TRABAJO FIN DE MÁSTER:

# FORMULACIONES DE LA RELATIVIDAD GENERAL COMO TEORÍA GAUGE

CECILIO GARCÍA QUIRÓS

Tutor:
Bert Janssen

Departamento de Física Teórica y del Cosmos

# Índice

# 1. Introducción

La teoría de la Relatividad General es sin duda uno de los grandes logros científicos del siglo XX, y lo más sorprendente es que fue desarrollada por un único científico, el gran Albert Einstein.

En 1905 Einstein publicó su conocida Relatividad Especial en la que establecía que las leyes de la física debían tener la misma forma en todos los sistemas inerciales. Con esta idea en mente, Einstein trató de añadir la aceleración en su teoría hasta que finalmente en 1915 publicó la teoría Relatividad General.

Dicha teoría supuso una gran revolución para la mentalidad de la época pues proponía que la fuerza gravitatoria que experimentan los objetos es debida a la deformación del espacio-tiempo. Un objeto, por el mero hecho de tener masa y energía puede deformar la geometría del espacio, dando lugar a efectos curiosos como la deflexión de la luz al pasar cerca de un cuerpo masivo.

La teoría es ampliamente aceptada por la comunidad científica por la gran variedad de tests que ha pasado, tanto por proporcionar explicación a observaciones experimentales como por realizar predicciones que más tarde se corroboraron. Hablamos entre otros, del límite Newtoniano, el avance del perihelio de Mercurio, la ya mencionada deflexión de la luz que ha dado lugar a las conocidas como lentes gravitacionales, el efecto Doppler gravitacional, y muchos otros tests modernos que se han llevado a cabo.

Todo esto salió de la cabeza de un único hombre, y los pilares en los que basó su teoría y a partir de los cuales la fue construyendo fueron el *Principio de Equivalencia* y el *Principio de Covariancia*. En el primero de ellos Einstein relaciona la gravedad con los sistemas de referencia inerciales, dicho principio se enuncia como

*Observadores en caída libre en un campo gravitatorio general son localmente equivalentes a observadores inerciales. No hay experimentos locales que puedan distinguir entre estas dos situaciones.*

El segundo se trata más bien de una implicación matemática del principio de relatividad y se enuncia como

*Las leyes de la física deben tener la misma forma en todos los sistemas de referencia. Las leyes de la física deben por tanto transformar de manera covariante bajo cambios generales de coordenadas.*

Basándose en estos dos principios Einstein desarrolló todo un aparataje matemático en el que recuperó el trabajo de Riemann sobre las variedades para describir los espacios curvos y todo el álgebra tensorial. Este fue el camino que históricamente siguió Einstein para llegar a la Relatividad General.

Pero una vez que se conoce el destino es más fácil encontrar otro camino que también nos lleve a él. Y es que a lo largo de los años han aparecido otras formas de formular la Relatividad General basándose en unos principios diferentes a los que empleó Einstein pero que de igual forma llevan al mismo resultado. Uno de los principios más prolíficos y que tan buenos resultados ha dado en otras teorías y en otras interacciones es el conocido como *Principio Gauge*.

Hoy día todas las interacciones del Modelo Estándar (electromagnetismo, interacción fuerte e interacción débil) están descritas por una teoría que se basa en este principio. La idea consiste en que el lagrangiano que describe nuestra teoría posee una simetría global, es invariante bajo esa transformación, y queremos que continúe siendo invariante cuando hacemos la simetría local (gaugeamos), es decir, hacemos que los parámetros de la transformación dependan de las coordenadas espacio-temporales. Entonces, para que el lagrangiano continúe siendo invariante hay que introducir unos campos gauge, uno por cada generador, y deben transformar de la manera conveniente.

Los lagrangianos que describen nuestra teoría suelen tener términos cinéticos que incluyen derivadas, y por ello suelen ser los términos problemáticos cuando la simetría se hace local. El procedimiento estándar consiste en construir una derivada covariante que transforme de la misma forma que los campos y eso se consigue añadiéndole los campos gauge comentados antes.

