UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias

Doble Grado en Física y Matemáticas

Trabajo Fin de Grado

GRUPOS DE ISOMETRÍAS EN LOS MODELOS COSMOLÓGICOS DE FRIEDMANN-LEMAÎTRE-ROBERTSON-WALKER

Presentado por:
D. Sergio Turrado Prieto

Tutor:
D. Antonio Lasanta Becerra

Cotutor:
D. Bert Janssen

Curso Académico 2022-2023

Declaración de originalidad

D. Sergio Turrado Prieto

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2022-2023, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 11 de julio de 2023

Fdo: Sergio Turrado Prieto

Índice general

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría expresar mi gratitud hacia las personas que, de alguna manera u otra, han contribuido a que este Trabajo de Fin de Grado llegue a buen puerto. Quiero agradecer a mi cotutor, Bert Janssen, su ayuda y guía, y sobre todo la pasión y empeño que pone cada día en su labor docente e investigadora, que han servido de inspiración a lo largo del curso académico. A mi tutor, Antonio Lasanta, sus consejos y su diligencia. También a Alejandro Jiménez Cano su ayuda y clarividencia, que con total seguridad me han ahorrado muchas horas de trabajo valdío, y al profesor Antonio Rodríguez Garzón su ayuda con la bibliografía matemática. Por último, quiero dar las gracias a mi familia y a mis amigos cercanos por su apoyo incondicional y su confianza en que este trabajo saliera adelante, incluso cuando yo mismo dudaba de ello. A mi amigo Adri, gracias por tus sugerencias y tu tiempo. En especial, quiero acordarme de mis compañeros de piso Laura, Enrique y María. Gracias por vuestra paciencia en el día a día y vuestro apoyo. Sois los que mejor sabéis lo difícil que ha sido el camino, esta memoria os la dedico a vosotros.

Summary

In the geometrical formulation of General Relativity, the Universe is described by a four-dimensional differentiable manifold, together with a lorentzian metric. Roughly one hundred years ago, it was shown that the most general family of metrics that allow for an homogeneous and isotropic universe are the so-caled *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* metrics. Such metrics accurately describe our Universe at very large scales. The homogeneity and isotropy of universes described by Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metrics naturally leads to the question of how many *symmetries* these universes have, and which are they.

Throughout this undergraduate thesis, we will show that symmetries are described by *metric isometries* in the manifold. In order to calculate them, defining the *Lie derivative* will be required, and its use will result in the characterisation of metric isometries via the *Killing vectors*, which indicate symmetry directions in the differentiable manifold. Hence, a manifold will have as many symmetries as Killing vectors.

Even though the rigorous mathematical formulation of these concepts is complicated, we will see that in practice, obtaining the symmetry group of a FLRW space amounts to solving a system of partial differential equations in curved space in order to find the Killing vectors, and afterwards computing certain simple (although tedious) commutation relations between these vectors.

The initial goal of this thesis is to examine the number of symmetries of some particular cosmological models based on FLRW metrics. The contents that follow are related to the subjects of *Relatividad General* of the degree in Physics and *Variedades Diferenciables* of the degree in Mathematics. The primary bibliography consulted has been chapters 15, 23 and 24 of [1]. Chapters 8 and 9 of [2], and chapters 1-4 of [3] have also been important (although secondary).

The general structure of the thesis is the following:

In chapter 1, we introduce the geometrical formalism and the notation that will be used throughout the thesis.

In chapter 2, we present the mathematical tools that will be needed to geometrically calculate the symmetries of a differentiable manifold. More precisely, we will define the Lie derivative along a vector field as a means to eventually define the Killing vectors. It will be shown that, for every independent Killing vector, the manifold has a symmetry, and, moreover, that the set of Killing vectors is a real Lie algebra that generates the group of symmetries of the manifold. In subsection 2.1.3, the intuitive concepts of homogeneity and isotropy lead to the definition of maximally symmetric manifolds in terms of their curvature tensors, and also in terms of the number of linearly independent Killing vectors that they allow.

