ansatz voor de metriek $g_{\mu\nu}$ bepaald door een metriek op de domeinmuur $\tilde{g}_{mn}$ en de functie H van de transversale coördinaat y.

$$ds^2 = H^2(y)\tilde{g}_{mn}(x) dx^m dx^n - dy^2 \tag{6.37}$$

Deze ansatz heeft dezelfde vorm als deze voor een Riccivlakke braan (6.2) maar heeft voor de yy-component van de ansatz geen afhankelijkheid van H. Omdat er maar één transversale richting is kan er immers altijd een coördinatentransformatie uitgevoerd worden op y zodat deze component van de metriek geen expliciete H-afhankelijkheid meer heeft.

Als deze ansatz (6.37) wordt ingevuld in de Einsteinvergelijkingen (6.35) in respectievelijk de mn-componenten en yy-componenten dan geeft dit de volgende vergelijkingen.

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{mn} - \tilde{g}_{mn} H \left[\partial_y \partial^y H + (d-2) H^{-1} \partial_y H \partial^y H + \frac{\Lambda}{d-2} H^{-1}\right] &= 0 & (6.38)\\
(d-1)\partial_y \partial^y H + \frac{\Lambda}{d-2} H^{-1} &= 0 & (6.39)
\end{aligned}$$

Vergelijking (6.38) moet om oplosbaar te zijn factoriseren in een stuk dat afhangt van x en een stuk dat afhangt van y. Dit kan enkel als het deel tussen de haken dat bepaald is door y constant wordt. Leg daarom de eis

$$\partial_y \partial^y H + (d-2) H^{-1} \partial_y H \partial^y H + \frac{\Lambda}{d-2} H^{-1} = \frac{\tilde{\Lambda}}{d-3} \tag{6.40}$$

op de oplossing. Hierdoor wordt deze vergelijking

$$\tilde{R}_{mn} - \frac{\tilde{\Lambda}}{d-3} g_{mn} = 0. \tag{6.41}$$

Deze vergelijking kan nu worden gezien als een effectieve bewegingsvergelijking op de domeinmuur. In tegenstelling tot het Riccivlakke geval in paragraaf 6.1 wordt de Riccitensor op de braan niet meer nul genomen. De integratieconstante $\tilde{\Lambda}$ kan worden geïnterpreteerd als een kosmologische constante. De metriek op de braan $\tilde{g}_{mn}$ zal dan ook Einsteingekromd zijn.

Vergelijking (6.41) geeft aanleiding tot een theorie op de braan bepaald door de actie

$$\tilde{\mathcal{S}} = \int dx \sqrt{|\tilde{g}|} \left(\tilde{R} - \tilde{\Lambda} \right). \tag{6.42}$$

Deze actie is wat wordt verwacht als $(d-1)$-dimensionele gravitatie koppelt met een kosmologische constante $\tilde{\Lambda}$.

De functie $H(y)$ kan worden bekomen door de differentiaalvergelijkingen (6.40) en (6.39) op te lossen. Er bestaat zo een oplossing in de volgende gevallen.

- $\Lambda \neq 0$

  Er bestaat een oplossing van de bewegingsvergelijkingen voor de functie $H(y)$ voor de volgende waarden van Λ en $\tilde{\Lambda}$.

$$\text{Als } \Lambda < 0 \text{ en } \tilde{\Lambda} < 0 \text{ dan} \quad H(y) = -\sqrt{\frac{(d-1)\tilde{\Lambda}}{(d-3)\Lambda}} \cosh\left[\sqrt{-\frac{\Lambda}{(d-2)(d-1)}} y\right] \tag{6.43}$$

$$\text{Als } \Lambda < 0 \text{ en } \tilde{\Lambda} > 0 \text{ dan} \quad H(y) = \sqrt{-\frac{(d-1)\tilde{\Lambda}}{(d-3)\Lambda}} \sinh\left[\sqrt{-\frac{\Lambda}{(d-2)(d-1)}} y\right] \tag{6.44}$$

$$\text{Als } \Lambda > 0 \text{ en } \tilde{\Lambda} > 0 \text{ dan} \quad H(y) = \sqrt{-\frac{(d-1)\tilde{\Lambda}}{(d-3)\Lambda}} \cos\left[\sqrt{\frac{\Lambda}{(d-2)(d-1)}} y\right] \tag{6.45}$$

  Als $\Lambda < 0$ kunnen zowel positief als negatief gekromde domeinmuren bestaan. Er bestaat echter geen oplossing als $\Lambda > 0$ en $\tilde{\Lambda} < 0$ omdat dan $H(y)$ niet reëel kan worden gemaakt. Met andere woorden kan er geen domeinmuur met anti-de-Sitterkromming worden geconstrueerd als $\Lambda > 0$ maar wel met de-Sitterkromming.

- $\Lambda = 0$

  Als $\Lambda = 0$ moet de functie H voldoen aan de volgende relatie.

$$H(y) = \sqrt{\frac{\tilde{\Lambda}}{(d-2)(d-3)}} y \tag{6.46}$$

  Uit deze vergelijking blijkt echter dat $H(y)$ enkel reëel is als $\tilde{\Lambda} > 0$. Het is dan ook enkel mogelijk in dat geval deze functie als een oplossing te beschouwen. Het is dus enkel mogelijk de-Sitterdomeinmuren te induceren als $\Lambda = 0$.

In dit model blijkt dat het nooit mogelijk is om de kosmologische constante op de domeinmuur $\tilde{\Lambda}$ uniek te bepalen in functie van deze in de bronruimte Λ. Dit betekent de kosmologische constante op de domeinmuur op een restrictie na bepaald door het teken van Λ vrij is. Het is dus mogelijk meerdere domeinmuren te construeren met telkens een andere kosmologische constante. In een bronruimte zonder kosmologische constante blijkt het nog steeds mogelijk te zijn om een domeinmuur te construeren met een kosmologische constante erop als deze constante een positief teken heeft. Het is dus mogelijk om in een Riccivlakke bronruimte een braan te construeren met een kosmologische constante.

Vervolgens kan de vraag worden gesteld of het mogelijk is om het probleem van de kosmologische constante in dit model op te lossen. Vermits de grootte van de kosmologische constantes onafhankelijk is kan de kosmologische constante in de bronwereld zeer groot worden genomen en de kosmologische constante op de braan zeer klein. Dan is er op de bronwereld een kosmologische constante die zeer groot is zoals voorspeld door kwantumveldentheorie en een kleine kosmologische constante op de domeinmuur net zoals deze wordt waargenomen in onze wereld.

De eigenschap dat de kosmologische constante op de domeinmuur mits enkele restricties vrij te kiezen is is in de praktijk niet zo wenselijk. Dit betekent dat in een bepaalde bronruimte de fysica die op de domeinmuur bestaat niet voor alle domeinmuren dezelfde is. De fysica hangt af van hoe de braan geconstrueerd is. Verschillende branen hebben dan ook een verschillende fysica. De mogelijkheid van verschillende universa geeft qua interpretatie nogal wat problemen. Deze constructie heeft geen voorspellende kracht voor de waarde van de kosmologische constante op de domeinmuur. Het is meer wenselijk dat er in een bepaalde bronruimte enkel domeinmuren mogelijk zijn met één welbepaalde fysica.

Bemerk dat als in deze oplossing de kosmologische constante op de domeinmuur de limiet wordt genomen van $\tilde{\Lambda}$ gaande naar nul voor om het even welke waarde van de kosmologische constante in de bronruimte Λ de functie H naar nul gaat. Als $\Lambda \neq 0$ gaat deze constructie in de limiet $\tilde{\Lambda}$ naar nul en niet over naar een Riccivlakke domeinmuur zoals die werd bekomen in paragraaf 6.1.

Een bronruimte met een metriek en een kosmologische constante en zonder dilatonveld laat oplossingen toe die domeinmuren voorstellen met een kosmologische constante erop. De bewegingsvergelijkingen met de ansatz die wordt gekozen heeft enkel een oplossing als er een integratieconstante wordt ingevoerd. Deze constante was te interpreteren als een geïnduceerde kosmologische constante op de braan. De grootte van de kosmologische constante op de bronwereld en van de kosmologische constante op de domeinmuur waren onafhankelijk waardoor het probleem van de kosmologische constante mogelijks kon worden opgelost. Deze kosmologische constante is echter nooit uniek bepaald in functie van de bronruimte. Dit betekent dat er in één welbepaalde bronruimte domeinmuren mogelijk zijn met een verschillende kosmologische constante. Zelfs in een Riccivlakke ruimte blijkt het mogelijk te zijn om een kosmologische constante op een domeinmuur te krijgen. Als de kosmologische constante op de braan naar nul gaat gaat deze constructie niet over naar een Riccivlakke domeinmuur.

6.3.2 Bronruimte met dilaton

Er kan ook gepoogd worden in een bronruimte waar wel een niet triviaal dilaton bestaat om een domeinmuur te construeren met een kosmologische constante. Hiervoor werd een oplossing bekomen in [22].

Beschouw op de bronruimte een actie met een metriek $g_{\mu\nu}$, een dilatonveld ϕ en een kosmologische constante Λ.

$$\mathcal{S} = \int dx \sqrt{|g|} \left[R + \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \Lambda e^{a\phi} \right] \tag{6.47}$$

Deze actie is equivalent met de actie (6.1) voor een $p = d-2$. Enkel werd de veldsterkte vervangen door zijn Hodgeduale. Voor een d-vorm is dit immers een kosmologische constante.

De bewegingsvergelijkingen die met deze actie overeenstemmen zijn de volgende.

- De dilatonvergelijking

$$\nabla_\mu \partial^\mu \phi - a\Lambda e^{a\phi} = 0 \tag{6.48}$$

- De Einsteinvergelijking

$$R_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{d-2} g_{\mu\nu} e^{a\phi} = 0 \tag{6.49}$$

De ansatz voor de metriek en het dilaton wordt op identiek dezelfde manier gekozen als deze van een vlakke braan (6.2) en (6.3). Deze ansatz ziet er als volgt uit.

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^\alpha(y)\tilde{g}_{mn}(x)dx^m dx^n - dy^2 &(6.50)\\ e^{2\phi} &= H^\gamma(y) &(6.51)\end{aligned}$$

Hierin werd zoals in (6.37) de coördinaat y zo gekozen dat de yy-component van de metriek onafhankelijk is van de functie H.

De bewegingsvergelijkingen van het systeem leveren het volgende op als deze ansatz erin wordt ingevuld.

- De bewegingsvergelijking van het dilaton

$$\frac{\gamma}{2}\partial_i\partial^i H + \frac{\gamma[\alpha(d-1)-2]}{4}H^{-1}\partial_i H\partial^i H - a\Lambda H^{\frac{a\gamma}{2}+\beta+1} = 0 \tag{6.52}$$

- De mn-componenten van de Einsteinvergelijking

$$\tilde{R}_{mn} - \tilde{g}_{mn}H^{\alpha-1}\left\{\frac{\alpha}{2}\partial_i\partial^i H + \frac{\alpha[\alpha(d-1)-2]}{4}H^{-1}\partial_i H\partial^i H + \frac{\Lambda}{d-2}H^{\frac{a\gamma}{2}+1}\right\} = 0 \tag{6.53}$$

- De yy-component van de Einsteinvergelijking

$$\frac{\alpha(d-1)}{2}\partial_y\partial_y H + \left[\frac{\alpha(d-1)(\alpha-2)}{4} + \frac{\gamma^2}{8}\right]H^{-1}\partial_y H\partial_y H - \frac{\Lambda}{d-2}H^{\frac{a\gamma}{2}+1} = 0 \tag{6.54}$$

De Einsteinvergelijking (6.53) moet echter zoals in het vorige geval opnieuw factoriseren in x en y. Dit geeft dat er moet voldaan zijn aan

$$\frac{\alpha}{2}\partial_i\partial^i H + \frac{\alpha[\alpha(d-1)-2]}{4}H^{-1}\partial_i H\partial^i H + \frac{\Lambda}{d-2}H^{\frac{a\gamma}{2}+1} = \frac{\tilde{\Lambda}}{d-3}. \tag{6.55}$$

Door deze keuze kan de integratieconstante $\tilde{\Lambda}$ opnieuw worden geïnterpreteerd als een kosmologische constante op de domeinmuur en geeft zoals in paragraaf 6.3.1 een effectieve bewegingsvergelijking op de domeinmuur (6.41) en een geïnduceerde actie (6.42).