Nuestra intención en este trabajo es obtener la Relatividad General como una teoría gauge. Para alcanzar nuestro objetivo ha sido necesario adquirir un conocimiento *colateral*, es decir, ya que las teorías gauge se desarrollan normalmente en espacios planos deberemos ser capaces antes, de poder describir la Relatividad General desde un espacio plano, que será el espacio tangente a la variedad, a este fin se dedica la primera sección del trabajo. En las sucesivas secciones gaugearemos el álgebra de Poincaré, una extensión suya el álgebra de (anti-)De Sitter y por último el álgebra conforme. Ya que las transformaciones conformes son menos conocidas dedicamos también una sección a su estudio.

Este trabajo es principalmente de naturaleza teórica y operacional. Prácticamente todos los cálculos se muestran explícitos realizados paso a paso y no se deja nada a la imaginación del lector. Para seguir el trabajo no es necesario un conocimiento muy profundo de la Relatividad General aunque sí hace falta familiaridad con el cálculo tensorial de índices, y la base sobre qué es un álgebra y cómo se describe.

# 2. Geometría diferencial desde el espacio tangente

En esta sección veremos que es posible describir la geometría de una variedad disponiendo únicamente de información en el plano tangente. Para ello se introducirán nuevos conceptos como el *Vielbein* o la *conexión de espín*, se impondrán una serie de postulados sobre ellos y finalmente se obtendrán las ecuaciones de Einstein en el plano tangente.

## 2.1. Cambios de coordenadas en el espacio tangente

En Relatividad General el concepto de variedad $\mathcal{M}^N$ es de una enorme importancia. La variedad es un espacio curvo que se emplea para describir la curvatura del espacio-tiempo. En cada punto $p$, la variedad puede aproximarse por un espacio plano o plano tangente $\mathcal{T}_p(\mathcal{M}^N)$. En nuestro caso este espacio plano es $\mathbb{R}^{1,N-1}$, es decir, localmente la variedad es el espacio de Minkowski. Las coordenadas $x^\mu$ de $\mathcal{M}^N$ definen la *base de coordenadas*

$$
\begin{aligned}
=&-N\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\epsilon_{abcd}R_{\mu\nu}{}^{ab}R_{\rho\lambda}{}^{cd}\\
&-4N\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\epsilon_{abcd}R_{\mu\nu}{}^{ab}(e^{c}{}_{\rho}f^{d}{}_{\lambda}+e^{d}{}_{\lambda}f^{c}{}_{\rho}-e^{c}{}_{\lambda}f^{d}{}_{\rho}-e^{d}{}_{\rho}f^{c}{}_{\lambda})\\
&-4N\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\epsilon_{abcd}(e^{a}{}_{\mu}f^{b}{}_{\nu}+e^{b}{}_{\nu}f^{a}{}_{\mu}-e^{a}{}_{\nu}f^{b}{}_{\mu}-e^{b}{}_{\mu}f^{a}{}_{\nu})(e^{c}{}_{\rho}f^{d}{}_{\lambda}+e^{d}{}_{\lambda}f^{c}{}_{\rho}-e^{c}{}_{\lambda}f^{d}{}_{\rho}-e^{d}{}_{\rho}f^{c}{}_{\lambda})
\end{aligned}
$$

El primer término no se puede simplificar más, calculamos los otros dos por separado:

