Máster en Física y Matemáticas Trabajo Fin de Máster

Formalismo de Palatini y sus implicaciones en la teoría Einstein-Hilbert libre y acoplada

Alejandro Jiménez Cano

Julio de 2016

[Versión corregida 16/07/2016]

Tutor: Bert Janssen
Departamento de Física Teórica y del Cosmos
Universidad de Granada

DECLARACIÓN

En cumplimiento de la normativa aprobada en Consejo de Gobierno de 4 de marzo de 2013, sobre Directrices de la Universidad de Granada para el desarrollo de la asignatura "Trabajo Fin de Máster" de sus títulos de máster (Art 8,4)

D. Alejandro Jiménez Cano

Asume la originalidad del trabajo fin de máster, entendida en el sentido de que no ha utilizado fuentes sin citarlas debidamente.

Granada, a 22 de junio de 2016.

Fdo.:

Formalismo de Palatini y sus implicaciones en la teoría Einstein-Hilbert libre y acoplada

Alejandro Jiménez Cano

Resumen

En el presente trabajo expondremos la teoría Einstein-Hilbert en dimensión arbitraria acoplada a lagrangianos de materia independientes de la conexión, y obtendremos las ecuaciones de movimiento mediante el formalismo métrico y el formalismo de Palatini. En el primero se toma la conexión de Levi-Civita y en el segundo se admite una conexión general independiente de la métrica. Calculamos la solución general de la ecuación de la conexión e interpretamos la física de las soluciones haciendo incapié en las que son diferentes de la Levi-Civita. A continuación, resolvemos el problema mediante Vielbein, en el fibrado tangente, demostrando que ambos procedimientos son equivalentes bajo ciertas condiciones lícitas. Finalmente, con el apoyo de los Vielbein, introduciremos en el espaciotiempo un campo espinorial local de Dirac y resolveremos las ecuaciones de movimiento obteniendo, de nuevo, la conexión más general compatible con la teoría; el espín, que no aparecía en los anteriores casos, jugará un papel importante como fuente de torsión.

"Si buscas resultados distintos, no hagas siempre lo mismo".

Albert Einstein

Índice general

Notación

TABLA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{M}$	Variedad / espaciotiempo
$T_p\mathcal{M},\ T_p^*\mathcal{M},\ \mathrm{T}_p^{(r,\,s)}\mathcal{M}$	Espacio tangente, cotangente y tensorial de tipo $(r,\ s)$ a $\mathcal{M}$ en p
$T\mathcal{M},\ T^*\mathcal{M},\ \mathrm{T}^{(r,\,s)}\mathcal{M}$	Fibrado tangente, cotangente y tensorial de tipo $(r,\ s)$ de $\mathcal{M}$
D	Dimensión de la variedad
$\otimes$	Producto tensorial
$g_{\mu\nu}$	Componentes del tensor métrico del espaciotiempo en una base de cordenadas
η_{ab}	Componentes de la métrica del espaciotiempo de Minkowski en cartesianas
$e^a{}_\mu,\ \ e^\mu{}_a$	D-bein y D-bein inverso[1]
g, e	Determinantes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y del Vielbein $e^a{}_\mu$
V, **W**, **E**,...; V^μ,W_μ, $E^\mu{}_\nu$,...	Vectores, formas, tensores,... ; sus componentes
(PV)	Postulado del Vielbein
$\left\{ {\mu \atop \rho\nu} \right\}$	Símbolos de Christoffel
$\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$	Conexión afín
$\nabla_\mu,\ \ R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda,\ \ T^\sigma{}_{\mu\nu}$	Derivada covariante, curvatura y torsión asociadas a $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$
$\omega_{\mu a}{}^b$	Conexión de espín
$D_\mu,\ \ \mathcal{R}_{\mu\nu a}{}^b,\ \ \mathcal{T}^a{}_{\mu\nu}$	Derivada covariante, curvatura y torsión asociadas a $\omega_{\mu a}{}^b$
$\mathfrak{D}_\mu$	Derivada completamente covariante
D^{sp}_μ	Derivada espinorial
$\mathcal{L},\ \ \mathcal{S}$	Densidad lagrangiana y acción
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
$\kappa = 8\pi G_N$	Constante de las ecuaciones de Einstein (con G_N la cte de gravitación de Newton)
$\tau^\chi_{\mu\nu}$	Tensor energía-momento de Hilbert para la materia χ
$\mathrm{t}^\chi_{\mu\nu}$	Tensor energía-momento respecto al Vielbein para la materia χ
$\sqrt{\lvert g\rvert}\mathrm{d}^D x$	Elemento de volumen D-dimensional invariante bajo cambios generales de coordenadas
$\mathbb{L}^D$ o bien $\mathbb{R}^{1,D-1}$	Espaciotiempo de Minkowski en D dimensiones.