De bewegingsvergelijkingen (6.52) en (6.54) en vergelijking (6.55) hebben een oplossing als de parameters α en γ de volgende waarden hebben.

$$\alpha = 2 \qquad \gamma = -\tfrac{4}{a} \tag{6.56}$$

Dan voldoet de functie H aan

$$H(y) = 1 \pm a\sqrt{\frac{\Lambda}{2(d-2)}}y. \tag{6.57}$$

De restrictie (6.55) ingevuld in de Einsteinvergelijking voor transversale richtingen geeft de relatie tussen de kosmologische constante op de bronruimte en de kosmologische constante op de braanwereld.

$$\tilde{\Lambda} = \frac{(d-3)[2-a^2(d-2)]}{2(d-2)}\Lambda \tag{6.58}$$

In tegenstelling tot het model zonder scalair veld blijkt dat in dit geval de kosmologische constante van de domeinmuur wel bepaald is in functie van de kosmologische constante in de bronruimte. Zo blijkt dat als er geen kosmologische constante is in de bronruimte er ook geen kan bestaan op de domeinmuur. Ook blijkt dat de grootte van deze kosmologische constante op de domeinmuur zowel lineair afhankelijk is van deze op de bronruimte als afhankelijk van de grootte van a. Een sterke kosmologische constante op de bronruimte geeft een sterke kosmologische constante op de braanwereld. Als $|a| < \sqrt{\frac{2}{d-2}}$ dan hebben de kosmologische constante in de bronruimte en op de domeinmuur altijd hetzelfde teken. In een de-Sitterruimte kunnen dan enkel de-Sitterdomeinmuren bestaan en in een anti-de-Sitterruimte enkel anti-de-Sitterdomeinmuren. Als $|a| > \sqrt{\frac{2}{d-2}}$ daarentegen hebben de kosmologische constante in de bronruimte en op de domeinmuur een tegengesteld teken waardoor de-Sitterruimtes enkel anti-de-Sitterdomeinmuren hebben en omgekeerd. Het blijkt echter niet mogelijk te zijn om een kosmologische constante te bekomen op de domeinmuur als $|a| = \sqrt{\frac{2}{d-2}}$.

De fysica van een domeinmuur die op deze manier is geconstrueerd is helemaal bepaald functie van de fysica van de bronruimte. Als de kosmologische constante op de braanwereld en a gekend zijn dan kan de kosmologische constante in de bronruimte worden achterhaald. Alle braanwerelden in een bepaalde bronruimte zijn dan ook hetzelfde en de fysica op de braan kan volledig worden verklaard in functie van de bronruimte.

Deze constructie geeft een mogelijke oplossing voor het probleem van de kosmologische constante. Veronderstel dat de kosmologische constante in de bronruimte Λ zeer groot is. Dan kan als $|a|$ zeer dicht bij de waarde $\sqrt{\frac{2}{d-2}}$ ligt de kosmologische constante op de domeinmuur toch zeer klein zijn. Op de bronwereld is er dan een kosmologische constante die zeer groot is zoals voorspeld door kwantumveldentheorie en een kleine kosmologische constante op de domeinmuur net zoals deze wordt waargenomen in onze wereld.

Het blijkt dat het mogelijk is om een domeinmuur te construeren met een kosmologische constante erop in een bronruimte met een metriek, een kosmologische constante en een niet triviaal scalair veld. De kosmologische constante die op die manier op de domeinmuur is gezet is opnieuw een integratieconstante maar wordt in tegenstelling tot het vorige geval zonder dilaton volledig bepaald door a en de kosmologische constante in de bronruimte. Deze constante op de braanwereld is dan ook in een bepaalde bronruimte uniek bepaald. Elke domeinmuur in dezelfde bronruimte met een dilatonveld met een kosmologische constante erop is heeft in tegenstelling tot een bronruimte zonder dilaton een kosmologische constante met dezelfde waarde. Deze constructie laat toe om het probleem van de kosmologische constantes op te lossen omdat deze onder bepaalde condities in een bronwereld met een grootte kosmologische constante een kleine kosmologische constante oplevert op de domeinmuur.

6.4 Domeinmuren met kosmologische constante en scalair veld

In de vorige paragrafen 6.3.1 en 6.3.2 is gebleken dat het mogelijk is om domeinmuren te construeren met een kosmologische constante erop. Overigens is het ook mogelijk om op een braan een scalair veld te induceren zoals in paragraaf 6.2. Nu kan de vraag gesteld worden of die twee modellen kunnen worden gecombineerd om zo een domeinmuur met een kosmologische constante en een scalair veld erop te bekomen.

Om een kosmologische constante en een scalair veld te bekomen op een domeinmuur worden drie modellen vooropgesteld. Ten eerste wordt in paragraaf 6.4.1 een constructie uitgetest met één enkele kosmologische constante in de bronruimte. Vervolgens worden in paragrafen 6.4.2 en 6.4.3 respectievelijk een extra kosmologische constante met een andere koppeling aan het dilaton en een extra scalair veld toegevoegd in de bronruimte naast de bestaande kosmologische constante.

6.4.1 Bronruimte met één kosmologische constante

Om een domeinmuur te construeren is een metriek $g_{\mu\nu}$, een dilaton ϕ en een kosmologische constante Λ nodig in de bronruimte. Dit alles geeft de volgende actie.

$$\mathcal{S} = \int dxdy\sqrt{|g|}\left[R + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \Lambda e^{a\phi}\right] \tag{6.59}$$

Deze actie is hetzelfde als in geval (6.47). De bewegingsvergelijkingen van dit systeem zijn dan ook gegeven door (6.49-6.48).

De ansatz wordt op dezelfde manier gekozen als bij een $(d-1)$-braan met een scalair veld erop (6.14-6.16).

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^2(y)e^{A\tilde{\chi}(x)}\tilde{g}_{mn}(x)dx^m dx^n - e^{B\tilde{\chi}(x)}dy^2 && (6.60)\\ e^{2\phi} &= H^\gamma(y)e^{\Gamma\tilde{\chi}(x)} && (6.61)\end{aligned}$$

De ansatz kan nu opnieuw worden ingevuld in de bewegingsvergelijkingen (6.49-6.48). Dit geeft de volgende uitdrukkingen.

- De dilatonvergelijking

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{2}\partial_y\partial_y H + \frac{\gamma(d-2)}{2}H^{-1}\partial_y H\partial_y H - a\Lambda H^{\frac{a\gamma}{2}+1}&\\ -\frac{\Gamma}{2}H^{-1}e^{-(A-B)\tilde{\chi}}\tilde{\nabla}_m\tilde{\partial}^m\tilde{\chi} &= 0\end{aligned} \tag{6.62}$$

- De ym-Einsteinvergelijkingen

$$2(d-2) - \frac{\gamma}{a} = 0 \tag{6.63}$$

- De mn-Einsteinvergelijkingen

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{mn} - \tilde{g}_{mn}H\left[\partial_y\partial_y H + (d-2)H^{-1}\partial_y H\partial_y H - \frac{\Lambda}{d-2}H^{\frac{a\gamma}{2}+1}\right]&\\ +\frac{1}{2}\partial_m\tilde{\chi}\partial_n\tilde{\chi} + \frac{A}{2}\tilde{g}_{mn}\nabla_k\partial^k\tilde{\chi} &= 0\end{aligned} \tag{6.64}$$

- De yy-Einsteinvergelijking

$$\begin{aligned}(d-1)\partial_y\partial_y H + \frac{\gamma^2}{8}H^{-1}\partial_y H\partial_y H - \frac{\Lambda}{d-2}H^{\frac{a\gamma}{2}+1}&\\ -\frac{B}{2}H^{-1}e^{-(A-B)\tilde{\chi}}\tilde{\nabla}_m\tilde{\partial}^m\tilde{\chi} &= 0\end{aligned} \tag{6.65}$$

Hierin werd de waarde voor Γ zo gekozen zodat deze voldoet aan (6.25). Omdat enkel in dat geval de x- en y-afhankelijkheid factoriseert. De waarden A en B zijn gekozen als in (6.32) zodat de termen bepaald door $\tilde{\chi}$ dan de gewenste vorm krijgen.

De ym-component van de Einsteinvergelijking (6.63) geven aan dat de waarde voor γ moet voldoen aan

$$\gamma = 2a(d-2). \tag{6.66}$$

Om oplosbaar te zijn moeten de vergelijkingen (6.62) en (6.65) factoriseren in x en y. Dit is alleen maar mogelijk als $e^{-(A-B)\tilde{\chi}}\tilde{\nabla}_m\tilde{\partial}^m\tilde{\chi}$ constant is. Dit legt daarom de volgende conditie op de oplossing.

$$\tilde{\nabla}_m\tilde{\partial}^m\tilde{\chi} - Ce^{(A-B)\tilde{\chi}}\tilde{\Lambda} = 0 \tag{6.67}$$

Als $C = -(A - B)$ dan blijkt deze vergelijking overeen te komen met de bewegingsvergelijking van een scalair veld van een systeem met een kosmologische constante $\tilde{\Lambda}$ erop.

Als deze voorwaarde wordt ingevuld in vergelijkingen (6.62) en (6.65) levert dit het volgende op.

$$\begin{aligned} a(d-2)\partial_y\partial_y H + a(d-2)^2 H^{-1}\partial_y H\partial_y H - a\Lambda H^{a^2(d-2)+1} & \\ +\frac{\Gamma C\tilde{\Lambda}}{2}H^{-1}e^{-(A-B)\tilde{\chi}} &= 0 \qquad (6.68) \\ (d-1)\partial_y\partial_y H + \frac{a^2(d-2)^2}{2}H^{-1}\partial_y H\partial_y H - \frac{\Lambda}{d-2}H^{a^2(d-2)+1} & \\ -\frac{BC\tilde{\Lambda}}{2}H^{-1}e^{-(A-B)\tilde{\chi}} &= 0 \qquad (6.69) \end{aligned}$$

Om de mn-componenten van de Einsteinvergelijking (6.64) te kunnen oplossen moet net zoals in paragrafen 6.3.1 en 6.3.2 de afhankelijkheid van x en y zich opsplitsen. Dit kan enkel als het y-afhankelijke stuk in deze vergelijkingen een constante oplevert. Neem deze constante zodat voldaan is aan

$$H\left[\partial_y\partial_y H + (d-2)H^{-1}\partial_y H\partial_y H - \frac{\Lambda}{d-2}H^{a^2(d-2)+1}\right] + \frac{AC\tilde{\Lambda}}{2} = -\frac{\tilde{\Lambda}}{d-3} \qquad (6.70)$$

De vorige twee condities (6.67) en (6.70) geven dan dat (6.64) vereenvoudigt naar de vergelijking

$$\tilde{R}_{mn} + \frac{1}{2}\partial_m\tilde{\chi}\partial_n\tilde{\chi} - \frac{\tilde{\Lambda}}{d-3}e^{-(A-B)\tilde{\chi}}\tilde{g}_{mn} = 0. \qquad (6.71)$$

Deze vergelijking kan worden gezien als een Einsteinvergelijking waarbij de functie $\tilde{\chi}$ opnieuw een scalair veld voorstelt en de integratieconstante $\tilde{\Lambda}$ een kosmologische constante.