Noether's Theorem states that every symmetry is associated with a conservation law. In subsection 2.1.4, we explicitly calculate the conserved quantity associated with each Killing vector.

In section 2.2, we generalise the concept of Killing vectors to that of conformal Killing vectors, and explain the relation between them. Conformal Killing vectors and Killing vectors of the N-dimensional Minkowski space are then explicitly calculated. Additionally, we define the Weyl transformations of the metric, which are then used in section 2.3 to calculate the conformal Killing vectors and Killing vectors of maximally symmetric

riemannian manifolds, which in term will represent spatial sections of universes described by FLRW metrics.

In chapter 3, FLRW metrics are formally introduced as being the ones that satisfy the Cosmological Principle of homogeneity and describe perfect fluids. Throughout said chapter, we will present the cosmological equations that govern the behaviour of FLRW universes, and briefly describe the most currently accepted cosmological model. Furthermore, we present some simple yet historically remarkable models of universes with a FLRW metric, such as Einstein's Static Universe, De Sitter space and the Einstein-De Sitter universe.

In section 3.4 we show that FLRW metrics are conformally flat, which will make it easier to calculate their Killing vectors in certain cases. Aditionally, maximally symmetric FLRW metrics are characterised in terms of their scale factor and the curvature of their spatial sections. This leads to a consistency condition for their possible foliations.

Lastly, in chapter 4, we take on the task of calculating the number of Killing vectors of the FLRW models, that is to say, their number of symmetries. The combined information about the form of such metrics from chapter 3 and the mathematical tools and results from section 2 will allow us to calculate the number of symmetries in these spaces via the number of linearly independent Killing vectors that they admit. The strategy followed has been to substitute an appropriate Ansatz in the Killing equation and then take advantage of the different mathematical results proved throughout the thesis in order to solve it.

Using this approach, the Killing vectors of the De Sitter and Einstein-De Sitter spaces have been calculated. Moreover, 6 Killing vectors have been found for every FLRW metric with a non-constant scale factor, which yields a lower bound of 6 symmetries for spaces described by such metrics.

In the case of FLRW metrics with a constant scale factor, the Killing equation has been fully solved, finding 7 independent Killing vectors for an arbitrary non-zero value of the spatial curvature, and 10 Killing vectors for spaces with a spatial curvature of zero. This result is consistent with the characterisation of maximal symmetry for FLRW spaces found in section 3.4.

For FLRW metrics with flat spatial curvature, 6 Killing vectors have been found for a non-constant scale factor, and 10 for a constant one, which is consistent with the characterisation of maximal symmetry mentioned above. However, the 10 Killing vectors of the De Sitter space have not been found in this section.

This thesis ends with a section of conclusions, in which we consider the initial goals to have been met, and we explain the lines of research that are still being followed in order to fully solve the Killing equation for an arbitrary FLRW metric. This more ambitious objective was not the initial goal of this thesis.

Introducción

Todas las civilizaciones de las que se tiene constancia histórica tienen mitos sobre su creación y su lugar en el Universo. Y es que, desde sus orígenes, el ser humano se ha preguntado por el origen mismo del mundo en el que vive. En la época griega presocrática, Anaximandro y Thales de Mileto (siglo VI A.C.) trataron de realizar suposiciones sobre la forma y constitución del Universo. En el Renacimiento, el astrónomo y matemático polaco Nicolás Copérnico (1473-1543) sostenía en *De revolutionibus orbium coelestium* ([4]) que la Tierra no ocupa ningún lugar especial en el Universo, lo que se conoce como el *principio Copernicano*. Aunque él no lo sabía, no iba tan desencaminado. Hoy en día, en los años 20 del siglo XXI, la formulación moderna de la Cosmología cumple 100 años, y en parte se basa en el mismo concepto, rebautizado esta vez como *Principio Cosmológico* y formulado con rigor en el ámbito de la geometría.

