Universidad de Granada

Reducción dimensional de gravedad en el vacío mediante compactificación a variedades de grupo.

Álvaro García Navarro

Tutorizado por: *Bert Janssen, Jose Juan Fernández Melgarejo.*

14 de septiembre de 2019

Índice general

Abstract

En este trabajo de fin de máster va a considerarse, dentro del marco teórico de la teoría de la Relatividad General de Einstein, la posibilidad de un espacio-tiempo con más dimensiones espaciales de las tres usuales. El planteamiento de esta teoría gravitatoria en dimensión superior podrá contemplarse, mediante una serie de hipótesis y una serie de procedimientos que denominaremos compactificación o reducción dimensional, como una teoría cuatridimensional en la que, además de su correspondiente teoría gravitatoria, aparecen de forma natural una serie de campos dinámicos extra. Estos campos estarán íntimamente ligados a un cierto grupo de Lie, que a su vez tendrá que ver con la topología escogida para esas "dimensiones extra" que se han añadido al espacio-tiempo ordinario. Durante este proceso, veremos cómo la teoría de Yang-Mills puede derivarse a partir de principios puramente geométricos y veremos también cómo puede realizarse un intento de unificación entre la teoría gravitatoria y la física de partículas.

In this master's thesis, the possibility of a space-time with more spatial dimensions than the usual three will be considered within the theoretical framework of Einstein's theory of General Relativity. The approach to the gravitational theory in a higher dimension can be contemplated, through a series of hypotheses and a series of procedures that we will call compactification or dimensional reduction, as a four-dimensional theory in which, in addition to its corresponding gravitational theory, a series of extra dynamic fields will appear naturally. These fields will be intimately linked to a certain Lie group, which in turn will have to do with the topology chosen for those " extra dimensions " that have been added to ordinary space-time. During this process, we will see how the Yang-Mills theory can be derived from purely geometric principles and we will also see how an attempt to unify between gravitational theory and particle physics can be made.

Capítulo 1

Introducción

Como se ha mencionado en el abstract, todo el escrito se desarrollará en el seno de la teoría de la Relatividad General de Einstein, y se considerará la posibilidad de un espacio-tiempo con más dimensiones espaciales que las tres usuales. Actualmente existen diversas teorías que estudian la posibilidad de añadir dimensiones de carácter temporal, las cuales no van a contemplarse en los capítulos posteriores.

En primer lugar, se comenzará repasando algunos conceptos de Relatividad General que nos serán necesarios en secciones posteriores. A continuación, y dado que una teoría de este tipo (que involucre dimensiones extra) puede parecer a priori algo disparatada, se proseguirá realizando una discusión acerca sobre la viabilidad (o no-viabilidad) de postular estas dimensiones espaciales extra.

Una vez hecho esto, se realizará, a modo de cálculo introductorio, la compactificación sobre la variedad S^1 (es decir, un círculo) de un espacio-tiempo 5-dimensional. Durante el cálculo, se verá cómo a partir de una teoría puramente gravitatoria en un espacio tiempo 5-dimensional puede obtenerse una teoría efectiva 4-dimensional que contenga tanto gravedad como electromagnetismo, surgiendo durante el proceso un campo escalar ϕ, y un cuadrivector A_μ con una simetría interna ligada al grupo $U(1)$. Dicho cálculo pondrá de manifiesto el gran potencial que tienen las teorías de Kaluza-Klein de cara a unificar interacciones, y servirá de ejemplo dado su carácter más sencillo con respecto al verdadero propósito del trabajo: la compactificación sobre variedades de grupo arbitrarias.

La motivación de dicho propósito se ve clara: si mediante la compactificación sobre S^1, variedad del grupo $U(1)$ se obtiene una teoría efectiva que parece unificar gravedad con electromagnetismo (el cual recuérdese, presenta simetría precisamente bajo $U(1)$), una compactificación sobre variedades de grupo de carácter más general podría resultar en la unificación de la teoría gravitatoria con las teorías de Yang-Mills.

Antes de comenzar, conviene repasar algunos conceptos importantes con los que el lector habrá de estar más o menos familiarizado. Se asume una cierta base de Relatividad general (tensores de curvatura, ecuaciones de Einstein...) y nociones básicas de teoría de grupos. En el caso de conocer el formalismo de Vielbeins, el lector podrá omitir la siguiente sección, en la cual vamos a introducir dicho formalismo además de realizar un repaso a las nociones más básicas de relatividad general.