De waarde voor C moet voldoen aan

$$C = \frac{d-2}{(d-3)B} \qquad (6.72)$$

dan worden vergelijkingen (6.68) en (6.70) na het invullen van C hetzelfde.

Het probleem reduceert zich dan tot stelsel (6.68-6.69) oplossen. Als wordt aangenomen dat $\tilde{\Lambda} \neq 0$ is dit stelsel enkel en alleen oplosbaar als ten eerste H voldoet aan

$$\partial_y\partial_y H = 0 \qquad (6.73)$$

en ten tweede als a voldoet aan

$$a^2 = -\frac{2}{d-2}. \qquad (6.74)$$

Een voorwaarde op a is helemaal niet wat er wordt verwacht. Deze waarde is een gegeven van het systeem in de bronruimte. Daarenboven is deze voorwaarde onmogelijk vermits a altijd als een reëel getal wordt verondersteld. Het stelsel blijkt dus niet oplosbaar te zijn. Dit betekent dat deze constructie met deze ansatz geen oplossing heeft.

Het is niet mogelijk om binnen de gekozen ansatz in een bronruimte met een metriek, een dilaton en één enkele kosmologische constante een domeinmuur te construeren met een kosmologische constante en een scalair veld erop. Opnieuw wordt betracht een kosmologische constante te bekomen als een integratieconstante zoals in paragrafen 6.3.1 en 6.3.2. Dit systeem levert een stelsel van differentiaalvergelijkingen op die niet oplosbaar is. Er wordt namelijk een eis opgelegd op de bronruimte die onmogelijk kan worden voldaan.

6.4.2 Bronruimte met twee kosmologische constantes

Het blijkt dat een systeem met één enkele kosmologische constante niet in staat is om een domeinmuur te construeren met een kosmologische constante. Het systeem kon enkel resultaat hebben als het dilaton op een onmogelijke manier koppelde met de kosmologische constante. Het systeem legde in (6.74) op dat het kwadraat van de constante die de sterkte deze koppeling geeft een negatief getal moet zijn. Als er op de bronruimte zich twee kosmologische constantes bevinden met een verschillende koppeling wordt dit misschien een product van de twee koppelingsgetallen. Door een conditie op te leggen op het tweede koppelingsgetal zou het probleem (6.74) misschien kunnen worden omzeild.

Beschouw hiervoor in de bronruimte een volgende actie met deze keer twee kosmologische constantes Λ_a en Λ_b met twee verschillende koppelingen met het dilaton gegeven door respectievelijk de koppelingsgetallen a en b.

$$\mathcal{S} = \int dxdy\sqrt{|g|}\left[R + (\partial\phi)^2 - \Lambda_a e^{a\phi} - \Lambda_b e^{b\phi}\right] \tag{6.75}$$

De bewegingsvergelijkingen van deze actie met twee kosmologische constantes ziet er als volgt uit.

- De dilatonvergelijking

$$\nabla_\mu\partial^\mu\phi - a\Lambda_a e^{a\phi} - b\Lambda_b e^{b\phi} = 0 \tag{6.76}$$

- De Einsteinvergelijking

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{\Lambda_a}{d-2}g_{\mu\nu}e^{a\phi} - \frac{\Lambda_b}{d-2}g_{\mu\nu}e^{b\phi} = 0 \tag{6.77}$$

De ansatz wordt vervolgens geconstrueerd op dezelfde manier als bij een braan met een scalair veld erop.

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^\alpha(y)e^{A\tilde{\chi}(x)}\tilde{g}_{mn}(x)dx^m dx^n - H^\beta(y)e^{B\tilde{\chi}(x)}dy^2 &(6.78)\\ e^{2\phi} &= H^\gamma(y)e^{\Gamma\tilde{\chi}(x)} &(6.79)\end{aligned}$$

Als deze ansatz nu wordt ingevuld in de bewegingsvergelijkingen (6.76-6.77) geeft dit de volgende uitdrukkingen.

- De dilatonvergelijking

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma}{2}\partial_y\partial_y H + \frac{\gamma[\alpha(d-2)-\beta-2]}{4}H^{-1}\partial_y H\partial_y H - a\Lambda_a H^{\frac{a\gamma}{2}+\beta+1}\\ &\qquad -b\Lambda_b H^{\frac{b\gamma}{2}+\beta+1}e^{\frac{b\Gamma}{2}+B} - \frac{\Gamma}{2}H^{-\alpha+\beta+1}e^{-(A-B)\tilde{\chi}}\tilde{\nabla}_m\tilde{\partial}^m\tilde{\chi} = 0 \end{aligned} \tag{6.80}$$

- De ym-Einsteinvergelijkingen

$$\alpha(d-2) - \frac{\gamma}{a} = 0 \tag{6.81}$$

- De mn-Einsteinvergelijkingen

$$\begin{aligned}&\tilde{R}_{mn} - \tilde{g}_{mn}H^{\alpha-\beta-1}\left\{\frac{\alpha}{2}\partial_y\partial_y H + \frac{\alpha[\alpha(d-2)-\beta-2]}{4}H^{-1}\partial_y H\partial_y H\right.\\ &\qquad\left. -\frac{\Lambda_a}{d-2}H^{\frac{a\gamma}{2}+\beta+1} - \frac{\Lambda_b}{d-2}H^{\frac{b\gamma}{2}+\beta+1}e^{\frac{b\Gamma}{2}+B}\right\}\\ &\qquad\qquad +\frac{1}{2}\partial_m\tilde{\chi}\partial_n\tilde{\chi} + \frac{A}{2}\tilde{g}_{mn}\nabla_k\partial^k\tilde{\chi} = 0\end{aligned} \tag{6.82}$$

- De yy-Einsteinvergelijking

$$\frac{\alpha(d-1)}{2}\partial_y\partial_y H + \left[\frac{\alpha(\alpha-\beta)(d-1)}{4} - \frac{\alpha(d-1)}{2} + \frac{\gamma^2}{8}\right] H^{-1}\partial_y H \partial_y H$$
$$-\frac{\Lambda_a}{d-2}H^{\frac{a\gamma}{2}+\beta+1} - \frac{\Lambda_b}{d-2}H^{\frac{b\gamma}{2}+\beta+1}e^{\frac{b\Gamma}{2}+B}$$
$$-\frac{B}{2}H^{-\alpha+\beta+1}e^{-(A-B)\tilde{\chi}}\tilde{\nabla}_m\tilde{\partial}^m\tilde{\chi} = 0 \quad (6.83)$$

Hierin werden de constanten A, B en Γ opnieuw genomen zoals in (6.32) en (6.25) omdat dan opnieuw de x-afhankelijkheid en y-afhankelijkheid opsplitst.

Als de extra kosmologische constante Λ_b naar nul gaat dan gaan de bewegingsvergelijkingen terug naar de bewegingsvergelijkingen voor een braan met een scalair veld met een kosmologische constante in plaats van een d-vorm ijkveld. Er wordt dan ook aangenomen dat als Λ_b naar nul gaat het systeem teruggaat naar deze oplossing bekomen in paragraaf 6.2. Neem dan aan dat de kosmologische constante Λ_a wordt gebruikt om deze braan te construeren. De extra kosmologische constante Λ_b moet de kosmologische constante op de braan $\tilde{\Lambda}$ opleveren. De waarden α, β en γ worden vervolgens ook genomen als in dat geval. Concreet uitgewerkt wordt dit dan voor $p = d-2$.

$$\begin{aligned} \alpha &= \tfrac{4}{N} & \beta &= \tfrac{4(d-1)}{N} \\ \gamma &= \tfrac{4a(d-2)}{N} \end{aligned} \quad (6.84)$$

Hierin geldt $N = a^2(d-2) - 2(d-1)$. Door deze keuze van α en γ is de ym-Einsteinvergelijking (6.81) voldaan.

De functie H wordt vervolgens ook zo bepaald zodat deze zou voldoen aan de oplossing bekomen in paragraaf 6.2. Dit geeft dat H moet voldoen aan

$$H(y) = 1 \pm \sqrt{\frac{N\Lambda}{2(d-2)}}y. \quad (6.85)$$

Als de waarden voor α, β en γ en de functie H worden ingevuld in vergelijkingen (6.80) en (6.83) vereenvoudigen deze tot het volgende stelsel.

$$b\Lambda_b H^{\frac{b\gamma}{2}+\beta+1}e^{\left(\frac{b\Gamma}{2}+B\right)\tilde{x}} + \frac{\Gamma}{2}H^{-\alpha+\beta+1}e^{-(A-B)\tilde{x}}\tilde{\nabla}_m\tilde{\partial}^m\tilde{\chi} = 0 \quad (6.86)$$

$$\frac{\Lambda_b}{d-2}H^{\frac{b\gamma}{2}+\beta+1}e^{\left(\frac{b\Gamma}{2}+B\right)\tilde{x}} + \frac{B}{2}H^{-\alpha+\beta+1}e^{-(A-B)\tilde{x}}\tilde{\nabla}_m\tilde{\partial}^m\tilde{\chi} = 0 \quad (6.87)$$

Om oplosbaar te zijn moet in deze vergelijkingen het x-afhankelijke stuk en y-afhankelijke stuk een constante opleveren. Dit legt de volgende twee condities op de oplossing.

- Ten eerste moet de y-afhankelijkheid volledig kunnen worden weggedeeld uit de oplossing. Dit betekent dat er moet voldaan zijn aan

$$\alpha + \frac{b\gamma}{2} = 0. \quad (6.88)$$

Dit model is dus enkel mogelijk als de tweede kosmologische constante op een bepaalde manier koppelt met het dilatonveld. Hiervoor moet b voldoen aan

$$b = -\frac{2}{a(d-2)}. \quad (6.89)$$

De waarde van b is bepaald in functie van a en de dimensie d. In het algemeen zijn de waarden voor a en b dus verschillend. Opdat dit model zou werken moeten er in de bronruimte dus twee kosmologische constantes bestaan met een verschillende koppeling aan het dilaton. Dit is helemaal verschillend met het model dat werd vooropgesteld voor een domeinmuur met een kosmologische constante zonder scalair veld in paragrafen 6.3.1 en 6.3.2. Daar was maar één enkele kosmologische constante nodig in de bronruimte.

- Ten tweede moet het x-afhankelijke stuk $e^{-(A-\frac{b\Gamma}{2})\tilde{\chi}}\tilde{\nabla}_m\tilde{\partial}^m\tilde{\chi}$ een constante zijn. Leg daarom de volgende conditie op de oplossing.

$$\tilde{\nabla}_m\tilde{\partial}^m\tilde{\chi} - Ce^{(A-\frac{b\Gamma}{2})\tilde{\chi}}\tilde{\Lambda} = 0 \tag{6.90}$$

  Uit de waarde voor b (6.89) en de conditie (6.90) blijkt dat vergelijkingen (6.86) en (6.87) vereenvoudigen naar éénzelfde uitdrukking gegeven door

$$\frac{\Lambda_b}{d-2} + \frac{BC\tilde{\Lambda}}{2} = 0. \tag{6.91}$$

De mn-componenten van de Einsteinvergelijking (6.82) vereenvoudigt rekening houdende met de waarden van α, β en γ (6.84) en de vorige condities (6.89) en (6.90) naar

$$\tilde{R}_{mn} + \frac{1}{2}\partial_m\tilde{\chi}\partial_n\tilde{\chi} - \left[\frac{\Lambda_b}{d-2} + \frac{BC\tilde{\Lambda}}{2(d-3)}\right] e^{(A-\frac{b\Gamma}{2})\tilde{\chi}}\tilde{g}_{mn} = 0. \tag{6.92}$$

Om deze kunnen te kunnen interpreteren als een effectieve bewegingsvergelijking op de braan zoals in de vorige gevallen wordt de volgende conditie opgelegd

$$\frac{\Lambda_b}{d-2} + \frac{BC\tilde{\Lambda}}{2(d-3)} = \frac{\tilde{\Lambda}}{d-3} \tag{6.93}$$

De condities (6.91) en (6.93) kunnen nu worden opgelost om een concrete waarde te bekomen voor C en een relatie te vinden tussen de kosmologische constante op de braan $\tilde{\Lambda}$ en deze in de bronruimte Λ_b. Hieruit blijkt dat de twee kosmologische constantes moeten voldoen aan

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda_b. \tag{6.94}$$

De kosmologische constante op de bronruimte Λ_b en de constante $\tilde{\Lambda}$ die kan worden geïnterpreteerd als kosmologische constante op de braanwereld moeten dus exact gelijk zijn. De kosmologische constante op de domeinmuur is dus uniek bepaald in functie van deze in de bronruimte.

