



FACULTAD DE CIENCIAS DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA Y DEL COSMOS

# **DIAGRAMAS DE PENROSE DE LAS SOLUCIONES DE SCHWARZSCHILD (ANTI)- DE SITTER**

Trabajo de fin de máster para la obtención del máster en Física y  
Matemáticas (FisyMat).

---

Autor:

Jose María Pérez Poyatos

---

Tutor:

Bert Janssen



*Muchas gracias a mis padres, por estar siempre ahí y soportar mis enfados cuando no me salían las cuentas. Gracias a ellos soy lo que soy a día de hoy, ya que me han inculcado el trabajo y la constancia en todo lo que hago.*

*Muchas gracias a mi amigo Antonio Luis por la portada y por nuestro reencuentro en una misma clase después de 4 años de carrera. Juntos hemos vuelto a revivir los momentos de 1º y 2º de bachillerato en los que nos dedicábamos a dibujar agujeros negros y hacer matemáticas en las mesas durante las clases de francés. Junto a él lo he pasado de una forma que de otra manera hubiese sido impensable.*

*“Ahora seremos felices los 4: tú, tu TFM, yo y el mio” (con mi amigo Sergio durante la noche tras acabar los ejercicios de Joaquín.)*

*A Sergio, Patri y Juanfran, por haberme prácticamente adoptado en su piso durante los dos últimos meses del máster.*

*A mis compañeros de piso y al resto de mis amigos de toda la vida, con los que tantas correrías de adolescente he vivido, pero sobre todo a Ñoño, por redescubrirme mi pasión por la física allá por 3º de la ESO.*

*Finalmente, gracias a mis profesores, sin los cuales jamás habría llegado tan lejos.*

## DECLARACIÓN

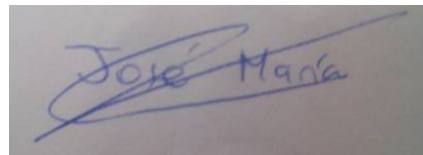
En cumplimiento de la normativa aprobada en Consejo de Gobierno de 4 de marzo de 2013, sobre Directrices de la Universidad de Granada para el desarrollo de la asignatura "Trabajo Fin de Máster" de sus títulos de máster (Art 8,4)

D.D<sup>a</sup> Jose María Pérez Poyatos .....

Asume la originalidad del trabajo fin de máster, entendida en el sentido de que no ha utilizado fuentes sin citarlas debidamente.

Granada, a 30 de Junio ..... de 2017..

Fdo.:

A rectangular box containing a handwritten signature in blue ink. The signature is written in a cursive style and reads "Jose María".

# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>9</b>
1.1. Convenios y definiciones . . . . .	9
1.2. Relatividad General y ecuación de campo de Einstein . . . . .	14
1.3. Contenido de la ecuación de Einstein . . . . .	15
<b>2. Transformaciones conformes y diagramas de Penrose</b>	<b>17</b>
2.1. Transformaciones de Weyl . . . . .	18
2.2. Construcción de las coordenadas de Kruskal . . . . .	20
2.3. Compactificación conforme . . . . .	26
2.4. Diagrama de Penrose del espacio de Minkowski . . . . .	28
<b>3. Diagramas de Penrose de soluciones clásicas</b>	<b>31</b>
3.1. El agujero negro de Schwarzschild . . . . .	31
3.2. El espacio de De Sitter . . . . .	37
3.3. El espacio de anti-De Sitter . . . . .	42
<b>4. Diagramas de Penrose de las soluciones de Schwarzschild (anti)-De Sitter</b>	<b>47</b>
4.1. La solución de Schwarzschild De Sitter . . . . .	47
4.1.1. Caso subextremal, $R_0 > 3\sqrt{3}M$ . . . . .	48
4.1.2. Caso sobreextremal $R_0 < 3\sqrt{3}M$ . . . . .	54
4.1.3. Caso extremal $R_0 = 3\sqrt{3}M$ . . . . .	57
4.2. La solución de Schwarzschild anti-De Sitter . . . . .	60
<b>A. Cálculo del invariante de Kretschmann para una métrica esféricamente simétrica y estática</b>	<b>69</b>
<b>B. Cálculo de la conexión de Levi-Civita para una métrica conforme</b>	<b>73</b>
<b>C. Breves comentarios acerca del universo estático de Einstein</b>	<b>75</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>77</b>