Esta formulación geométrica de la Cosmología, que está de centenario, ha llevado a la actual cosmovisión de un universo en evolución, aunque el camino para llegar hasta aquí ha sido cuanto menos tortuoso (consúltese [5], chap. 1 para un resumen). En 1915, el físico alemán Albert Einstein (1879-1955) publica su teoría de la Relatividad General, y dos años después, en 1917, consigue una solución de un universo con materia a sus propias ecuaciones, que representa el primer modelo cosmológico matemáticamente riguroso: el *Universo Estático de Einstein*. Debido a los prejuicios de la época, Einstein obligó a que su universo fuese matemáticamente estático, es decir, que no sufriese expansión ni contracción. Para ello, tuvo que introducir *ad hoc* una *constante cosmológica* en sus ecuaciones, en lo que él mismo calificaría posteriormente como su mayor error. En 1918, el astrónomo y matemático neerlandés Willem de Sitter tomó la constante cosmológica de Einstein y demostró que un universo sin materia y dominado por esa constante habría de estar en constante expansión. Este hallazgo supuso el abandono de la idea de universo estático, y el primer antecedente de un universo en evolución. En 1922, el físico y matemático Alexander Friedmann (1888-1925) resolvió las ecuaciones de Einstein utilizando un Ansatz para la métrica que asumía la homogeneidad e isotropía del Universo, y mostró que, en general, las ecuaciones de Einstein suponiendo estos principios llevan a un universo dinámico. Posteriormente, en 1927, el físico y sacerdote belga Georges Lemaître (1894-1966) descubrió las ecuaciones de Friedmann de manera independiente, aunque sus hallazgos han pasado desapercibidos hasta recientemente. Además, fue el primero en poner a prueba esta idea de universo en evolución deduciendo teóricamente y demostrando experimentalmente la relación lineal entre la velocidad de recesión de las galaxias y su distancia a partir de las observaciones de Vesto Slipher en 1917. Erróneamente se suele atribuir este mérito al astrónomo estadounidense Edwin Hubble (1889-1953),[6] quien derivó la misma ley (que lleva su nombre) en 1929. En 1935 y 1936, el matemático inglés Arthur Walker (1909-2001) y el físico estadounidense Howard Robertson (1903-

1961) demostraron de manera independiente que la métrica que utilizó Friedmann para resolver las ecuaciones de Einstein es la más general posible que preserva homogeneidad e isotropía. Es por eso que se conoce como *métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*.

Por otra parte, un concepto central en Física es el de las *simetrías*. Históricamente, los físicos siempre se han preguntado por cuáles son las simetrías de su sistema de estudio. Ya en el siglo XVII, el científico italiano Galileo Galilei (1564-1642) postuló las simetrías que debía cumplir un sistema físico, en términos de los cambios de coordenadas que debía admitir la formulación matemática que lo describe. Actualmente, el concepto de simetría sigue estando muy presente en campos como la Física de Partículas, y está muy relacionado con la Teoría de Grupos.

El estudio de los modelos cosmológicos nacidos de métricas Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker lleva por lo tanto de manera natural a preguntarnos por cuántas simetrías tienen estos universos, y cuáles son.

En la formulación geométrica de la Relatividad General, el Universo se describe mediante variedades diferenciables lorentzianas de cuatro dimensiones. En el desarrollo de esta memoria veremos que las simetrías de estos espacios se traducen de manera natural en *isometrías* de la métrica. El cálculo de estas isometrías y sus generadores requerirá del uso de la *derivada de Lie*, y nos llevará a caracterizar las isometrías de una métrica a través de los llamados *vectores de Killing*, que serán los que den las direcciones de simetría de la variedad diferenciable, y por tanto esta tendrá tantas simetrías diferentes como vectores de Killing. Aunque la formulación matemática rigurosa de estos conceptos es algo complicada, veremos que, en la práctica, calcular el grupo de simetrías de un espacio FLRW se reduce a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales en espacio curvo para encontrar los vectores de Killing, y calcular posteriormente unas relaciones de conmutación sencillas (aunque tediosas) entre estos últimos.

