UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Declaración de originalidad de Trabajo Fin de máster
Máster en Física y Matemáticas (FisyMat)

María Cordero Ramírez, con DNI n.º 32087417W , autora del trabajo de fin máster con el título *Soluciones de agujeros negros en teorías de galileones en tres dimensiones*, declara la originalidad de este trabajo presentado para su defensa y evaluación en el Máster en Física y Matemáticas en el curso 2023/24, en el que se han respetado los derechos de otros autores a ser citados.

Granada, 5 de septiembre de 2024

Fdo:

Firmado por CORDERO RAMIREZ MARIA -
***8741** el día 05/09/2024 con un
certificado emitido por AC FNMT Usuarios

Soluciones de agujeros negros en teorías de galileones en tres dimensiones

María Cordero Ramírez

Soluciones de agujeros negros en teorías de galileones en tres dimensiones

María Cordero Ramírez

Memoria del **Trabajo Fin de Máster**.
Máster en Física y Matemáticas (FisyMat)
Universidad de Granada.

Tutorizado por:

Prof. Bert Janssen
Dr. Francisco Javier Moreno González

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mis tutores, Bert y Javi, por la orientación y ayuda que siempre me han ofrecido cuando la he necesitado, así como por la amabilidad con la que me han acogido. En especial, a Javi, quien comenzó como mi tutor en el trabajo de fin de grado y, durante estos dos años, no ha dudado en dedicarme su tiempo a pesar de la distancia.

Me siento agradecida y, al mismo tiempo, afortunada de haber contado con ambos como guías y referentes.

Índice general

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo el estudio de soluciones de agujeros negros en tres dimensiones dentro de una teoría de gravedad modificada que incluye el galileon cúbico. La teoría de galileones es una extensión de la teoría de campos escalares que introduce términos adicionales en la acción, permitiendo nuevas formas de interacción. Estos términos están diseñados para mantener las ecuaciones de movimiento de segundo orden, evitando así problemas de inestabilidad en la dinámica del campo escalar. Con este fin, en primer lugar introduciremos la formulación de la gravedad en tres dimensiones y comentaremos las particularidades de este modelo. Asimismo, para adquirir intuición a la hora de derivar las ecuaciones y familiarizarnos con la teoría, estudiaremos el agujero negro de Bañados, Teitelboim y Zanelli (BTZ). Se trata de una solución a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa en el vacío en tres dimensiones. A su vez veremos su extensión natural, el BTZ cargado mediante la incorporación de un campo escalar libre. Posteriormente, describiremos de forma detallada la teoría de galileones para poder construir la teoría modificada que tenemos como objetivo. Finalmente, exploraremos las características y propiedades de los agujeros negros que encontramos al incorporar el galileon cúbico en la teoría gravitatoria.

Abstract

In this work, black hole solutions in three dimensions are studied within a modified gravity theory that includes the cubic galileon. The galileon theory is an extension of scalar field theory that introduces additional terms in the action, allowing for new forms of interaction. These terms are designed to keep the equations of motion at second order, thus avoiding instability issues in the dynamics of the scalar field. With this aim, we will first introduce three-dimensional gravity and discuss the characteristics of this model. Additionally, to develop a deeper understanding of the equations and to familiarize ourselves with the theory, we will study the Bañados, Teitelboim, and Zanelli (BTZ) black hole. This is a solution to the vacuum Einstein equations with a negative cosmological constant in three dimensions. We will also explore its natural extension, the charged BTZ, by incorporating a free scalar field. Subsequently, we will provide a detailed description of Galileon theory to construct the modified theory we aim to study. Finally, we will explore the characteristics and properties of black holes that arise when the cubic galileon is incorporated into the gravitational theory.