[1] Abusaremos del lenguaje y llamaremos a ambos *Vielbein* aunque la dimensión sea arbitraria.

χ	Campo general (escalar, vector, espinor, conexión, ...)
ϕ	Campo escalar
$A_\mu,\ \ F_{\mu\nu}$	Potencial y tensor electromagnético
$\mathcal{A}_\mu,\ \ \mathcal{F}_{\mu\nu};\ \mathcal{B}_\mu,\ \ \tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}$	Campo no-dinámico asociado a las conexiones de Palatini y tensor asociado; idem para las conexiones Dirac-Palatini
$\boldsymbol{\Psi},\ \ \overline{\boldsymbol{\Psi}}$	Biespinor (espinor de Dirac) y biespinor adjunto
$\hbar$	Constante reducida de Planck ($h/2\pi$)
i	Unidad imaginaria
$\boldsymbol{\gamma}^a$	Matrices gamma en D dimensiones
$\not{B} \equiv \boldsymbol{\gamma}^a B_a$	Feynman slash
TLL	Transformaciones locales de Lorentz
CGC	Cambios generales de coordenadas (difeomorfismos)
$\mathrm{ISO}(D-1,\,1),\ \ \mathfrak{iso}(D-1,\,1)$	Grupo de Poincaré en D dimensiones y su álgebra de Lie
$\mathrm{SO}(D-1,\,1),\ \ \mathfrak{so}(D-1,\,1)$	Grupo de Lorentz en D dimensiones y su álgebra de Lie
P^a	Generadores de las traslaciones espaciotemporales
$M^{ab},\ \ \ M^{ab}_{\mathrm{vect}},\ \ \boldsymbol{\Sigma}^{ab}$	Generadores del álgebra de Lorentz: general, en repres. vectorial y en repres. espinorial
$L^{\star}{}_{*},\ \ \Lambda^a{}_b,\ \ \ L_{\mathrm{spin}}{}^A{}_B$	Transformación de Lorentz: general, en repres. vectorial y en repres. espinorial
θ_{ab}	Parámetros de una transformación de Lorentz
$\mathrm{Spin}(D-1,\,1),\ \ \mathfrak{spin}(D-1,\,1)$	Recubridor universal del grupo de Lorentz (grupo de espín) y su álgebra de Lie
$\mathrm{Diff}(\mathcal{M})$	Grupo de difeomorfismos de la variedad $\mathcal{M}$
$\equiv$	Igualdad remarcable, identidad
$:=$	Igualdad por definición
$\rtimes$	Producto semidirecto
$[M,\,N]^i{}_j\ ,\ \ \{M,\,N\}^i{}_j$	Conmutador y anticonmutador de matrices (u operadores diferenciales)
$[\mathbf{V},\,\mathbf{W}]^\mu,\ \ [P_a,\,M_{ab}]$	Corchete de Lie de campos vectoriales o de elementos de un álgebra de Lie
$\mathbb{1}$	Operador o matriz identidad

Y, a continuación, puntualizamos dos notaciones que utilizaremos:

❏ Simetrizador y antisimetrizador (indicado para dos índices; la generalización es automática):

$$V_{(\mu}W_{\nu)} \coloneqq \frac{1}{2}\left(V_\mu W_\nu + V_\nu W_\mu\right) , \qquad V_{[\mu}W_{\nu]} \coloneqq \frac{1}{2}\left(V_\mu W_\nu - V_\nu W_\mu\right) .$$

Obsérvese que $V_\mu W_\nu = V_{(\mu}W_{\nu)} + V_{[\mu}W_{\nu]}$. Todo lo que esté dentro del paréntesis o el corchete se somete a anti/simetrización:

$$V_{(\mu}W_{a\nu)} \coloneqq \frac{1}{6}\left(V_\mu W_{a\nu} + V_\mu W_{\nu a} + V_a W_{\mu\nu} + V_a W_{\nu\mu} + V_\nu W_{a\mu} + V_\nu W_{\mu a}\right) .$$

