Observadores uniformemente acelerados en De Sitter

Universidad de Granada

Máster en Física y Matemáticas

Guillermo Fernández Melgarejo

Dirigido por Bert Janssen

30 de junio de 2016

DECLARACIÓN

En cumplimiento de la normativa aprobada en Consejo de Gobierno a 4 de Marzo de 2013, sobre Directrices de la Universidad de Granada para el desarrollo de la asignatura "Trabajo Fin de Máster" de sus títulos de máster (Art 8,4)

D. Dª...

Asume la originalidad del trabajo de fin de máster, entendida en el sentido de que no ha utilizado fuentes sin citarlas debidamente.

Granada, a .... de .... de ....

Fdo.:

Índice general

Introducción

El objetivo de este trabajo es el estudio de las trayectorias de observadores uniformemente acelerados. En particular, llevaremos a cabo este desarrollo en el espacio-tiempo de De Sitter. Este cálculo se realizará en dos métricas, que son solución de las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica.

En 1915, Albert Einstein publicó la teoría de la Relatividad General, una teoría del campo gravitatorio y de los sistemas de referencia generales. Einstein afirmó que en un punto concreto no se puede distinguir experimentalmente entre un cuerpo acelerado uniformemente y un campo gravitatorio uniforme. Su nombre se debe a que generaliza la teoría de la Relatividad Especial. Las ideas más importantes de este teoría son: la curvatura del espacio-tiempo, el principio de covariancia generalizado y el principio de equivalencia.

La *curvatura del espacio-tiempo* se interpreta como una consecuencia de la atracción gravitatoria. Es decir, la gravedad hace que la geometría del espacio-tiempo no sea plana sino curva. Los cuerpos dentro de un campo gravitatorio siguen una trayectoria espacial curva, aunque sus líneas del universo sean lo más rectas posibles. Estas líneas se llaman geodésicas y son las líneas donde la curvatura es mínima. Tal y como decía el físico teórico estadounidense John Archibald Wheeler: «*El espacio-tiempo le dice a la materia cómo moverse y la materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse*».

Basado en el principio de covariancia especial que exhibía la Relatividad Especial, Einstein buscaba extender este tipo de invariancia a sistemas de referencia no-inerciales. Es decir, él buscaba una teoría cuyas ecuaciones tuvieran la misma forma para cualquier observador, fuese inercial o no. Para ello, introdujo el principio de covariancia general.

El principio de covariancia general establece que las leyes físicas (ecuaciones) deben ser las mismas para cualquier sistema de referencia. Es decir, deben quedar invariantes bajo cualquier tipo de transformación de coordenadas. Se puede interpretar este principio como el hecho de que la Naturaleza no tiene ningún sistema de referencia privilegiado. Además, el concepto de coordenada no existe a priori en la naturaleza y, por tanto, el sistema de coordenadas elegido no debe jugar ningún papel fundamental en la formulación de las leyes físicas. Einstein pensaba que este principio debía ser uno de los ingredientes fundamentales en la formulación de una nueva teoría para sistemas de referencia acelerados.

Puesto que las leyes de la Física deben quedar invariantes bajo transformaciones generales de coordenadas, Einstein formuló su teoría en términos de tensores. Debido a sus propiedades, los tensores transforman de una manera determinada bajo cualquier transformación general de coordenadas.

Una vez introducido el principio de covariancia general y la no existencia de sistemas de referencia privilegiados, se puede entender de manera natural el *principio de equivalencia* que dice así:

El resultado de cualquier experimento no gravitacional en un laboratorio que se desplace en un sistema de referencia inercial es independiente de la velocidad del laboratorio o de su localización en el espacio-tiempo.

Este principio físico afirma que si fijamos un evento instantáneo p en un campo gravitatorio, éste puede ser descrito por un observador con aceleración que se encuentre en dicho punto. En otras palabras, existe un observador acelerado que no tiene forma de distinguir si las partículas se mueven o no dentro del campo gravitatorio. Por tanto, de forma local, las leyes de la Física son las mismas para todos los observadores. Por ejemplo, si cayéramos a la vez que una piedra desde un acantilado, veríamos que la piedra caería a velocidad constante, es decir, como si no existiese el campo gravitatorio que causa la caída. Exactamente lo mismo les ocurre a los astronautas cuando están en su nave espacial, pues ellos pueden pensar que todo flota e imaginar que no sufren la atracción hacia la Tierra u otro planeta.

