UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias

GRADO EN FÍSICA

TRABAJO FIN DE GRADO

TEORÍA DE FIBRADOS EN FÍSICA

Presentado por:
D. Miguel Clavero Rubio

Curso Académico 2021/2022

Resumen

Uno de los dilemas centrales en matemáticas y filosofía es investigar en qué espacios se formulan las teorías físicas. Los eventos físicos del Universo ocurren en espacio-tiempos con estructura de variedad, es decir, en espacio-tiempos localmente planos. El objetivo de este trabajo consiste en entender una estructura matemática que generaliza el concepto de variedad. Esta generalización se conoce como fibrado. Intuitivamente, un fibrado es un espacio-tiempo que tiene asociado en cada punto otra variedad adicional que se denomina fibra. La riqueza geométrica de estos fibrados reside en que todas las fibras no tienen por qué estar unidas al espacio-tiempo de la misma forma globalmente, sino que pueden unirse de distinta manera en diferentes regiones del fibrado dando lugar a un espacio total retorcido como la cinta de Möbius.
La teoría de fibrados comenzó a desarrollarse en la década de 1930 y actualmente está totalmente asentada. Existen muchos tipos de fibrados pero los más relevantes en física son los fibrados principales y los vectoriales. Algunas de las realizaciones físicas que se describen en este trabajo, desde la perspectiva de los fibrados, son las teorías gauge, los monopolos magnéticos y el efecto Aharonov-Bohm.

Abstract

One of the main dilemmas in mathematics and philosophy is to wonder in which spaces physical theories are formulated. Physical events of the Universe occur in space-times with mathematical structure of manifolds, i.e. locally flat space-times. The aim of this work consist in understanding a mathematical structure which generalizes the notion of manifold. This generalization is known as fibre bundle. Roughly speaking, a fibre bundle is built with two spaces: a space-time and a fibre. Associated to each point of the space-time there is an additional internal manifold called fibre. The geometric richness of these bundles relies on the fact that fibres are not necessarily attached to the space-time in a trivial way, but they can be attached to local regions in different ways, building a twist total space such as Möbius strip.
Fibre bundle theory started to develop during the 30s and it is fully settled. There are many types of fibre bundles but principal fibre bundles and vector bundles are the most relevant in physics. Some of the physical representations that are studied from the framework of fibre bundles are gauge theories, magnetic monopoles and Aharonov-Bohm effect.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El método de avance más poderoso que puede sugerirse en la actualidad es emplear todos los recursos de las matemáticas puras en un intento de perfeccionar y generalizar el formalismo matemático que forma la base de la física teórica, y después de cada éxito en esta dirección, tratar de interpretar las nuevas características matemáticas en términos de entidades físicas.

(Paul Dirac, 1931) [1]

Esta memoria constituye el Trabajo de Fin de Grado: *Teoría de fibrados en física*, elaborado por el interesado y dirigido por el profesor Bert Janssen para la obtención del Grado en Física en la Universidad de Granada. El objetivo último de este trabajo consiste en el entendimiento de la estructura geométrica de los fibrados y su aplicación en distintos sistemas físicos.

Un sistema físico es un conjunto de observables localizados en una ubicación espacio-temporal, caracterizados por poseer distintos estados sujetos a evolución temporal. De acuerdo a la interpretación filosófica de O. Belkind (véase [2]), una teoría física describe el movimiento de las partes de un sistema físico en relación a los movimientos del propio sistema como un todo. En este trabajo, el espacio donde habitan los sistemas y teorías físicas adquiere un papel protagonista. Según sean las condiciones que exija el problema físico, la estructura matemática de ese espacio será distinta. Por ejemplo, el espacio de configuración de un péndulo simple de longitud constante que solo puede moverse en el plano es la circunferencia $\mathbb{S}^1$. Sin embargo, si se sustituye la cuerda por un resorte, entonces el nuevo espacio se convierte en $\mathbb{S}^1 \times I$, donde I es un intervalo cerrado que depende de cuánto se estire el resorte. Este ejemplo tan simple es el primer fibrado que se presenta en este trabajo, ya que consiste en un espacio que puede expresarse localmente como el producto de otros dos. Más concretamente, este fibrado se considera trivial, pues se identifica con el producto de dos espacios de manera global y no solamente local. En general, la mayor parte de teorías y problemas físicos se describen en términos de fibrados triviales. Sin embargo, ciertos problemas precisan de un espacio aún más general y rico geométricamente donde ser descritos. Este es el poder de los fibrados no triviales.

