Trabajo de fin de máster

Gravedad de Einstein-Hilbert con correcciones de Gauss-Bonnet

Daniel Téllez Calle

Tutorizado por Bert Janssen

Facultad de ciencias

Universidad de Granada

24 de junio de 2023

Resumen

Palabras clave: *gravedad de Einstein-Hilbert, gravedad de Gauss-Bonnet, gravedades de Lovelock, ecuaciones de Friedmann, cosmología de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.*

En este trabajo desarrollamos la teoría de la relatividad general de Einstein-Hilbert incluyendo correcciones de Gauss-Bonnet. Para esto, partiremos de una breve motivación de estas teorías y una discusión de cómo generalizar el lagrangiano de Einstein-Hilbert a dimensiones superiores a cuatro mediante el formalismo de Lovelock, centrándonos en concreto en el primer término relevante, el lagrangiano de Gauss-Bonnet.

Entrando en el cuerpo del trabajo, en una primera parte, calcularemos las ecuaciones de campo para el espaciotiempo en una combinación lineal de los lagrangianos de Einstein-Hilbert y de Gauss-Bonnet mediante el cálculo de variaciones de una acción total.

En una segunda parte, discutiremos la aplicación de estas ecuaciones de campo a la cosmología de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, obteniendo las ecuaciones de Friedmann para la evolución del universo. Además, para cuando el término de Gauss-Bonnet pueda tratarse como una perturbación en el lagrangiano total, desarrollaremos unas ecuaciones perturbativas que simplificarán en gran medida la obtención de soluciones.

Finalmente, estudiaremos algunos resultados cosmológicos ya conocidos para el caso de Einstein-Hilbert (densidad crítica de un universo plano, universo de De Sitter, universo plano con materia-energía de un único tipo y universo estático de Einstein) y veremos cómo

cambian las soluciones al introducir el término de Gauss-Bonnet, utilizando el desarrollo perturbativo cuando proceda. Adicionalmente, se presentan dos soluciones cosmológicas exóticas que no son posibles en Einstein-Hilbert, pero sí en una combinación con Gauss-Bonnet (universo estático de Einstein sin constante cosmológica y universo de De Sitter de vacío).

Todo este desarrollo se planteará cómo un ejercicio de gran valor académico y didáctico que nos demuestra que la teoría de Einstein-Hilbert de la gravitación no es más que un caso particular dentro de un marco teórico mucho más rico que sin duda merece nuestra atención.

Índice general

Notación

A lo largo de este trabajo, asumiremos un espaciotiempo de dimensión n que describiremos en términos de la geometría diferencial de variedades Lorentzianas y de la relatividad general con unidades naturales, $c = 1$, y el siguiente convenio de índices:

1. Se toma como coordenada temporal la coordenada con índice cero, x^0, a la cual asociamos un signo positivo en la métrica.

2. Se toman como coordenadas espaciales las coordenadas con índices distintos de cero, $\{x^i\}_{i=1}^{n-1}$, a las cuales asociamos un signo negativo en la métrica.

En concreto, trabajaremos en el convenio de suma de Einstein, donde las expresiones tensoriales del tipo $A_\mu B^\mu$ deben entenderse como una suma sobre los índices repetidos arriba y abajo, es decir, sobre pares de índices covariante y contravariante repetidos:

$$A_\mu B^\mu \equiv \sum_\mu A_\mu B^\mu \ . \tag{1}$$

Para ser más precisos, cuando los índices repetidos se denoten con letras griegas, el sumatorio se debe realizar sobre todos los valores posibles de los índices, $\{\mu\}_{\mu=0}^{n}$, mientras que si los índices repetidos se denotan con letras latinas, el sumatorio debe realizarse solo sobre los valores espaciales de los índices, $\{i\}_{i=1}^{n-1}$. Un ejemplo de esto puede verse en la expresión (3.1).

Por otro lado, tomaremos la conexión de Levi-Civita como forma natural de definir la derivada covariante, denotada por ∇_μ, con la siguiente definición para los símbolos de Christoffel en función de la métrica:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right) \ . \tag{2}$$

En términos de esta derivada covariante, definimos la divergencia de un tensor $A^{\mu\nu}$ dos veces contravariante como la contracción $\nabla_\mu A^{\mu\nu}$. Por ejemplo, la conservación del tensor energía-momento $T^{\mu\nu}$ se expresa en términos de la divergencia como:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{3}$$

Finalmente, denotaremos al tensor de Riemann y a sus contracciones usuales por la letra R, no pudiendo haber confusión debido a que cada contracción tiene una cantidad diferente de índices. De esta forma, se define el tensor de Riemann en la conexión de Levi-Civita por:

$$R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma} = \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\rho} \ , \quad R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda} g_{\sigma\lambda} \ , \tag{4}$$

el tensor de Ricci por:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}{}^{\rho} \ , \tag{5}$$

y el escalar de curvatura por:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \ . \tag{6}$$

Estas definiciones nos llevan a las siguientes relaciones de simetría:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} \ , \quad R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} \ , \quad R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \ , \tag{7}$$

las cuales serán de gran utilidad a la hora de reordenar índices a lo largo del trabajo.

