Trabajo de fin de master: aplicación del algoritmo de Janis y Newman a diversas métricas y estudio de los resultados.

Master en Física y Matemáticas (Fisymat).
Septiembre de 2019.

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Alumno: Daniel Gálvez García.
Tutor: Dr. Bert Janssen.

Resumen:
El algoritmo de Janis-Newman es un mecanismo para obtener, mediante una transformación compleja, soluciones estacionarias y con simetría axial de las ecuaciones de Einstein partiendo de soluciones estáticas y esféricas. El presente trabajo consiste en aplicar sistemáticamente este algoritmo a métricas de estas características con diferentes parámetros y la posterior discusión de las métricas obtenidas y sus propiedades. En particular, se aplica al espacio vacío de Minkowski, a la métrica de Schwarzschild, a la métrica de de Sitter y a la métrica de Schwarzschild-de Sitter. De Minkowski se obtiene de nuevo Minkowski en otras coordenadas; de Schwarzshild se obtiene la métrica de Kerr y de las dos restantes se obtienen soluciones sin una interpretación clara. La estructura del trabajo es la siguiente: en primer lugar se hace una presentación de geometría diferencial para definir el marco matemático de trabajo; en segundo lugar se deducen las ecuaciones de Einstein en presencia de constante cosmológica; después se aplica el algoritmo a las métricas mencionadas y, por último, se discute de manera bibliográfica la estructura causal de algunas de las soluciones obtenidas.

Relatividad General; Janis-Newman; Schwarzschild, de Sitter, estructura causal.

Abstract:
The Janis-Newman algorithm is a mechanism which permits, via a complex transformation, stationary and axially symmetric solutions of Einstein's field equations from a static, spherically solution. This work consist in the systematic application of this algorithm to metrics exhibiting these characteristics with different parameters and the posterior discussion of the obtained metrics and their properties. Particularly, it will be applied to the Minkowski vacuum, the Schwarzschild metric, the de Sitter metric and the Schwarzschild-de Sitter metric. From Minkowski we get Minkowski again in other coordinates; from Schwarzschild we end up on Kerr metric and from the other two metric we get solutions with no clear interpretation. The structure of this document is as follows: first we introduce differential geometry in order to define the mathematical background we will work in; second we deduce Einstein's field equations in presence of a non-vanishing cosmological constant; then the algorithm is applied to the mentioned metrics and, in the end, we discuss in a bibliographical way the causal structure of some of the obtained solutions.

General Relativity; Janis-Newman; Shcwarzschild; de Sitter; causal structure.

Índice general

1

Introducción y motivación.

Actualmente la Relatividad General está aceptada como la teoría que rige la interacción gravitatoria. Fue desarrollada por A. Einstein a principios del siglo XX y, a pesar de los detractores iniciales, ha encontrado un merecido hueco en la comunidad científica.

La Relatividad General es una descripción geométrica de la interacción gravitatoria y describe ésta de manera muy precisa en el lenguaje de la geometría Riemanniana y el cálculo tensorial. El tomar como objetos de trabajo los tensores se debe a sus reglas de transformación bajo cambios generales de coordenadas (CGC) que garantizan que la medida de las magnitudes físicas no dependa de las mismas. Las ecuaciones que gobiernan la gravitación son las *ecuaciones de Einstein*:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad \mu,\nu \in \{0,1,2,3\}. \tag{1.0.1}$$

En estas ecuaciones $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ es el *tensor de Ricci*, $\mathcal{R}$ el *escalar de curvatura de Ricci*, $g_{\mu\nu}$ la métrica, $\kappa = 8\pi G$ siendo G la constante de gravitación universal y $T_{\mu\nu}$ el *tensor energía-momento* que da cuenta del contenido energético del universo. Como todos los objetos son simétricos bajo intercambio de sus índices resulta que hay 10 ecuaciones independientes. Físicamente partimos de que conocemos el tensor energía-momento, la distribución energética (vacío, polvo, una masa esférica, radiación, etc), y buscamos la geometría que genera esta distribución obteniendo $g_{\mu\nu}$.

No es sencillo resolver estas ecuaciones y recurrimos a aproximaciones. Una familia importante de soluciones son las que tienen simetría esférica que sirve como una buena primera aproximación a la mayoría de los objetos pequeños. La llamada *solución de Schwarzschild* es representativa de estas soluciones y por el teorema de Birkhoff sabemos que toda solución con simetría esférica tiene su forma. Otra familia de soluciones más complicada es la métricas con simetría axial, como puede ser la *métrica de Kerr*.