1.1. Formalismo del Vielbein

La totalidad de los conceptos sobre relatividad general que van a repasarse en esta sección pueden encontrarse en (Weinberg, 2014) y (Zee, 2013).
Considérese un espacio-tiempo 4-dimensional con signatura $(-,+,+,+)$ dado por la variedad diferencial M y cuyas coordenadas se denotarán como x^μ, con $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Para el lector menos familiarizado con la geometría diferencial, de forma introductoria una variedad diferencial es una generalización del concepto de curva (1-variedad), superficie (2-variedad)... a N dimensiones. Del mismo modo que en cursos básicos de matemáticas se habla de curvas y superficies diferenciables (esto es, sin picos, suaves) en el caso de una variedad de dimensión N esto se traduce en que cualquier punto de la misma dado por unas ciertas coordenadas $\{x^i\}$, $i = 1, ..., N$ se parece localmente a $\mathbb{R}^N$.
Sea $g_{\mu\nu}$ la métrica de este espacio-tiempo, se suele definir el siguiente intervalo entre sucesos

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{1.1}$$

así como una conexión, que estará íntimamente ligada con el concepto de derivada covariante. Para tener un transporte paralelo a lo largo de cualquier curva que preserve ángulos y distancias es necesario que la conexión que se defina sea "compatible con la métrica", es decir, que la derivada covariante que definamos aplicada sobre la métrica sea idénticamente nula:

$$\nabla_\lambda \left(g_{\mu\nu}\right) = 0. \tag{1.2}$$

En este caso, se empleará la conexión de Levi-Civita, que se trata de la única conexión libre de torsión (es decir, simétrica en sus índices inferiores) y que nos garantiza la compatibilidad con la métrica. Para la derivada covariante correspondiente a ella se empleará en adelante el símbolo

$$\nabla_\mu \equiv \partial_\mu + \Gamma_\mu, \tag{1.3}$$

La conexión de Levi-Civita viene dada por la siguiente expresión:

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \frac{g^{\lambda\sigma}}{2} \left(\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right), \tag{1.4}$$

y la torsión, se define como su parte antisimétrica, y dado que en este trabajo nos restringiremos a variedades Riemannianas, esta será idénticamente nula:

$$T_{\mu\nu}{}^{\lambda} \equiv \Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}{}^{\lambda} = 0. \tag{1.5}$$

Capítulo 5

Resumen y Conclusión

Veamos un enfoque global del trabajo y a dónde nos ha llevado:

En el capítulo 1 se han sentado las bases de los conocimientos necesarios para abordar el problema que nos planteamos: fundamentos de relatividad general, el formalismo de Vielbein y se ha hecho una discusión acerca de la posibilidad de las dimensiones espaciales extra, distinguiendo entre aquellas compactas y no compactas y sobre si era lícito o no la suposición de estas..

En el capítulo 2 llevamos a cabo a modo de introducción para los cálculos posteriores la compactificación original de Kaluza-Klein sobre un círculo S^1, donde descubrimos que la métrica 5-dimensional podía parametrizarse por bloques de manera que parte de ella se comportase como un campo gauge A_μ con simetría bajo la acción del grupo $U(1)$ en la teoría 4-dimensional, y todo apuntaba a que este campo podría identificarse con el potencial del campo electromagnético.
Efectivamente, las ecuaciones obtenidas podían reducirse a las ecuaciones de Maxwell en presencia de gravedad, sin embargo postulaban la existencia de un campo escalar ϕ que hasta la fecha no ha sido posible medir experimentalmente y cuya ecuación nos llevaba a una contradicción física irremediable cuando tratábamos de truncarlo a cero.

En el capítulo 3 se han introducido las herramientas necesarias para abordar la compactificación sobre variedades de grupo no abelianas, centrándonos principalmente en la teoría de Yang-Mills en su representación adjunta y en la teoría de variedades de grupo.