Introducción

La teoría de la relatividad general parte de la idea fundamental de que la gravedad es un efecto geométrico de la curvatura del espaciotiempo, que a su vez es una causa del contenido de materia-energía de este. En concreto, se postula que la geometría del espaciotiempo debe satisfacer una ecuación del tipo:

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \ , \tag{1.1}$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento, κ es una constante de proporcionalidad y $G_{\mu\nu}$ es un tensor geométrico que codifica la curvatura del espaciotiempo. Para un espaciotiempo de 4 dimensiones, es decir, en el caso relevante para la gravitación clásica, Einstein propuso la siguiente expresión del tensor geométrico, llamado tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \ . \tag{1.2}$$

Para deducir esta expresión, es necesario considerar la siguiente lista de propiedades que el tensor geométrico debe satisfacer para ser una propuesta razonable desde el punto de vista físico [1]:

1. Como el tensor de energía-momento es un tensor simétrico, el tensor geométrico, al cual es proporcional, también debe serlo.

2. Por definición, incluimos en el tensor energía-momento todas las contribuciones de los campos físicos a la ecuación, por lo que el tensor geométrico debe de depender solo de magnitudes geométricas. En particular, requerimos que el tensor geométrico sea una función de la métrica.

3. El tensor geométrico debe ser tal que la ecuación (1.1) sea capaz de reproducir la ley de gravitación universal de Newton en el límite apropiado. En particular, para reproducir la ecuación de Poisson del campo gravitatorio newtoniano, requerimos que el tensor geométrico contenga al menos derivadas segundas de la métrica.

4. Para que la ecuación (1.1) sea una ecuación dinámica físicamente aceptable, requerimos que el tensor geométrico contenga derivadas de la métrica solo hasta segundo orden, y que sea lineal en estas últimas.

5. Como el tensor de energía-momento tiene divergencia nula debido a la conservación de la energía, el tensor geométrico, al cual es proporcional, también debe tener divergencia nula.

6. Para el espacio vacío, con tensor de energía-momento nulo, requerimos que el tensor geométrico sea tal que la ecuación (1.1) tenga al espaciotiempo plano de Minkowski como solución. En particular, el tensor geométrico debe anularse para una métrica plana.

Dados estos requerimientos, resulta que en 4 dimensiones se puede determinar de forma unívoca el tensor geométrico, de la forma del de Einstein (1.2). Sin embargo, esto no ocurre así en dimensiones superiores, en las que podemos encontrar expresiones alternativas que generalizan el tensor de Einstein (1.2), como por ejemplo para el caso del tensor de Gauss-Bonnet (2.29), que nos da unas ecuaciones igual de físicamente razonables que el de Einstein en dimensión 5 o superior.

Para abordar estos asuntos, partimos de un procedimiento más formal basado en la teoría de la mecánica analítica y el cálculo variacional, proponiendo lagrangianos gravitatorios cuyas acciones nos llevan a ecuaciones de campo para el espaciotiempo. De nuevo, para cuatro dimensiones, tenemos un único lagrangiano consistente con las exigencias 1-6, el llamado de Einstein-Hilbert:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{2\kappa} R \ , \tag{1.3}$$