Convenios

Durante todo el trabajo usamos el sistema de unidades natural, es decir, tomamos la velocidad de la luz como una constante adimensional igualada a la unidad de la misma forma que la constante reducida de Planck y la constante de Boltzmann $c = \hbar = k_{\mathrm{B}} = 1$. Las variedades lorentzianas están equipadas con métricas que tienen la mayoría de los signos positivos, asignando el signo negativo a la coordenada temporal, es decir, $(-,+,+)$. Otras convenciones sobre diferentes tensores incluyen:

- La derivada covariante de un cierto tensor con índices mixtos T_{μ}^{ν} se expresa:

  $$\nabla_{\sigma} T_{\mu}^{\nu} = \partial_{\sigma} T_{\mu}^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\sigma\lambda} T_{\mu}^{\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} T_{\lambda}^{\nu}, \tag{1}$$

  donde $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \left(\partial_{\mu} g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} \right)$ es la conexión de Levi-Civita (o símbolos de Christoffel) y $g_{\mu\nu}$ la métrica.

- Dado un vector V^{σ}, el conmutador de la derivada covariante define el tensor de Riemann del espacio-tiempo como:

  $$\left[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu} \right] V^{\sigma} = R_{\mu\nu\lambda}{}^{\sigma} V^{\lambda}, \tag{2}$$

  donde identificamos $\mathcal{R}_{\mu\nu\lambda}{}^{\sigma} = \partial_{\mu} \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}$.

- El tensor de Ricci lo definimos a partir de la contracción del primer y tercer índice del tensor de Riemann:

  $$\mathcal{R}_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma} \mathcal{R}_{\lambda\mu\sigma\nu} = \partial_{\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \Gamma^{\sigma}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma}. \tag{3}$$

  Así mismo el escalar de Ricci se define como su contracción, $\mathcal{R} = g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}$.

El símbolo de Levi-Civita D-dimensional es un objeto completamente antisimétrico definido como:

$$\epsilon_{\mu_1\dots\mu_D} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\mu_1 \dots \mu_D) \text{ es una permutación par de } (1\ 2 \dots D), \\ -1 & \text{si } (\mu_1 \dots \mu_D) \text{ es una permutación impar de } (1\ 2 \dots D), \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{4}$$

Para la contracción de dos símbolos de Levi-Civita tenemos:

$$\epsilon_{\mu_1\dots\mu_{D-n}\rho_1\dots\rho_n}\epsilon^{\mu_1\dots\mu_{D-n}\lambda_1\dots\lambda_n} = (D-n)!g^{-1}\mathrm{sng}(\sigma)\sum_{\sigma\in S_n}\delta^{\lambda_1}_{\rho_{\sigma(1)}}\dots\delta^{\lambda_n}_{\rho_{\sigma(n)}}, \tag{5}$$

donde σ son las permutaciones dentro del grupo simétrico S_n de grado n y g el determinante de la métrica.

La delta de Kronecker generaliza se define como:

$$\delta^{\nu_1\dots\nu_n}_{\mu_1\dots\mu_n} = \delta^{\nu_1}_{[\mu_1}\delta^{\nu_2}_{\mu_2}\dots\delta^{\nu_n}_{\mu_n]} = \frac{1}{n!(D-n)!}\epsilon^{\lambda_1\dots\lambda_{D-n}\nu_1\dots\nu_n}\epsilon_{\lambda_1\dots\lambda_{D-n}\mu_1\dots\mu_n} \tag{6}$$

1 Introducción

En 1915, Albert Einstein publicó la teoría de la relatividad general [1], convirtiéndose en la teoría de la gravedad con mayor éxito hasta la fecha. Las predicciones basadas en ella se han podido verificar en numerosos experimentos o tests tanto clásicos como modernos. En el primer grupo encontramos la precesión de perihelio de Mercurio o la desviación de la luz por el sol. En relación a los modernos tenemos la primera detección de ondas gravitacionales procedentes de la fusión de varios agujeros negros y estrellas binarias de neutrones por la colaboración de LIGO y Virgo [2]. También, gracias al Event Horizon Telescope, se han obtenido imágenes de dos agujeros negros supermasivos, M87* y más recientemente Sagitario A*. Ambos se encuentran en el centro de las galaxias M87 y la Vía Láctea respectivamente [3, 4].

