

Trabajo de Fin de Máster
Máster en Física y Matemáticas

Teoría de Kaluza-Klein

Alumno: José Alberto Orejuela García



Tutor: Bert Janssen
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada
23 de enero de 2015

DECLARACIÓN

En cumplimiento de la normativa aprobada en Consejo de Gobierno de 4 de marzo de 2013, sobre Directrices de la Universidad de Granada para el desarrollo de la asignatura “Trabajo Fin de Máster” de sus títulos de máster (Art. 8,4), José Alberto Orejuela García asume la originalidad del trabajo fin de máster, entendida en el sentido de que no ha utilizado fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada, a 9 de enero de 2015.

Fdo.: José Alberto Orejuela García.

Índice

1. Objetivos	7
2. Antecedentes	9
3. Introducción teórica	11
3.1. Tétradas	11
3.2. Los postulados de la tetrada	15
3.3. Tensores de curvatura desde el espacio tangente	18
4. Desarrollo	21
4.1. Reducción dimensional y modos de Fourier	21
4.2. Reducción de la métrica	24
4.3. Conexión de espín	25
4.4. Tensores de curvatura	26
4.5. De Einstein-Hilbert a Einstein-Maxwell-dilatón	27
5. Conclusiones	31

1. Objetivos

En este trabajo nos disponemos a discutir una cuestión planteada por el físico y matemático Theodor Kaluza (1885-1954) en 1921 y más tarde modificada por Oskar Klein (1894-1977), físico teórico, en 1926: la *reducción dimensional*. Nuestro objetivo principal será reducir la acción de un espacio N -dimensional a su correspondiente acción efectiva en el espacio de una dimensión menos. En el camino nos encontraremos con métodos matemáticos que nos facilitarán estos cálculos, la visión puramente geométrica de las transformaciones *gauge* y, sobre todo, muchos conceptos nuevos y muy profundos.

2. Antecedentes

Pensar en un mundo de más dimensiones que las que percibimos no ha sido fácil para la humanidad. Hasta el siglo XIX, pocos físicos se atrevían a manifestar que el mundo podría encerrar algunos de sus enigmas en una quinta dimensión, y de hecho incluso muchos otros los tachaban de adeptos al espiritismo. No fue así para William Kingdon Clifford (1845-1879), el cual especulaba sobre 1870 con la materia como la percepción por nuestros sentidos de la curvatura de un mundo de cinco dimensiones. Este fue uno de los pensadores que empezó a abrir las puertas a la teoría de la relatividad y a la percepción actual que tenemos del mundo.

Un poco más tarde, a principios del siglo XX, hizo su aportación el pionero en teorías de unificación involucrando más dimensiones: Gunnar Nordström (1881-1923), el cual intentó unificar la gravedad y el electromagnetismo en un solo campo de fuerzas usando un espacio de cinco dimensiones. No tuvo ningún éxito debido a que la teoría en la que enmarcó su estudio fue la de la relatividad especial, la cual se queda corta a la hora de intentar explicar la gravedad. Se desconoce por qué Einstein, que trabajó con él entre 1913 y 1914, no le advirtió de este hecho y de las posibilidades que se le abrían cuando, más tarde, publicó su teoría de la Relatividad General.

Sin embargo, el intento de Nordström fue bueno, pues, aunque ahora nos pueda parecer extraño empezar unificando la teoría electromagnética y la gravitatoria, resulta que en esta época era la teoría del electromagnetismo la que estaba bien asentada y además Einstein publicaba su teoría de la Relatividad General. En contraposición, las teorías fuerte y débil no se entendían muy bien. Era natural, pues, que en busca de la unificación, se intentara unir el electromagnetismo con la gravedad.

Quien sí se tomó la molestia de usar la teoría de la Relatividad General en el primer intento de unificación que dio algunos frutos fue Kaluza, el cual comenzó su teoría sobre el año 1919. Partió de gravedad pura en 5 dimensiones, postulando la existencia de esta quinta coordenada, y, tras suponer que ningún campo dependía de ella, llegaba a la descomposición en 4 dimensiones del campo gravitatorio, el electromagnético y otro campo escalar sin masa, todos ellos acoplados. Así, se llegaba al electromagnetismo como una consecuencia de la gravedad, siempre que uno estuviera dispuesto a asumir la existencia de la coordenada extra.

Esta teoría, sin embargo, arrojaba varias preguntas aún sin responder. En primer lugar, parecía demasiado artificial la introducción de esta coordenada, ya que no se observaba ningún indicio de su existencia. Además, la suposición

de que todos los campos eran independientes de ella era aún más extraña. Por otro lado, también resultaba fenomenológicamente inaceptable la aparición de ese campo escalar que tampoco se había observado (y así sigue siendo actualmente).

Fue Klein el que, atraído por la idea de Kaluza, dio respuesta a todas las cuestiones relativas a la dimensión extra en su trabajo publicado en el año 1926. En su teoría, trató con rigurosidad la existencia de esta coordenada extra y la dependencia de los campos de ella, dando con la cuestión clave que lograba responder ambas preguntas de igual forma: la coordenada era periódica y tenía un radio muy pequeño (del orden de la longitud de Plank), con lo cual, por un lado, no logramos percibir esta dimensión y, por otro, daba una sencilla explicación a que ninguno de los campos dependiera de ella (esto es el llamado *límite de bajas energías*, que explicaremos más adelante).

