

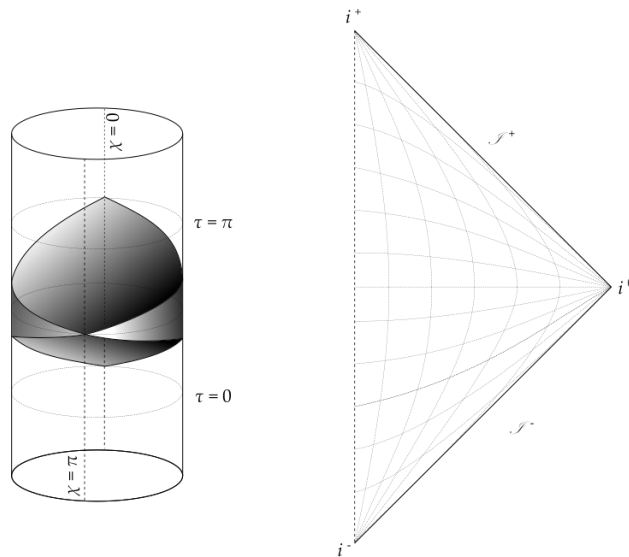
Trabajo Fin de Grado en Física

Transformaciones conformes y diagramas de Penrose en Relatividad General

Alejandro Jiménez Cano

Universidad de Granada

Junio de 2015



Tutor: Bert Janssen
Departamento de Física Teórica y del Cosmos
Universidad de Granada

Abstract

We introduce Weyl transformations that have the property of preserving the causal structure of a given metric. We use these in order to transform spacetimes into bidimensional diagrams (Penrose diagrams) in which we can analyze many aspects related to causality: the existence of Cauchy surfaces, horizons, etc. We apply this compactification process to study and discuss the maximally symmetric solutions and the Friedmann-Robertson-Walker spacetime filled with a general perfect fluid $p = w\rho$.

Convenios

1. En la ecuación de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G_N (T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}),$$

vamos a absorber el término de constante cosmológica dentro de $T_{\mu\nu}$, pues puede interpretarse como un fluido perfecto con parámetro de estado $w = -1$ (ver justificación en §1.2.2 en la discusión de la ecuación de estado (1.20)).

2. Denotaremos $\eta_{\mu\nu}$ a la métrica de Minkowski (en cualquier dimensión).
3. Para la signatura de una métrica lorentziana asignaremos $+$ a las componentes temporales y $-$ a las espaciales de la métrica. Por ejemplo para una métrica lorentziana cuadrimensional tendríamos $(+ - - -)$.
4. El tensor de Riemann que usaremos se define, a partir de los símbolos de Christoffel, del siguiente modo:

$$R_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda} = \partial_{\mu}\Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}. \quad (0.1)$$

5. El tensor de Ricci lo construiremos a partir del tensor de Riemann según:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}{}^{\rho}. \quad (0.2)$$