Esta teoría describe la interacción gravitatoria entre los cuerpos por la curvatura del espacio-tiempo mediante las ecuaciones de campo de Einstein. Es decir, plantea la gravedad como una manifestación de la geometría del mismo, en lugar de una fuerza a distancia como en la teoría newtoniana. Las ecuaciones de movimiento se determinan aplicando el principio variacional a la acción de Einstein-Hilbert, dada por:

$$S_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^D x \sqrt{|g|} \mathcal{R} \tag{1.1}$$

donde κ es una constante definida como $\kappa = 8\pi G$, $\mathcal{M}$ es una variedad lorentziana de dimensión D, equipada con el tensor métrico simétrico $g_{\mu\nu}$ y $\mathcal{R}$ su escalar de Ricci. A su vez, la acción de Einstein-Hilbert puede complementarse con una constante cosmológica y campos de materia $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EH} - \frac{\Lambda}{\kappa} + \mathcal{L}_{\text{materia}}$.

A pesar de su notable éxito, la relatividad general no resuelve varios fenómenos y presenta inconsistencias a nivel cosmológico y cuántico. En el primer ámbito, observaciones como las velocidades de rotación de las galaxias [5, 6, 7], las lentes gravitacionales [8, 9] y el Fondo Cósmico de Microondas (CMB) [10, 11] no coinciden completamente con las predicciones de la relatividad general. Para abordar estas discrepancias, se han propuesto modificaciones a la teoría de Einstein o la introducción de materia oscura, cuya distribución podría restaurar los resultados esperados. En este contexto, el modelo cosmológico estándar, conocido como ΛCDM, postula que hay aproximadamente cinco veces más materia oscura que materia bariónica en el universo. Además, este modelo introduce el concepto de energía oscura para explicar la expansión acelerada del universo medida experimentalmente a partir de supernovas [12], el CMB [11] y la estructura a gran escala [13], entre otros. Sin embargo, el modelo ΛCDM no ofrece una explicación clara sobre la naturaleza de la materia oscura y la energía oscura, y hasta la fecha, no se han encontrado soluciones satisfactorias.

En el ámbito cuántico, la interacción gravitatoria se vuelve más crítica y surgen problemas fundamentales que ponen en duda la validez de la relatividad general en estos regímenes. Algunos de los problemas más destacados incluyen la aparición de singularidades dentro de los agujeros negros y en ciertas soluciones cosmológicas. Otro problema clave es la constante cosmológica, que evidencia una discrepancia significativa entre la energía del vacío prevista por el modelo estándar y el valor observado de la constante Λ, con una diferencia de más de veinte órdenes de magnitud [14]. Además, la relatividad general no es renormalizable bajo los procedimientos de cuantización estándar [15, 16]. Estas observaciones sugieren que la relatividad general podría ser una teoría efectiva válida solo a bajas energías, pero que a escalas energéticas más altas, como la escala de Planck, se vuelven relevantes términos de curvatura más complejos. Esto ocurre en las teorías de supergravedad, la acción efectiva de baja energía de la teoría de cuerdas supersimétrica [17, 18, 19].

En esta línea de investigación, la gravedad en tres dimensiones ha surgido como una herramienta particularmente valiosa para explorar la naturaleza fundamental de la gravedad. Una característica distintiva de la gravedad tridimensional es que, a diferencia de las teorías en dimensiones superiores, no posee grados de libertad dinámicos adicionales; toda la información gravitacional se codifica en el tensor de Ricci. Esta simplificación no solo facilita el análisis teórico al reducir el espacio de soluciones, sino que también proporciona un entorno accesible y controlado para la investigación [20, 21, 22].

El modelo de gravedad en tres dimensiones se popularizó a raíz de los trabajos de Deser, Jackiw y 't Hooft [23, 24], así como de Witten [25][26]. Un avance significativo ocurrió en 1992, cuando Bañados, Teitelboim y Zanelli (BTZ) demostraron que, a pesar de la ausencia de grados de libertad dinámicos, la gravedad en tres dimensiones puede exhibir una solución de agujero negro cuando la constante cosmológica es negativa [27]. Este descubrimiento consolidó la relevancia de la gravedad en tres dimensiones como un campo de estudio activo y estableció una base para investigar aspectos fundamentales de la gravedad cuántica y de los agujeros negros en un entorno más manejable [28, 29, 30]. Además, la conexión con la correspondencia anti-de Sitter/teoría conforme de campos (AdS/CFT) [31, 32] ha facilitado la aplicación de esta teoría en contextos tanto clásicos como cuánticos, ampliando la comprensión de la gravedad y ofreciendo nuevas perspectivas en la física gravitacional [33, 32, 34].