A lo largo de la memoria, se presentan problemas físicos como los *monopolos magnéticos* o el *efecto Aharonov-Bohm*, que representan realizaciones físicas del concepto de fibrados no triviales y triviales, respectivamente. Quizá uno objetos de estudio más interesantes en Física Teórica son las *teorías gauge*. Estas teorías explican las interacciones entre partículas fundamentales, convirtiéndose en la piedra angular en teorías de unificación. El reto que me ha motivado para realizar este trabajo reside en comprender que las estructuras matemáticas de las teorías gauge son de naturaleza geométrica y las características locales y globales de esta geometría se explican bajo el formalismo de los fibrados principales [3].

1.1 Breve reseña histórica

La teoría matemática de los fibrados fue desarrollada durante la década de 1930 por importantes nombres como H. Seifert, H. Hopf, J. Feldbau, H. Whitney, N. Steenrod, C. Ehresmann, entre otros. El primero en introducir el concepto de espacios fibrados (gefaserter Räume, en alemán) fue H. Seifert [4] en 1933. Dos años antes, en 1931, H. Hopf [5] ya había descubierto una aplicación de la 3-esfera en la 2-esfera que permitía describir la 3-esfera como un fibrado, cuyas fibras serían circunferencias. Durante la década de 1930 se plantearon problemas físicos relacionados con la teoría de fibrados sin tener nociones sobre estas estructuras matemáticas. El principal ejemplo es el de los monopolos magnéticos de Dirac [1] en 1931, cuyo fibrado equivalente fue descubierto el mismo año de la mano de H. Hopf. Esto llevó al matemático J. Simons a afirmar que "Dirac había descubierto los fibrados triviales y no triviales antes que los matemáticos" [6].

Retrocediendo un poco en el tiempo, entre 1919 y 1929, Weyl trató de geometrizar el campo electromagnético al igual que había hecho Einstein con el campo gravitatorio en 1915. Para ello, introdujo el concepto de *invarianza gauge* con el fin de unificar ambas interacciones. A pesar de fracasar en ese intento, el concepto de gauge se retomó en 1926 con el desarrollo de la teoría cuántica. La ecuación de Schrödinger es invariante bajo transformaciones de fase globales de la función de onda. Por contra, se demostró que para hacer la ecuación de Schrödinger invariante bajo transformaciones locales de la fase de la función de onda, es necesario añadir campos que satisfagan ciertas transformaciones gauge. Estos campos, son en realidad, los potenciales electromagnéticos. Es decir, el *principio gauge* de Weyl sugiere que *gaugear* una simetría global induce interacciones en la teoría física. La interacción electromagnética surge de *gaugear* el grupo $U(1)$ (fases de la función de onda). En su artículo [7] de 1954, Yang y Mills generalizaron las ideas de Weyl para grupos no abelianos aplicando *la invarianza gauge* con el grupo de simetría $SU(2)$ para explicar la conservación del isospín en interacciones fuertes nucleón-nucleón. De este modo, las teorías gauge con grupo de simetría no abeliano se denominan *teorías de Yang-Mills*. Este tipo de teorías pueden ser cuantizadas y, en su máximo esplendor, son capaces de describir tres de las cuatro interacciones fundamentales mediante el *Modelo Estándar de Física de Partículas*. Realmente, la conexión entre física y fibrados no llegó hasta la década de los 70, de la mano de las notas de clases de Trautman (1967), y sobre todo gracias a las contribuciones de C.N Yang, quien en 1975 aprendió de J. Simons las nociones básicas del formalismo de fibrados con el fin de relacionar su estructura matemática con las teorías gauge.