El objetivo de partida de este Trabajo de Fin de Grado será estudiar cuántas simetrías tienen algunos modelos cosmológicos concretos basados en métricas FLRW. Los contenidos que se exponen en esta memoria tienen relación con las asignaturas de Relatividad General del grado en Física y Variedades Diferenciables del grado en Matemáticas. La bibliografía principal que se ha consultado para este trabajo ha consistido en los capítulos 15, 23 y 24 de [1]. Asimismo, han sido importantes (aunque no principales) los capítulos 8 y 9 de [2] y los capítulos 1-4 de [3].

El esquema general de razonamiento es el siguiente:

En el capítulo 1 se introduce el formalismo geométrico y la notación que se utilizará.

En el capítulo 2 se presentan las herramientas matemáticas que permitirán calcular mediante métodos geométricos las simetrías de una variedad diferenciable. En concreto, se definirá la derivada de Lie a lo largo de un campo vectorial como herramienta para poder definir los vectores de Killing. Se verá que por cada vector de Killing independiente, la variedad tiene una simetría, y además que el conjunto de vectores de Killing es un álgebra de Lie real que genera el grupo de simetrías de la variedad. En la subsección 2.1.3, a partir de los conceptos intuitivos de homogeneidad e isotropía, definimos las variedades máximamente simétricas en términos de sus tensores de curvatura y también del número de vectores de Killing linealmente independientes que admiten. El Teorema de Noether establece que cada simetría está asociada a una ley de conservación. En la subsección 2.1.4 se calcula explícitamente cuál es la cantidad que se conserva asociada a cada vector de Killing.

En la sección 2.2 se generaliza el concepto de vectores de Killing a los vectores de Killing conformes, y se explica la relación entre ellos. Se calculan explícitamente los vectores de Killing conformes y los vectores de Killing del espacio de Minkowski N-dimensional. Asimismo, se definen las transformaciones de Weyl de la métrica, que se aprovechan en la sección 2.3 para calcular explícitamente los vectores de Killing conformes y los vectores de Killing de las variedades máximamente simétricas de signatura riemanniana, que serán las secciones espaciales de los espacios con métricas FLRW.

En el capítulo 3 se introducen formalmente las métricas FLRW como aquellas que cumplen el Principio Cosmológico de homogeneidad y que describen fluidos perfectos. A lo largo de dicho capítulo, se presentan las ecuaciones cosmológicas que rigen el comportamiento de universos FLRW y se hace una breve reseña sobre el modelo cosmológico más aceptado actualmente. Asimismo, se presentan algunos modelos sencillos e históricamente relevantes de universos basados en métricas FLRW, como son el Universo Estático de Einstein, el espacio de De Sitter o el universo de Einstein-De Sitter.

En la sección 3.4 se demuestra que las métricas FLRW son conformemente planas, lo que facilitará el cálculo de sus vectores de Killing en casos concretos. Asimismo, se caracterizan las métricas FLRW de simetría máxima en términos de su factor de escala y de la curvatura de sus secciones espaciales, y se encuentra una condición de ligadura sobre sus posibles foliaciones.

Por último, en el capítulo 4 se aborda el cálculo del número de vectores de Killing de los modelos FLRW, lo cual permite calcular su número de simetrías. La información combinada sobre la forma de estas métricas del capítulo 3 con las herramientas y resultados matemáticos del capítulo 2 permiten calcular el número de simetrías de estos espacios a través del número de vectores de Killing linealmente independientes que admiten. La estrategia seguida ha sido probar un Ansatz adecuado para la ecuación de Killing y aprovechar los resultados matemáticos expuestos a lo largo de esta memoria.