Merk op dat om een kosmologische constante te bekomen op de domeinmuur een totaal andere methode werd gebruikt als in het model van een domeinmuur met enkel een kosmologische constante in paragrafen 6.3.1 en 6.3.2. Daar werd de kosmologische constante op de domeinmuur bekomen als een integratieconstante die nodig was om de y-afhankelijkheid weg te krijgen. Terwijl in dit model de kosmologische constante op de domeinmuur werd bekomen door een extra kosmologische constante in de bronruimte Λ_b te projecteren op de domeinmuur. Ook blijkt deze kosmologische constante op de domeinmuur totaal onafhankelijk te zijn van de andere kosmologische constante in de bronruimte Λ_a. In paragraaf 6.3.2 was deze kosmologische constante op de domeinmuur nu net wel bepaald in functie van de andere kosmologische constante in de bronruimte.

Neem voor de constante C de waarde

$$C = -\frac{2}{(d-2)B} = A - \frac{b\Gamma}{2} \tag{6.95}$$

waardoor de vergelijkingen (6.90) en (6.92) vereenvoudigen tot de volgende vergelijkingen.

$$\tilde{R}_{mn} + \frac{1}{2}\partial_m\tilde{\chi}\partial_n\tilde{\chi} - \frac{\tilde{\Lambda}}{d-3}e^{C\tilde{\chi}}\tilde{g}_{mn} = 0 \tag{6.96}$$

$$\tilde{\nabla}_m\tilde{\partial}^m\tilde{\chi} - Ce^{C\tilde{\chi}}\tilde{\Lambda} = 0 \tag{6.97}$$

Deze vergelijkingen kunnen nu gezien worden als effectieve bewegingsvergelijkingen op de braan. Het is mogelijk om een actie op te stellen die door variatie naar de metriek en het scalair veld deze vergelijkingen opleveren. Deze actie ziet er als volgt uit.

$$\tilde{\mathcal{S}} = \int dx \sqrt{|\tilde{g}|} \left[\tilde{R} + \frac{1}{2} \left(\tilde{\partial} \tilde{\chi} \right)^2 - \tilde{\Lambda} e^{C\tilde{\chi}} \right] \tag{6.98}$$

Er kan dus een theorie bepaald worden op de braan gebaseerd op een actie en die volledig bepaald is in functie van de velden in de bronruimte.

Als het scalair veld op de braanwereld $\tilde{\chi}$ naar nul gaat wordt deze oplossing niet deze die werd bekomen in paragrafen 6.3.1 en 6.3.2. De bronruimte waarvan wordt gestart is totaal verschillend en de oplossingsmethode verloopt op een totaal andere manier.

Wat het probleem van de kosmologische constante betreft biedt ook dit model een mogelijke oplossing. De eerste kosmologische constante in de bronruimte Λ_a kan zeer groot zijn zoals kwantumveldentheorie dit oplegt. Als de extra kosmologische constante in de bronruimte Λ_b zeer klein is dan is ook de kosmologische constante op de domeinmuur $\tilde{\Lambda}$ zeer klein. Hiermee kan het probleem opgelost zijn. Dan wordt de vraag waarom de ene kosmologische constante in de bronruimte zeer klein is en de andere zeer groot.

In een bronruimte met twee kosmologische constantes blijkt het mogelijk te zijn om een braanwereld te construeren met een kosmologische constante en een scalair veld erop. De koppeling van de kosmologische constantes in de bronruimte met het dilaton moet wel op een zeer specifieke manier gebeuren opdat dit zou werken. Hierbij wordt een kosmologische constante gebruikt om de domeinmuur te construeren en de andere om de kosmologische constante op de domeinmuur te zetten. Dit model gaat echter niet over in het model dat werd gevonden voor een domeinmuur met een kosmologische constante zonder scalair veld. Dit model bied mogelijk een oplossing tot het probleem van de kosmologische constante als de ene kosmologische constante in de bronruimte zeer klein is, waardoor een kleine kosmologische constante op de domeinmuur mogelijk is, en de andere zeer groot, zodat kwantumveldentheorie consistent kan zijn.

6.4.3 Bronruimte met kosmologische constante en scalair veld

In het vorige model bleek dat een tweede kosmologische constante in de bronruimte een kosmologische constante oplevert op de domeinmuur. De kosmologische constante op de bronruimte is Hodgeduaal aan een d-vorm veldsterkte en de kosmologische constante op de domeinmuur aan een $(d-1)$-vorm. Een d-vorm in de bronwereld moet dus ook kunnen worden verbonden aan een $(d-1)$-vorm op de braanwereld. Als deze lijn wordt doorgetrokken zou een $(r+1)$-vorm in de bronruimte misschien verbonden kunnen worden aan een r-vorm op de domeinmuur. Een scalair veld moet dan een kosmologische constante kunnen opleveren. Hiervoor werd reeds een oplossing bekomen voor een drie braan in een vijfdimensionale bronruimte door Lidsey [24].

Beschouw hiervoor een bronruimte met een kosmologische constante Λ een scalair veld σ.

$$\mathcal{S} = \int dxdy \sqrt{|g|} \left[R + (\partial\phi)^2 - \Lambda e^{a\phi} + \frac{1}{2} e^{b\phi} (\partial\sigma)^2 \right] \tag{6.99}$$

Uit deze actie kunnen de volgende bewegingsvergelijkingen worden afgeleid.

- De bewegingsvergelijking van het scalair veld

$$\nabla_\mu \left(e^{b\phi} \partial^\mu \sigma \right) = 0 \tag{6.100}$$

- De dilatonvergelijking

$$\nabla_\mu \partial^\mu \phi - a\Lambda e^{a\phi} + b e^{b\phi} (\partial\sigma)^2 = 0 \tag{6.101}$$

- De Einsteinvergelijking

$$R_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{d-2} g_{\mu\nu} e^{a\phi} + \frac{1}{2} e^{b\phi} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma = 0 \tag{6.102}$$

Neem de ansatz voor de metriek en het dilaton opnieuw zoals (6.4.3). Het scalair veld krijgt de ansatz

$$\partial_y \sigma = \theta H^\kappa. \tag{6.103}$$

De oplossingsmethode van deze constructie loopt in grote lijnen op dezelfde manier als in paragraaf 6.4.2. Eerst wordt de domeinmuur genomen zodat er een scalair veld erop bestaat totaal onafhankelijk van wat σ is. De parameters worden omwille van dezelfde redenen als in paragraaf 6.4.2 opnieuw gekozen zodat deze voldoen aan (6.32), (6.25) en (6.84).

Als in de dilatonvergelijking (6.101) en de ij-Einsteinvergelijking (6.102) de ansatz en de parameters worden ingevuld wordt het volgende bekomen.

$$\frac{\Gamma}{2} H^{-\alpha+\beta+1} e^{-(A-B)\tilde{\chi}} \tilde{\nabla}_m \tilde{\partial}^m \tilde{\chi} - \frac{b\theta^2}{2} H^{\frac{b\gamma}{2}+2\kappa+1} e^{\frac{b\Gamma}{2}\tilde{\chi}} = 0 \tag{6.104}$$

$$\frac{B}{2} H^{-\alpha+\beta+1} e^{-(A-B)\tilde{\chi}} \tilde{\nabla}_m \tilde{\partial}^m \tilde{\chi} - \frac{\theta^2}{2} H^{\frac{b\gamma}{2}+2\kappa+1} e^{\frac{b\Gamma}{2}\tilde{\chi}} = 0 \tag{6.105}$$

Om oplosbaar te zijn moet in deze vergelijkingen de x-afhankelijkheid en y-afhankelijkheid kunnen verdwijnen. Dit legt opnieuw twee voorwaarden op.

- De y-afhankelijkheid moet volledig kunnen worden weggedeeld uit vergelijkingen (6.104-6.105). Dit betekend dat er moet voldaan zijn aan

$$\alpha - \beta + \frac{b\gamma}{2} + 2\kappa = 0. \tag{6.106}$$

  Deze vergelijkingen leggen een voorwaarde op de waarden van b en κ. Samen met de bewegingsvergelijking van het scalair veld, die na het invullen van ansatz er uitziet als

$$\alpha(d-1) - \beta + b\gamma + 2\kappa = 0, \tag{6.107}$$

  levert dit een oplossing op voor deze waarden.

$$b = \tfrac{2}{a} \qquad \kappa = -\tfrac{4(d-2)}{N} \tag{6.108}$$

  Het scalair veld in de bronruimte kan zoals bij het model met twee kosmologische constantes op de bronruimte enkel een kosmologische constante opleveren op de braanwereld als het een bepaalde koppeling heeft met het dilatonveld.

- Vervolgens moet het x-afhankelijke stuk $e^{\left(A-B-\frac{b\Gamma}{2}\right)\tilde{\chi}} \tilde{\nabla}_m \tilde{\partial}^m \tilde{\chi}$ een constante zijn. Leg daarom de volgende conditie op de oplossing.

$$\tilde{\nabla}_m \tilde{\partial}^m \tilde{\chi} - C e^{-\left(A-B-\frac{b\Gamma}{2}\right)\tilde{\chi}} \tilde{\Lambda} = 0 \tag{6.109}$$

  Uit de waarde voor b (6.108) en de voorwaarde (6.109) blijkt dat zoals in het vorige geval de vergelijkingen (6.104) en (6.105) vereenvoudigen naar één vergelijking die overeenkomt met

$$BC\tilde{\Lambda} + \theta^2 = 0. \tag{6.110}$$

De mn-componenten van de Einsteinvergelijking (6.102) vereenvoudigt rekening houdende met de waarden van α, β en γ (6.84) en de vorige condities (6.108) en (6.109) naar

$$\tilde{R}_{mn} + \frac{1}{2}\partial_m\tilde{\chi}\partial_n\tilde{\chi} - \frac{BC\tilde{\Lambda}}{2(d-3)}e^{\left(A-\frac{b\Gamma}{2}\right)\tilde{\chi}}\tilde{g}_{mn} = 0. \tag{6.111}$$

Om een consistente oplossing te bekomen moet slechts nog aan één vergelijking (6.110) zijn voldaan. er zijn echter nog twee variabelen in het spel namelijk C en $\tilde{\Lambda}$. er kan dus één van deze waarden vrij worden gekozen. Neem voor de constante C de volgende waarde.

$$C = -\frac{2}{B} = A - B - \frac{b\Gamma}{2} \tag{6.112}$$

Vergelijking (6.110) geeft dan voor de deze keuze van C een waarde voor $\tilde{\Lambda}$ die moet voldoen aan

$$\tilde{\Lambda} = \frac{\theta^2}{2}. \tag{6.113}$$

Uit deze vergelijking blijkt dat de sterkte van het scalair veld de grootte van de kosmologische constante bepaald. Als het scalair veld in de bronruimte zeer groot is wordt de kosmologische constante ook zeer groot. Het teken van deze kosmologische constante is altijd positief. Als het scalair veld in de bronruimte gelijk wordt gesteld aan nul dan wordt ook de kosmologische constante op de domeinmuur nul. De waarde van de kosmologische constante in de bronruimte heeft geen enkele invloed op de grootte van deze op de braan. Ook deze oplossing gaat als het scalair veld op de braan nul wordt niet over naar de oplossing met een kosmologische constante op de domeinmuur zonder scalair veld.