cuya variación reproduce las ecuaciones de campo con el tensor geométrico de Einstein (1.2). Sin embargo, una vez más, para dimensiones superiores no tenemos un único lagrangiano posible del que deducir las ecuaciones de campo, puesto que podemos añadir diversos términos adicionales cuadráticos, cúbicos, etc. en el tensor de Riemann y sus contracciones que contribuyan a la dinámica sin que aparezcan derivadas de orden mayor a dos. Una forma de tratar con estas gravedades de orden superior son las llamadas gravedades de Lovelock, que fueron propuestas a principios de los años setenta por el físico y matemático D. Lovelock [2, 3]. En estas teorías, se aprovecha el hecho de que la característica de Euler $2m$-dimensional en el lagrangiano gravitatorio contribuye a la dinámica del espaciotiempo para dimensión $2m+1$ y superior, y no contribuye para dimensiones inferiores. A partir de este enfoque, se puede proponer una jerarquía de lagrangianos $\{\mathcal{L}_{L,l}\}_{l=0}^{\infty}$ con formas tales que las derivadas segundas se anulen en las ecuaciones de campo y de los cuales el lagrangiano l-ésimo sólo contribuye a a las ecuaciones para dimensión mayor a $2l$. Los primeros de estos lagrangianos son:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{L,0} \propto \Lambda \ , \quad \mathcal{L}_{L,1} \propto R \ , \quad \mathcal{L}_{L,2} \propto R^2 - 4R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} \ , \\ \mathcal{L}_{L,3} \propto R^3 - 12RR^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + 16R^{\mu\nu}R_{\mu}{}^{\rho}R_{\nu\rho} + 24R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} + RR^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} + \\ + 24R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu}{}^{\lambda}R_{\nu\lambda\rho\sigma} + 8R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\lambda}{}^{\sigma\eta}R_{\nu\eta\rho\lambda} + 2R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu}{}^{\lambda\eta}R_{\rho\sigma\lambda\eta} \ .\end{gathered} \tag{1.4}$$

Como podemos ver, $\mathcal{L}_{L,1}$ no es más que el lagrangiano de Einstein-Hilbert que ya hemos comentado, mientras que $\mathcal{L}_{L,0}$ es una constante que identificamos como una constante cosmológica, la cual, como es bien sabido, es la única forma posible de generalizar las ecuaciones de Einstein en 4 dimensiones. Por otro lado, podemos ver cómo los lagrangianos de orden superior a 2 se vuelven rápidamente muy complicados debido a que el número de combinaciones posibles de orden cuadrático, cúbico, etc. del tensor de Riemann y sus contracciones crece como un número combinatorio. En este trabajo nos centraremos en $\mathcal{L}_{L,2}$, la primera generalización no trivial del lagrangiano de Einstein-Hilbert, que se manifiesta a partir de 5 dimensiones. Este lagrangiano, llamado de Gauss-Bonnet[1], ya fue propuesto por el físico y matemático C. Lanzcos [4] en 1938, quien demostró que no es más que un

[1]Este nombre viene dado por el teorema de Gauss-Bonnet, que proporciona una expresión integral para la característica de Euler.

término topológico (la característica de Euler 4-dimensional) que no contribuye a las ecuaciones dinámicas del espaciotiempo en dimensión 4, pero sí en dimensión 5 y superior.

De esta forma, para estudiar la fenomenología que aparece al generalizar las ecuaciones de campo del espaciotiempo a dimensiones superiores en su caso más simple, nos proponemos el estudio del lagrangiano de Gauss-Bonnet en un espaciotiempo de dimensión $n \geq 5$, concretamente en comparación con el de Einstein-Hilbert, ya ampliamente estudiado. Para esto, propondremos un lagrangiano total combinación lineal de ambos y deduciremos sus ecuaciones dinámicas asociadas, y estudiaremos las correcciones que supone el añadir el término de Gauss-Bonnet. A modo de aplicación, discutiremos estas correcciones en el ámbito de diversas soluciones cosmológicas de la familia Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker ya conocidas, realizando un desarrollo perturbativo en la parte de Gauss-Bonnet cuando la complejidad de las ecuaciones a resolver lo requiera.

Conclusiones

En este trabajo hemos explorado el formalismo de Lovelock de la gravitación en dimensiones mayores a cuatro en su versión más elemental: la gravedad de Gauss-Bonnet. Para esto, hemos realizado una combinación lineal entre el lagrangiano de Einstein-Hilbert y el de Gauss-Bonnet y hemos estudiando las diferentes correcciones que supone la introducción del segundo. Esta teoría de la gravedad, mientras que es suficientemente simple a la hora de tratar con los cálculos explícitos, supone un buen ejemplo para explorar la fenomenología que aparece al ir más allá de Einstein-Hilbert. Prueba de esto son las soluciones exóticas que aparecen en la sección 4.5, las cuales solo pueden existir gracias al término de Gauss-Bonnet.

Más concretamente, en un primer lugar hemos sido capaces de calcular la variación de una acción combinación lineal de Einstein-Hilbert y Gauss-Bonnet, obteniendo ecuaciones de campo para el espaciotiempo distintas a las usuales en dimensión cuatro, y que las generalizan para dimensiones superiores. Además, se ha proporcionado un cálculo de los pesos de los sumandos del lagrangiano de Gauss-Bonnet tales que las derivadas de orden mayor a dos se anulen en las ecuaciones de campo. Esto nos muestra cómo podemos añadirle a la acción términos de orden superior en el tensor de Riemann y sus contracciones sin que aparezcan derivadas superiores siempre que elijamos los pesos adecuadamente, y es precisamente el hecho del que se aprovecha la jerarquía de lagrangianos de Lovelock.