A pesar del éxito del modelo de gravedad en tres dimensiones, seguimos encontrando las limitaciones mencionadas tanto a nivel cosmológico como cuántico. Estas barreras resaltan la necesidad de explorar teorías alternativas que puedan ofrecer una visión más completa o resolver problemas persistentes. En este contexto, las teorías de galileones surgen como una modificación prometedora [35]. Estos modelos introducen campos escalares adicionales en la teoría, permitiendo variaciones en la dinámica gravitacional sin alterar el orden de las ecuaciones de movimiento. Esta característica es fundamental para mantener la estabilidad de la teoría evitando problemas asociados con grados de libertad no deseados, de acuerdo con el teorema de Ostrogradsky [36]. En el fondo, los galileones permiten una descripción más flexible de la gravedad en tres dimensiones, proporcionando un escenario que puede ser más adecuado para estudiar la teoría de agujeros negros [37, 38], así como el problema de la constante cosmológica [39, 40].

Con esta motivación, el objetivo del trabajo es estudiar la soluciones de agujeros negros en tres dimensiones dentro de una teoría de gravedad modificada con galileones. Particularmente, aquella que incluye al galileon cúbico, el más simple no trivial que encontramos en esta dimensión. Para ello en el capítulo 2 presentamos la gravedad en tres dimensiones como modelo simplificado. Vemos las particularidades que presentan las ecuaciones de Einstein en esta dimensión y estudiamos en detalle la solución del agujero negro BTZ. Inicialmente derivamos la métrica considerando únicamente la masa para posteriormente, añadir carga eléctrica. Constituyendo de esta forma la base para el desarrollo del trabajo. A continuación, en el capítulo 3, presentamos los galileones. Esta teoría de campos escalares nos permite modificar el modelo de gravedad en tres dimensiones manteniendo ecuaciones de movimiento de segundo orden. En primer lugar exponemos su formulación en un espacio-tiempo plano y después como covariantizarlos. Posteriormente, en el capítulo 4, construimos la teoría de gravedad modificada, que incorpora el galileon cúbico, y estudiamos las soluciones de agujeros negros resultantes alcanzando nuestro objetivo. Finalmente, presentamos algunas conclusiones donde recogemos los resultados de los casos estudiados.

5 | Conclusiones

Como planteamos al inicio del trabajo, hemos logrado nuestro objetivo: estudiar las soluciones de agujeros negros en tres dimensiones para una teoría de gravedad modificada que incluye el galileon cúbico. Previamente, también hemos examinado el agujero negro BTZ y su extensión cargada.

En primer lugar, hemos introducido la teoría gravitatoria en tres dimensiones. Hemos podido comprobar que eliminar una coordenada espacial, no solo simplifica analíticamente la teoría sino que limita la dinámica. Gravedad en tres dimensiones no posee grados de libertad dinámicos debido a la particularidad de que toda la información sobre la curvatura está contenida en el tensor de Ricci. Sin embargo, más allá de las soluciones triviales que se esperan de este modelo más simple, al considerar una constante cosmológica negativa encontramos la solución del agujero negro BTZ. Tras analizar inicialmente la métrica teniendo como único parámetro característico la masa, consideramos su extensión con carga eléctrica. Esta última la hemos obtenido al añadir el término cinético canónico de un campo escalar ya que corresponde a la acción dual electromagnética en tres dimensiones. Hemos podido estudiar tanto la singularidad cónica que existe en el origen como los horizontes de sucesos que aparecen en ambos casos. Al compararlos, hemos podido ver que considerar el término cinético aumenta la complejidad pero encontramos una estructura causal más interesante, siendo posible soluciones con dos horizontes de sucesos.