Overigens blijkt dat als C zo gekozen is dat vergelijkingen (6.109) en (6.111) die kunnen worden gezien als bewegingsvergelijkingen die afleidbaar zijn van de volgende actie.

$$\tilde{S} = \int dx\sqrt{|\tilde{g}|}\left[\tilde{R} + \frac{1}{2}\left(\tilde{\partial}\tilde{\chi}\right)^2 - \tilde{\Lambda}e^{C\tilde{\chi}}\right] \tag{6.114}$$

Dit stemt overeen met een actie van een domeinmuur met gravitatie, een scalair veld en een kosmologische constante dat koppelt aan dit scalair veld. In vergelijking met het vorige geval koppelt de kosmologische constante wel anders met het scalair veld. In een bronruimte met twee kosmologische constantes koppelde de geïnduceerde kosmologische constante met een factor $e^{-\frac{2}{(d-2)B}}$ en in dit geval met een factor $e^{-\frac{2}{B}}$.

Net zoals in paragraaf 6.4.2 is het mogelijk dat de kosmologische constante op de bronruimte zeer groot is en de kosmologische constante op de domeinmuur klein. Om dit mogelijk te maken moet het extra scalair veld in de bronruimte wel zeer zwak zijn. Onder deze voorwaarde is het probleem van de kosmologische constante opgelost.

Het is mogelijk om in een bronruimte met een kosmologische constante en een scalair veld een domeinmuur te construeren met een kosmologische constante en een scalair veld. Het scalair veld in de bronruimte moet op een bepaalde manier koppelen aan het dilaton om deze oplossing mogelijk te maken. De kosmologische constante wordt volledig vastgelegd door de sterkte van het scalair veld in de bronruimte. Het blijkt dat deze kosmologische constante op de braan opnieuw koppelt aan het scalair veld. Het is echter zo dat deze op een andere manier koppelt als dat in het geval wat in een bronruimte met twee kosmologische constantes. De kosmologische constante die wordt bekomen op de domeinmuur is altijd positief. Als het scalair veld in de bronruimte zeer zwak is levert dit een kleine kosmologische constante op de domeinmuur ook al is de kosmologische constante op de bronruimte zeer groot. Op deze manier kan het probleem van de kosmologische constante worden opgelost.

6.5 p-Branen met kosmologische constante en scalair veld

Uit paragrafen 6.4.2 en 6.4.3 blijkt de mogelijkheid te bestaan om de constructie van een domeinmuur met een kosmologische constante en een scalair veld te realiseren. Sterker nog blijken er twee verschillende constructies te bestaan. Nu kan worden geprobeerd om deze modellen te veralgemenen naar een p-braan.

Twee verschillende modellen voor een p-braan met een geïnduceerd scalair veld en kosmologische constante zullen worden uitgetest die telkens een veralgemening zijn van de modellen in de vorige paragrafen. Een model met één enkele kosmologische constante bleek niet in staat te zijn om een domeinmuur met een kosmologische constante en een scalair veld op te leveren. Dus wordt verwacht dat een model met één enkel vormveld niet zal werken. Er moet naast het vormveld een ander veld aanwezig zijn die een kosmologische constante kan opleveren. Er wordt één model opgesteld met een extra vormveld in paragraaf 6.5.1 en een ander model met een extra scalair veld in paragraaf 6.5.2 .

6.5.1 Bronruimte met twee vormvelden

Om een p-braan te construeren moet opnieuw een $(p+2)$-vorm veldsterkte worden ingevoerd. Door een extra $(p+2)$-vorm veldsterkte toe te voegen als veralgemening van de extra kosmologische constante in 6.4.2 wordt dan betracht om een kosmologische constante te verkrijgen op de braan. De methode met een tweede kosmologische constante in de bronruimte in paragraaf 6.4.2 die een domeinmuur geeft met een kosmologische constante en een scalair veld kan zo worden veralgemeend naar een bronruimte met een extra $(p+2)$-vorm veldsterkte. Dit geeft een actie die er uitziet als

$$\mathcal{S} = \int dxdy\sqrt{|g|}\left[R + \frac{1}{2}\left(\partial\phi\right)^2 + \frac{(-)^{p+1}}{2(p+2)!}e^{a\phi}F^2 + \frac{(-)^{p+1}}{2(p+2)!}e^{b\phi}G^2\right] \tag{6.115}$$

en is op de laatste term na equivalent met (6.1). Met deze actie komen de volgende bewegingsvergelijkingen overeen.

- De bewegingsvergelijking van het ijkveld van $F_{(p+2)}$

$$\nabla_{\mu_1}\left(e^{a\phi}F^{\mu_1\cdots\mu_{p+2}}\right) = 0 \tag{6.116}$$

- De bewegingsvergelijking van het ijkveld van $G_{(p+2)}$

$$\nabla_{\mu_1}\left(e^{b\phi}G^{\mu_1\cdots\mu_{p+2}}\right) = 0 \tag{6.117}$$

- De dilatonvergelijking

$$\nabla_\mu\partial^\mu\phi - \frac{(-)^{p+1}}{2(p+2)!}\left(ae^{a\phi}F^2 + be^{b\phi}G^2\right) = 0 \tag{6.118}$$

- De vereenvoudigde Einsteinvergelijking

$$\begin{aligned} & R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \\ + \frac{(-)^{p+1}}{2(p+1)!}\Bigg\{ & e^{a\phi}\left[F_{\mu\mu_2\cdots\mu_{p+2}}F_\nu^{\mu_2\cdots\mu_{p+2}} - \frac{p+1}{(p+2)(d-2)}g_{\mu\nu}F^2\right] \\ & + e^{b\phi}\left[G_{\mu\mu_2\cdots\mu_{p+2}}G_\nu^{\mu_2\cdots\mu_{p+2}} - \frac{p+1}{(p+2)(d-2)}g_{\mu\nu}G^2\right]\Bigg\} = 0 \end{aligned} \tag{6.119}$$

Als ansatz voor deze constructie wordt voor de metriek, het dilaton en de veldsterkte dezelfde ansatz gekozen als (6.14-6.16). Het extra veld krijgt een ansatz die van dezelfde vorm is als (6.16) en ziet er uit als

$$G_{itx_1\ldots x_p} = \theta\sqrt{|\tilde{g}(x)|}e^{\Theta\tilde{\chi}(x)}\partial_i H^{\kappa}(y) \tag{6.120}$$

maar heeft andere parameters θ, κ en Θ.

Als deze ansatz wordt ingevuld in enkele bewegingsvergelijkingen (6.117) en (6.122-6.119) geeft dit het volgende resultaat.

- De ijkveldvergelijking van het veld $F_{\mu\nu}$

$$\partial_i\partial^i H + \left[M - \alpha(p+1) - \beta + \frac{a\gamma}{2} + \epsilon - 1\right] H^{-1}\partial_i H\partial^i H = 0 \tag{6.121}$$

- De dilatonvergelijking

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2}\partial_i\partial^i H + \left[\frac{\gamma(M-\beta-1)}{2}H^{-1} + \frac{a\delta^2\epsilon^2}{2}H^{-\alpha(p+1)+\frac{a\gamma}{2}+2\epsilon-1}\right]\partial_i H\partial^i H & \\ -\frac{\Gamma}{2}H^{-\alpha+\beta+1}e^{-(A-B)\tilde{\chi}}\tilde{\nabla}_m\tilde{\partial}^m\tilde{\chi} & \\ +\frac{b\theta^2\kappa^2}{2}H^{-\alpha(p+1)+\frac{b\gamma}{2}+2\kappa-1}e^{\left[-(p+1)A+\frac{b\Gamma}{2}+2\Theta\right]\tilde{\chi}}\partial_i H\partial^i H &= 0 \end{aligned} \tag{6.122}$$

- De (m,n)-componenten van de Einsteinvergelijking

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{mn} - \tilde{g}_{mn}H^{\alpha-\beta-1}e^{(A-B)\tilde{\chi}}\left\{\frac{\alpha}{2}\partial_i\partial^i H + \left[\frac{\alpha(D-\beta-1)}{2}H^{-1}\right.\right. & \\ \left.\left.+\frac{\delta^2\epsilon^2(d-p-3)}{2(d-2)}H^{-\alpha(p+1)+\frac{a\gamma}{2}+2\epsilon-1}\right]\partial_i H\partial^i H\right\} & \\ +\frac{1}{2}\partial_m\tilde{\chi}\partial_n\tilde{\chi} + \frac{A}{2}\tilde{g}_{mn}\tilde{\nabla}_p\tilde{\partial}^p\tilde{\chi} & \\ +\frac{\theta^2\kappa^2(d-p-3)}{2(d-2)}\tilde{g}_{mn}H^{-\alpha p-\beta+\frac{b\gamma}{2}+2\kappa-2}e^{\left[-(p+1)A+\frac{b\Gamma}{2}+2\Theta\right]\tilde{\chi}}\partial_i H\partial^i H &= 0 \end{aligned} \tag{6.123}$$

- De (i,j)-componenten van de Einsteinvergelijking

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2}\delta_{ij}\partial_k\partial^k H + (D-\beta)\partial_i\partial_j H & \\ +\left[\frac{\beta(M-\beta-1)}{2}H^{-1} + \frac{\delta^2\epsilon^2(p+1)}{2(d-2)}H^{-\alpha(p+1)+\frac{a\gamma}{2}+2\epsilon-1}\right]\delta_{ij}\partial_k H\partial^k H & \\ +\left\{\left[\frac{\alpha^2(p+1)}{4} + \frac{\beta^2(d-p+1)}{4} - M(\beta+1) + \beta + \frac{\gamma^2}{8}\right]H^{-1}\right. & \\ \left.-\frac{\delta^2\epsilon^2}{2}H^{-\alpha(p+1)+\frac{a\gamma}{2}+2\epsilon-1}\right\}\partial_i H\partial_j H & \\ -\frac{B}{2}\delta_{ij}e^{-(A-B)\tilde{\chi}}H^{-\alpha+\beta+1}\tilde{\nabla}_m\tilde{\partial}^m\tilde{\chi} & \\ +\frac{\theta^2\kappa^2(p+1)}{2(d-2)}H^{-\alpha(p+1)+\frac{b\gamma}{2}+2\kappa-1}e^{\left[-(p+1)A+\frac{b\Gamma}{2}+2\Theta\right]\tilde{\chi}}\delta_{ij}\partial_k H\partial^k H & \\ -\frac{\theta^2\kappa^2}{2}H^{-\alpha(p+1)+\frac{b\gamma}{2}+2\kappa-1}e^{\left[-(p+1)A+\frac{b\Gamma}{2}+2\Theta\right]\tilde{\chi}}\partial_i H\partial_j H &= 0 \end{aligned} \tag{6.124}$$

Hierin geldt opnieuw dat $M = \frac{\alpha(p+1)+\beta(d-p-1)}{2}$. De waarden voor werden A, B, Γ en Δ zo gekozen zodat deze voldoen aan (6.32) en (6.25) omwille van dezelfde redenen als in paragraaf 6.2.