En concreto, se han calculado los vectores de Killing de los espacios de De Sitter y Einstein-De Sitter. Asimimso, se han calculado 6 vectores de Killing para todas las métricas FLRW con factor de escala no constante, lo que se traduce en una cota inferior de 6 simetrías para ellas.

En las métricas FLRW con factor de escala constante, se ha resuelto completamente la ecuación de Killing, encontrando 10 vectores de Killing para espacios de curvatura espacial nula y 7 vectores de Killing independientes para curvatura espacial arbitraria. Esto es consistente con la caracterización de simetría máxima para métricas FLRW encontrada en la sección 3.4.

Para métricas FLRW generales con curvatura espacial plana, se han encontrado 6 vectores de Killing en el caso general de factor de escala no constante, y 10 vectores de Killing si el factor de escala es constante, de manera consistente con la mencionada caracterización de simetría máxima. Sin embargo, no se han podido encontrar los 10 vectores de Killing del universo de De Sitter en esta sección.

Esta memoria finaliza con un apartado de conclusiones, donde se dan por alcanzados los objetivos planteados y se explican las líneas en las que se sigue investigando para alcanzar el objetivo más general (que no es el de este Trabajo de Fin de Grado) de calcular los vectores de Killing de todas las métricas FLRW.

Conclusiones

El objetivo que se ha perseguido a lo largo de este Trabajo de Fin de Grado ha consistido en calcular geométricamente en casos particulares el número de simetrías de los modelos cosmológicos más realistas a muy grandes escalas: los modelos Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

Las herramientas matemáticas del capítulo 2 y, en especial, el Teorema 1, han permitido crear un marco adecuado de trabajo para calcular mediante métodos geométricos las simetrías de una variedad diferenciable.

En concreto, en la sección 2.1 se define la derivada de Lie a lo largo de un campo vectorial en una variedad diferenciable, y posteriormente los vectores de Killing, a partir de la aplicación de la derivada de Lie a la métrica. En particular, se ha concluido por el Teorema 2 que el conjunto de vectores de Killing es un álgebra de Lie real que genera el grupo de simetrías de la variedad diferenciable equipada con la métrica, lo cual permite conocer su grupo de simetrías a través del número de vectores de Killing linealmente independientes y sus relaciones de conmutación. En la subsección 2.1.3, el formalismo de vectores de Killing ha permitido definir las variedades máximamente simétricas en términos de sus tensores de curvatura y también del número de vectores de Killing linealmente independientes que admite, todo ello a partir de los conceptos intuitivos de homogeneidad e isotropía. Asimismo, en la subsección 2.1.4 se ha conseguido demostrar de manera sencilla una de las implicaciones del Teorema de Noether gracias a los vectores de Killing.

En la sección 2.2 se ha generalizado la ecuación de Killing (2.1.8) a la ecuación de Killing conforme, a partir de cuyas soluciones se pueden calcular fácilmente los vectores de Killing. La ecuación de Killing conforme se ha resuelto completamente en coordenadas cartesianas para el espacio de Minkowski N-dimensional $\mathbb{R}^{1,N-1}$. Asimismo, se han definido las transformaciones de Weyl de la métrica y se ha encontrado por el Teorema 4 la relación entre los vectores de Killing conformes de las métricas relacionadas a través de una transformación de Weyl, que se aprovecha en la sección 2.3 para calcular explícitamente en unas coordenadas concretas los vectores de Killing conformes y los vectores de Killing de las variedades máximamente simétricas de signatura riemanniana, o espacios $\mathbb{K}^N$.

En el capítulo 3 se introducen las mencionadas métricas FLRW como aquellas que cumplen el Principio Cosmológico de homogeneidad y que describen fluidos perfectos. Estas métricas son realistas a muy grandes escalas.

A lo largo de dicho capítulo, se presentan las ecuaciones cosmológicas que rigen el comportamiento de universos FLRW y se hace una breve reseña sobre el modelo cosmológico más aceptado actualmente como descripción del Universo a gran escala:

el modelo ΛCDM. Asimismo, se presentan algunos modelos sencillos e históricamente relevantes de modelos basados en métricas FLRW, como son el Universo Estático de Einstein, el espacio de De Sitter o el universo de Einstein-De Sitter.