$$
\begin{aligned}
2^{o}=&-4NR_{\mu\nu}{}^{ab}\epsilon_{abcd}(\epsilon^{\mu\nu c\lambda}f^{d}{}_{\lambda}+\epsilon^{\mu\nu\rho d}f^{c}{}_{\rho}-\epsilon^{\mu\nu\rho c}f^{d}{}_{\rho}-\epsilon^{\mu\nu d\lambda}f^{c}{}_{\lambda})\\
&-4NR_{\mu\nu}{}^{ab}\epsilon_{abcd}(e^{\mu}{}_{e}e^{\nu}{}_{f}e^{\lambda}{}_{g}\epsilon^{efcg}f^{d}{}_{\lambda}+e^{\mu}{}_{e}e^{\nu}{}_{f}e^{\rho}{}_{g}\epsilon^{efgd}f^{c}{}_{\rho}-e^{\mu}{}_{e}e^{\nu}{}_{f}e^{\rho}{}_{g}\epsilon^{efgc}f^{d}{}_{\rho}-e^{\mu}{}_{e}e^{\nu}{}_{f}e^{\lambda}{}_{g}\epsilon^{efdg}f^{c}{}_{\lambda})\\
=&-4NR_{\mu\nu}{}^{ab}\epsilon_{abcd}\epsilon^{efcg}(e^{\mu}{}_{e}e^{\nu}{}_{f}e^{\lambda}{}_{g}f^{d}{}_{\lambda}+e^{\mu}{}_{e}e^{\nu}{}_{f}e^{\rho}{}_{g}f^{c}{}_{\rho}+e^{\mu}{}_{e}e^{\nu}{}_{f}e^{\rho}{}_{g}f^{d}{}_{\rho}+e^{\mu}{}_{e}e^{\nu}{}_{f}e^{\lambda}{}_{g}f^{c}{}_{\lambda})\\
=&-16NR_{\mu\nu}{}^{ab}\epsilon_{abcd}\epsilon^{efcg}e^{\mu}{}_{e}e^{\nu}{}_{f}e^{\lambda}{}_{g}f^{d}{}_{\lambda}.
\end{aligned}
$$

Introducimos la contracción de los símbolos de Levi-Civita [5]

$$
\epsilon_{abcd}\epsilon^{efcg}=-|e|\left(\delta^{efg}_{abd}-\delta^{efg}_{adb}-\delta^{efg}_{bad}-\delta^{efg}_{dba}+\delta^{efg}_{dab}+\delta^{efg}_{bda}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
2^{o}=&16N|e|R_{\mu\nu}{}^{ab}(e^{\mu}{}_{a}e^{\nu}{}_{b}e^{\lambda}{}_{d}f^{d}{}_{\lambda}-e^{\mu}{}_{a}e^{\nu}{}_{d}e^{\lambda}{}_{b}f^{d}{}_{\lambda}-e^{\mu}{}_{b}e^{\nu}{}_{a}e^{\lambda}{}_{d}f^{d}{}_{\lambda}\\
&-e^{\mu}{}_{d}e^{\nu}{}_{b}e^{\lambda}{}_{a}f^{d}{}_{\lambda}+e^{\mu}{}_{d}e^{\nu}{}_{a}e^{\lambda}{}_{b}f^{d}{}_{\lambda}+e^{\mu}{}_{b}e^{\nu}{}_{d}e^{\lambda}{}_{a}f^{d}{}_{\lambda})\\
=&16N|e|\left(R_{ab}{}^{ab}f^{d}{}_{d}-R_{ad}{}^{ab}f^{d}{}_{b}-R_{ba}{}^{ab}f^{d}{}_{d}-R_{db}{}^{ab}f^{d}{}_{a}+R_{da}{}^{ab}f^{d}{}_{b}+R_{bd}{}^{ab}f^{d}{}_{a}\right)\\
=&16N|e|2Rf^{d}{}_{d}\\
=&32N|e|Rf^{d}{}_{d}.
\end{aligned}
$$

Calculamos el tercer término:

$$
\begin{aligned}
3^{o}=&-4N\epsilon_{abcd}(\epsilon^{a\nu c\lambda}f^{b}{}_{\nu}f^{d}{}_{\lambda}+\epsilon^{a\nu\rho d}f^{b}{}_{\nu}f^{c}{}_{\rho}-\epsilon^{a\nu\rho c}f^{b}{}_{\nu}f^{d}{}_{\rho}-\epsilon^{a\nu d\lambda}f^{b}{}_{\nu}f^{c}{}_{\lambda}\\
&+\epsilon^{\mu bc\lambda}f^{a}{}_{\mu}f^{d}{}_{\lambda}+\epsilon^{\mu b\rho d}f^{a}{}_{\mu}f^{c}{}_{\rho}-\epsilon^{\mu b\rho c}f^{a}{}_{\mu}f^{d}{}_{\rho}-\epsilon^{\mu bd\lambda}f^{a}{}_{\mu}f^{c}{}_{\lambda}\\
&-\epsilon^{\mu ac\lambda}f^{b}{}_{\mu}f^{d}{}_{\lambda}-\epsilon^{\mu a\rho d}f^{b}{}_{\mu}f^{c}{}_{\rho}+\epsilon^{\mu a\rho c}f^{b}{}_{\mu}f^{d}{}_{\rho}+\epsilon^{\mu ad\lambda}f^{b}{}_{\mu}f^{c}{}_{\lambda}\\
&-\epsilon^{b\nu c\lambda}f^{a}{}_{\nu}f^{d}{}_{\lambda}-\epsilon^{b\nu\rho d}f^{a}{}_{\nu}f^{c}{}_{\rho}+\epsilon^{b\nu\rho c}f^{a}{}_{\nu}f^{d}{}_{\rho}+\epsilon^{b\nu d\lambda}f^{a}{}_{\nu}f^{c}{}_{\lambda})\\
=&-4N(\epsilon_{acbd}\epsilon^{ac\nu\lambda}f^{b}{}_{\nu}f^{d}{}_{\lambda}+\epsilon_{adbc}\epsilon^{ad\nu\rho}f^{b}{}_{\nu}f^{c}{}_{\rho}+\epsilon_{acbd}\epsilon^{ac\nu\rho}f^{b}{}_{\nu}f^{d}{}_{\rho}+\epsilon_{adbc}\epsilon^{ad\nu\lambda}f^{b}{}_{\nu}f^{c}{}_{\lambda}\\
&+\epsilon_{bcad}\epsilon^{bc\mu\lambda}f^{a}{}_{\mu}f^{d}{}_{\lambda}+\epsilon_{bdac}\epsilon^{bd\mu\rho}f^{a}{}_{\mu}f^{c}{}_{\rho}+\epsilon_{bcad}\epsilon^{bc\mu\rho}f^{a}{}_{\mu}f^{d}{}_{\rho}+\epsilon_{bdac}\epsilon^{bd\mu\lambda}f^{a}{}_{\mu}f^{c}{}_{\lambda})\\
&+\epsilon_{acbd}\epsilon^{ac\mu\lambda}f^{b}{}_{\mu}f^{d}{}_{\lambda}+\epsilon_{adbc}\epsilon^{ad\mu\rho}f^{b}{}_{\mu}f^{c}{}_{\rho}+\epsilon_{acbd}\epsilon^{ac\mu\rho}f^{b}{}_{\mu}f^{d}{}_{\rho}+\epsilon_{adbc}\epsilon^{ad\mu\lambda}f^{b}{}_{\mu}f^{c}{}_{\lambda}\\
&+\epsilon_{bcad}\epsilon^{bc\nu\lambda}f^{a}{}_{\nu}f^{d}{}_{\lambda}+\epsilon_{bdac}\epsilon^{bd\nu\rho}f^{a}{}_{\nu}f^{c}{}_{\rho}+\epsilon_{bcad}\epsilon^{bc\nu\rho}f^{a}{}_{\nu}f^{d}{}_{\rho}+\epsilon_{bdac}\epsilon^{bd\nu\lambda}f^{a}{}_{\nu}f^{c}{}_{\lambda})
\end{aligned}
$$

[5] Notación: $\delta^{abc}_{def}=\delta^{a}_{d}\delta^{b}_{e}\delta^{c}_{f}$

$$=-16N\epsilon_{abcd}\epsilon^{abef}(f^c{}_\nu f^d{}_\lambda e^\nu{}_e e^\lambda{}_f + f^c{}_\nu f^d{}_\rho e^\nu{}_e e^\rho{}_f + f^c{}_\mu f^d{}_\lambda e^\mu{}_e e^\lambda{}_f + f^c{}_\mu f^d{}_\rho e^\mu{}_e e^\rho{}_f).$$