Índice

1. Introducción. Nociones de Relatividad General	1
1.1. Las ecuaciones de Einstein	1
1.2. Soluciones cosmológicas de las ecuaciones de Einstein	1
1.2.1. Principios cosmológicos. Métrica Friedmann-Robertson-Walker	1
1.2.2. Ecuaciones de Friedmann	4
1.2.3. Un caso muy especial: el universo estático de Einstein \mathbb{E}	6
1.3. Transformaciones de Weyl	7
1.4. Compactificación conforme y diagramas de Penrose	9
2. Los universos máximamente simétricos. Análisis y compactificación	10
2.1. El espaciotiempo de Minkowski	11
2.2. El universo de De Sitter	14
2.3. El universo anti-De Sitter	17
3. Compactificación de las métricas FRW. Generalidades	20
3.1. Resolución de las ecuaciones de Friedmann. Primeros pasos para k general	20
3.2. Singularidades	21
3.3. El caso especial $w = -\frac{1}{3}$	23
3.3.1. Integración de las ecuaciones de Friedmann	23
3.3.2. Tiempo conforme y comóvil. Expresión final del factor de escala	23
3.3.3. Singularidades con $w = -\frac{1}{3}$	24
4. Compactificación conforme de un universo plano (FRW)	24
4.1. Estudio para $w \neq -\frac{1}{3}$	24
4.1.1. Integración de las ecuaciones de Friedmann	24
4.1.2. Singularidades (para $w \neq -1$)	25
4.1.3. Compactificación	26
4.2. Estudio del caso $w = -\frac{1}{3}$	27
4.3. Diagramas de Penrose	28
5. Compactificación conforme de un universo cerrado (FRW)	29
5.1. Estudio para $w \neq -\frac{1}{3}$	29
5.1.1. Integración de las ecuaciones de Friedmann	29
5.1.2. Singularidades	30
5.1.3. Compactificación para los casos $w < -1$ y $w > -\frac{1}{3}$	32
5.2. Estudio del caso $w = -\frac{1}{3}$	32
5.3. Diagramas de Penrose	33
6. Compactificación conforme de un universo abierto (FRW)	34
6.1. Estudio para $w \neq -\frac{1}{3}$	34
6.1.1. Integración de las ecuaciones de Friedmann	34
6.1.2. Singularidades	35
6.1.3. Compactificación para los casos $w < -1$ y $w > -\frac{1}{3}$	36
6.2. Estudio del caso $w = -\frac{1}{3}$	36

6.3. Diagramas de Penrose	37
7. Aproximación a los casos $w \in (-1, -\frac{1}{3})$ para métricas FRW con $k = \pm 1$	37
8. Conclusiones	38
Agradecimientos	39
Referencias	39

Habría que ver si con τ tendiendo a los candidatos a singularidades σ se va a infinito o no, habiendo singularidad como ya dijimos anteriormente en este último caso. $C_2 < 0$ no están permitidos y el problema es que se obtienen resultados diferentes según se tome $C_2 = 0$ o $C_2 > 0$, por lo que habría intentar comprender el significado físico de C_2 . Otro camino sería emplear la Proposición 4.1. de [11], pero necesitaríamos métodos numéricos para resolver las integrales. Dejamos este análisis aquí; sí comentar que para $k = -1$ todo es idéntico cambiando \sin y \cos por \sinh y \cosh .

8. Conclusiones

Para concluir, conviene insistir en el interés del proceso de compactificación conforme: pasamos de un universo a otro diferente, con otra geometría, pero con la misma estructura causal. Al suprimir coordenadas aprovechando la simetría encontramos los bidimensionales diagramas de Penrose. En ellos se puede extraer rápidamente información muy valiosa. Por ejemplo, de la diferencia de carácter (espacial/temporal/nulo) de los infinitos derivan las grandes diferencias entre Minkowski, De Sitter y anti-De Sitter; o con el campo de geodésicas nulas a 45° es fácil localizar horizontes. En estos tres universos, especialmente por su regularidad, pudimos introducir las claves que nos servirían posteriormente para el resto de universos que tratamos.

Analizando las soluciones FRW de forma global podemos extraer una interesante conclusión: todas las soluciones vistas con espacio plano tienen los mismos diagramas de Penrose que sus correspondientes (con la misma w) hiperbólicos y, en consecuencia, la misma estructura causal. Por otra parte, los esféricos presentan todos forma rectangular acotada en el tiempo por dos singularidades, y las alturas varían continuamente con w . Esto nos hace pensar que, de alguna manera, existe una gran distinción (causal) entre universos cerrados y no cerrados, independientemente de si son planos o abiertos. También hemos comprobado que entre los universos acelerados, aquellos con energía fantasma ($w < -1$) eran muy especiales pues, en todos los casos, el destino del espacio era un Big Rip al final. En definitiva, con multitud de ejemplos se ha puesto de manifiesto el proceso de compactificación conforme y el enorme potencial que tienen los diagramas de Penrose para el estudio de la causalidad de las soluciones de las ecuaciones de Einstein.