Para simetrizar el objeto $V_\mu W_{a\nu}$ en μ y ν, usaremos barras para señalar los índices que no se ven afectados por estos símbolos, es decir:

$$V_{(\mu}W_{|a|\nu)} = \frac{1}{2}\left(V_\mu W_{a\nu} + V_\nu W_{a\mu}\right) .$$

El simetrizador o el antisimetrizador solo lo haremos actuar sobre índices de abajo o de arriba, nunca mezclados. De modo que no es necesario incluir barras, por ejemplo, para el índice a en el caso $V_{(\mu}W^{a}{}_{\nu)}$. Si quisiéramos incluirlo en la simetrización deberíamos bajarlo, $g^{ab}V_{(\mu}W_{b\nu)}$ [ver criterio de índices Pág. VI].

❏ Trabajaremos con diferentes conexiones. Distinguiremos los objetos asociados del modo siguiente:

$R_{\mu\nu},\ \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu},\ \nabla_\mu, \ldots$ (generales) ,
$\mathring{R}_{\mu\nu},\ \mathring{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu},\ \mathring{\nabla}_\mu, \ldots$ (de Levi Civita/form. métrico) ,
$\bar{R}_{\mu\nu},\ \bar{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu},\ \bar{\nabla}_\mu, \ldots$ (form. de Palatini para Einstein-Hilbert) ,
$\tilde{R}_{\mu\nu},\ \tilde{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu},\ \tilde{\nabla}_\mu, \ldots$ (form. de Palatini para Einstein-Hilbert-Dirac) .

Convenios

- ❏ Tomaremos la velocidad de la luz en el vacío igual a la unidad $c = 1$.
- ❏ Signatura de la métrica: asignaremos $+$ a las componentes temporales y $-$ a las espaciales de la métrica. Por ejemplo, para una métrica lorentziana cuadrimensional tendríamos $(+ - --)$.
- ❏ Índices

  Emplearemos continuamente el convenio de sumación de Einstein según el cual *índice repetido arriba y abajo en un término se supone sumado en todos sus posibles valores* (en general será la dimensión del espacio en el que vivan las componentes del objeto).

  - Para tensores, los índices arriba se corresponden a la parte contravariante (vectorial) del tensor y los de abajo a la covariante (covectorial).
  - Para objetos no tensoriales, los índices arriba o abajo se fijan de forma adecuada según convenga para trabajar de la forma más fluida y cómoda posible [ver *Criterio de índices*, más adelante].
  - Índices griegos en minúscula: $\mu,\ \nu,\ \rho,\ \lambda, \tau,\ \eta, ...$ se refieren a componentes en una base holónoma o de coordenadas $\{\partial_\mu\}$ si están arriba o su dual $\{dx^\mu\}$ si están abajo.
  - Índices latinos en minúscula: $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f, ...$ se refieren a componentes en una base no holónoma ortogonal $\{\mathbf{e}_a\}$ si están arriba o su dual $\{\mathbf{e}^a\}$ si están abajo.
  - Índices latinos en mayúscula: $A,\ B,\ C, ...$ son índices espinoriales.

- ❏ Criterio de índices

  Es un resultado muy importante que utilizaremos exhaustivamente y que se basa en lo siguiente. Dado un objeto con componentes etiquetadas por ciertos índices, este debe tener una *forma fundamental* (o definición); pues diremos que, respecto a esta forma, *sus índices no espinoriales suben y bajan con la métrica correspondiente y se transforman de un tipo a otro mediante los Vielbein*. Por ejemplo, sea un tensor definido ${M_c}^{a\mu\nu b}$, entonces:

  $$M^{da\mu\nu b} := \eta^{cd} {M_c}^{a\mu\nu b}\,, \qquad {M_\rho}^{a\mu}{}_\lambda{}^b := e^c{}_\rho g_{\lambda\nu} {M_c}^{a\mu\nu b}\,, \qquad ...$$

  Puede parecer una trivialidad dado a lo que se está acostumbrado en Relatividad General, pero no lo es en absoluto. Subir y bajar índices consiste en intercambiar partes covariantes con partes contravariantes y esto solo es lícito cuando el objeto es tensorial. Sin embargo, nuestro criterio de índices se extiende a objetos no tensoriales. Por ejemplo, la conexión de espín se define ${\omega_{\mu a}}^b$, pero a veces nos la encontraremos con los dos índices abajo $\omega_{\mu ab}$; este objeto, estrictamente hablando, no es la conexión de espín, es una notación para referirnos a ${\omega_{\mu a}}^c \eta_{cb}$, la cual facilita mucho la escritura.