A continuación, veamos cuáles son las herramientas matemáticas con las que se construye la teoría y sus implicaciones locales y globales. La teoría se formula en términos de campos tensoriales definidos en un espacio-tiempo que se representa con una variedad de Lorentz. Esto es debido a, como se ha mencionado anteriormente, la condición de covariancia general de la teoría. Es decir, los tensores admiten las transformaciones generales de coordenadas que la teoría precisa para quedar invariante. El elemento principal de la teoría es el tensor métrico $g_{\mu\nu}$. La métrica es un tensor de orden 2 que se utiliza para definir conceptos métricos como distancia, ángulo y volumen en un espacio localmente euclídeo.

El núcleo fundamental de dicha teoría son las ecuaciones de campo de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu}, \tag{0.1}$$

donde, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de curvatura, $g_{\mu\nu}$ es la métrica y $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento. Básicamente, estas ecuaciones de Einstein son un sistema de 10 ecuaciones en derivadas parciales no lineales en las variables $g_{\mu\nu}$, que describen la interacción gravitatoria como resultado de que el espacio-tiempo está siendo deformado por la materia y la energía.

Tanto en Física como en Matemáticas, es importante hacer una distinción entre estructuras locales y globales. Ya que las mediciones se realizan en una región relativamente pequeña del espacio-tiempo, ésta es una de las razones por las que hacer un estudio local del espacio-tiempo. La determinación de la estructura global es de gran importancia en problemas cosmológicos.

A la hora de afirmar si dos espacio-tiempos son el mismo, esto supone un gran problema a nivel local en Relatividad General. Previamente en la teoría de variedades, ya se quería determinar si dos variedades de Riemann de iguales dimensiones eran localmente isométricas. Este problema ha sido resuelto y se adapta a la Relatividad General mediante un algoritmo[1].

Volviendo a (0.1), obsérvese que la parte izquierda de la ecuación está escrita en términos puramente geométricos, mientras que en la parte derecha se tiene el tensor energía-momento, que parametriza el contenido de materia y energía de nuestro espacio-tiempo. Es decir, matemáticamente, Einstein conjeturó que la geometría del Universo deja de ser plana por la presencia de masa. Por consiguiente, pensó que el Universo era un tipo de espacio-tiempo curvo dado por una variedad pseudoriemanniana y cuyas ecuaciones de campo establecen que en un punto la curvatura seccional se relaciona con el tensor de energía-momento. Dicho tensor describe el contenido de energía y materia de nuestro espacio-tiempo. Así, las trayectorias de las partículas se ven afectadas por la curvatura y, recíprocamente, la presencia de muchas partículas afecta a la curvatura.

A continuación, es interesante preguntarse qué significa la interacción gravitatoria en Relatividad General y sus diferencias con respecto a la teoría de Newton. Se supone una partícula fija de masa m_1 en un cierto espacio-tiempo. Dicha partícula va a curvar el espacio de acuerdo a su masa m_1. Si ahora se introduce una segunda partícula de masa m_2, el espacio-tiempo se deformará y dicha perturbación (equivalente a una ola en un lago) se propagará a una velocidad c. Por tanto, la primera partícula no sentirá la presencia de la segunda de manera instantánea. Estas perturbaciones del espacio-tiempo, que se propagan como ondas, reciben el nombre de *ondas gravitacionales*. Este pasado mes de Febrero, David Reitze, director ejecutivo del Observatorio Avanzado de Interferometría Láser de Ondas Gravitacionales(LIGO), pudo anunciar la primera detección de las ondas gravitacionales.

Por otro lado, en las teorías clásicas de gravitación, el concepto de velocidad de la gravedad se entiende como la velocidad con la que su campo gravitatorio se propaga. Es decir, es la velocidad de propagación de cualquier cambio en la distribución de energía o impulso de la materia causado por el campo gravitacional. En un sentido más físico, la velocidad de la gravedad se refiere a la velocidad de una onda gravitacional. Es decir, cualguier cambio en la distribución de energía o materia genera ondas gravitacionales.

