



Teoría electromagnética de Einstein-Proca

Antonio Arroyo Polonio



Teoría electromagnética de Einstein-Proca

Antonio Arroyo Polonio

Memoria del **Trabajo Fin de Máster**.
Máster en Física y Matemáticas (FisyMat)
Universidad de Granada.

Tutorizado por:

Prof./Dr. Bert Jansen

2 TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA DE EINSTEIN-PROCA

A child of five would understand this. Send someone to fetch a child of five.

Groucho Marx

Antes de nada, me gustaría agradecer a Bert todo el trabajo (que no ha sido poco) que ha dedicado a enseñarme tantos rincones de la teoría de la relatividad general. A Castelo y José que se han interesado activamente por mi trabajo y con los que he discutido algunos de mis resultados. Además de por supuesto a mi familia y otros amigos sin los cuales muchas más cosas a parte de este trabajo nunca hubieran sido posibles.

DECLARACIÓN

En cumplimiento de la normativa aprobada en Consejo de Gobierno de 4 de marzo de 2013, sobre Directrices de la Universidad de Granada para el desarrollo de la asignatura "Trabajo Fin de Máster" de sus títulos de máster (Art 8,4)

D.D^a Antonio Arroyo Polonio

Asume la originalidad del trabajo fin de máster, entendida en el sentido de que no ha utilizado fuentes sin citarlas debidamente.

Granada, a 26 de Junio de 2018

Fdo.:

A handwritten signature in black ink, consisting of several overlapping loops and a horizontal stroke at the end, enclosed within a light gray rectangular border.

Índice general

English Abstract	1
1. Introducción	3
2. Teoría de Maxwell	7
2.1. Carga puntual	8
2.2. Ondas	9
3. Teoría de Proca	15
3.1. Carga puntual	16
3.2. Ondas	17
4. Teoría de Einstein-Maxwell	21
4.1. Introducción. Relatividad general	21
4.2. Ecuaciones de movimiento	23
4.3. Agujero negro con carga	24
5. Teoría de Einstein-Proca	29
5.1. Agujero Proca	31

6. Aproximación asintótica. Régimen del campo débil	35
6.1. Agujero negro con carga	39
6.2. Carga de Proca	41
7. Conclusiones	45

Abstract

In this work, we will try to understand Alexandru Proca's theory of electromagnetism. Here, the electromagnetic fields have a mass associated. We will see that this theory is a generalization of conventional electromagnetism; the differences between both theories will become clear when analyzing the particular solutions of the equations of motion. Because of its simplicity, we will study wave solutions and spherically symmetric solutions.

Key words: Proca, electromagnetism, wave, charge.

1 | Introducción

Este trabajo tendrá como finalidad el estudio de la teoría de Proca en el marco de la relatividad general. Para ello nos serviremos de principios variacionales. Primero, definiremos una acción que describa nuestro sistema físico y derivaremos sus ecuaciones de movimiento; debido al carácter no lineal de la teoría de la relatividad general es prácticamente imposible encontrar soluciones generales. Por ello, impondremos condiciones adicionales al sistema, tales como ciertas simetrías que deberá cumplir. De esta forma, podremos encontrar soluciones particulares que nos ayuden a entender la física de esta teoría.

En la teoría del electromagnetismo acoplada a la gravedad (lo que se llama teoría de Einstein-Maxwell) tenemos la siguiente acción asociada

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \left(\frac{R}{2k} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right), \quad (1.1)$$

donde g es la métrica, R el escalar de curvatura. $F_{\mu\nu}$ es el tensor de Faraday que tiene la siguiente forma

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

donde E_i es la expresión del campo eléctrico y B_i la del campo magnético en ciertas coordenadas. Proca introduce un nuevo término a la acción, el cual hace que los campos electromagnéticos adquieran masa. Esto, hace que la física cambie por completo. Así, la nueva acción que plantea Proca es

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \left(\frac{R}{2k} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{m}{\hbar} \right)^2 A^\mu A_\mu \right). \quad (1.3)$$

A^μ es el tensor potencial electromagnético que tiene la siguiente forma

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

donde ϕ es el potencial escalar y A^i las componentes del potencial vector expresado en ciertas coordenadas. La masa m sería una nueva constante universal que se corresponde con la masa del fotón en esta teoría. En [7] se ha establecido un umbral para la masa del fotón $m \leq 6 \times 10^{-17} \text{ eV}$. De aquí en adelante asociaremos esta masa al campo electromagnético en sí, por ser una interpretación más acorde a la filosofía de la relatividad general. A esta teoría la llamaremos Einstein-Proca y es la tratada al final de este trabajo donde se generalizará el agujero negro con carga.

Empezaremos repasando el electromagnetismo convencional en el espacio plano, la teoría de Maxwell. Deduciremos las soluciones de carga puntual y de onda por ser fáciles de resolver. Como es bien conocido, la carga puntual tiene un potencial de largo alcance. Por otra parte, las ondas tienen dos polarizaciones transversales a la propagación de esta y se mueven a la velocidad de la luz. También, recalcaremos conceptos como la libertad gauge de la teoría.