Sustituimos la contracción de los símbolos de Levi-Civita $\epsilon_{abcd}\epsilon^{abef} = -2|e|(\delta^{ef}_{cd} - \delta^{ef}_{dc})$

$$\begin{aligned}
3^{\text{o}} =& 32N|e|(\delta^{ef}_{cd} - \delta^{ef}_{dc})(f^c{}_\nu f^d{}_\lambda e^\nu{}_e e^\lambda{}_f + f^c{}_\nu f^d{}_\rho e^\nu{}_e e^\rho{}_f + f^c{}_\mu f^d{}_\lambda e^\mu{}_e e^\lambda{}_f + f^c{}_\mu f^d{}_\rho e^\mu{}_e e^\rho{}_f)\\
=& 32N|e|(f^c{}_\nu f^d{}_\lambda e^\nu{}_c e^\lambda{}_d + f^c{}_\nu f^d{}_\rho e^\nu{}_c e^\rho{}_d + f^c{}_\mu f^d{}_\lambda e^\mu{}_c e^\lambda{}_d + f^c{}_\mu f^d{}_\rho e^\mu{}_c e^\rho{}_d\\
&- f^c{}_\nu f^d{}_\lambda e^\nu{}_d e^\lambda{}_c - f^c{}_\nu f^d{}_\rho e^\nu{}_d e^\rho{}_c - f^c{}_\mu f^d{}_\rho e^\mu{}_d e^\lambda{}_c - f^c{}_\mu f^d{}_\rho e^\mu{}_d e^\rho{}_c)\\
=& 32N|e|(4(f^c{}_c)^2 - 4f^c{}_d f^d{}_c) = 128N|e|\left((f^c{}_c)^2 - f^c{}_d f^d{}_c\right)
\end{aligned}$$

### 9.4.6. Variación del d'Alambertiano

$$\begin{aligned}
\delta_\alpha(\Box^C\phi) =& (\delta_\alpha e^{a\mu})\left(\partial_\mu\mathcal{D}_a\phi - 2b_\mu\mathcal{D}_a\phi + \omega_{\mu ab}\mathcal{D}^b\phi + 2f_{\mu a}\phi\right)\\
&+ e^{a\mu}(\delta_\alpha(\partial_\mu\mathcal{D}_a\phi) - 2b_\mu\delta_\alpha(\mathcal{D}_a\phi) + \omega_{\mu ab}\delta_\alpha(\mathcal{D}^b\phi) + 2f_{\mu a}\delta_\alpha\phi)\\
=& -\alpha e^{a\mu}\left(\partial_\mu\mathcal{D}_a\phi - 2b_\mu\mathcal{D}_a\phi\omega_{\mu ab}\mathcal{D}^b\phi + 2f_{\mu a}\phi\right)\\
&+ e^{a\mu}\left(-2\alpha\partial_\mu\mathcal{D}_a\phi + 4\alpha b_\mu\mathcal{D}_a\phi - 2\alpha\omega_{\mu ab}\mathcal{D}^b\phi - 2f_{\mu a}\alpha\phi\right)\\
=& -3\alpha e^{a\mu}\left(\partial_\mu\mathcal{D}_a\phi - 2b_\mu\mathcal{D}_a\phi + \omega_{\mu ab}\mathcal{D}^b\phi + 2f_{\mu a}\phi\right)
\end{aligned}$$

# Referencias


[1] Bert Janssen, *Teoría de la Relatividad General*, Universidad de Granada, 2014.

[2] Daniel Z. Freedman y Antoine Van Proeyen, *Supergravity*, Cambridge University Press, 2012.

[3] Tomás Ortín, *Gravity and Strings*, Cambridge University Press, 2004.

[4] Richard P. Feynman, Fernando B. Morinigo, William G. Wargner, *Feynman lectures on gravitation*, University of Bangalore Press, 1997.

[5] S. Montero Modino, *The Lorentz and Poncaré Groups*.

[6] M. Parker, *Classification of real simple Lie superalgebras of classical type*, J. Math. Phys. 21 (1980) 689-697.

[7] V. G. Kac, *Lie superalgebras*, Adv. Math. 26 (1977) 8-96.

[8] V. G. Kac, *A sketch of Lie superalgebra theory*, Commun. Math. Phys. 53 (1977) 31-64.

[9] C. W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler, *Gravitation*. W.H. Freeman 1970.