En la actualidad, nuestra mejor candidata para la unificación de todas las fuerzas de la naturaleza es la teoría de cuerdas. Sin embargo, tiene el inconveniente de que vive de manera natural en 10 dimensiones, con lo cual, aunque todas las predicciones (incluidas las de dimensiones mayores) son relevantes, nos interesa extraer las consecuencias de esta teoría para el mundo tetradiimensional que percibimos. Una forma de llevar a cabo esto es la *reducción dimensional* de la teoría de Kaluza-Klein, en la que nos vamos a adentrar tras montar todo el aparataje matemático necesario para facilitarnos el proceso posteriormente.

5. Conclusiones

En nuestro trabajo hemos reobtenido el desarrollo de Kaluza-Klein. Para ello, hemos comenzado por estudiar métodos matemáticos que nos han sido de ayuda a lo largo de nuestro desarrollo: introducción a la tétrada, sus postulados y, en general, todas las herramientas de trabajo necesarias para describir la variedad a través de sus espacios tangentes. También hemos justificado la mejora de Klein a la teoría inicial de Kaluza al mostrar el límite de bajas energías. Por último, hemos aplicado todos estos conocimientos al cálculo de la acción de Einstein-Hilbert y su posterior reducción a la de Einstein-Maxwell-dilatón.

En el camino nos hemos encontrado con la conclusión más fuerte de este trabajo: a partir de un modelo puramente geométrico, podemos obtener invariancia *gauge*, esto es, hemos obtenido la visión de las transformaciones *gauge* como desplazamientos en la coordenada compacta de nuestro espacio de dimensión mayor, lo cual parece francamente sorprendente, pues observamos efectos físicos, de hecho como una interacción, derivados de la geometría del espacio de dimensión mayor en el que nos encontramos sumidos.

Algo importante que también se deriva en este trabajo es el posible origen del problema de la jerarquía, es decir, la diferencia de la constante de Newton con las constantes de las otras fuerzas de la naturaleza, en concreto, con el electromagnetismo, pues la constante de Newton se atenúa al compactificar, como ya hemos visto, con un factor dependiente del radio de la coordenada compacta, $2\pi R_0$. Sin embargo, un problema que también sale a relucir es que la diferencia entre las constantes de la gravitación y el electromagnetismo es demasiado grande, lo cual requeriría un radio R_0 muy grande para cuadrar la atenuación. Esto, por contra, entra en conflicto con una de nuestras bases: el límite de bajas energías, el cual estaba justificado para un R_0 pequeño. Evidentemente, el problema se disipa si compactificamos en más dimensiones, pero está claro que, en principio, nuestra teoría no da una resolución satisfactoria a este conflicto, pues es una primera aproximación al abordaje del problema, un llamado *toy model*.

Por último, la conclusión final es que, aunque obtenemos campos electromagnéticos en nuestra teoría como consecuencia de la gravedad en el espacio de dimensión mayor, las diferencias de nuestra acción con la de Einstein-Maxwell son notables y, al no poder hacer un truncamiento consistente del campo ϕ , no podemos concluir que nuestro modelo sea fenomenológicamente válido. A pesar de todo esto, las propiedades que exhibe son bastante prometedoras, pues la elegancia de la unificación y la visión geométrica de

las transformaciones *gauge* es indiscutible. Simplemente, hay que verlo como un primer paso hacia modelos más serios que puedan adaptarse mejor a la fenomenología.

Referencias

- [1] Chris Pope, “Kaluza-Klein theory”,
<http://people.physics.tamu.edu/pope/ihplec.pdf>.
- [2] M.J. Duff, “Kaluza-Klein Theory in Perspective”, talk at the Oskar Klein Centenary Nobel Symposium, Stockholm, Sept. 1994; hep-th/9410046.
- [3] D. J. Kapner, T. S. Cook, E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, B. R. Heckel, C. D. Hoyle, and H. E. Swanson, “Tests of the Gravitational Inverse-Square Law below the Dark-Energy Length Scale”, *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 021101 (2007).
- [4] Bert Janssen, “Teoría de la Relatividad General”,
<http://www.ugr.es/~bjanssen/text/BertJanssen-RelatividadGeneral.pdf>.
- [5] Theodor Kaluza, “Wikipedia, the free encyclopedia”,
https://en.wikipedia.org/wiki/Theodor_Kaluza.
- [6] Oskar Klein, “Wikipedia, the free encyclopedia”,
https://en.wikipedia.org/wiki/Oskar_Klein.
- [7] Kaluza-Klein theory, “Wikipedia, the free encyclopedia”,
https://en.wikipedia.org/wiki/Kaluza-Klein_theory.
- [8] R. A. Alemañ Berenguer, “El desafío de Einstein I. En busca de la unificación”, URSS (2011).