  Pero hay que tener cuidado con ella: consideremos un lagrangiano que depende de los Vielbein y de un objeto $W_{\mu a}(\chi)$ (no necesariamente tensorial), con el campo χ independiente del Vielbein. Al derivar respecto al Vielbein W_{ba}, hemos de tener en cuenta que hay un Vielbein "escondido" pues esta es una forma de denotar $e^\mu{}_b W_{\mu a}$.

- ❏ El tensor de Riemann, la torsión, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura que emplearemos los definimos del siguiente modo:

  $$\begin{aligned} {R_{\mu\nu\rho}}^\lambda &:= \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho}\,, & R_{\mu\nu} &:= {R_{\mu\rho\nu}}^\rho\,,\\ T^\lambda{}_{\rho\nu} &:= \Gamma^\lambda_{\rho\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\,, & R &:= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\,. \end{aligned}$$

1 Introducción y motivación

La Teoría de la Relatividad General se sustenta fuertemente en el *principio de equivalencia* según el cual la gravedad es un artefacto de las coordenadas elegidas, pudiéndose suprimir localmente con un cambio adecuado de las mismas. Sin embargo, no puede deshacerse globalmente como consecuencia de la curvatura del espaciotiempo. Einstein identificó gravedad con curvatura y a ésta la relacionó con el contenido de energía del universo mediante sus conocidas *ecuaciones de Einstein*[1]:

$$\mathring{G}_{\mu\nu} = -\kappa \tau_{\mu\nu} \,, \tag{1.0.1}$$

donde $\mathring{G}_{\mu\nu} \coloneqq \mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathring{R}$ es el *tensor de Einstein* dependiente del tensor de Ricci $\mathring{R}_{\mu\nu}$ y del escalar de curvatura del espaciotiempo $\mathring{R}$, $\kappa = 8\pi G_N$ es una constante relacionada con G_N, la *constante de gravitación universal*, y $\tau_{\mu\nu}$ es el *tensor energía-momento* que contiene la información sobre la distribución de materia y energía. De momento no es importante saber qué significa cada uno de estos objetos, los definiremos en los próximos capítulos. Lo importante es el mensaje: la curvatura es producida por la materia y la energía y, a su vez, la dinámica de éstas está condicionada por la curvatura.

La forma del tensor $\mathring{G}_{\mu\nu}$, puede deducirse a partir de asunciones de consistencia físico-matemática: el espacio plano (sin curvatura) ha de ser solución para el vacío ($\tau_{\mu\nu} = 0$), la energía debe conservarse localmente ($\mathring{\nabla}_\rho \tau_{\mu\nu} = 0$),... así lo construyó Einstein.

Sin embargo, días antes de la publicación de Einstein, David Hilbert publicó las ecuaciones de Einstein del vacío,

$$\mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathring{R} = 0 \,, \tag{1.0.2}$$

así como un modo de obtenerlas mediante la imposición del principio de acción estacionaria sobre la acción

$$\mathcal{S}_{\mathrm{EH}} = \int \mathrm{d}^D x \, \sqrt{|g|} \frac{1}{2\kappa} \mathring{R} \,, \tag{1.0.3}$$

que llamaremos *acción de Einstein-Hilbert*, donde g es el determinante del tensor métrico. Sin embargo el modo de derivar las ecuaciones de movimiento presenta una sutileza y ésta tiene que ver con la arbitrariedad de lo que llamaremos conexión. Este objeto va a proporcionarnos un modo de transportar "paralelamente" vectores en un espacio curvo donde este no puede llevarse a cabo de forma natural como en los planos. Y, gracias a ello, podremos comparar vectores próximos y de aquí obtener una definición de derivada que va a casar bien con las transformaciones que gobiernan el espaciotiempo que son los cambios generales de coordenadas. Y es con este objeto con el que se construyen los tensores de curvatura y torsión que diferenciarán a la variedad del espacio plano. En física y en matemáticas se suele elegir como conexión la de Levi-Civita, cuya existencia y unicidad están garantizadas y que, además de destacar por sus propiedades, queda completamente determinada por el tensor métrico. De estas propiedades, una de las más destacadas es el hecho de que las trayectorias más "rectas"[2] entre dos puntos coinciden con las trayectorias que minimizan la acción de la partícula libre (los caminos "cortos"[3]) entre entre ambos. Con una conexión general no es cierto, y este es uno de los argumentos más fuertes para elegir la conexión de Levi-Civita (y es una razón física).

