

Trabajo Fin de Grado en Física

# Diagramas de Penrose en modelos cosmológicos acelerados y decelerados

Teresa Huertas Roldán

Junio de 2019



**UNIVERSIDAD  
DE GRANADA**

## **Abstract**

In the present work we analyse the causal relationship between observers in some cosmological solutions which contain cold matter and a cosmological constant. To achieve this objective we will calculate the Penrose diagrams, a very useful tool consisting in a two-dimensional diagram that summarises the causal structure of the considered space-time.

## Agradecimientos

En primer lugar quisiera agradecer a mi tutor, Bert Janssen, la oportunidad que me dio de poder realizar este trabajo tan fascinante. Me ha enseñado no sólo Relatividad General y Cosmología, también a trabajar de forma muy metódica y rigurosa. Le agradezco muy especialmente la paciencia que ha tenido conmigo.

A Antonio Moreno Galindo por su colaboración en el estudio de la convergencia de desarrollos en serie. Sin su ayuda habría llegado a conclusiones totalmente erróneas que habrían puesto en duda la credibilidad de todos los resultados obtenidos.

A mi familia por aninarme cada día desde que comencé este camino. A mis padres por interesarse y tratar de entender lo que hacía. A mis hermanos, por enseñarme a explicarme “para que los mortales lo entiendan”.

Por último, no puedo olvidarme de todos los que conocían las pericias de mi día a día, que me apoyaron cuando las cuentas no salían.

Este trabajo no habría sido posible sin vosotros.

# Índice

<b>1</b>	<b>Relatividad general y cosmología</b>	<b>5</b>
1.1	Introducción . . . . .	5
1.2	Ecuaciones de Einstein . . . . .	6
1.3	Métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) . . . . .	6
1.4	Ecuaciones de Friedmann . . . . .	7
1.5	Materia y energía . . . . .	8
1.6	Horizontes cosmológicos . . . . .	10
1.7	Modelos cosmológicos clásicos . . . . .	11
1.7.1	Universo de Einstein . . . . .	11
1.7.2	Universo de De Sitter . . . . .	12
1.7.3	Universo de Einstein-De Sitter . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Diagramas de Penrose de las soluciones clásicas</b>	<b>15</b>
2.1	Transformaciones conformes . . . . .	15
2.2	Diagramas de Penrose: definición general . . . . .	16
2.3	Espacio de Minkowski . . . . .	17
2.4	Espacio de De Sitter . . . . .	19
2.5	Espacio de Einstein-De Sitter . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Modelos cosmológicos con dos fluidos</b>	<b>22</b>
3.1	Motivación: la cosmología moderna . . . . .	22
3.2	Solución de las ecuaciones de Friedmann . . . . .	23
3.3	Diagrama de Penrose del modelo con materia fría y $\Lambda$ . . . . .	27
3.3.1	Caso 1 . . . . .	28
3.3.2	Caso 2 . . . . .	28
3.3.3	Caso 3 . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>31</b>
	<b>Referencias</b>	<b>32</b>

# 1 Relatividad general y cosmología

## 1.1 Introducción

La cosmología es una rama de la ciencia que se centra en el estudio del universo. Pero a lo largo de su historia, la cosmología ha contado con muchas incertidumbres. En 1915 Albert Einstein publica la teoría de la Relatividad General, cuyos resultados se aplican al universo completo y comienzan a desarrollarse modelos (soluciones cosmológicas) para explicar cómo evoluciona. Estas primeras soluciones cosmológicas sencillas son las soluciones clásicas. Con el paso de los años se fueron obteniendo muchas soluciones con geometrías diferentes que modelaban el contenido de materia y energía mediante un único constituyente, es decir, sólo materia, radiación... Algunas, como la de Einstein-De Sitter, que describe un universo plano con materia, se consideraron una buena explicación de nuestro universo hasta los años ochenta. Sin embargo, estas soluciones sólo eran una aproximación puesto que nuestro universo es muy complejo.

Hasta los años noventa se sabía que el universo contenía radiación y materia, estaba en expansión y se suponía que era plano (por simplicidad) y tenía, como consecuencia de la expansión, un origen. Todos estos hechos llevaron al desarrollo de las teorías del Big Bang caliente, que dicen que el universo comienza en una singularidad, el Big Bang. Inicialmente el universo sufrió una fase de expansión acelerada, conocida como inflación, en la que se alcanzó el tamaño macroscópico. A penas se tiene información sobre este periodo. Se piensa que acabó cuando la energía era de  $\sim 10^3 \text{ GeV}$  y el universo estaba lleno de un plasma muy denso y caliente. A medida que el universo se expandía, el plasma se fue enfriando. Cuando la energía descendió hasta los  $\sim 100 \text{ keV}$ , la materia y la radiación se desacoplaron originando el fondo cósmico de microondas o CMB a la vez que se formaron los primeros núcleos atómicos. Desde que acabó la fase de inflación, la temperatura era muy elevada, así que la radiación era el elemento dominante que marcaba el curso de la evolución. Esta fase duraría hasta que la energía alcanzó el valor de  $\sim 1 \text{ eV}$ , momento en el que comenzó el periodo de dominio de la materia.

