

TEORÍA DE KALUZA-KLEIN

JUAN SILVERIO MARTÍNEZ BAENA

September 8, 2014

*TUTOR DEL TRABAJO : BERT JANSSEN
(Depto. de Física Teórica y del cosmos) Universidad de Granada*

Abstract

In 1920's Theodor Kaluza and Oskar Klein realized that can unify gravitation (General Relativity) and electromagnetism (Maxwell theory) in a single interaction if it's assumed that the space-time has an additional compact and periodic dimension type S^1 . In this paper, we are interested in reviewing the mathematical and physical aspects of Kaluza-Klein original theory. At first, it is exposed an introduction to differential geometry, with Levi-Civita mathematical methods (based on metric tensor and Levi-Civita spin connection); as a support to explain an equivalent but more convenient formalism (Vielbeins formalism). Finally, it is proposed an Ansatz for the five-dimensional metric tensor in order to calculate, one by one, Vielbeins, anholonomy coefficients, spin connection, Ricci tensor and Ricci scalar. Finally, we will be prepared to reduce five-dimensional Einstein-Hilbert action to Einstein-Maxwell four-dimensional action not-trivially coupled with a scalar field, the Dilatón.



Figure 1: Theodor Kaluza (left) and Oskar Klein (right)

$\hat{g}_{zz} = e^{\beta\phi}$ y este es precisamente el tamaño de la quinta dimensión, es decir, a fin de cuentas ϕ no es otra cosa que el radio de la quinta dimensión.

Para hallar la dinámica de nuestro espacio podemos obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange de esta acción en la forma:

- Ecuación de Einstein: $\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0\right)$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} = \sqrt{|g|}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}(\partial\phi)^2 + e^{\frac{\phi}{\sqrt{3}}}\left[F_{\mu\rho}F_\nu^\rho - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^2\right]$$

- Ecuación de Maxwell $\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)}\right) - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\mu} = 0$:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

- Ecuación del Dilatón: $\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\right) - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} = 0$

$$\partial_\mu\phi - \frac{1}{\sqrt{12}}e^{\frac{\phi}{\sqrt{3}}}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$$

Como vemos aparecen las ecuaciones de movimiento acopladas completamente (menos la de Maxwell) al campo del Dilatón. Destacablemente vemos que además de las dos ecuaciones de movimiento que esperaríamos en Relatividad General acoplada a Teoría de Maxwell, aparece una tercera ecuación o ligadura entre el Dilatón y el tensor electromagnético que no es trivial y desde luego no se observa. Podríamos pensar en truncar el escalar de Kaluza-Klein a $\phi = 0$. Para las dos primeras ecuaciones de movimiento esto tendría un gran éxito sin embargo si nos fijamos en la tercera obtendríamos: $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$. Esto sí es la prueba definitiva de que esta teoría no es consistente con nuestra experiencia física. En particular sabemos que el tensor electromagnético satisface: $F^2 \equiv F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(E^2 - B^2)$ lo cual implica que: $E^2 = B^2$. Como sabemos en general el módulo del campo eléctrico no es siempre igual al del campo magnético, por tanto esta condición es inadmisibles. Esta y no otra es la parte que falla de la teoría.

7 Conclusiones

Después de haber hecho tantos cálculos uno se queda con un sabor amargo al ver que finalmente se queda tan cerca de unificar dos grandes teorías. Tan cerca y a la vez tan lejos ya que por mucho que la acción una vez reducida se parece mucho a la acción correcta (truncando $\phi=0$), la ligadura nunca desaparece. Es por tanto una reestructuración total de la teoría la que puede cambiar las cosas. Aún así la filosofía sigue siendo la misma, crear un objetos simples de dimenton

mayor para obtener objetos complicados de dimensión menor mediante reducción dimensional.

De todas formas, aunque la ligadura inadmisibile no hubiera aparecido, sabemos que en ningún momento hemos introducido en esta teoría la fenomenología cuántica, por lo que el gran sueño de la unificación parece que queda todavía muy lejos (quizá para un doctorado más que para un trabajo de fin de grado...).

La teoría de Kaluza-Klein es, más que un logro como ley física, un logro como idea precursora para la utilización de un nuevo método en física, el método de las dimensiones extra. Este es un método tan a priori simple y elegante que en los últimos años la física en dimensiones extra ha sido la protagonista en la labor de la unificación de las interacciones (teorías de Kaluza-Klein realistas, Teorías de cuerdas y supercuerdas).

Aún con todo el esfuerzo que hicieron, ni Kaluza y Klein pensaban que pudiera existir realmente esa dimensión extra adicional; pensaban que la física se movía en las cuatro dimensiones habituales y que la quinta dimensión no era más que un artificio matemático para poder unificar las interacciones de la física.

Sin embargo, en mi humilde opinión, todo lo que matemáticamente sea necesario, para que una ley física que esté corroborada, sea consistente, se debe manifestar de una u otra manera en la naturaleza. En otras palabras, no creo en los artificios matemáticos. Y en la historia de la física así ha ocurrido multitud de veces, como por ejemplo cuando Max Karl Ernest Ludwig Planck pensó que discretizar las posibles energías era un artificio matemático para evitar la “catástrofe ultravioleta.

En conclusión, creo que la realización de este trabajo de fin de Grado me ha otorgado, cuando menos, una gran soltura con las matemáticas en general y en concreto con la rama de la geometría diferencial, uno de los campos más importantes tanto de la Matemática como en mi opinión, de la Física.

8 Agradecimientos

Querría agradecer en primer lugar a mi familia, y en concreto a mi padre por haber costeadado mis estudios en estos duros momentos de crisis económica. En segundo agradecer a mi tutor el esfuerzo que ha hecho en organizar este trabajo de fin de grado, la total disposición que ha tenido en ayudarme cuando he acudido a resolver alguna “sutileza” en los problemas y su paciencia en pararme la posibilidad de entregar este trabajo aún cuando la situación era muy adversa. En tercer lugar, un agradecimiento especial a mi novia y mi cuñada que me han ayudado mucho a tener la motivación para seguir adelante en los momentos más complicados. Por supuesto agradecer a la dirección de la Facultad porque esto no sería posible sin ellos y en particular al Sr. Vicedecano de Ordenación Académica D^o Felipe Pascual Torres que me dió el consentimiento para exeder en 6 créditos el número máximo de créditos matriculables para poder matricularme del trabajo de fin de grado.

References

- [1] Carroll S.-Spacetime and geometry. An introduction to general relativity-AW (2004)
- [2] R. d’Inverno-Introducing Einstein’s relativity-Oxford University Press, USA (1992)
- [3] Weinberg-Gravitation and cosmology_ principles and applications of GR-John Wiley & Sons, Inc. (1972)
- [4] Miguel Sanchez Caja y Jose Luis Flores Dorado-Introducción a la geometría diferencial de variedades-Depto. Geometría y Topología, Universidad de Granada, (2003)
- [5] Bert Janssen-Apuntes de Relatividad General-Depto. Física Teórica y del Cosmos, Universidad de Granada, (2014)
- [6] <http://people.physics.tamu.edu/pope/ihplec.pdf>
- [7] <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0809/0809.1600.pdf>
- [8] <http://www.mat.ucm.es/~cruizb/Informatica-2/Apuntes-i/Otros-Grupos/AC-Fourier.pdf>