Realizaremos un estudio equivalente al mencionado para la teoría de Proca en espacio plano, lo que llamaremos simplemente teoría de Proca. Veremos que aquí no tenemos libertad gauge pero la ecuación de movimiento nos impone una ligadura equivalente al gauge de Lorentz, lo que llamaremos la ligadura de Lorentz. La carga puntual aquí no tiene un potencial de largo alcance y concentra más la energía en su entorno. Por otro lado, las ondas tienen una nueva polarización y su relación de dispersión (la relación entre la frecuencia y el número de ondas $\omega = f(k)$) es no lineal. Esto implica que la velocidad de la onda depende de la frecuencia de esta y que es sublumínica.

Tras esto, acoplaremos el campo electromagnético a la gravedad. Lo cual, consiste en darle dinámica a la geometría espacio-temporal y hacer que el contenido energético del sistema actúe sobre esta. A esta teoría como ya hemos mencionado se le llamará Einstein-Maxwell y su acción correspondiente es la (1.1).

Comenzaremos con una introducción a la teoría de la relatividad general, primero presentaremos las ecuaciones de Einstein, interpretando su significado y recalcando propiedades suyas como la divergencia nula del tensor de Einstein. Tras esto, estudiaremos la solución estática y con simetría esférica no trivial de esta teoría, lo que

es el agujero negro con carga. A esta se le llama la solución de Reissner-Nordström y presenta una singularidad en la geometría espacio-temporal, esto es, un punto cuya curvatura y densidad energética divergen.

En el siguiente paso haremos el mismo estudio que el mencionado pero añadiremos a la acción el término de Proca. A esta teoría, como ya hemos mencionado, se le llamará Einstein-Proca y su acción asociada es (1.3). Aquí, plantearemos las ecuaciones de movimiento y haremos un test de consistencia para comprobar que son correctas.

Tras esto, buscaremos una solución estática y con simetría esférica en esta teoría. Sería la generalización del agujero negro con carga ya que apagando la masa del campo electromagnético $m = 0$ obtenemos la solución de Reissner-Nordström. Llamaremos a esta solución carga de Proca. Veremos que el sistema de ecuaciones que describe la carga de Proca es demasiado complejo para encontrar una solución analítica.

Es por ello que trataremos de encontrar una solución aproximada para la carga de Proca. Usaremos para ello lo que se denomina expansión del campo débil. En esta aproximación, nuestra métrica será la de Minkowski sumada a una pequeña perturbación que consideraremos solo a orden lineal $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}$, donde $\epsilon \ll 1$. Se deducirán nuevas ecuaciones de movimiento más simples, de forma que su solución sea más accesible.

De esta forma, entenderemos de forma aproximada el campo creado por la carga de Proca y como esta influye en la geometría espacio-temporal. Mientras más nos alejemos de la carga, la aproximación ganará en precisión. Esto es debido a que la solución es asintóticamente plana, con lo cual el espacio-tiempo tenderá a ser plano al aumentar la distancia a la carga.

7 | Conclusiones

Hemos analizado las diferencias entre la teoría clásica de Maxwell y la de Proca tanto en el espacio plano de Minkowski como en la teoría de la relatividad general donde el espacio-tiempo tiene dinámica propia. Queda claro que el hecho de incorporar masa al campo electromagnético tiene repercusiones importantes en la física de los sistemas electromagnéticos.

Básicamente hemos analizado dos tipos de sistemas, las ondas electromagnéticas en el espacio plano y las partículas cargadas aisladas. El análisis de estas soluciones es lo que nos ha permitido entender como se comportan estos sistemas cuando su campo tiene asociada una masa m .

La primera diferencia entre las ondas electromagnéticas con masa y las convencionales es que su relación de dispersión no es lineal. Efectivamente, la relación de dispersión que se cumple en la teoría de Proca es

$$\omega = \sqrt{k^2 + \left(\frac{m}{\hbar}\right)^2}.$$

Esta se reduce a la relación lineal de la teoría de Maxwell haciendo $m = 0$, con lo cual la solución es consistente. La relación de dispersión indica que la velocidad de la onda es

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{m/\hbar}{\omega}\right)^2} \leq 1 = c.$$

Existe una dependencia de esta con la frecuencia, así para frecuencias altas la velocidad tiende a la velocidad de la luz c . Por otra parte, tenemos una frecuencia de corte $\omega_c = \frac{m}{\hbar}$ donde la velocidad de la onda y el número de onda son nulos. Además, por debajo de esta la onda se vuelve evanescente. Esto es, su amplitud decrece de forma exponencial con la distancia. Luego, en la teoría de Proca si un fotón sufre un fuerte corrimiento al rojo terminará por disiparse en el vacío.

La energía de una onda cuya frecuencia sea inferior a la de corte no se sabe claro donde acabaría. En este caso, esta claro que la amplitud de la onda decae exponencialmente. Luego una posibilidad es que la onda se deslocalice de forma similar a como lo hacen las partículas cuánticas (como el electrón). Otra posibilidad sería que esta energía se transmita al espacio-tiempo curvándolo. Visto que el cálculo se realiza en el espacio plano solo se trata de una hipótesis.