A continuación, tras habernos familiarizado con la teoría y obtenido intuición derivando la solución del agujero negro BTZ, hemos dado nuestro siguiente paso: introducir la teoría de galileones. Hemos presentado esta teoría como modelo que surge al buscar una modificación que mantenga ecuaciones de movimiento de segundo orden. Este requisito es fundamental y nos hemos apoyado en teorema de Ostrogradsky para su argumentación. Primero, hemos visto la formulación en un espacio-tiempo plano y posteriormente, su covariantización. Mediante este proceso, donde hemos tenido en cuenta las sutilezas de trabajar en espacio-tiempos curvos, hemos llegado a los galileones covariantes. De esta manera, conseguimos la última pieza para poder abordar nuestro objetivo.

Finalmente, hemos presentado nuestra teoría ampliada, que incorpora el galileon cúbico a la teoría de gravedad con constante cosmológica negativa en tres dimensiones. Aunque se podría haber considerado el galileon cuártico, dicha elección habría añadido un grado considerable de dificultad. Además, para obtener ecuaciones de movimiento de segundo orden con este galileon, sería necesario incluir contra-términos que involucran tensores de curvatura, resultando un acoplamiento no mínimo entre el escalar y la métrica.

En comparación con los casos previos, al considerar el galileon cúbico hemos podido comprobar la complejidad añadida en la construcción de las ecuaciones y la derivación de la solución. A pesar de esto, al analizar los posibles horizontes de sucesos, descubrimos que solo existe uno. Hemos podido interpretar esta solución como una extensión del agujero negro BTZ, pero con una constante cosmológica diferente, que denominamos constante cosmológica efectiva. Además, identificamos que la inclusión de un campo escalar no trivial contribuye de manera notable, incluso en el horizonte de eventos. Este hallazgo no solo afecta la constante cosmológica, sino que también introduce una nueva característica significativa del agujero negro, desafiando el teorema del "no pelo."

El desarrollo de este trabajo ha servido como una introducción a la gravedad en tres dimensiones, funcionando como un laboratorio donde crear modelos de juguete de forma más sencilla. Asimismo, hemos examinado la teoría de agujeros negros, alcanzando nuestro objetivo de manera satisfactoria y estableciendo una base sólida para la continuación de estudios más avanzados en el ámbito de la gravitación, tanto desde una perspectiva matemática como física.

Bibliografía

[1] A. Einstein, *Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie*, *Annalen der Physik* **354** (1916) 769–822, [`https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.19163540702`].

[2] B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley et al., *Observation of gravitational waves from a binary black hole merger*, *Physical review letters* **116** (2016) 061102.

[3] Event Horizon Telescope collaboration, K. Akiyama et al., *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole*, *Astrophys. J. Lett.* **875** (2019) L1, [`1906.11238`].

[4] K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef, J. C. Algaba, R. Anantua, K. Asada et al., *First sagittarius a* event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole in the center of the milky way*, *The Astrophysical Journal Letters* **930** (2022) L12.

[5] V. C. Rubin and W. K. Ford Jr, *Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions*, *Astrophysical Journal, vol. 159, p. 379* **159** (1970) 379.

[6] M. Roberts and A. Rots, *Comparison of rotation curves of different galaxy types*, *Astronomy and Astrophysics, Vol. 26, p. 483-485 (1973)* **26** (1973) 483–485.

[7] V. C. Rubin, W. K. Ford Jr and N. Thonnard, *Rotational properties of 21 sc galaxies with a large range of luminosities and radii, from ngc 4605/r= 4kpc/to ugc 2885/r= 122 kpc*, *Astrophysical Journal, Part 1, vol. 238, June 1, 1980, p. 471-487.* **238** (1980) 471–487.

[8] D. Walsh, R. F. Carswell and R. J. Weymann, *0957+ 561 a, b: twin quasistellar objects or gravitational lens?*, *Nature* **279** (1979) 381–384.

[9] M. Bartelmann and P. Schneider, *Weak gravitational lensing*, *Physics Reports* **340** (2001) 291–472.

[10] P. Collaboration, P. A. Ade, N. Aghanim, M. Alves, C. Armitage-Caplan, M. Arnaud et al., *Planck 2013 results. i. overview of products and scientific results*, .

[11] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini et al., *Planck 2018 results-vi. cosmological parameters*, *Astronomy & Astrophysics* **641** (2020) A6.