En la sección 3.4, el Teorema 5 demuestra que las métricas FLRW son conformemente planas, esto es, que admiten una transformación de Weyl que las relaciona con la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Asimismo, se consigue caracterizar a través del Teorema 6 cuáles son las métricas FLRW de simetría máxima en términos de su factor de escala $a(t)$ y de la curvatura k de sus secciones espaciales. Se comprueba que todas las foliaciones por métricas FRW de variedades lorentzianas máximamente simétricas de dimensión 4 cumplen la ecuación (3.4.2). Esta ecuación constituye una condición de ligadura sobre las posibles foliaciones de estas variedades que explica por qué no hay más.

Por último, en el capítulo 4 se aborda el cálculo del número de vectores de Killing de los modelos FLRW, lo cual permite calcular su número de simetrías. Ello se consigue combinando la información sobre la forma de estas métricas del capítulo 3 con las herramientas y resultados matemáticos del capítulo 2. Los cálculos se realizan en coordenadas comóviles y de lo particular a lo general, comenzando por modelos sencillos y terminando por afirmaciones más generales acerca de las métricas FLRW. En la mayoría de ocasiones, la estrategia seguida ha sido probar un Ansatz adecuado para la ecuación de Killing y aprovechar los resultados matemáticos expuestos a lo largo de esta memoria. En concreto, se ha encontrado que:

- El espacio de De Sitter tiene 10 vectores de Killing. Este es el número máximo de vectores de Killing que admite una variedad de dimensión 4, con lo que esta solución es máximamente simétrica.

- El universo de Einstein-De Sitter tiene 6 vectores de Killing que verifican el álgebra de $ISO(3)$, por lo que tiene 6 simetrías espaciales: 3 rotaciones y 3 traslaciones, y ninguna simetría adicional. Estas son exactamente las simetrías de sus secciones espaciales planas.

- Todas las métricas FLRW con $\mathbf{\dot{a} \neq 0}$ tienen al menos los 6 vectores de Killing k^μ dados por la ecuación (4.3.11), lo que se traduce en 6 simetrías. Este es el resultado esperado, pues las secciones espaciales de las métricas FLRW son máximamente simétricas y, en dimensión 3, esto se traduce en 6 simetrías.

- Para métricas FLRW generales con $k = 0$, se encuentra explícitamente la transformación conforme al espacio de Minkowski predicha por el Teorema 5. Esto permite calcular explícitamente los vectores de Killing conformes e imponer divergencia cero para calcular los vectores de Killing. Se encuentra que, si $\mathbf{\dot{a} \neq 0}$, se tienen en general 6 vectores de Killing, que coinciden salvo un factor con los dados por (4.3.11) para $k = 0$. Esto da lugar a 6 simetrías, que serán las de las secciones espaciales planas. Si $\mathbf{\dot{a} = 0}$, se encuentran 10 vectores de Killing independientes, lo cual es consistente con la caracterización de simetría máxima del Teorema 6. Sin embargo, no se han conseguido calcular por este método los 10 vectores de Killing que tiene el espacio de De Sitter, que cumple $k = 0$.

- En las métricas FLRW con $\mathbf{\dot{a} = 0}$, se ha resuelto completamente la ecuación de Killing, encontrando la siguiente disyuntiva: si $\mathbf{\dot{a} = 0}$ y $\mathbf{k = \pm 1}$, se encuentran 7 vectores de Killing independientes que dan lugar a 7 simetrías: 6 de las secciones espaciales y una más por traslación temporal, que proviene de la estaticidad. Este es el caso del Universo Estático de Einstein. Por otro lado, si $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, se encuentra el espacio de Minkowski, con 10 vectores de Killing independientes, y esto es consistente con la caracterización de simetría máxima del Teorema 6.