Este concepto de propagación es radicalmente diferente al de la teoría clásica. En la ley de Gravitación Universal de Newton, estas interaccionan instantáneamente con cualquier otra independientemente de la distancia que las separe. Es decir, la gravitación se describe clásicamente mediante la ecuación de Poisson, cuyo campo gravitatorio se ajusta instantáneamente en caso de algún cambio en la distribución de masa. Por lo tanto, se asume que la velocidad de propagación sea infinita. Esta suposición ayudó a precisar muchos fenómenos de la época, aunque no fue hasta el siglo XIX, cuando se observó una anomalía en las observaciones astronómicas que no pudo ser relacionada con el modelo newtoniano de acción instantánea. Finalmente, ya en 1859, el astrónomo francés Urbain Le Verrier determinó que la órbita elíptica de Mercurio tiene una precesión del perihelio que difiere de la predicción de la teoría newtoniana.

Otro aspecto interesante de la Relatividad General ocurre cuando tenemos partículas

[1]Dicho algoritmo es el algoritmo de Cartan-Karlhede (*cf.* [4]).

muy compactas y muy masivas, dándose situaciones interesantes. En el caso de estrellas supermasivas, éstas acaban su vida bien mediante una explosión como supernova o bien mediante un colapso gravitatorio. Ambos procesos conducen a la formación de agujeros negros, aunque hasta ahora no se tenían pruebas de ninguno de ellos. Un *agujero negro* es una región del espacio-tiempo que posee una fuerza gravitatoria tan atractiva que ninguna partícula puede escapar de ella. La teoría de la Relatividad General predice que una masa lo suficientemente compacta puede deformar el espacio-tiempo y convertirse en un agujero negro. El límite de la región de la que es posible escapar se llama el horizonte de sucesos. Un *horizonte de sucesos* es un límite en el espacio-tiempo donde los eventos no pueden afectar a observadores externos. Es el punto de no retorno, es decir, el punto en el que la atracción gravitatoria es tan grande como para que sea imposible escapar. Además desde el agujero negro, la luz que se emita nunca puede escapar ni alcanzar a un observador externo.

A pesar de la dificultad para obtener soluciones a dichas ecuaciones (0.1), se conocen algunas, aunque muy pocas tienen aplicaciones físicas directas. A menudo, es frecuente apoyarse en la integración numérica de las ecuaciones. En la Relatividad numérica, existen potentes ordenadores para simular la geometría del espacio-tiempo y así resolver las ecuaciones de Einstein en situaciones interesantes, como es el caso de dos agujeros negros en colisión.

Algunas soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein son: la solución de Schwarzschild, la solución de Reissner-Nordström, la métrica de Kerr y la solución de Robertson-Friedmann-Walker-Lemaître, que describe un universo homogéneo, isótropo y en expansión (o contracción). Este tipo de solución es utilizada en Física para la descripción de nuestro Universo.

En este trabajo nos centraremos en el estudio de un caso particular de solución FRW: el espacio de De Sitter. El espacio de De Sitter,

$$ds^2 = dt^2 - e^{2t/R_0}\delta_{ij}dx^i dx^j, \tag{0.2}$$

donde R_0 es el radio de De Sitter, fue propuesto como modelo de universo por el astrónomo William de Sitter (1872-1934) poco después de conocerse el modelo de universo estático de Albert Einstein. De Sitter mostró a la comunidad científica una solución para un universo vacío, sin materia y sin radiación. Además, partió de tres hipótesis: curvatura constante, estaticidad e isotropía del universo.

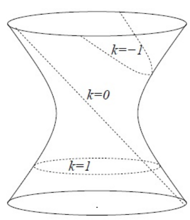

Figura . El espacio de De Sitter.

El espacio de De Sitter puede describirse en coordenadas FRW con secciones espaciales tridimensionales de curvatura constante k, que pueden ser hiperboloides($k = -1$), esféricas ($k = 1$) o planas ($k = 0$). Además, se trata de un espacio-tiempo máximamente simétrico, es decir, su tensor de Riemann es de la forma

$$R_{\mu\nu\rho\lambda} = -R_0^{-2}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}). \tag{0.3}$$

Este espacio representa un universo en el que no hay materia y que está en expansión exponencial, debido a la constante cosmológica positiva. La expansión de este tipo de universo es tan grande que si, en un instante de tiempo t_1 tenemos dos partículas relativamente cerca, llegará un momento t_2 en el que estas partículas estén tan alejadas que no podrán ni comunicarse. Es decir, estarán tan lejos que si una de ellas lanza un púlsar de luz, jamás le llegará a la otra partícula.

A parte de las coordenadas FRW planas previamente enunciadas, existe otra métrica de especial interés en este trabajo. Esta métrica es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega_2^2 \tag{0.4}$$

y se conoce como la métrica de De Sitter en coordenadas estáticas.