Por otra parte, si consideramos el lagrangiano de gravedad más sencillo, el de Einstein-Hilbert, vemos que es función exclusiva de la curvatura (i.e. de la conexión) y de la métrica. Al elegir Levi-Civita [ec. (1.0.3)], deja de intervenir la conexión como un campo independiente y ahora todo depende de la métrica. Efectivamente, tal y como hizo Hilbert, variando e igualando a cero con este planteamiento (*formalismo métrico*) se reproducen las ecuaciones de Einstein del vacío.

[1] En noviembre de 1915, Einstein las publicó en una forma equivalente: $\mathring{R}_{\mu\nu} = -\kappa \left(\tau_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tau \right)$ con $\tau = g^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu}$.

[2] Aquellas en las que la 4-velocidad se mantiene "paralela" a sí misma a lo largo de la curva

[3] Estrictamente hablando, puntos críticos de la longitud.

Sin embargo, si optamos por mantener una conexión general (*formalismo de Palatini*) obtendremos además una ecuación para la conexión. Como veremos, usualmente se le impone alguna condición que acaba reduciendo el espacio de soluciones a una sola, la de Levi-Civita, que aparece en escena como la "legítima" conexión para la Relatividad General. En este trabajo pretendemos resolver en general esta ecuación, sin imponer nada, y obtener de forma explícita las conexiones más generales[4] permitidas para nuestra teoría de gravedad. Veremos que las propiedades de estas conexiones son sorprendentes; de hecho, siendo matemáticamente diferentes de la de Levi-Civita, parecen describir (a efectos de lo que estudiaremos aquí) la misma física. Por ejemplo, la coincidencia de trayectorias "más rectas" con las de partículas libres también se da para todas estas soluciones (¡no solo para la de Levi-Civita!). Luego, parece ser que la elección de la conexión de Levi-Civita se lleva a cabo por conveniencia, por sencillez. No parece haber una razón física que justifique dicha elección. Comprobaremos además que todo esto sigue siendo válido si añadimos al vacío campos de materia que satisfacen ciertas condiciones.

En general, al aplicar el formalismo de Palatini, esperamos que la conexión de Levi-Civita sea una de sus soluciones. Se puede comprobar [3, 19] que esto solo ocurre para las teorías Lovelock, en las cuales se agregan ciertos términos de curvatura a la lagrangiana que modifican la dinámica (Einstein-Hilbert es un caso particular). En otros casos ambos formalismos dan lugar a teorías muy diferentes. Por ejemplo, en gravedad Einstein-Hilbert acoplada al campo de Dirac, el espín del campo genera torsión en el espaciotiempo y una de las características de la conexión de Levi-Civita es que su torsión es cero, por lo que, si partimos de la conexión de Levi-Civita, estamos agregando una ligadura a mano que repercutirá en el espín; otros ejemplos muy estudiados de inequivalencia son las $f(R)$-*gravities*, teorías de gravedad modificada en las que se sustituye el escalar de Ricci de la acción Einstein-Hilbert por una función arbitraria del mismo. En lo relativo a estas teorías $f(R)$, en el formalismo de Palatini se ha encontrado recientemente un gran filón para la cosmología, de donde extraer nuevas teorías para la materia oscura y la energía oscura (véase por ejemplo [7]).

Como se observa, es un tema relacionado con aspectos realmente fundamentales de la Relatividad General, en los que hay pequeños vacíos que intentaremos rellenar con nuestro estudio. No pretendemos analizar fenómenos concretos sino la forma de deducir la dinámica a partir de una acción, es decir, afinar en la propia estructura de la teoría.