A pesar de la aceptación que tuvo el Big Bang caliente, había mucha incertidumbre en los valores de los parámetros cosmológicos. Por ejemplo, no se sabía si el valor de la constante de Hubble era de  $50 \text{ km/sMpc}$  o de  $100 \text{ km/sMpc}$ . Todo esto cambia a partir de los años noventa. El satélite COBE mide por primera vez las anisotropías del CMB, lo que permite calcular la densidad de materia y la densidad total del universo. El valor de la densidad total de energía correspondía a un universo espacialmente plano y la densidad de materia era el 30% de la densidad total. Con este valor, un universo lleno principalmente de materia no puede ser plano. A finales de los noventa, dos grupos independientes (High-z Supernovae Team y Supernovae Cosmology Project) probaron la expansión acelerada del universo tras estudiar el corrimiento al rojo de galaxias muy lejanas. Los datos que obtuvieron se ajustaban a un universo con (aproximadamente) un 30% de materia y un 70% de una forma de energía desconocida que domina el contenido de energía del universo y que llamaremos energía oscura.

Todos estos avances llevan a incluir en los modelos de Big Bang caliente la energía oscura, de forma que actualmente el universo está compuesto por materia y energía oscura. El paradigma cosmológico actual se conoce como Modelo  $\Lambda$ CDM e incluye, además, los resultados del Modelo Estándar de partículas.

El objetivo de este trabajo es estudiar las características de varias soluciones cos-

mológicas para determinar cuál puede hacer una buena descripción de nuestro universo. Analizaremos cómo es la evolución, si la expansión es acelerada o decelerada, la existencia de horizontes y singularidades. Todo esto va a depender de cuál sea el contenido de materia y energía del universo. Por ello, comenzaremos analizando tres soluciones clásicas. Con la primera, un universo estático, aprenderemos cuál es el procedimiento que vamos a seguir. Las dos restantes tienen un contenido de energía diferente, por lo que van a evolucionar de forma distinta. Una contiene materia fría y la otra es un universo vacío dominado por una constante cosmológica, que es la energía del vacío. Una vez conocidas estas tres soluciones cosmológicas clásicas, crearemos un nuevo modelo más complejo en el que el contenido de materia y energía vendrá descrito por materia fría y una constante cosmológica. Al tratarse de un modelo completamente nuevo, tendremos que calcular todos los parámetros y funciones que describen un universo con estas características y darles interpretación física. Para esto nos ayudaremos de las soluciones clásicas.

Después de analizar estos modelos estudiaremos su estructura causal, es decir, cuál es la relación que existe entre los observadores de un universo y la relación de estos observadores con los eventos del pasado y del futuro. La forma más sencilla de hacerlo es obtener los diagramas de Penrose. Comenzaremos con las tres soluciones cosmológicas clásicas para entender qué son los diagramas de Penrose y cómo se trabaja con ellos. Después utilizaremos los resultados que hemos obtenido del modelo de materia fría y constante cosmológica para calcular su diagrama de Penrose.

## 1.2 Ecuaciones de Einstein

Las ecuaciones de Einstein son un sistema de diez ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, no lineales, acopladas y de segundo orden en la métrica  $g_{\mu\nu}$ :

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = -8\pi G_N \mathcal{T}_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

donde  $\mathcal{R}_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci,  $\mathcal{R}$  el escalar de Ricci,  $G_N$  la constante de la gravitación universal y  $\mathcal{T}_{\mu\nu}$  el tensor de energía-momento. Las ecuaciones de Einstein hacen una descripción de la gravedad como una teoría de campos y ponen de manifiesto que la métrica se acopla tanto al contenido de materia y energía como a sí misma.

Las ecuaciones de Einstein son muy complicadas de resolver y no permiten determinar directamente todas las componentes de la métrica: proporcionan seis de las diez componentes (grados de libertad físicos). Las cuatro componentes restantes dependen de la elección de coordenadas y son, por tanto, grados de libertad no físicos.

## 1.3 Métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

El universo es demasiado complejo para obtener una solución general de las ecuaciones de Einstein. Sin embargo, la cosmología estudia el universo como conjunto a grandes escalas y vamos a poder hacer unas simplificaciones basándonos en dos principios:

### Principio cosmológico

*En cualquier momento, el universo es homogéneo e isótropo a muy grandes escalas.*

Este principio permite escribir la métrica como una familia de hipersuperficies espaciales tridimensionales que describen el universo en cada instante de tiempo. Cada

## 4 Conclusiones

El objetivo de este trabajo era encontrar un modelo cosmológico capaz de describir un universo dominado por materia fría y constante cosmológica. Encontrar dicho modelo suponía analizar su evolución a través del factor de escala y obtener el diagrama de Penrose para conocer su estructura causal. La presencia de los dos fluidos implica una forma de evolución distinta según domine un fluido u otro.

