Gravedades Lovelock en Formalismo de Palatini

Trabajo Fin de Master FisyMat

Autor: Miguel Ángel Chamorro Burgos
Director: Bert Janssen

Julio 2020

Agradecimientos

Bert Janssen, por consejos de estructura, discusiones y guía,
Alejandro Jiménez Cano, por discusiones útiles,
Carlos Martín García, por revisión del texto,
Guillermo López Ruiz, por consejos de maquetación,
y, por supuesto, a mi familia, por su apoyo.

DECLARACIÓN

En cumplimiento de la normativa aprobada en Consejo de Gobierno de 4 de marzo de 2013, sobre Directrices de la Universidad de Granada para el desarrollo de la asignatura "Trabajo Fin de Máster" de sus títulos de máster (Art 8,4)

D.Dª ...Miguel Ángel Chamorro Burgos..

Asume la originalidad del trabajo fin de máster, entendida en el sentido de que no ha utilizado fuentes sin citarlas debidamente.

Granada, a ..17.. de ...Junio........ de 2020.

Fdo.:

Índice

Resumen

In this project, we use two very simple assumptions to build a generalisation of gerenal relativity. It is surprising that such two assumptions give rise to a consistent and very rich generalisation, rather than end up with a messy theory. Along the project, some new results can be found, like the breaking of causal structure of affine geodesics due to non-metricity, non trivial solutions to Lovelock lagrangians in critical and supercritical dimension, and an unification of gravity and Yang-Mills interactions in classical regime.

But we also find new questions: Do particles follow metric or affine geodesics? It is possible to always impose that affine geodescis preserve the causal structure? Does this generalisation actually happen in our universe? Independently from the answers to these questions, Lovelock-Palatini theory can help us to understand how gravity acts, or could act, in higher dimension.

Resumen

En este trabajo, hacemos uso de dos principios simples para construir una generalización de la teoría actual de la gravedad. Resulta sorprendente que encajen, pues al considerar estas generalizaciones no añadimos sino riqueza a la teoría. Durante el trabajo, encontramos algunos resultados nuevos, como la ruptura de la estructura causal de las geodésicas afines, las soluciones no triviales para términos de Lovelock en dimensión crítica y supercrítica, y la unificación de gravedad e interacciones Yang-Mills en teoría de campos clásicos usando estas generalizaciones.

Pero también encontramos preguntas nuevas, como la incógnita de si las trayectorias que siguen partículas son geodésicas métricas o afines, si imponer la preservación de la estructura causal es posible en todas las soluciones, o si estas generalizaciones se corresponden con nuestro universo. Independientemente de cuáles sean las respuestas a estas preguntas, esta teoría nos ayuda a entender cómo sería, o podría ser, la gravedad en dimensiones altas.

1. Introducción

La teoría de relatividad general de Einstein representa una de los mayores logros intelectuales de la humanidad. Implica un gran salto conceptual, pasamos de un espacio y tiempo estáticos y absolutos para todo observador, en el que las interacciones son instantáneas y a distancia, a un espaciotiempo dinámico, que interacciona con las partículas y campos que viven en su interior. La manera en la que interaccionan se desarrolló por el principio de mínimo acoplo, un "principio" aceptado por simplicidad y eficiencia, pero sin ningún respaldo experimental o argumental en el momento en que se propuso. Ahora, este principio parece ser respaldado por la consistencia con la experimentación, que va desde el rango de milímetros a escalas de unidades astronómicas. Tanto éxito tiene la teoría que, en principio, podría parecer extrapolable fuera de ese intervalo.

Sin embargo, es precisamente esta extrapolación la que nos lleva a conclusiones que no han podido comprobarse con otros experimentos, rodeamos las galaxias de vastas cantidades de materia invisible para poder explicar su rotación con nuestra teoría, llenamos el universo de una energía invisible con propiedades gravitatorias repulsivas para explicar la relación luminosidad-distancia de las supernovas tipo Ia. Juntas, esas dos fuentes invisibles (quizá es más usual decir "oscuras") de materia y energía corresponderían el 96 % de la energía total del universo observable.

Encontramos discrepancias entre lo observado electromagnéticamente y lo predicho gravitatoriamente, esto motiva la modificación de la gravedad para encontrar una teoría nueva que se ajuste a lo que conocemos, y nos ayude a explicar lo que desconocemos. En este escenario, nacen las teorías $f(\mathcal{R})$, teorías relativistas que generalizan la relatividad de Einstien proponiendo (o encontrando) funciones que den una solución que se ajuste a lo experimentalmente medido. Sin embargo, estas teorías parecen un tanto *ad-hoc*, además de que suelen acertar en el ámbito en que fueron construidas y fallan fuera de esos rangos. No podemos tener una $f(\mathcal{R})$ para cada caso, debemos buscar una teoría más robusta, basada en otras ideas.