El objetivo principal de este trabajo tras la presentación del espacio de De Sitter, es el cálculo de trayectorias uniformemente aceleradas. Este cálculo se va a realizar tanto en coordenadas FRW planas como en coordenadas estáticas. Para ello, tendremos que desmenuzar unas ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de tercer orden.

Así, diremos que una curva γ describe un *movimiento uniformemente acelerado* (MUA) o es un *observador uniformemente acelerado* (UA) si satisface

$$\boxed{\dot{\gamma}^\rho \nabla_\rho \alpha^\mu = -\alpha_\nu \alpha^\nu \dot{\gamma}^\mu, \tag{0.5}}$$

donde $\alpha^\mu := \dot{\gamma}^\rho \nabla_\rho \dot{\gamma}^\mu$ es la 4-aceleración. Es decir, si el transporte paralelo de la aceleración a lo largo de γ es proporcional a la 4-velocidad, $\dot{\gamma}^\mu$.

En resumen, la Relatividad General es un modelo que hasta ahora ha tenido gran éxito en la gravitación y descripción de nuestro Universo. Hasta hoy, ha pasado con éxito muchas pruebas observacionales y experimentales. En cambio, hay indicios de que la teoría está incompleta. El problema de la gravedad cuántica y las preguntas acerca de las singularidades del espacio-tiempo están aún sin responder. Además, las evidencias experimentales de la existencia de energía oscura y materia oscura podrían indicar la necesidad de una nueva teoría física. Numerosos físicos y matemáticos tratan de comprender la naturaleza de la interacción gravitatoria o ir más allá de las ecuaciones de Einstein, teniéndolas como ingrediente fundamental.

Para finalizar esta introducción, resumamos este trabajo que está estructurado en 3 capítulos. En el primer capítulo, se presentarán las ecuaciones de campo de Einstein. A continuación, se obtendrán estas ecuaciones a partir de la minimización de la acción de Einstein-Hilbert.

En el segundo capítulo, se presentará el espacio-tiempo de De Sitter. En un primer lugar, se introducirán las propiedades geométricas de este espacio. Después, se calcularán dos métricas equivalentes, que son solución de (0.1) y que modelan la geometría del espacio de De Sitter.

Para concluir este trabajo, se calcularán las trayectorias de observadores que siguen un movimiento uniformemente acelerado. En primer lugar, se describirá matemáticamente el MUA, teniendo en cuenta el formalismo de los Vielbeins. A continuación, se calcularán los observadores acelerados en el espacio de Minkowski. En tercer lugar, se calcularán las curvas de aceleración nula en De Sitter. Y por último, se concluirá con el desarrollo de las ecuaciones (0.5) en De Sitter.

Bibliografía

[1] Callahan, J. J.: *"The Geometry of Spacetime. An Introduction to Special and General Relativity."*, Springer, ISBN 0-387-98641-3.

[2] Carroll, S. M. (2004), *"Spacetime and Geometry"*, Wesley, A.: ISBN 0-8053-8732-3.

[3] Faber, R. L., *"Differential geometry and relativity theory. An introduction"*, 1983.

[4] Karlhede, A.: *"A review of the geometrical equivalence of metrics in general relativity"*, Gen. Rel. Grav. 12 (1980) 693.

[5] O'Neill, B.: *"Semi-Riemannian geometry"*, Academic Press, ISBN 0-12-526740-1.

[6] Ortín, T.: *"Gravity and Strings"*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, ISBN 9780521768139.

[7] Pastor González, J. A.: Apuntes de la asignatura *"Geometría de Riemann"*, Grado en Matemáticas, Universidad de Murcia.

[8] Meroño Bayo, M. A.: Apuntes de la asignatura *"Geometría y Relatividad"*, Grado en Matemáticas, Universidad de Murcia.

[9] Romero, A., Sánchez, M.: Apuntes de la asignatura *"Geometría de espacio-tiempos relativistas"*, Máster Fisymat, Universidad de Granada.

[10] Janssen, B.: *"Teoría de la Relatividad General"*, Grado en Física, Universidad de Granada.

[11] Sachs, R.K, Wu, H.: *"General Relativity for Mathematicians"*, Grad., Texts in Math., vol. 48, Springer, New York (1977).

[12] Sokolov, D.D. (2001), *"Cosmological constant"*, in Hazewinkel, Michiel, Encyclopedia of Mathematics, Springer, ISBN 978-1-55608-010-4.