# Resumen

En este trabajo de fin de máster nos proponemos estudiar más en detalle la estructura causal de diferentes soluciones de la ecuación de Einstein. El año anterior, en el trabajo fin de grado para la obtención del título de graduado en Física, estudiamos las soluciones clásicas de la ecuación de Einstein, a saber: el espacio de Minkowski, el agujero negro de Schwarzschild y Reissner- Nordström, los espacios de (anti)- De Sitter, y, una vez comprendidas éstas en detalle, nos aventuramos a explorar las soluciones de Schwarzschild De Sitter y Schwarzschild- anti- De Sitter y estudiamos sus propiedades usando las coordenadas de Eddington-Finkelstein avanzadas y retardadas. En este proyecto vamos a estudiar los diagramas de Penrose de estas soluciones, lo cual nos permitirá estudiar sus propiedades asintóticas en el infinito.

La estructura del proyecto va a ser la siguiente: comenzaremos con una pequeña introducción donde fijaremos la notación y algunos conceptos básicos sobre geometría diferencial para después ir a la parte donde hablamos de las herramientas matemáticas en las que vamos a apoyarnos para dibujar nuestros diagramas de Penrose; tras ello, construiremos un método que no proviene de ninguna fuente bibliográfica sino del trabajo propio para dar unas coordenadas globales en nuestra variedad y, finalmente, dibujaremos las soluciones más emblemáticas de las ecuaciones de Einstein para culminar con los cuatro diagramas que dan nombre a este proyecto.

Hay que destacar que, al ser un proyecto que se apoya en el del curso anterior, haremos muchas referencias a [1] y [2] para ver con más cuidado tanto algunos de los cálculos que aquí se mencionan en grandes líneas, debido a que tenemos un espacio acotado para escribir nuestro proyecto, como todas las figuras que presentamos acerca de las coordenadas de Eddington-Finkelstein. Aún así, se ha intentado que este proyecto sea lo más autocontenido posible intentando que el lector no tenga que consultar ninguna de esas dos principales fuentes bibliográficas en las que nos apoyamos a no ser que tenga curiosidad por ver de forma explícita algunas de las expresiones que mencionamos.

Por último, mencionar que las figuras de las que no mencionamos su procedencia, han sido realizadas por el autor de este proyecto.



# Bibliografía

- [1] J.M. PÉREZ POYATOS, *Estudio comparativo de diferentes tipos de agujeros negros*. Universidad de Granada, Trabajo Fin de Grado en Física, Julio de 2016.
- [2] B. JANSSEN *Teoría de la Relatividad General*, Apuntes de clase de la asignatura de Relatividad General de 4º curso, Grado en Física, Universidad de Granada.
- [3] S. HAWKING Y R. PENROSE *The nature of space and time*, Princeton University Press, 1996.
- [4] J. PODOLSKY, *The Structure of the Extreme Schwarzschild–de Sitter Space-time*. Department of Theoretical Physics, Charles University, Faculty of Mathematics and Physics, Prague, Czech Republic.
- [5] LUKASZ FIDKOWSKI, VERONIKA HUBENY, MATTHEW KLEBAN, AND STEPHEN SHENKER, *The Black Hole Singularity in AdS/CFT*. Department of Physics, Stanford University, Stanford, CA, 94305, USA.
- [6] BRETT MCINNES, *De Sitter and Schwarzschild De Sitter according to Schwarzschild and De Sitter*. Department of Mathematics, National University of Singapore, 10 Kent Ridge Crescent, Singapore 119260, Republic of Singapore.
- [7] THOMAS KLÖSCH AND THOMAS STROBL, *Classical and Quantum Gravity in 1+1 Dimensions*. Institut für Theoretische Physik Technische Universität Wien Wiedner Hauptstr. 8-10, A-1040 Vienna Austria and Institut für Theoretische Physik RWTH-Aachen Sommerfeldstr. 26-28, D52056 Aachen Germany.