[12] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich et al., *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, *The Astronomical Journal* **116** (Sept., 1998) 1009–1038.

[13] M. J. Drinkwater, R. J. Jurek, C. Blake, D. Woods, K. A. Pimbblet, K. Glazebrook et al., *The wigglez dark energy survey: survey design and first data release*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **401** (2010) 1429–1452.

[14] S. Weinberg, *The cosmological constant problems (talk given at dark matter 2000, february, 2000)*, 2000.

[15] G. t Hooft and M. Veltman, *One-loop divergencies in the theory of gravitation*, in *Annales de l'institut Henri Poincaré. Section A, Physique Théorique*, vol. 20, pp. 69–94, 1974.

[16] S. Deser and P. van Nieuwenhuizen, *One-loop divergences of quantized einstein-maxwell fields*, *Phys. Rev. D* **10** (Jul, 1974) 401–410.

[17] J. H. Schwarz, *Superstring theory*, *Physics Reports* **89** (1982) 223–322.

[18] J. Polchinski, "String theory. vol. 1: an introduction to the bosonic string 1998."

[19] K. Becker, M. Becker and J. H. Schwarz, *String theory and M-theory: A modern introduction.* Cambridge university press, 2006.

[20] A. Achucarro and P. K. Townsend, *A chern-simons action for three-dimensional anti-de sitter supergravity theories*, *Physics Letters B* **180** (1986) 89–92.

[21] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Three-dimensional massive gauge theories*, *Physical Review Letters* **48** (1982) 975.

[22] J. D. Brown and M. Henneaux, *Central charges in the canonical realization of asymptotic symmetries: An example from three dimensional gravity*, *Communications in Mathematical Physics* **104** (1986) 207–226.

[23] S. Deser, R. Jackiw and G. Hooft, *Three-dimensional Einstein gravity: dynamics of flat space*, *Annals of Physics* **152** (1984) 220–235.

[24] S. Deser and R. Jackiw, *Classical and quantum scattering on a cone*, *Communications in Mathematical Physics* **118** (1988) 495–509.

[25] E. Witten, *2+ 1 dimensional gravity as an exactly soluble system*, *Nuclear Physics B* **311** (1988) 46–78.

[26] E. Witten, *Topology-changing amplitudes in 2+ 1 dimensional gravity*, *Nuclear Physics B* **323** (1989) 113–140.

[27] M. Bañados, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Black hole in three-dimensional spacetime*, *Physical Review Letters* **69** (Sept., 1992) 1849–1851.

[28] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Geometry of the 2+ 1 black hole*, *Physical Review D* **48** (1993) 1506.

[29] S. Carlip, *The (2+ 1)-dimensional black hole*, *Classical and Quantum Gravity* **12** (1995) 2853.

[30] E. Witten, *Three-dimensional gravity revisited*, *arXiv preprint arXiv:0706.3359* (2007) .

[31] J. Maldacena*International Journal of Theoretical Physics* **38** (1999) 1113–1133.

[32] E. Witten, *Anti de sitter space and holography*, 1998.

[33] S. Carlip, *Conformal field theory,(2+ 1)-dimensional gravity and the BTZ black hole*, *Classical and Quantum Gravity* **22** (2005) R85.

[34] I. R. Klebanov and E. Witten, *Ads/cft correspondence and symmetry breaking*, *Nuclear Physics B* **556** (1999) 89–114.

[35] A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini, *Galileon as a local modification of gravity*, *Physical Review D* **79** (Mar., 2009) .

[36] R. P. Woodard, *The theorem of Ostrogradsky*, 2015.

[37] H. Lü, A. Perkins, C. Pope and K. Stelle, *Black holes in higher derivative gravity*, *Physical Review Letters* **114** (Apr., 2015) .

[38] E. Babichev, C. Charmousis, A. Lehébel and T. Moskalets, *Black holes in a cubic galileon universe*, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2016** (Sept., 2016) 011–011.

[39] K. Hinterbichler, *Theoretical aspects of massive gravity*, *Reviews of Modern Physics* **84** (2012) 671–710.