Terminamos describiendo brevemente cómo hemos organizado el trabajo:

- Capítulo §2. Este capítulo se añade por cuestiones de completitud y por fijar un marco matemático. En él vamos a recorrer la geometría diferencial desde los conceptos más básicos hasta establecer todas las herramientas que necesitamos para trabajar. Al final, recordaremos las ecuaciones de Euler-Lagrange en teoría de campos.

- Capítulo §3. Resolveremos por el formalismo métrico y de Palatini la gravedad de Einstein-Hilbert con materia mínimamente acoplada a esta e independiente de la conexión. Concluiremos con la deducción de la ecuación de la conexión, a cuyas soluciones llamaremos *conexiones de Palatini*.

- Capítulo §4. Presentamos ahora una descripción alternativa y equivalente a la anterior. Analizaremos la Relatividad General como una teoría que describe un espaciotiempo localmente Minkowski y equipado con un campo, el Vielbein, que contendrá la información sobre la geometría de la variedad.

- Capítulo §5. Sin duda, el corazón del trabajo. Aquí resolveremos la ecuación de la conexión, estableceremos la forma general de las conexiones de Palatini y estudiaremos sus propiedades matemáticas y físicas.

- Capítulo §6. Este capítulo es una ampliación personal en la que consideraremos la ya mencionada gravedad Einstein-Hilbert acoplada a un campo que depende de la conexión: el campo de

[4]Estas conexiones generales ya han aparecido en la física pero en contextos diferentes y no se ha dado una interpretación a la física que describen. Véase [23] donde el contexto es una gravedad modificada con un término adicional en la lagrangiana, y [26] donde se introduce simplemente como un objeto auxiliar para el estudio de soluciones simétricas (caso particular).

Dirac. Campo de enorme relevancia en física pues describe fermiones de espín 1/2. Esta teoría no puede construirse como las del capítulo §3 debido a las propiedades de los espinores y ha de aprovecharse la estructura localmente plana descrita en §4 para introducirlos. Resolveremos las ecuaciones de movimiento en el caso de una conexión completamente general, y obtendremos un resultado muy parecido al del capítulo §5. La novedad será un término adicional ligado al espín y que será fuente de torsión en el espaciotiempo.

Los apéndices finales no forman parte del trabajo en sí. Constituyen simplemente una recopilación de material complementario y algunos cálculos accesorios que lo complementan.

7 Conclusiones

Concluimos recopilando los resultados más relevantes de nuestro estudio. En primer lugar, hemos resuelto mediante el formalismo de Palatini la teoría Einstein-Hilbert (libre y/o con materia independiente de la conexión) y encontrado la forma general de todas las conexiones afines que verifican la correspondiente ecuación del movimiento:

$$\bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} + \mathcal{A}_\mu \delta^{\rho}_{\nu} \,, \tag{7.0.1}$$

donde $\mathcal{A}_\mu$ es un campo no-dinámico arbitrario. Hemos comprobado que todas las soluciones de esta familia, para cada elección de $\mathcal{A}_\mu$, parecen describir la misma física. Las trayectorias autoparalelas coinciden con las críticas en todos los casos y, como estas últimas son independientes de la conexión, concluimos que las geodésicas afines de cualquiera de ellas, son pre-geodésicas afines para cualquiera de las otras. Y si queremos pasar de una a otra, basta con reparametrizar las curvas de manera adecuada para obtener exactamente las mismas ecuaciones.

Pero describir las mismas trayectorias no es suficiente si la interacción gravedad-materia es diferente. Dedicimos entonces estudiar si las conexiones de Palatini poseen la misma curvatura, y encontramos que coinciden para aquellas diferenciadas por un término "pure gauge". De este modo, podemos agrupar las conexiones de Palatini en diferentes familias, cada una con una curvatura. Sin embargo, resulta sorprendente que la parte de la curvatura que interviene en la desviación geodésica y en las ecuaciones de Einstein es la misma en todos los casos. A esto nos referimos cuando decimos que describen la misma física; lo decimos en un sentido "rudo" pues, sin embargo, no descartamos que en otras situaciones más sutiles se manifiesten efectos físicos. Asímismo, hemos comprobado que las conexiones de Palatini son las únicas conexiones cuyo transporte paralelo es homotético al de Levi-Civita, por lo que son aquellas que, respecto a esta última, no alteran la dirección de los campos al transportarlos.