Lo curioso del tema es que Janis y Newman [1] desarrollaron un mecanismo que permite generar soluciones estacionarias con simetría axial partiendo de soluciones estáticas con simetría esférica a través de un cambio de coordenadas complejo. La ventaja de este método es que, en ciertos casos, nos permite ahorrarnos resolver las ecuaciones de Einstein y obtener una métrica complicada a partir de una más sencilla. En este trabajo se va a explorar este método y se va a aplicar a varias métricas conocidas para estudiar cómo funciona y qué resultados se obtienen.

En primer lugar se aplicará este algoritmo al espacio vacío de Minkowski por ser el caso más sencillo. En segundo lugar se aplicará a la métrica de Schwarzschild que es el siguiente escalón de dificultad pero introduce novedades interesantes. Después se verá para simetrías esféricas con más parámetros, como una constante cosmológica no nula (*espacio de de Sitter*) o carga eléctrica. Por último se profundizará en las propiedades físicas de las soluciones obtenidas.

La estructura del trabajo es la siguiente:

- **Capítulo 2:** se introduce el cálculo en variedades y se definen objetos como los vectores, las formas, los tensores y la conexión. Esto es puramente introductorio para sentar las bases matemáticas.
- **Capítulo 3:** se obtienen las ecuaciones de Einstein para una masa esféricamente simétrica con constante cosmológica y se resuelven, obteniendo la métrica de partida para el resto del trabajo: Schwarzschild-De Sitter. Tras esto se estudia la estructura causal de Schwarzschild, De Sitter y Schwarzschild-De Sitter.
- **Capítulo 4:** se aplica el algoritmo de Janis-Newman a la métrica de Minkowski, a Schwarzschild, a De Sitter y a Schwarzschild-De Sitter y se comentan los resultados.
- **Capítulo ??:** de manera puramente bibliográfica se realiza un compendio sobre la física del espacio-tiempo de Kerr-De Sitter, centrándonos en la estructura causal y los horizontes que presenta.

Ahora, permitiendo que r tome valores complejos podemos reescribir los vectores (4.3.5) como

$$\ell^\mu = \delta_1^\mu, \tag{4.3.6a}$$

$$n^\mu = -\delta_0^\mu - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho^2}{R_0^2}\right)\delta_1^\mu, \tag{4.3.6b}$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\,\bar{r}}\left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right), \tag{4.3.6c}$$

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\,r}\left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right), \tag{4.3.6d}$$

que se reducen a (4.3.5) cuando $\mathrm{Im}(r) = 0$ mientras mantienen ℓ^μ, $n^\mu \in \mathbb{R}$ y siendo los dos últimos complejos conjugados. Cambiando la base mediante (4.1.8) se obtiene la forma de estos vectores que proporciona los vielbein:

$$\ell^\mu = \delta_1^\mu, \tag{4.3.7a}$$

$$n^\mu = -\delta_0^\mu - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho^2}{R_0^2}\right)\delta_1^\mu, \tag{4.3.7b}$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\,(r' + ia\cos\theta)}\left(-i\sin\theta(\delta_0^\mu + \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right), \tag{4.3.7c}$$

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\,(r' - ia\cos\theta)}\left(i\sin\theta(\delta_0^\mu + \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu - \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right). \tag{4.3.7d}$$

Construimos ahora las matrices del vielbein y el vielbein inverso como anteriormente y resultan

$$(e^\mu{}_a) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho^2}{R_0^2}\right) & 0 & 0 \\ -\frac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}(r'+ia\cos\theta)} & -\frac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}(r'+ia\cos\theta)} & -\frac{1}{\sqrt{2}(r'+ia\cos\theta)} & \frac{i}{\sin\theta}\frac{1}{\sqrt{2}(r'+ia\cos\theta)} \\ \frac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}(r'-ia\cos\theta)} & \frac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}(r'-ia\cos\theta)} & -\frac{1}{\sqrt{2}(r'-ia\cos\theta)} & -\frac{i}{\sin\theta}\frac{1}{\sqrt{2}(r'-ia\cos\theta)} \end{bmatrix}. \tag{4.3.8}$$

$$(e^a{}_\mu) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left(1-\frac{\rho^2}{R_0^2}\right) & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r'+ia\cos\theta}{\sqrt{2}} & \frac{r'-ia\cos\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{a\sin^2\theta}{2}\left(1+\frac{\rho^2}{R_0^2}\right) & -a\sin\theta & -i\frac{(r+ia\cos\theta)\sin\theta}{\sqrt{2}} & i\frac{(r-ia\cos\theta)\sin\theta}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \tag{4.3.9}$$