Por otra parte, cuando incorporamos masa a las ondas electromagnéticas estas adquieren una nueva polarización. Esta, tiene helicidad nula y es una combinación entre las componentes longitudinal y temporal de la onda. Así, la expresión para una onda plana propagándose en el sentido positivo del eje z es

$$A^\mu = \mathcal{A}_= (\delta_x^\mu e^{ik_\sigma x^\sigma}) + \mathcal{A}_\parallel (\delta_y^\mu e^{ik_\sigma x^\sigma}) + \mathcal{A}_m (\delta_t^\mu e^{ik_\sigma x^\sigma} + v_f \delta_z^\mu e^{ik_\sigma x^\sigma}).$$

Para ondas de alta frecuencia, la velocidad de fase $v_f = v_g^{-1}$ tiende a 0. Con lo cual la nueva polarización sería únicamente temporal. Por otro lado, en la frecuencia de corte, v_f diverge. Esto haría que la componente longitudinal de la onda también diverja si la nueva polarización no es nula $\mathcal{A}_m \neq 0$. Vemos que en general, mientras más alta es la frecuencia de la onda en la teoría de Proca más se asemeja esta a las ondas electromagnéticas convencionales.

Las cargas puntuales son el otro sistema físico tratado. El estudio realizado en el espacio plano indica que el potencial electrostático de la carga en la teoría de Proca es de corto alcance y además coincide con el de Yukawa. Este describe la interacción fuerte entre protones y neutrones en el núcleo atómico y tiene la siguiente forma

$$\phi = \frac{Q}{r} e^{-\left(\frac{m}{\hbar}\right)r},$$

donde Q se corresponde con la carga. Vemos que el término exponencial nos define un alcance para la interacción electrostática $d = \hbar/m$. Partículas cargadas que se sitúen mucho más lejos que esta distancia no sienten interacción electromagnética entre ellas. Así, esta distancia nos define el tamaño de los entornos donde podría existir un comportamiento colectivo de carácter electromagnético.

Otra consecuencia de la existencia de este término exponencial es que la energía electrostática en la teoría de Proca se encuentra más condensada en torno a la partícula cargada. Esto lo podemos notar explícitamente viendo que tiene un fuerte decaimiento con la distancia

$$\rho_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \propto e^{-2\left(\frac{m}{\hbar}\right)r}.$$

En esta teoría del electromagnetismo, las cargas puntuales se encuentran más aisladas y su energía esta más condensada.

En el siguiente paso, hemos tratado las cargas puntuales en el contexto de la relatividad general. Estas en principio, serán singularidades espacio-temporales. Sin embargo, el único argumento que tenemos a favor de esto es que en la teoría de Einstein-Maxwell lo son y la teoría de Einstein-Proca la generaliza.

En el caso de la solución de Reissner-Nordström, vemos que el potencial electrostático es el mismo que en el espacio plano. Por otra parte, la energía electromagnética de esta carga curva el espacio tiempo de forma independiente al signo de esta, ya que la métrica depende siempre de Q^2 . Se comprueba además que la energía electrostática tiene menos alcance que la energía proveniente de la masa del agujero negro (la primera decae como $\frac{1}{r^2}$ y la segunda como $\frac{1}{r}$).

Por último, hemos buscado una aproximación asintótica para la carga de Proca. Donde la componente g_{tt} de la métrica es

$$g_{tt} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{kQ^2}{2r^2} e^{-2\left(\frac{m}{\hbar}\right)r} + \frac{kQ^2}{2r} \left(\frac{m}{\hbar}\right) e^{-2\left(\frac{m}{\hbar}\right)r} + kQ^2 \left(\frac{m}{\hbar}\right)^2 E_i \left(-2\left(\frac{m}{\hbar}\right)r\right).$$

Hay un gran salto de complejidad cuando consideramos masa en el campo electromagnético a la hora de estudiar soluciones estáticas y con simetría esférica. Vemos otra vez, como es lógico, que la forma de curvar el espacio tiempo no depende del signo de la carga. Por otra parte, como ocurría en el espacio plano con la carga puntual, el alcance del efecto en el espacio-tiempo de esta carga es todavía menor que en la solución de Reissner-Nordström. Así, se refuerza el argumento de que las cargas en la teoría de Proca concentran más su energía y, por lo tanto, disminuye el alcance del efecto de esta en el espacio-tiempo.

Bibliografía

- [1] B. Janssen . *Teoría de la Relatividad General*. 2017
- [2] Yuri N. Obukhov and Eugen J. Vlachynsky . *Einstein–Proca model: spherically symmetric solutions*. 1999
- [3] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, M. MacCallum . *Exact Solutions of Einstein’s Field Equations*. 1980
- [4] Sean Carroll . *Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity*. 2004
- [5] Steven Weinberg . *Gravitation and Cosmology. Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. 1972
- [6] Chris Vuille, James Ipser, Jeff Gallagher . *Einstein-Proca Model, Micro Black Holes, and Naked Singularities*. 2002
- [7] L.-C. Tu, J. Luo, G.T. Gillies . *Challenging Photon Mass: from Scalar Quantum Electrodynamics to String Theory*. 2014