Cuando probamos la teoría de la relatividad general en un régimen de altas energías, encontramos que el origen del universo fue una singularidad, y que cantidades muy grandes de materia en un pequeño espacio puede terminar en un agujero negro. Estas singularidades espaciotemporales nos están avisando de que la teoría deja de funcionar en esos escenarios, la teoría debe ser modificada. Está ampliamente aceptado que en esos casos necesitaríamos una teoría cuántica de la gravedad. De hecho, los intentos que se han hecho en teoría cuántica de campos en espaciotiempo curvo sugieren correcciones de segundo orden en el tensor de Riemann para que la teoría sea renormalizable [1], del mismo modo que teorías en desarrollo, como la de supercuerdas sugiere lo mismo [2]. Esto nos lleva a preguntarnos si es posible añadir términos cuadráticos a la acción de Einstein-Hilbert, y nos lleva directamente a la teoría de Lovelock.

En 1971, D. Lovelock encontró una posible generalización de la relatividad general de Einstein [3], construyendo una serie de densidades lagrangianas, las únicas que producían ecuaciones de segundo orden para la métrica. Esto es un resultado impresionante, ya que en física las ecuaciones de movimiento no deben ser de más de orden dos [4]. Esta teoría, llamada teoría de Lovelock, guarda aún más sorpresas. Como veremos en el texto, los términos de Lovelock son las características de Euler generalizadas en dimensión par, por lo que encontraremos comportamientos topológicos en la teoría.

Debido a este comportamiento topológico, resulta que en dimensión cuatro, la teoría de Lovelcok se reduce a la relatividad general usual. Esto no resulta nada satisfactorio, pero aún tenemos un as bajo la manga, siempre hemos considerado que la materia se acopla con la métrica, podemos dar un paso más y suponer que la conexión (estos son conceptos que trataremos con más profundidad) también tiene dinámica y se acopla con la materia. Así llegamos al formalismo de Palatini.

Es realmente asombroso comprobar que si consideramos el formalismo de Palatini en presencia de materia que no se acopla con la conexión, recuperamos la relatividad general usual; y no solo eso, descubrimos una simetría oculta. Aún mayor es la sorpresa cuando comprobamos que este resultado se extiende a toda la teoría de Lovelock, que esta simetría no se rompe aun con presencia de materia, y que los términos que antes eran topológicos, ahora dejan de serlo.

Llegamos entonces a una generalización razonable de la relatividad general, puede que concuerde con las observaciones o no, eso lo dirán los experimentos. En este trabajo haremos un análisis de cómo hemos llegado a esta teoría, encontraremos algunos de sus comportamientos generales, comprobaremos los resultados que da en caso de tener materia acoplada a la conexión, y usaremos la simetría interna que encontramos en el formalismo de Palatini para construir una unificación de gravedad e interacciones Yang-Mills.

7. Conclusiones

Hemos conseguido generalizar la relatividad general usando como puntos de apoyo que las ecuaciones sean de segundo orden en la métrica con la teoría de Lovelock, y cuestionando que la conexión sea la de Levi-Civita con el formalismo de Palatini. Así, hemos encontrando sorpresas por el camino, como el hecho de que cada combinación de tensores de curvatura que da lugar a ecuaciones de segundo orden para la métrica resulta ser proporcional a la característica de Euler en cierta dimensión par, a la que llamamos dimensión crítica. Esto es una gran sorpresa, en principio no parece haber ningún motivo que sugiera una conexión entre estos dos comportamientos. Además, estos términos se anulan exactamente para dimensión subcrítica, por lo que podemos considerar la suma infinita de todos ellos, ya que para $2k > n$ los términos de la suma son cero y en $2k = n$ topológicos. De esta forma, en $n = 4$ conseguimos recuperar la acción de Einstein-Hilbert de una acción general.

Por otro lado, el formalismo de Palatini aplicado a la teoría de Lovelock, en el que se considera la conexión como un campo más, nos cuenta que los términos de Lovelock (incluido el término de Einstein-Hilbert) tienen como solución la conexión de Levi-Civita en el vacío, y también tienen simetría proyectiva, dando lugar a un campo que puede ser ajustado a conveniencia. Estudiando cada término de Lovelock por separado, y de manera sistemática, encontramos que para $k > 1$ tienen una solución de vacío diferente de la de Levi-Civita. Esta solución es algo nuevo, y muestra que la teoría no es trivial. Tampoco hemos podido descartar la existencia de más soluciones a parte de Levi-Civita y la que hemos encontrado.