4.3.2 Obtención de la métrica.

Aplicando (4.0.3) con (4.3.9) se obtiene el elemento de línea

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left(1-\frac{\rho^2}{R_0^2}\right)dv^2 - 2dv\,dr - 2a\sin^2\theta\frac{\rho^2}{R_0^2}dv\,d\phi \\ &- 2a\sin^2\theta\,dr\,d\phi - \rho^2 d\theta^2 \\ &- \sin^2\theta\left[a^2+r^2+a^2\sin^2\theta\frac{\rho^2}{R_0^2}\right]d\phi^2. \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Esta métrica presenta un problema nuevo respecto a las anteriores. A priori cabría esperar que fuera la métrica de de Sitter en otras coordenadas, como ocurría con Minkowski, sin embargo no es así. La métrica (4.3.10) no tiene una interpretación física evidente. Sabemos que presenta dos parámetros, a y R_0, pero poco más. Tampoco es claro interpretar el parámetro a como el momento angular como se hizo en la métrica de Kerr porque no tenemos con qué comparar. Se puede ver que en el límite $\Lambda = 0$ ($R_0 \to \infty$) se recupera la métrica de Minkowski (4.1.12).

En consecuencia aplicar el algoritmo de Janis y Newman al espacio de de Sitter abre la puerta al estudio de una nueva métrica diferentes a las conocidas. Cabe preguntarse qué condiciones de energía satisface, qué tensor energía-momento la genera y si éste tiene interés físico, cuál es su estructura causal, cuáles son sus horizontes y si son físicos o de coordenadas, etc. Todo esto, sin embargo, queda fuera del alcance de este trabajo.

se obtiene la métrica de Minkowski en coordenadas esferoidales oblatas, (4.1.12). Es decir, eliminando ambos parámetros recuperamos Minkowski.

En conclusión, la métrica que se obtiene al aplicar el algoritmo de Janis y Newman a un espacio-tiempo con una distribución de masa esféricamente simétrica y en presencia de una constante cosmológica distinta de cero es

$$\boxed{\begin{aligned} ds^2 = &\left(1 - \frac{2mr}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{R_0^2}\right) dv^2 - 2dv\,dr - 2a\sin^2\theta\left(\frac{2mr}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{R_0^2}\right) dv\,d\phi \\ &- 2a\sin^2\theta\,dr\,d\phi - \rho^2 d\theta^2 \\ &- \sin^2\theta\left[a^2\sin^2\theta + \rho^2 + a^2\sin^2\theta\left(\frac{2mr}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{R_0^2}\right)\right] d\phi^2. \end{aligned}}$$

Tal y como ocurría al obtener (4.3.10) esta métrica no tiene una interpretación directa pero se plantean los mismos interrogantes: qué condiciones energéticas satisface, qué distribución energética la genera, cuál es su estructura causal, horizontes, extensiones y demás.

El porqué estas dos métricas no resultan en lo esperado puede encontrarse en [7; 8]. Esencialmente, para que una métrica obtenida por este mecanismo satisfaga (3.1.5) con $\Lambda \neq 0$ la parte imaginaria de r debe ser constante. Al no cumplirse este requisito la métrica obtenida es algo que no cumple (3.1.5).

No obstante resulta llamativo que la forma de (4.4.7) sea tan parecida a las métricas (4.2.10) y (4.3.10) y se pueda obtener a partir de ellas mediante los cambios

$$\frac{2mr}{\rho^2} \mapsto \frac{2mr}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{R_0^2}$$

$$\frac{\rho^2}{R_0^2} \mapsto \frac{2mr}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{R_0^2}$$

respectivamente.

5 Conclusiones.

El objetivo del trabajo ha sido tomar el algoritmo desarrollado por Janis y Newman para generar nuevas soluciones de las ecuaciones de Einstein a partir de soluciones con simetría esférica, e.g. a partir de Schwarzschild, y aplicarlo a diversos espaciotiempos.