Merk op dat als de extra veldsterkte naar nul gaat gaan bewegingsvergelijkingen (6.121-6.124) gaan naar de vergelijkingen voor een p-braan met een scalair veld erop in paragraaf 6.2. Van het extra veld $G_{(p+2)}$ wordt overigens zoals in paragraaf 6.4.2 van de extra kosmologische constante het geval was ook verwacht dat deze de kosmologische constante op de braan oplevert. De i-component van de ijkveld vergelijking (6.121) heeft een oplossing als H de vorm $P + Qr^{\varphi}$ heeft. Daarom zal met het veld $F_{(p+2)}$ terug worden gebruikt om een braan te construeren volgens het stramien in paragraaf 6.2. Kies daarom een herschaalde vorm van de harmonische functie met een macht $2(d-p-3)$ voor de functie H die er uitziet als

$$H(r) = Qr^2. \tag{6.125}$$

Deze functie heeft een zeer praktische vorm omdat dit geeft dat $\partial_i\partial^i H = 2(d-p-1)Q$ en $H^{-1}\partial_i H\partial^i H = 4Q$. Hierdoor worden de bewegingsvergelijkingen na het invullen van deze functie makkelijker oplosbaar. De parameters α, β, γ, δ en ϵ worden dan na de herschaling gegeven door de volgende gelijkheden.

$$\begin{array}{rclrcl} \alpha & = & -\frac{8}{N} & \beta & = & \frac{8(p+1)}{(d-p-3)N} \\ \gamma & = & \frac{8a(d-2)}{(d-p-3)N} & \delta & = & \sqrt{\frac{4(d-2)}{N}} \\ \epsilon & = & -\frac{2}{d-p-3} & & & \end{array} \tag{6.126}$$

Hierin geldt opnieuw dat $N = a^2(d-2) + 2\,(p+1)\,(d-p-3)$.

Door deze keuze voor H en de parameters α, β, γ, δ en ϵ wordt de ijkveldvergelijking van het veld $F_{\mu\nu}$ (6.121) nul.

Als daarenboven nog voldaan is aan

$$p\alpha + \beta - \frac{b\gamma}{2} - 2\kappa + 1 = 0 \tag{6.127}$$

dan kan de y-afhankelijkheid in vergelijkingen (6.122-6.124) volledig worden weggedeeld. Hierdoor hebben deze vergelijking enkel nog afhankelijkheid van x.

Als in de dilatonvergelijking (6.122) deze condities (6.125), (6.126) en (6.127) worden ingevuld geeft dit dat moet voldaan zijn aan

$$\tilde{\nabla}_m\tilde{\partial}^m\tilde{\chi} - Ce^{\left(-pA-B+\frac{b\Gamma}{2}+2\Theta\right)\tilde{\chi}}\tilde{\Lambda} = 0 \tag{6.128}$$

waarin C bepaald is als

$$C = -\frac{4b\theta^2}{\Gamma} \tag{6.129}$$

Opnieuw kan vergelijking (6.128) worden gezien als een dilatonvergelijking en $\tilde{\Lambda}$ als een kosmologische constante.

De ij-Einsteinvergelijking (6.124) wordt

$$\left[-\frac{BC\tilde{\Lambda}}{2} + \frac{2\theta^2\kappa^2(p+1)}{d-2}\right]\delta_{ij} - 2\theta^2\kappa^2\frac{\partial_i y\partial_j y}{r^2} = 0. \tag{6.130}$$

Opdat deze vergelijking zou voldaan zijn moet zowel de eerste als de tweede term gelijk zijn aan nul. Uit de tweede term blijkt dat er enkel een oplossing bestaat als $\theta = 0$ of $\kappa = 0$. Als één van deze twee waarden nul is wordt de extra veldsterkte $G_{(p+2)}$ gelijk aan nul. Dan verdwijnen ook alle bijdragen van dit veld in de bewegingsvergelijkingen. De oplossing zal dan ook terug deze worden van een p-braan met een scalair veld erop. Het zal dan ook niet mogelijk zijn met deze constructie een kosmologische constante te bekomen op de braan. Dit kan expliciet worden aangetoond door even te kijken naar de eerste term van (6.130). Doordat $\theta = 0$ of $\kappa = 0$ wordt deze

$$\frac{BC\tilde{\Lambda}}{2} = 0. \tag{6.131}$$

Neem nu nog aan dat $C = 0$ en $\tilde{\Lambda} \neq 0$. Zo koppelt de kosmologische constante niet met het scalair veld. In de effectieve Einsteinvergelijking op de braan zou het dan nog steeds mogelijk zijn een bijdrage te vinden van de kosmologische constante. De effectieve Einsteinvergelijking wordt bekomen uit vergelijking (6.123). Deze vergelijking vereenvoudigt rekening houdende met (6.125-6.126) en (6.128-6.130) tot

$$\tilde{R}_{mn} + \frac{1}{2}\partial_m \tilde{\chi} \partial_n \tilde{\chi} = 0 \tag{6.132}$$

Dit is de Einsteinvergelijking van een braan met een scalair veld maar zonder kosmologische constante (6.31). Er is dus geen kosmologische constante.

In het geval dat $p = d - 2$ is er maar één transversale coördinaat waardoor $\frac{\partial_i y \partial_j y}{r^2} = 1$. Hierdoor tellen in vergelijking (6.130) de eerste en de tweede term op. Het is dan mogelijk om een oplossing te bekomen met $\theta \neq 0$ en $\kappa \neq 0$. De oplossing bekomen in paragraaf 6.4.3 is daar het resultaat van.

De fout van deze constructie heeft waarschijnlijk te maken met het feit dat werd aangenomen dat de oplossing moest voldoen aan de oplossing van een braan met een scalair veld onafhankelijk van het feit of er nu een extra vormveld is of niet. Waarschijnlijk zal daarom de ansatz of zullen de parameters anders moeten worden gekozen. Het kan ook zo zijn dat deze constructie van een braan met een scalair veld en een kosmologische constante niet kan gebeuren met een extra $(p+2)$-vorm veldsterkte.

In deze paragraaf werd geprobeerd door een extra $(p+2)$-vorm veldsterkte toe te voegen aan een bestaande p-braanconstructie met een scalair veld een kosmologische constante te bekomen op de braan. Dit is een veralgemening van het model in paragraaf 6.4.2. Hierbij werd geëist dat onafhankelijk van het extra veld de braan moest voldoen aan de oplossing met een scalair veld erop bekomen in paragraaf 6.2. Dit extra veld moest ervoor zorgen dat er dan een kosmologische constante kwam op de braan. Maar helaas bleek dat deze constructie enkel consistent is als het extra veld nul is waardoor er ook geen kosmologische constante is op de braan.

6.5.2 Bronruimte met vormveld en scalair veld

Op een domeinmuur kon zoals in paragraaf 6.4.3 door het invoeren van een extra scalair veld in de bronruimte een kosmologische constante naast een scalair veld worden bekomen op de domeinmuur. Er kan nu worden getest of deze methode kan worden veralgemeend naar een p-braan met dezelfde methode als in paragraaf 6.5.1. Daarvoor wordt naast een $(p+2)$-vorm veldsterkte opnieuw een scalair veld σ ingevoerd op de bronruimte. Dit geeft de actie

$$\mathcal{S} = \int dxdy \sqrt{|g|} \left[R + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{(-)^{p+1}}{2(p+2)!} e^{a\phi} F^2 + \frac{1}{2} e^{b\phi} (\partial\sigma)^2 \right]. \tag{6.133}$$

Uit deze actie kunnen de volgende bewegingsvergelijkingen worden afgeleid.

- De bewegingsvergelijking van het ijkveld

$$\nabla_{\mu_1} \left(e^{a\phi} F^{\mu_1 \cdots \mu_{p+2}} \right) = 0 \tag{6.134}$$

- De bewegingsvergelijking van het scalair veld

$$\nabla_{\mu} \left(e^{b\phi} \partial^{\mu} \sigma \right) = 0 \tag{6.135}$$

- De dilatonvergelijking

$$\nabla_\mu \partial^\mu \phi - \frac{(-)^{p+1} a}{2(p+2)!} e^{a\phi} F^2 + b e^{b\phi} (\partial\sigma)^2 = 0 \tag{6.136}$$

- De vereenvoudigde Einsteinvergelijking

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{(-)^{p+1}}{2(p+1)!} e^{a\phi} \Big[F_{\mu\mu_2\cdots\mu_{p+2}} F_\nu^{\mu_2\cdots\mu_{p+2}} & \\ - \frac{p+1}{(p+2)(d-2)} g_{\mu\nu} F^2 \Big] + \frac{1}{2} e^{b\phi} \partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma &= 0 \end{aligned} \tag{6.137}$$

Kies de volgende ansatz voor de metriek $g_{\mu\nu}$, het dilaton ϕ, de veldsterkte $F_{(p+2)}$ opnieuw ansatz (6.14-6.16) en voor het scalair veld

$$\sigma = \theta H^\kappa. \tag{6.138}$$

Hierin werd de ansatz voor de metriek, het dilaton en de veldsterkte opnieuw zo gekozen zodat deze het zelfde zijn als (6.14-6.16) De ansatz voor het scalair veld werd zo gekozen zodat deze een veralgemening is van (6.103). Het veld is zoals in (6.103) onafhankelijk van x genomen en wordt bepaald door een bepaalde macht van de functie H.

Net zoals in paragraaf 6.5.1 wordt eerst een braan geconstrueerd met een scalair veld erop op basis het vormveld. Neem daarom voor de functie H opnieuw de functie bepaald in (6.125) en de parameters als in (6.25), (6.32) en (6.126). Het scalair veld σ zal dan opnieuw dienen ter constructie van de kosmologische constante.

Als in de dilatonvergelijking (6.136) de ansatz en de waarden (6.125-6.126) worden ingevuld geeft dit

$$\frac{\Gamma}{2} \left(Qr^2\right)^{-\alpha+\beta+1} e^{-(A-B)\tilde{x}} \tilde{\nabla}_m \tilde{\partial}^m \tilde{\chi} - 2b\theta^2\kappa^2 \left(Qr^2\right)^{\frac{b\gamma}{2}+2\kappa} e^{\frac{b\Gamma}{2}\tilde{x}} = 0. \tag{6.139}$$

Deze vergelijking is enkel oplosbaar als deze factoriseert in een x-afhankelijk stuk en een r-afhankelijk stuk. Dit geeft dat $e^{-\left(A-B+\frac{b\Gamma}{2}+2\Theta\right)\tilde{x}} \tilde{\nabla}_m \tilde{\partial}^m \tilde{\chi}$ een constante moet zijn. Leg de volgende conditie op de oplossing.

$$\tilde{\nabla}_m \tilde{\partial}^m \tilde{\chi} - C e^{\left(A-B+\frac{b\Gamma}{2}+2\Theta\right)\tilde{x}} \tilde{\Lambda} = 0 \tag{6.140}$$

Ook moet het mogelijk zijn om de r afhankelijkheid uit deze vergelijking weg te delen. Dit geeft dan de volgende voorwaarde.

$$-\alpha + \beta - \frac{b\gamma}{2} - 2\kappa + 1 = 0 \tag{6.141}$$

De ij-Einsteinvergelijking verkregen uit (6.137) wordt

$$\frac{BC\tilde{\Lambda}}{2}\delta_{ij} + 2\theta^2\kappa^2 \frac{\partial_i y \partial_j y}{r^2} = 0. \tag{6.142}$$

In deze vergelijking moet zowel de eerste als de tweede term gelijk zijn aan nul. Uit de tweede term blijkt dat er enkel een oplossing bestaat als $\theta = 0$ of $\kappa = 0$. Als één van deze twee waarden nul is wordt het scalair veld σ triviaal. Dit veld zal dan ook geen rol van betekenis spelen. De bewegingsvergelijkingen zullen dan ook zoals in het vorige geval terug deze worden van een braan met enkel een scalair veld erop. Ook deze constructie blijkt dus geen kosmologische constante op te leveren op de braan. Ook hier zullen de parameters α, β, γ, δ en ϵ anders moeten worden gekozen worden of moet er een andere ansatz worden gekozen.