Dado que Levi-Civita es una solución y las diferencias entre los efectos físicos de unas y otras no parecen ser observables, concluimos que los formalismos métrico y de Palatini son equivalentes en este sentido. Pero es importante recalcar que las soluciones de Palatini son matemáticamente diferentes. De modo que, la elección de Levi-Civita no está, a efectos de lo que hemos visto, justificada por la física, sino por mera sencillez matemática.

Hemos visto también que aplicar el formalismo de primer orden desde el tangente con los Vielbein nos reproduce exactamente las mismas ecuaciones de movimiento, siempre que los campos satisfagan sus correspondientes ecuaciones de movimiento.

Finalmente, decidimos resolver mediante el formalimo de primer orden la gravedad acoplada al campo de Dirac, con objeto de observar la repercusión del espín en la dinámica. Y comprobamos efectivamente, cómo este aparece como una fuente de torsión en el espaciotiempo. La conexión solución tiene un aspecto que recuerda a las obtenidas en el caso Einstein-Hilbert pero con un término adicional proporcional al tensor de espín. Además presenta algunas de propiedades en común con aquellas que nos permiten reescribir las ecuaciones de Einstein en forma simétrica. No se ha entrado en detalle en la discusión de los posibles efectos físicos derivados del espín, cuestiones que se dejarán para futura investigación. Sin embargo, hemos visto brevemente que, a pesar del espín, existen ciertas pautas que se repiten respecto al caso Einstein-Hilbert: la coincidencia de trayectorias autoparalelas con las críticas y la relación homotética entre los transportes paralelos de las diferentes soluciones (entre las que ahora no está la de Levi-Civita)

Tras este interesante estudio podríamos preguntarnos qué hacer ahora. Una idea sería terminar de desarrollar el caso espinorial y, después, volver a empezar modificando el lagrangiano de gravedad. Podría empezarse por estudiar las teorías Lovelock que sabemos que son las únicas en las que hay equivalencia entre los formalismos métrico y de Palatini. Concretamente por analizar la teoría de

Gauss-Bonet, que agrega al lagrangiano de Einstein-Hilbert el *término de Gauss-Bonet*

$$\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{\mathrm{GB}} = \sqrt{|g|}\left(R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda}\right) \,, \tag{7.0.2}$$

resolver la ecuación de la conexión y comprobar si obtenemos una solución parecida a (7.0.1) o, quizás, la misma. También podría irse más lejos y estudiar gravedad generalizada más alla de Lovelock, como las $f(R)$, o analizar el comportamiento de las soluciones de la ecuación de la conexión bajo transformaciones conformes. En definitiva, como es un tema que repercute en cuestiones básicas, posee unos horizontes bastante amplios.

Opinión y agradecimientos

A modo de opinión personal, comentar que lo considero un trabajo interesante, precisamente porque refleja una sutileza teórica a nivel fundamental que parece no repercutir en la física construida a partir de ella; y, además, lo calificaría de adecuado para el máster Fisymat, pues me ha permitido tocar aspectos tratados en diversas asignaturas del máster: geometría diferencial, relatividad, representaciones de grupos, teoría cuántica de campos, conexiones, etc. Finalmente, mencionar que la formulación alternativa mediante Vielbein (§4) y el capítulo del campo de Dirac (§6) han constituido trabajo personal, mientras que el desarrollo de los capítulos §3 y §5 han sido llevados a cabo en el marco de una Beca de Colaboración del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte con Bert Janssen, José Alberto Orejuela, Pablo Sánchez, Miguel Sánchez y Antonio N. Bernal. De nuestra investigación ha resultado el artículo [1]:

> A.N. Bernal, B. Janssen, A. Jiménez-Cano, J.A. Orejuela, M. Sánchez, P. Sánchez-Moreno. *On the (non-)uniqueness of the Levi-Civita solution in the Einstein-Hilbert-Palatini formalism*, 2016. http://arxiv.org/abs/1606.08756

actualmente disponible en arXiv y que, próximamente, enviaremos a publicar. Agradecimientos a mis compañeros de grupo y especialmente a Bert por su inestimable apoyo y nuestras fructíferas discusiones.

Bibliografía

[1] A.N. Bernal, B. Janssen, A. Jiménez-Cano, J.A. Orejuela, M. Sánchez, P. Sánchez-Moreno, *On the (non-)uniqueness of the Levi-Civita solution in the Einstein-Hilbert-Palatini formalism*, 2016, http://arxiv.org/abs/1606.08756.