En el capítulo 4 se ha abordado la compactificación en cuestión, poniendo especial interés en la construcción de la variedad a partir de M_{int} y M_{ext} y en la notación de índices empleada. Finalmente, con cada paso se ponía de manifiesto cómo se podían construir teorías de tipo Yang-Mills a partir de principios puramente geométricos. Este es uno de los principales resultados que podemos subrayar acerca de este trabajo.

La conclusión que puede sacarse finalmente de la compactificación sobre variedades de grupo es que no se consigue unificar de forma satisfactoria la teoría gravitatoria con el Modelo estándar, dado que surgen una serie de problemas que merece la pena discutir a continuación:

1. Se sigue necesitando de un campo escalar ϕ que no se ha conseguido observar experimentalmente hasta la fecha. Cualquier reducción de este tipo siempre contará con un campo de esta naturaleza y arrastrará el mismo problema consigo.

2. En segundo lugar, se ha abordado la teoría de Yang-Mills desde una perspectiva de campos clásicos, dado que en ningún momento hemos cuantizado los mismos. Es más, mientras el universo observable consta tanto de bosones como de fermiones, esta teoría únicamente incorpora campos de carácter bosónico (los potenciales de Yang-Mills).

   A día de hoy, una propuesta de teoría cuántica que incluya gravedad necesariamente debe ser una teoría supersimétrica, esto es, debe ser invariante bajo transformaciones de super-simetría. En una teoría supersimétrica cada partícula fermiónica tiene asociada una *supercompañera* bosónica y viceversa. Una transformación de supersimetría consiste en intercambiar cada partícula por su *supercompañera*, esto es, intercambiar fermiones por bosones y viceversa.
   Existen argumentos teóricos por los cuales una teoría supersimétrica únicamente es consistente cuando la dimensión de su espacio-tiempo satisface

   $$D \leq 11, \tag{5.1}$$

   mientras que la dimensión del grupo del Modelo Estándar es

   $$\dim\left(SU(3) \times SU(2) \times U(1)\right) = \dim SU(3) + \dim SU(2) + \dim U(1) = 8 + 3 + 1 = 12,$$

   por lo tanto aunque pudiésemos dotar de un carácter cuántico a nuestra teoría, al realizar la reducción al grupo del Modelo Estándar habríamos de partir como mínimo de un espacio-tiempo con dimensión 16, violando dichos argumentos.

Los resultados más remarcables de este trabajo de fin de grado podrían ser entonces:

1. **Geometrización de Yang-Mills.** La construcción de teorías de tipo Yang-Mills a partir de principios puramente geométricos es por sí solo un resultado fascinante, dado que este tipo de teorías suelen venir desde otra perspectiva radicalmente distinta más cercana a los campos cuánticos y la física de partículas.

2. **Una posible unificación.** Dado que este es un modelo que podría admitir mejoras, a pesar de sus problemas puede tomarse como un paso más en la dirección de una posible teoría unificadora. Si por algún casual mañana se consiguiese medir una partícula que pudiera identificarse con el campo escalar ϕ, nuestra teoría unificadora cobraría algo de fuerza. Sin embargo, hemos de ser conscientes de que es una teoría que no puede incorporar la teoría cuántica debido a la discusión previa, por lo que ante esa circunstancia,

jugaría el papel de una teoría efectiva, en el sentido de una aproximación clásica.

Por otro lado, hemos visto que este formalismo induce un potencial escalar en la teoría en cuatro dimensiones, el cual además depende fuertemente del campo gauge, por tanto, estudiar los puntos críticos de dicho potencial nos permitiría ligar el significado de la constante cosmológica Λ al del grupo de simetrías considerado.

Referencias

Ortín, T. (2004). *Gravity and strings.* Cambridge University Press.

Pope, C. N. (2000). *Kaluza-klein theory.* Centre Emile Borel, Institut Henri Poincaré.

Roest, D. (2005). M-theory and gauged supergravities. *Fortschritte der Physik: Progress of Physics*, *53*(2), 119–230.

Sattinger, D. H., y Weaver, O. L. (2013). *Lie groups and algebras with applications to physics, geometry, and mechanics* (Vol. 61). Springer Science & Business Media.

Van Riet, T. M. (2007). *Cosmic acceleration in kaluza-klein supergravity.*

Weinberg, S. (2014). *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity.* Wiley.

Zee, A. (2013). *Einstein gravity in a nutshell.* Princeton University Press.