Pasando a la segunda parte, se ha optado por aplicar estas ecuaciones de campo a la cosmología de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker para ver qué tipos de universo predicen en contraste con lo ya conocido para Einstein-Hilbert. En concreto, hemos sido capaces de obtener ecuaciones de Friedmann para nuestras ecuaciones de campo. Estas ecuaciones de Friedmann resulta que son en general difíciles de resolver debido a que Gauss-Bonnet incluye una serie de nuevos términos, no siendo posible, por ejemplo, el obtener una ecuación de aceleración como sí ocurre en Einstein-Hilbert. Para tratar con estas dificultades, se ha optado por estudiar las correcciones de Gauss-Bonnet a Einstein-Hilbert en el límite perturbativo. De esta forma, se ha desarrollado la ecuación de Friedmann temporal para obtener ecuaciones perturbativas de orden cero y uno mucho más sencillas de resolver, siendo la de orden cero idéntica a la de Einstein-Hilbert y la de orden uno una ecuación lineal.

Con todas la herramientas matemáticas ya mencionadas, finalmente se han estudiado algunos de los resultados cosmológicos mas elementales y relevantes históricamente, siendo estos la densidad crítica de un universo plano, el universo de De Sitter, el universo plano con materia-energía de un único tipo y el universo estático de Einstein. En todos estos casos, se ha comparado el resultado obtenido con el resultado ya conocido de Einstein-Hilbert para ver cuál es la corrección que introduce Gauss-Bonnet, obteniendo soluciones tanto exactas como perturbativas según el caso. Además, esto no es todo, ya que cuando la combinación lineal de Einstein-Hilbert y Gauss-Bonnet no es perturbativa en Gauss-Bonnet, ocurre que pueden darse soluciones únicas que no existen en Einstein-Hilbert. En concreto, la adición del término de Gauss-Bonnet hace que podamos tener universos como el estático de Einstein o el de De Sitter, caracterizados en Einstein-Hilbert por tener constante cosmológica, sin necesidad de introducir esta última. Esto supone en cierto modo una simplificación conceptual de estos universos, que requerirían "menos ingredientes" en este formalismo.

Finalmente, y por todo lo expuesto, concluimos que el estudio de gravedades en dimensiones superiores llevado a cabo tiene un gran valor tanto académico como didáctico, dándose toda una serie de predicciones teóricas que difieren de la gravedad de Einstein-Hilbert en dimensión cuatro que ya conocemos. Estas predicciones no son triviales y nos hacen darnos cuenta de que la teoría de Einstein-Hilbert es solo un caso particular dentro de un marco teórico mucho más rico que sin duda merece nuestra atención.

Bibliografía

[1] B. Janssen. *Gravitación y geometría: una introducción moderna a la Teoría de la Relatividad General*. Editorial Universidad de Granada, 2022.

[2] D. Lovelock. «Divergence-free tensorial concomitants». En: *Aequationes mathematicae* 4 (1970), págs. 127-138.

[3] D. Lovelock. «The Einstein tensor and its generalizations». En: *Journal of Mathematical Physics* 12 (1971), págs. 498-501.

[4] C. Lanczos. «A remarkable property of the Riemann-Christoffel tensor in four dimensions». En: *Annals of Mathematics* 39 (1938), págs. 842-850.

[5] C. O'Raifeartaigh et al. «Einstein's 1917 static model of the universe: a centennial review». En: *The European Physical Journal H* 42.3 (2017), págs. 431-474.

[6] R. d'Inverno. *Introducing Einstein's relativity.* Clarendon Press (Oxford), 1992.

[7] S. Carroll. *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity.* Pearson (Essex), 2014.

[8] R. K. Sachs y H. Wu. *General relativity for mathematicians.* Editorial Académica Española, 2012.

[9] M. Sáncjez Caja y J. L. Flores Dorado. *Introducción a la geometría diferencial de variedades: variedades diferenciables y aplicaciones.* Editorial Académica Española, 2012.

[10] M. L. González Hernández. *Trabajo de fin de máster: soluciones cosmológicas en la gravedad de Gauss-Bonnet.* Máster en Física y Matemáticas (FisyMat) por la Universidad de Granada, 2017.