La aparición vector proyectivo puede causar controversia, como encontramos en [9], pues el tensor de Riemann no es invariante frente a esta transfomación proyectiva. Mi interpretación es que en formalismo de Palatini no podemos usar el tensor de Riemann simplemente para construir invariantes de curvatura. Clásicamente, un invariante de curvatura muy usado es el invariante de Kretschmann, que consiste en contraer dos tensores de Riemann consigo mismos, y resulta no ser invariante proyectivo. Los únicos invariantes de curvatura fiables son los que aparecen en el desarrollo de Lovelock, pues confiar en otros sería como usar el valor numérico del potencial vector electromagnético cuando lo que realmente importa es el campo electromagnético en sí; es decir, la magnitud que es invariante gauge.

Por último, usamos la simetría proyectiva para construir una acción en la que tenemos espinores como materia, donde introducimos una derivada covariante geométrica que puede interpretarse como un campo de interacción Yang-Mills. Esto hace que la simetría proyectiva se debilite, pero conseguimos unificar gravedad con interacciones de grupos semisimples, pudiendo considerar el grupo $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$, lo que nos proporciona una acción similar al modelo estándar, solo que clásico y sin bosón de Higgs, pero con gravedad.

Es interesante discutir si esta acción surge de manera "natural", o si la encontramos porque es lo que vamos buscando. Creo que discutir sobre qué es natural o no, sería interesante si supiésemos definir qué es una teoría "natural", de hecho, es una discusión que entraría más en el ámbito filosófico que en el físico. Creo que la física teórica fundamental moderna se empeña demasiado en buscar belleza y naturalidad, pues son conceptos humanos, ¿por qué pensamos que al universo le importa lo que consideramos bello o natural? La tendencia es clara, sí, con el tiempo la física se ha ido unificando, ganando simetría, y se ha ido escribiendo de una manera más "bella"; pero, como nosotros mismos decimos: correlación no implica causalidad.

En definitiva, la teoría de Lovelock en formalismo de Palatini tiene muchos resultados que aportar aún. No sabemos si existen más soluciones a los términos por separado, ni si encontraremos otras soluciones al considerar combinaciones concretas de términos en dimensión alta, o qué geodésicas son las que sigue la materia en nuestro universo, las métricas o las afines (en caso de que el formalismo de Palatini sea una realidad) ¿podría ser la materia oscura (que solo interacciona gravitatoriamente) ser consecuencia de que la materia sigue trayectorias geodésicas afines en un universo con torsión y no-metricidad que no detectamos a escala local?

Referencias

[1] N. D. Birrell, N. D. Birrell, P. Davies, and P. Davies, *Quantum fields in curved space*. Cambridge university press, 1984.

[2] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory: Volume 1, Introduction*. Cambridge University Press, 2012.

[3] D. Lovelock, "The einstein tensor and its generalizations," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 12, no. 3, pp. 498–501, 1971.

[4] B. Zwiebach, "Curvature squared terms and string theories," *Physics Letters B*, vol. 156, no. 5-6, pp. 315–317, 1985.

[5] B. Janssen, *Teoría de la relatividad General*. Creative Commons, 2020.

[6] A. N. Bernal, B. Janssen, A. Jiménez-Cano, J. A. Orejuela, M. Sánchez, and P. Sánchez-Moreno, "On the (non-) uniqueness of the levi-civita solution in the einstein–hilbert–palatini formalism," *Physics Letters B*, vol. 768, pp. 280–287, 2017.

[7] B. Janssen and A. Jiménez-Cano, "On the topological character of metric-affine lovelock lagrangians in critical dimensions," *Physics Letters B*, vol. 798, p. 134996, 2019.

[8] B. Janssen and A. Jiménez-Cano, "Projective symmetries and induced electromagnetism in metric-affine gravity," *Physics Letters B*, vol. 786, pp. 462–465, 2018.

[9] C. Bejarano, A. Delhom, A. Jiménez-Cano, G. J. Olmo, and D. Rubiera-Garcia, "Geometric inequivalence of metric and palatini formulations of general relativity," *Physics Letters B*, vol. 802, p. 135275, 2020.

[10] B. Zumino, "Gravity theories in more than four dimensions," *Physics Reports*, vol. 137, no. 1, pp. 109–114, 1986.

[11] M. Borunda, B. Janssen, and M. Bastero-Gil, "Palatini versus metric formulation in higher-curvature gravity," *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2008, no. 11, p. 008, 2008.

[12] R. Yue, D. Zou, T. Yu, P. Li, and Z. Yang, "Slowly rotating charged black holes in anti-de sitter third order lovelock gravity," *General Relativity and Gravitation*, vol. 43, no. 8, pp. 2103–2114, 2011.