[40] S. Nojiri, S. Odintsov and V. Oikonomou, *Modified gravity theories on a nutshell: Inflation, bounce and late-time evolution*, *Physics Reports* **692** (June, 2017) 1–104.

[41] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Action integrals and partition functions in quantum gravity*, *Phys. Rev. D* **15** (May, 1977) 2752–2756.

[42] J. W. York, *Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation*, *Phys. Rev. Lett.* **28** (Apr, 1972) 1082–1085.

[43] M. Bañados, M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Geometry of the 2+1 black hole*, *Physical Review D* **48** (Aug., 1993) 1506–1525.

[44] B. Janssen, *Capítulo 29: Teoría de Maxwell y formas diferenciales*, in *Gravitación y geometría: Una introducción moderna a la Teoría de la Relatividad General*, pp. 572–575. Universidad de Granada, Granada, 2022.

[45] C. Martinez, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Charged rotating black hole in three spacetime dimensions*, *Physical Review D* **61** (2000) 104013.

[46] O. J. Dias and J. P. Lemos, *Rotating magnetic solution in three dimensional einstein gravity*, *Journal of High Energy Physics* **2002** (2002) 006.

[47] O. J. C. Dias, *Black hole solutions and pair creation of black holes in three, four and higher dimensional spacetimes*, 2004.

[48] D. Lovelock, *The Einstein Tensor and Its Generalizations*, *Journal of Mathematical Physics* **12** (03, 1971) 498–501, [`https://pubs.aip.org/aip/jmp/article-pdf/12/3/498/19155957/498_1_online.pdf`].

[49] C. Lanczos, *A remarkable property of the riemann-christoffel tensor in four dimensions*, *Annals of Mathematics* **39** (1938) 842–850.

[50] C. de Rham and G. Gabadadze, *Generalization of the Fierz-Pauli action*, *Phys. Rev. D* **82** (Aug, 2010) 044020.

[51] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, *Generalized g-inflation: –inflation with the most general second-order field equations–*, *Progress of Theoretical Physics* **126** (Sept., 2011) 511–529.

[52] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, *Inflation driven by the galileon field*, *Physical Review Letters* **105** (Dec., 2010) .

[53] C. Deffayet and D. A. Steer, *A formal introduction to Horndeski and galileon theories and their generalizations*, *Classical and Quantum Gravity* **30** (Oct., 2013) 214006.

[54] C. Deffayet, G. Esposito-Farèse and A. Vikman, *Covariant galileon*, *Physical Review D* **79** (Apr., 2009) .

[55] E. Babichev and C. Charmousis, *Dressing a black hole with a time-dependent galileon*, *Journal of High Energy Physics* **2014** (Aug., 2014) .

[56] W. Israel, *Event horizons in static electrovac space-times*, *Communications in Mathematical Physics* **8** (1968) 245–260.

[57] B. Carter, *Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom*, *Phys. Rev. Lett.* **26** (Feb, 1971) 331–333.

[58] W. Israel, *Event horizons in static vacuum space-times*, *Phys. Rev.* **164** (Dec, 1967) 1776–1779.

[59] A. Paliathanasis, G. León and S. Pan, *Exact solutions in chiral cosmology*, *General Relativity and Gravitation* **51** (2019) .

[60] A. Paliathanasis, *Complex scalar fields in scalar-tensor and scalar-torsion theories*, *Modern Physics Letters A* **37** (2022) .

[61] S. Y. Vernov, *Reconstruction procedure in modified gravity cosmological models*, *Proceedings of the XXI International Workshop High Energy Physics and Quantum Field Theory — PoS(QFTHEP 2013)* (2014) .

[62] S. Hod, *Hairy black holes and null circular geodesics*, *Phys. Rev. D* **84** (Dec, 2011) 124030.

[63] B.-H. Lee, W. Lee and D. Ro, *Expanded evasion of the black hole no-hair theorem in dilatonic einstein-gauss-bonnet theory*, *Phys. Rev. D* **99** (Jan, 2019) 024002.

[64] T. Johannsen and D. Psaltis, *Testing the no-hair theorem with observations in the electromagnetic spectrum. ii. black hole images*, *The Astrophysical Journal* **718** (2010) 446–454.