Om een kosmologische constante te verkrijgen op een p-braan met een scalair veld erop werd betracht om de constructie in paragraaf 6.4.3 te veralgemenen. Dit gebeurde door een extra scalair *veld op de bronruimte te leggen naast de velden die nodig zijn om een p-braan te construeren. Zoals in het vorige paragraaf 6.5.1 werd er opnieuw geëist dat onafhankelijk van het scalaire veld op de bronruimte de braan toch moest voldoen aan de oplossing met een scalair veld erop bekomen in paragraaf 6.2. Opnieuw moest het extra veld nul zijn. Een kosmologische constante op de braan volgens deze constructie is dan ook onmogelijk.*

7 Conclusie

Het doel van deze thesis was de constructie van p-branen met enkele velden en een kosmologische constante erop. Onze wereld kon dan gezien worden als een driebraan in een hogerdimensionale ruimte. Dit gaf een mogelijke oplossing voor het probleem van de kosmologische constante. Dit probleem steunt op het feit dat kwantumveldentheorie een zeer grote kosmologische constante voorspeld maar er slechts een zeer kleine kosmologische constante wordt gemeten. Als er in de bronruimte waarin de braan leeft een grote kosmologische constante is en op de braan een kleine dan kan dit probleem hiermee opgelost zijn.

Door middel van Kaluza-Kleinreductie bleek het mogelijk te zijn om een theorie te reduceren naar een lager aantal dimensies. Een kosmologische constante reduceerde naar een nieuwe kosmologische constante. Het probleem van de kosmologische constante kon mogelijks worden opgelost door een grote kosmologische constante op de bronruimte te veronderstellen zoals deze wordt voorspeld door kwantumveldentheorie en een kleine op de gereduceerde ruimte zoals deze wordt waargenomen in onze ruimte. De gereduceerde kosmologische constante had echter dezelfde grootteorde als deze in de bronruimte waardoor het niet mogelijk was om op deze manier het probleem op te lossen.

In het volgende hoofdstuk werd op zoek gegaan naar oplossingen van theoriën die waren geïnspireerd op type IIA en type IIB supergravitatie in tien dimensies en de elfdimensionale supergravitatie. Het is mogelijk een oplossing van de bewegingsvergelijkingen van deze theorieën te construeren die een braan voorstelt die zich uitstrekt over p ruimtelijke richtingen. In eerste instantie werd deze oplossing zo geconstrueerd zodat deze op de braan een Minkowskimetriek had. Zowel type IIA als type IIB in tien dimensies als de elfdimensionale supergravitatie hadden via deze methode verschillende braanoplossingen. In type IIA en type IIB konden via T-dualiteit uit deze braanoplossingen andere oplossingen worden bekomen. Overigens blijkt dat al deze verschillende oplossingen aan elkaar konden worden gerelateerd via T-dualiteit, S-dualiteit en Kaluza-Klein reductie.

In het laatste hoofdstuk werd de vraag gesteld of het mogelijk was om het model van de vlakke p-braan te veralgemenen. Ten eerste werd de Minkowskimetriek van de vlakke braan vervangen door een meer algemene metriek. Het bleek mogelijk te zijn op deze manier een p-braan te construeren die eist dat de metriek erop Riccivlak is. Deze conditie kon worden gezien als een effectieve bewegingsvergelijking op de braan die eveneens een actie op de braan oplevert. Op een braan die op deze manier is geconstrueerd leeft er gravitatie.

Vervolgens werd wat aan de constructie van de Riccivlakke p-braan geknutseld zodat de bewegingsvergelijkingen van dit systeem enkele effectieve bewegingsvergelijkingen opleverde op de braan die een braan beschreef waarop een scalair veld leeft. Deze geïnduceerde bewegingsvergelijkingen waren opnieuw afleidbaar van een actie. Bovendien bleek dat als het scalair veld nul werd de oplossing terug dezelfde werd als die van een Riccivlakke p-braan.

Het scalair veld op de braan werd even gelaten voor wat het was en er werd eerst eens gekeken naar branen met een kosmologische constante erop. Hiervoor werden $(d-2)$-branen of domeinmuren beschouwd. Om een domeinmuur te construeren was een d-vorm veldsterkte of zijn Hodgeduale kosmologische constante nodig op de bronruimte. In eerste instantie werd voor deze constructie een bronruimte beschouwd die geen dilatonveld heeft. In deze bronruimte bleek een oplossing te bestaan met een kosmologische constante erop als een integratieconstante die niet vast bepaald was in een bepaalde bronruimte. In dit model kunnen er dus in een bepaalde bronruimte branen bestaan met een verschillende kosmologische constante erop. Vermits de kosmologische constante op de domeinmuur kon gekozen worden kon deze zeer klein gekozen worden ook al is deze op de bronruimte zeer groot. Deze constructie lost mogelijks het probleem van de kosmologische constantes op. Er was echter geen exclusieve oplossing waardoor er wel een interpretatieprobleem de kop opstak. Vervolgens werd een bronruimte beschouw die wel een dilaton heeft. Dit gaf een oplossing met een kosmologische constante die eveneens een integratie constante was en recht evenredig was met de kosmologische constante in de bronruimte. In dit model was de kosmologische constante voor alle domeinmuren in een bepaalde bronruimte dezelfde. Onder bepaalde condities op de bronruimte was het mogelijk om in een systeem met een grote kosmologische constante in de bronruimte een kleine kosmologische constante te verkrijgen op de domeinmuur en kon daarmee het probleem van de kosmologische constante opgelost worden.

Tot hiertoe was het mogelijk om een oplossing te verkrijgen voor een braan met een scalair veld erop en een domeinmuur met een kosmologische constante erop. De volgende stap moest dan ook een domeinmuur met zowel een scalair veld als kosmologische constante zijn. Hiervoor werden drie constructies beschouwd. Ten eerste werd een bronruimte beschouwd waarop één enkele kosmologische constante bestond. Als er werd geëist dat er op de domeinmuur een kosmologische constante bestond dan gaf dit model echter geen oplossing. De tweede constructie probeerde door aan een bestaande domeinmuur met een scalair erop een extra kosmologische constante in de bronruimte toe te voegen een oplossing te bekomen. Het bleek echter dat er een oplossing bestond als en alleen als deze extra kosmologische constante op een bepaalde manier koppelde aan het dilaton in de bronruimte. De kosmologische constante op de braan bleek exact dezelfde te zijn als de extra kosmologische constante in de bronruimte. Hierdoor was deze kosmologische constante helemaal bepaald. Als de extra kosmologische constante op de bronruimte zeer klein dan was ook de kosmologische constante op de braan zeer klein. De andere kosmologische constante kon vervolgens zeer groot zijn zoals kwantumveldentheorie dit voorspeld. Zo kon het probleem van de kosmologische constante worden opgelost. Tenslotte werd aan een bestaande domeinmuur met een scalair veld erop door een extra scalair veld in te voeren in de bronruimte een kosmologische constante toegevoegd op de domeinmuur. De grootte van de kosmologische constante op de domeinmuur bleek bepaald te zijn door de grootte van het scalair veld in de bronruimte en was onafhankelijk van de kosmologische constante in de bronruimte. Als dit scalair veld zeer zwak was dan werd de kosmologische constante op de domeinmuur zeer klein ook al is de kosmologische constante op de bronruimte zeer groot en kon dit mogelijks het probleem van de kosmologische constante oplossen.

Tenslotte werd geprobeerd om de modellen voor een domeinmuur met een scalair veld en kosmologische constante erop te veralgemenen naar een p-braan. Dit gebeurde door een extra $(p+2)$-vorm veldsterkte of een extra scalair veld toe te voegen aan de bronruimte waarin al een p-braan met een scalair veld erop bestaat. Maar het bleek dat in de constructie die hier werd uitgevoerd het extra veld nul moest zijn. Daarom was er ook geen kosmologische constante op de braan.

Kort samengevat konden de volgende oplossingen worden bekomen of worden weerlegt. Tussen de haakjes wordt telkens de bijhorende paragraaf aangeduid.

<table>
<tr><td></td><td>Domeinmuur</td><td>p-Braan</td></tr>
<tr><td>Vlakke braan</td><td colspan="2">Oplossing in bronruimte met vormveld (5.1)</td></tr>
<tr><td>Riccivlakke braan</td><td colspan="2">Oplossing in bronruimte met vormveld (6.1)</td></tr>
<tr><td>Braan met scalair veld</td><td colspan="2">Oplossing in bronruimte met vormveld (6.2)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Braan met kosmologische constante</td><td>Oplossing in bronruimte zonder dilatonveld met kosmologische constante (6.3.1)</td><td rowspan="2">Niet behandeld</td></tr>
<tr><td>Oplossing in bronruimte met dilatonveld en kosmologische constante (6.3.2)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Braan met kosmologische constante en scalair veld</td><td>Geen oplossing in bronruimte met één kosmologische constante (6.4.1)</td><td>Geen oplossing in bronruimte met twee vormvelden (6.5.1)</td></tr>
<tr><td>Oplossing in bronruimte met twee kosmologische constantes (6.4.2)</td><td rowspan="2">Geen oplossing in bronruimte met een vormveld en een kosmologische constante (6.5.2)</td></tr>
<tr><td>Oplossing in bronruimte met een kosmologische constante en scalair veld (6.4.3)</td></tr>
</table>

In dit werk is gebleken dat het mogelijk is om een domeinmuur te construeren met een kosmologische constante erop. Deze constructies konden onder bepaalde condities een verklaring geven voor het probleem van de kosmologische constante. Maar dan komt een ander probleem bovendrijven. Waarom moeten de ruimte waarin deze domeinmuur bestaat op die manier in elkaar zitten? Als het inderdaad mogelijk is om onze wereld te zien als een braanwereld moeten ook de andere krachten zoals elektromagnetisme en zwakke en sterke wisselwerking hun plaats vinden in dit model. Hoe dit zou moeten gebeuren is helaas nog niet duidelijk en vereist nog veel onderzoek maar kan zeker een totaal nieuw beeld geven het universum zoals wij het kennen.

A Definities en conventies

A.1 Einsteinconventie

Om de notatie van de vergelijkingen iets eenvoudiger te maken moeten enkele regels worden in acht genomen worden. Als een index boven en beneden voorkomt in een term dan moet deze worden gesommeerd.

$$X_\mu Y^\mu \equiv \sum_\mu X_\mu Y^\mu \tag{A.1}$$

Als de som genomen wordt van alle indices van een tensor vermenigvuldigt met dezelfde tensor wordt dit als volgt vereenvoudigt.

$$T^2 \equiv T_{\mu_1 \cdots \mu_r} T^{\mu_1 \cdots \mu_r} \tag{A.2}$$

A.2 Tensoren

Een tensor is een geïndexeerde functie van de coördinaten. Een tensor moet op de volgende manier transformeren bij een coördinatentransformatie $x^\mu \mapsto x'^\mu$.

$$T_{\mu_1 \cdots \mu_r}(x) \mapsto T_{\nu_1 \cdots \nu_r}(x) \frac{\partial x'_{\mu_1}}{\partial x_{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\mu_r}}{\partial x_{\nu_r}} \tag{A.3}$$

Een infinitesimale transformatie van een tensor onder de transformatie $x^\mu \mapsto x^\mu + \xi^\mu(x)$ is gegeven als volgt.

$$\delta T_{\mu_1 \cdots \mu_r} = \xi^\rho \partial_\rho T_{\mu_1 \cdots \mu_r} + \partial_{\mu_1} \xi^\rho T_{\rho \cdots \mu_r} + \ldots + \partial_{\mu_r} \xi^\rho T_{\mu_1 \cdots \rho} \tag{A.4}$$

A.3 Metriek

De metriek $g_{\mu\nu}$ bepaald de afstand tussen twee punten. De infinitesimale afstand ds tussen de punten x^μ en $x^\mu + dx^\mu$ is dan als volgt bepaald.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{A.5}$$

Een index kan naar boven of naar beneden worden gehaald aan de hand van de metriek.

$$X^\mu = g^{\mu\nu} X_\nu \qquad\qquad X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu \tag{A.6}$$

De gebruikte metriek is de mostly minus metriek. Deze metriek heeft een positief teken voor de tijdscomponent en een negatief teken in de ruimtelijke componenten. De Minkowskimetriek in deze conventie is dan als volgt gegeven.