Insistir una vez más en que la mayor parte de la resolución y el análisis para w general ha sido trabajo personal, permitiendo una completa inmersión en todos y cada uno de los aspectos teóricos que hemos tratado: integración de las ecuaciones de Friedmann, cálculo de tensores de curvatura y sus contracciones escalares para localizar singularidades, aplicación de un cambio de coordenadas a una métrica dada y analizar sus comportamientos asintóticos, compactificación de la misma y construcción e interpretación del diagrama de Penrose.

Pero también se han quedado cosas por el camino. Centrarnos en las métricas FRW nos ha hecho dejar de lado soluciones tan fascinantes como los agujeros negros. En éstos, cobran relevancia aspectos como el carácter asintóticamente plano, los horizontes de even-

tos e incluso habríamos de introducir las *extensiones máximas* de dichas soluciones²¹. Si, en cambio, se quisiese indagar aún más en las métricas FRW, un siguiente paso razonable podría ser incluir dos fluidos perfectos: combinar materia fría y radiación, o cualquiera de éstas con una constante cosmológica; las posibilidades son infinitas y muchas se pueden encontrar fácilmente en la bibliografía.

Acabar diciendo que puede que nos hayamos focalizado mucho en el análisis causal, llegando incluso a perder de vista su importancia fundamental. Y es que no hemos de olvidar que la causalidad es una condición necesaria para lo que en definitiva perseguimos: un modelo físico del universo.

Agradecimientos

Agradecimientos a mi tutor, Bert Janssen, por haberme motivado y empujado a adentrarme en estos interesantes temas relacionados con gravedad y Relatividad. Por su enriquecedora crítica y por esas tardes parados delante de la pizarra preguntándonos dónde está el fallo.

También a Miguel Sánchez Caja, profesor del departamento de Geometría y Topología, por concederme una cita con él, de la que extraje algunas ideas clave que acabaron corrigiendo errores de procedimiento y me permitieron afinar en la interpretación objetiva de la expansión.

Referencias

- [1] B. Janssen, *Teoría de la Relatividad General*, Granada, 2015.
- [2] R. d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press, New York, 1992.
- [3] J. B. Griffiths, J. Podolsky, *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*, Cambridge University Press, New York, 2009.
- [4] S. Hawking and Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, New York, 1973.
- [5] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology*, Wiley, Canadá, 1972.
- [6] D. F. Lawden, *Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology*, Dover, New York, 2002.
- [7] R. M. Wald, *General Relativity*, Chicago University Press, Chicago, 1984.
- [8] Cecile Mezzera, *Geometría Lorentziana y singularidades*, Universidad de la República de Montevideo, Montevideo, 2014.
- [9] A. Cabrera, D. A. Solís, *Espacio conforme y compactificación en espacio-tiempos de curvatura constante*, Universidad Autónoma de Yucatán, 2009.

²¹Véase por ejemplo la *extensión de Kruskal* para el agujero negro de Schwarzschild.

-
- [10] V. Di Carlo, *Conformal compactification and anti-de Sitter space* (Master thesis). 13
- [11] M. Sánchez, *On the Geometry of Generalized Robertson-Walker Spacetimes: Geodesics*, Granada, 1998. 7
- [12] R. Geroch, *What is a Singularity in General Relativity*, New Jersey, 1968.
- [13] Te Ha, Y. Huang, K. D. Pechan, T. J. Renner, A. Wang, et al., *Classification of the FRW universe with a cosmological constant and a perfect fluid of the equation of state $p = w\rho$* , <http://arxiv.org/abs/0905.0396>
- [14] S. Nojiri, S. D. Odintsov, S. Tsujikawa, *Properties of singularities in (phantom) dark energy universe*, <http://arxiv.org/abs/hep-th/0501025v2> 16
- [15] S. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, <http://fr.arxiv.org/abs/gr-qc/9712019>
- [16] A. Rozas-Fernández, *Covariant holography of a tachyonic accelerating universe*, <http://arxiv.org/abs/1407.8426>