- El Teorema 5 establece que toda métrica FLRW es conformemente plana. Sin embargo, el cálculo explícito de la transformación de Weyl asociada no se ha conseguido realizar para métricas con $k = \pm 1$. Esto implica que el cálculo completamente general de los vectores de Killing de métricas FLRW no se ha podido realizar.

Por lo tanto, damos por alcanzados los objetivos de este Trabajo de Fin de Grado.

Cabe destacar que, adicionalmente, y en consonancia con el Teorema 6, se ha tratado de demostrar que las métricas FLRW con $\dot{a} \neq 0$ y $\ddot{a}a - (\dot{a})^2 = k$ tienen 10 vectores de Killing. Para ello, se ha abordado la resolución completa en coordenadas comóviles del sistema de ecuaciones (4.3.3) proveniente de la ecuación de Killing mediante los Ansätze $k_i(t,x) = B_i(x)$, $k_i(t,x) = F_i(t)$ y $k_i(t,x) = B(x)F_i(t)$; pero, desgraciadamente, no se han conseguido obtener los 10 vectores de Killing esperados.

Bibliografía

[1] Bert Janssen. *Gravitación y Geometría. Una introducción moderna a la Teoría de la Relatividad General*. Editorial Universidad de Granada, 2022.

[2] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2nd. Springer, 2013.

[3] Brian Hall. *Lie Groups, Lie Algebras and Representations. An Elementary Introduction*. 2nd. Springer, 2015.

[4] Nicolai Copernici Torinensis. *De revolutionibus orbium coelestium 1473*. Gyan Books Pvt. Ltd., 2019.

[5] Luca Amendola. *Lecture notes: Cosmology*. Recuperado de [https://www.thphys.uni-heidelberg.de/ amendola/teaching/cosmology.pdf]. 2023.

[6] Michael Way y Harry Nussbaumer. «Lemaître's Hubble relationship». En: *Physics Today* 64.8 (ago. de 2011), págs. 8-8. DOI: 10.1063/pt.3.1194. URL: https://doi.org/10.1063%2Fpt.3.1194.

[7] Werner Greub. *Linear Algebra*. 4th. Springer-Verlag, 1975.

[8] Robert Gilmore. *Lie Groups, Physics and Geometry. An Introduction for Physicists, Engineers and Chemists*. Cambridge University Press, 2008.

[9] Wi Ki Tung. *Group Theory in Physics*. World Scientific Publishing Co Pte Ltd., 1985.

[10] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc., 1972.

[11] Peter J. Olver. *Introduction to Partial Differential Equations*. Springer, 2014.

[12] Jaan Einasto. *Regularity of the large-scale structure of the Universe*. 1998. arXiv: astro-ph/9811432 [astro-ph].

[13] P. J. E. Peebles. *The Large-Scale Structure of the Universe*. Princeton University Press, 1980.

[14] Pierros Ntelis y et al. «Exploring cosmic homogeneity with the BOSS DR12 galaxy sample». En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2017.06 (jun. de 2017), págs. 019-019. DOI: 10.1088/1475-7516/2017/06/019. URL: https://arxiv.org/abs/1702.02159.

[15] Edward W. Kolb y Michael S. Turner. *The Early Universe*. CRC Press, 1994.

[16] Steven Weinberg. *The First Three Minutes*. 2nd. Basic Books, 1993.

[17] Pilar Ruiz-Lapuente y Raúl Jiménez, eds. *Dark Energy: Observational and Theoretical Approaches*. Cambridge University Press, 2010.

[18] Richard Cyburt y col. *The Physics of the Dark Universe*. Springer, 2019.

[19] Planck Collaboration. «Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters». En: *Astronomy & Astrophysics* 641 (sep. de 2020), A6. DOI: 10.1051/0004-6361/201833910. URL: https://arxiv.org/abs/1807.06209.

[20] Andrew R. Liddle. *The Lambda-CDM Model of Cosmology*. Cambridge University Press, 2015.