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

De gekromde metriek van een ruimte kan lokaal altijd worden geschreven door een basisverandering tegenover de vlakke ruimte. Deze basisverandering gebeurd via Vielbiens e^α_μ. Deze Vielbiens worden als volgt gedefinieerd.

$$g_{\mu\nu} = e^\alpha_\mu e^\beta_\nu \eta_{\alpha\beta} \tag{A.8}$$

De inverse Vielbien wordt dan als volgt geformuleerd.

$$g^{\mu\nu} = e^\mu_\alpha e^\nu_\beta \eta^{\alpha\beta} \tag{A.9}$$

A.4 Covariante afgeleide

De Levi-Chevitaconnecties worden als volgt gedefinieerd.

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \tag{A.10}$$

De covariante afgeleide van een tensor is dan als volgt bepaald.

$$\begin{aligned} \nabla_\rho T^{\mu_1 \cdots \mu_r} &= \partial_\rho T^{\mu_1 \cdots \mu_r} - \Gamma^{\mu_1}_{\rho\sigma} T^{\sigma \cdots \mu_r} - \ldots - \Gamma^{\mu_r}_{\rho\sigma} T^{\mu_1 \cdots \sigma} && \text{(A.11)} \\ & && \text{(A.12)} \\ \nabla_\rho T_{\mu_1 \cdots \mu_r} &= \partial_\rho T_{\mu_1 \cdots \mu_r} + \Gamma^{\sigma}_{\rho\mu_1} T_{\sigma \cdots \mu_r} + \ldots + \Gamma^{\sigma}_{\rho\mu_r} T_{\mu_1 \cdots \sigma} && \text{(A.13)} \end{aligned}$$

Deze covariante afgeleide zorgt ervoor dat een tensor transformeert door af te leiden naar een nieuwe tensor met een rang die één hoger is.

A.5 Krommingstensoren

De Riemanntensor is bepaald door de volgende vergelijking.

$$R^{\sigma}_{\mu\nu\rho} = \partial_\nu \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} - \partial_\rho \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + \Gamma^{\tau}_{\mu\rho}\Gamma^{\sigma}_{\tau\nu} - \Gamma^{\tau}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\tau\rho} \tag{A.14}$$

Uit de Riemanntensor kan de Riccitensor worden berekend.

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu} \tag{A.15}$$

Tenslotte kan de Ricciscalar als volgt worden berekend.

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{A.16}$$

A.6 Symmetrisatie en antisymmetrisatie

De symmetrisatie en antisymmetrisatie van een groep indices worden als volgt bepaald.

$$T_{(\mu_1 \cdots \mu_r)} = \frac{1}{r!} \sum_{p \in \mathcal{S}(r)} T_{p(\mu_1) \cdots p(\mu_r)} \tag{A.17}$$

$$T_{[\mu_1 \cdots \mu_r]} = \frac{1}{r!} \sum_{p \in \mathcal{S}(r)} \mathrm{sign}\,(p) T_{p(\mu_1) \cdots p(\mu_r)} \tag{A.18}$$

Hierin is $\mathcal{S}(r)$ de verzameling van de permutaties op de getallen 0 tot en met $r-1$ en sign de tekenoperator van de permutaties die 1 is voor een permutatie met een even aantal omwisselingen en -1 voor een oneven aantal.

De antisymmetrische tensor met indices boven wordt onafhankelijk van de metriek genomen en wordt gedefinieerd als volgt

$$\epsilon^{p(0) \cdots p(d-1)} = \mathrm{sign}\,(p) \tag{A.19}$$

De overige elementen van de antisymmetrische tensor met twee keer dezelfde index zijn nul.

De antisymmetrische tensor met indices beneden heeft wel een afhankelijkheid van de metriek en wordt dan

$$\epsilon_{p(0) \cdots p(d-1)} = \mathrm{sign}\,(p)|g| \tag{A.20}$$

Om praktische redenen zullen de volgende afkortingen worden gebruikt voor antisymmetrisaties op meerdere tensoren.

$$XY \equiv X_{[\mu} Y_{\nu]} \tag{A.21}$$

$$\epsilon XY \equiv \epsilon^{\mu\nu} X_\mu Y_\nu \tag{A.22}$$

B Bewegingsvergelijkingen

Supergravitatietheorieën zijn gebaseerd op het actieprincipe. Een actie is een functionaal van de velden in een systeem. Een actie wordt uitgedrukt als een integraal over de coördinaten. Deze parameters zijn de coördinaten van het systeem. De bewegingsvergelijkingen van het systeem die aangeven hoe velden interaggeren en evolueren worden bepaald door de actie te extremaliseren in functie van de velden. Dit extremum voor de actie worden bekomen door de variatie van de actie bij een bepaalde variatie van de velden gelijk te stellen aan nul.

B.1 Bewegingsvergelijking van een veld

De actie van een systeem bepaald door een veld ψ en zijn afgeleide kan worden geformuleerd aan de hand van een integraal van een Lagrangiaan.

$$S = \int dx \sqrt{|g|} L \left(\nabla_\rho \psi_{\mu_1 \cdots \mu_r}, \psi_{\mu_1 \cdots \mu_r} \right) \tag{B.1}$$

Van een systeem wordt aangenomen dat het zich altijd in een toestand van minimale actie bevindt. De bewegingsvergelijkingen voor een veld kunnen dus worden afgeleid door de variatie van de actie in functie van dat veld gelijk te stellen aan nul. Dit is voldaan als het systeem voldoet aan de vergelijking van Euler-Lagrange voor dit veld.

$$\nabla_\rho \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\nabla_\rho \psi_{\mu_1 \cdots \mu_r} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi_{\mu_1 \cdots \mu_r}} = 0 \tag{B.2}$$

Deze vergelijking geeft dan een functie van de velden die een verband legt tussen deze velden en aangeeft hoe deze evolueren.

B.2 Einsteinvergelijking

De actie van een systeem met gravitatie bepaald door de metriek $g_{\mu\nu}$ kan normaal geschreven worden als een som van de Ricciscalar met een Lagrangiaan die afhangt van deze metriek. De actie ziet er dus als volgt uit.

$$S = \int dx \sqrt{|g|} \left(R + L' \left(g^{\mu\nu} \right) \right) \tag{B.3}$$

Door de variatie van deze actie in functie van de metriek gelijk te stellen aan nul moet het systeem voldoen aan de volgende vergelijking die ook wel de Einsteinvergelijking wordt genoemd.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{\partial L'}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} L' = 0 \tag{B.4}$$

Door het spoor te nemen van de Einsteinvergelijking (B.4) kan de Ricciscalar worden bepaald. Als deze Ricciscalar dan wordt ingevuld in deze vergelijking (B.4) vereenvoudigd deze als volgt.

$$R_{\mu\nu} + \frac{\partial L'}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{d-2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \frac{\partial L'}{\partial g^{\rho\sigma}} + \frac{1}{d-2} g_{\mu\nu} L' = 0 \tag{B.5}$$

Referenties

[1] R. d'Inverno, *Introducing Einstein's relativity*, Clarendon Press (1992).

[2] S.M. Bilenky, *Introduduction to Feynman diagrams*, Pergaman Press (1974).

[3] A. Van Proeyen, *Cursusnotas Introduction to string theory*, Katholieke Universiteit leuven (2004).
T. Mohaupt, *Introduction to string theory*, Lect. Notes Phys. 631 (2003) 173, hep-th/0207249.

[4] E. Lozano, *Solutions vacua and gauge duals in supergravity*, Doctoraatsthesis, Universidad Autónoma de madrid (2002).

[5] T. Kaluza, *Zur Unitätsprbleem der Physik*, Sitzungsber. Preusss Akad. Wiss. Phys. Math. Klass (1921) 966.
O. Klein, *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*, Z.F. Physik 37 (1926) 895.

[6] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, *The hierarchal problem and new dimensions at a millimeter*, Phys. Lett. B429 (1998) 263, hep-th/9803315.
I. Antonaidis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, *New dimensions at a millimeter to a fermi and superstrings at a Tev*, Phys. Lett. 436 (1998) 227, hep-th/9804398.

[7] M. Trodden, S.M. Carroll, *Introduction to Cosmology*, SU-GP-04/1-1, astro-ph/0401547.

[8] E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, Nucl. Phys. B443 (1995) 85, hep-th/9503124.

[9] T. Ortín, *Gravity & Strings*, Cambridge Unviversity Press (in voorbereiding).

[10] E. Bergschroef, B. Janssen, T. Ortín, *Solution-generating transformations and the string effective action*, Class. Quant. Grav. 13 (1996) 321, hep-th/9506156.
B. Janssen, *A T-duality approach to the gravitational wave and the Kaluza-Klein monopole*, Fortschr. Phys. 47 (1999) 201-207.

[11] K.S. Stelle, *Lectures on supergravity p-branes*, Imperial/TP/96-97/15, hep-th/9701088.
K.S. Stelle, *BPS branes in supergravity*, Imperial/TP/97-98/30, hep-th/9803116.

[12] M. Duff, R. Khuri, J. Lü, *String solitons*, Phys. Rept. 259 (1995) 213-326, hep-th/9412184.

[13] E. Bergshoeff, *p-Branes D-branes and M-branes*, hep-th/9611099.

[14] A. Dabholkar, G.W. Gibbons, J.A. Harvey, F. Ruiz-Ruiz, *Superstrings and solitons*, Nucl. Phys. B340 (1990) 33.

[15] H.W. Brinkmann, Proc. Nat. Acad. Sci. 9 (1923) 1.

[16] C.G. Callan , J.A. Harvey, A. Strominger, Nucl. Phys. B340 (1990) 611.
M.J. Duff, J.X. Lu, *Elementary five-brane solutions of D=10 supergravity*, Nucl. Phys. B354 (1991) 141.

[17] R.D. Sorkin, *Kaluza-Klein monopole*, Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 87.
D.J. Gross, M.J. Perry *Magnetic monopoles in Kaluza-Klein theories*, Nucl. Phys. B226 (1983) 29.

[18] J. Polchinski, *Dirichlet branes and Ramond-Ramond charges*, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 184, hep-th/9510017.

[19] M.J. Duff, K.S. Stelle, *Muli-membrane solutions of D=11 supergravity*, Phys. Lett. B253 (1991) 113.

[20] R. Güven, *Black p-brane solutions of D=11 supergraity theory*, Phys. Lett. B276 (1992) 49.

[21] D. Brecher, M.J. Perry, *Ricci-flat branes*, Nucl. Phys. B566 (2000) 151-172, `hep-th/9908018`. B. Janssen, *Curved branes and cosmological (a,b)-models*, JHEP 0001 (2000) 151, `hep-th/9910077`.

[22] N. Alonso-Alberca, B. Janssen, P.J. Silva, *Curved dilatonic brane worlds and the cosmological constant problem*, Class. Quant. Grav. 17 (2000) L163-L167, `hep-th/0005116`.

[23] N. Alonso-Alberca, P. Meessen, T. Ortín, *Supersymmetric brane worlds*, Phys. Lett. B482 (2000) 400-408, `hep-th/0003248`.

[24] J.E. Lidsey, *Supergravity brane cosmologies*, Phys. Rev. D62 (2000) 083515, `hep-th/0007014`.

[25] S. Knippenberg, *p-Branen in supergravitatie veralgemeningen naar oplossingen met een cosmologische constante*, Licenciaatsthesis, Katholieke Universiteit leuven (2003).