Trabajar con un modelo con dos fluidos suponía un reto porque no se encontró bibliografía sobre el análisis de modelos con estas características. Así que comenzamos con las soluciones cosmológicas clásicas de universos espacialmente planos para entender cómo evoluciona y se comporta cada uno de los fluidos por separado. El proceso que seguimos siempre fue el mismo: primero calcular del factor de escala y después comprobar la existencia de horizontes cósmicos y singularidades y determinar el parámetro de deceleración. Una vez que se tenían todos estos datos se podía obtener el diagrama de Penrose y la estructura causal de estos espacios. Tras esto, seguimos el mismo procedimiento con el modelo de materia fría y constante cosmológica y utilizamos las soluciones cosmológicas clásicas para poder interpretar correctamente los resultados.

El modelo de materia fría y constante cosmológica resulta ser una buena primera aproximación al modelo  $\Lambda$ CDM, ya que es capaz de reproducir sus características más importantes. Además, resulta que nuestro modelo, a pesar de su complejidad, tiene solución analítica y se ha podido obtener una expresión exacta para el factor de escala. Se podría decir que esta es la función más importante para caracterizar el modelo, ya que es la que permite calcular el resto de parámetros. Tanto  $\Lambda$ CDM como el modelo de dos fluidos comparten la existencia de un Big Bang que marca el inicio del universo, horizontes cósmicos y diferentes fases en la evolución del universo. Y estos elementos son los que determinan cómo es la estructura causal. Aunque se ha tenido éxito a la hora de caracterizar la evolución en el tiempo del modelo y de obtener los horizontes y singularidades, no ha sido posible encontrar una expresión que relacione el tiempo comóvil y el tiempo conforme, algo necesario para poder hacer los diagramas de Penrose. Sin embargo, con toda la información que teníamos de los diagramas de Penrose de las soluciones clásicas y con las características del modelo con materia fría y constante cosmológica, hemos podido presentar tres propuestas diferentes.

A priori cualquier opción que contase con un Big Bang, un horizonte de partículas y un horizonte de eventos podía ser buena. Pero analizando cada una de las propuestas nos hemos dado cuenta de que en algunos casos podíamos encontrar comportamientos extraños que no se observan en nuestro universo y que nos permitían ir descartando los diagramas. No tenemos evidencias que indiquen que dos observadores separados una distancia infinitamente grande puedan encontrarse en contacto causal, como en el diagrama del caso 1 (sección 3.3.1). Y no hay evidencias porque no es posible que la luz, viajando a velocidad finita, recorra una distancia infinita en un tiempo finito. Tampoco tiene sentido que en un universo homogéneo e isótropo encontremos direcciones que contradicen este principio, como en el caso 2 (sección 3.3.2). Como hemos discutido la sección 3.3.3, el caso 3 es el diagrama de Penrose que más se puede parecer al diagrama de Penrose exacto de este modelo. Además, también es el diagrama propuesto que mejor describe la relación causal entre observadores tanto del modelo de materia fría y constante cosmológica como del modelo  $\Lambda$ CDM.

## Referencias

- [1] B. Janssen,  
*Teoría de la Relatividad General*,  
Universidad de Granada, 2018.
- [2] B. Ryden,  
*Introduction to Cosmology*,  
Pearson Education, 2017.
- [3] S. Parnovsky and A. Parnowski,  
*How the Universe Works: Introduction to Modern Cosmology*,  
World Scientific, 2018.
- [4] A. Liddle,  
*An Introduction to Modern Cosmology*,  
John Wiley & Sons Ltd, 2015.
- [5] J. N. Islam,  
*An Introduction to Mathematical Cosmology*,  
Cambridge University Press, 2004.
- [6] E. Harrison,  
*Cosmology: The Science of the Universe*,  
Cambridge University Press, 2000.
- [7] B.W. Carroll and D.A. Ostlie,  
*An Introduction to Modern Astrophysics*,  
Pearson Education Limited, 2014.
- [8] A. Jiménez Cano,  
*Transformaciones conformes y diagramas de Penrose en Relatividad General*,  
TFG, Universidad de Granada, 2015.
- [9] Conformal Mapping,  
<http://mathworld.wolfram.com/ConformalMapping.html>
- [10] Horizontes en cosmología,  
<http://astronomia.net/cosmologia/horizontes.htm>
- [11] Plack Collaboration,  
*Planck 2018 results VI. Cosmological parameters*,  
arXiv:1807.06209v1 [astro-ph.CO]
- [12] M.V. Sazhin, O.S. Sazhina,  
*The Scale Factor in a Universer with Dark Matter*,  
Astronomy Reports 2016 Vol. 60, No 4, pp. 425-437 [DOI:  
10.1134/S1063772916030136].