[2] B. Janssen, *Teoría de la Relatividad General*, 2015.

[3] B. Janssen, M. Bastero-Gil, M. Borunda, *Palatini versus metric formulation in higher-curvature gravity*, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics **2008** (2008), no. 11, 008, http://arxiv.org/abs/0804.4440.

[4] D. Tong, *String theory*, arXiv preprint arXiv:0908.0333 (2009), http://arxiv.org/abs/0908.0333.

[5] D.G.C. McKeon, *The canonical structure of the first-order Einstein-Hilbert action*, Internat. J. Modern Phys. A **25** (2010), no. 17, 3453–3480, http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X10050093. MR 2669597

[6] DM Sjøstrøm, *Bosons and Fermions in Curved Spacetime*, (2013).

[7] G. Allemandi, A. Borowiec, M. Francaviglia and S.D. Odintsov, *Dark energy dominance and cosmic acceleration in first-order formalism*, Physical Review D **72** (2005), no. 6, 063505, https://arxiv.org/abs/gr-qc/0504057.

[8] G.W. Gibbons, *Supergravity (Lecture notes)*, 2009, Typeset by Ziyang Hu.

[9] H. Arthur Weldon, *Fermions without vierbeins in curved space-time*, Phys. Rev. D (3) **63** (2001), no. 10, 104010, 11, http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.63.104010. MR 1840682

[10] H.F.M. Goenner, *Palatini's cousin: A New Variational Principle*, arXiv preprint arXiv:1003.5532 (2010), http://arxiv.org/abs/1003.5532v1.

[11] I. Sánchez Rodríguez, *Conexiones en el fibrado de referencias de segundo orden. Conexiones conformes*, Ph.D. thesis, Universidad Complutense de Madrid, Junio 1994.

[12] J. Seoane, *Espinores de Killing y operador de Dirac en variedades de Riemann: la variedad de Berger B^7*, Master's thesis, Universidad de Santiago de Compostela, 2010.

[13] J. Yepez, *Einstein's vierbein field theory of curved space*, 2008, http://arxiv.org/abs/1106.2037v1.

[14] J.A. Pastor, *Geometría de Riemann (Curso)*, 2006-2007, http://www.um.es/docencia/jpastor/miweb_files/ficheros/griemann/manual.pdf.

[15] M. Blau, *Lecture notes on general relativity*, Albert Einstein Center for Fundamental Physics Bern Germany, 2011.

[16] M. Sánchez, M.A.Javaloyes, *An introduction to Lorentzian Geometry and its applications*, 2015-2016.

[17] N.D. Birrell, P.C.W. Davies, *Quantum fields in curved space*, no. 7, Cambridge University Press, 1984.

[18] N.J. Poplawski, *Spacetime and fields*, http://arxiv.org/abs/0911.0334v1.

[19] Q. Exirifard, M.M. Sheikh-Jabbari, *Lovelock gravity at the crossroads of Palatini and metric formulations*, Physics Letters B **661** (2008), no. 2, 158–161, https://arxiv.org/abs/0705.1879.

[20] R. Aldrovandi, P.B. Barros, J.G. Pereira, *Spin and anholonomy in general relativity*, arXiv preprint gr-qc/0402022 (2004), http://arxiv.org/abs/gr-qc/0402022.

[21] R. d'Inverno, *Introducing Einstein's relativity*, Oxford University Press, USA, 1998.

[22] R.M. Wald, *General relativity*, University of Chicago Press, 2010.

[23] R.W. Tucker, C. Wang, *Black holes with Weyl charge and non-Riemannian waves*, Classical and Quantum Gravity **12** (1995), no. 10, 2587, http://arxiv.org/abs/gr-qc/9509011v1.

[24] S. Jensen, *General Relativity with Torsion: Extending Wald's Chapter on Curvature*, 2005.

[25] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, vol. 1, Cambridge University Press, 1973.

[26] T. Ortín, *Gravity and strings*, Cambridge University Press, 2004.

[27] T. Watanabe, M.J. Hayashi, *General relativity with torsion*, arXiv preprint gr-qc/0409029 (2004), https://arxiv.org/abs/gr-qc/0409029.

[28] V. De Sabbata, C. Sivaram, *Spin and torsion in gravitation*, World scientific, 1994.