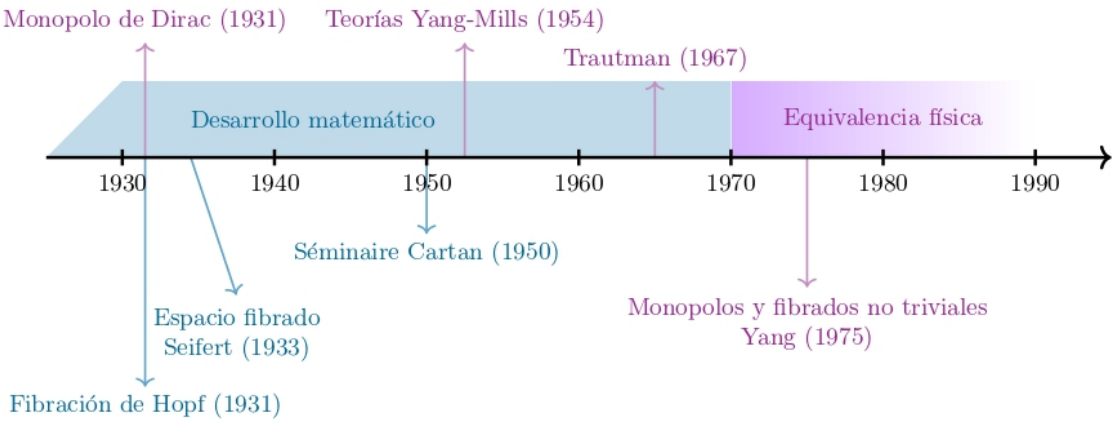

Figura 1.1: *Línea del tiempo con eventos importantes matemáticos (azul) y físicos (morado) del siglo XX en relación a la teoría de fibrados.*

1.2 Estructura de la memoria

Al enfrentarse el físico lector por primera vez a los fibrados, sentirá adentrarse en un frondoso bosque de altos pinos. La opacidad de sus copas quizá le impida orientarse bien en el terreno y, en ocasiones, podrá sentirse perdido.

- En el Capítulo 2, el lector se equipa con una brújula que representa la intuición. Esta brújula le acompaña en todo el viaje y sirve de motivación para conocer mejor el bosque y saber apreciar su belleza. Para hacerla funcionar, se analiza uno de los ejemplos más conocidos de fibrado no trivial: *la cinta de Möbius*. La geometría de esta superficie servirá de guía para el esclarecimiento de fibrados no triviales, siguiendo las referencias [8], [9], [10] y [11]. También se revisará el formalismo *lagrangiano* y *hamiltoniano* para que el lector se percate de que los fibrados siempre estuvieron escondidos en el entorno de dichas funciones. Para ello, se siguen [13], [14] y [15]. Es importante remarcar que la intención de este capítulo es la de presentar de forma intuitiva algunos conceptos sobre fibrados. No se pretende ser excesivamente riguroso en este punto, pues el formalismo matemático se detalla en el Capítulo 3.

- A lo largo del Capítulo 3 se realiza una revisión matemática de la *teoría de fibrados* siguiendo principalmente las referencias [9], [14] y [15]. Se comienza en la sección 3.1 esclareciendo el concepto de variedad, noción fundamental en Geometría Diferencial. A continuación, en la sección 3.2 se presenta un ejemplo paradigmático de fibrado vectorial: *el fibrado tangente*. Dado que es un fibrado relativamente simple, se definen las principales estructuras de la teoría de fibrados particularizadas para este caso concreto tales como espacio base, fibra, proyección, sección y conexión. Finalmente, en la sección 3.3 se generalizan las estructuras anteriores para todo tipo de fibrados y se definen los fibrados principales y vectoriales asociados que desempeñan un papel muy relevante en el Capítulo 4.

- El Capítulo 4 se divide en tres secciones en las que se presentan diferentes realizaciones físicas de la teoría de fibrados. En la sección 4.1 se describen los rasgos generales de las teorías gauge desde el formalismo en Mecánica Cuántica que propone Fock en [23]. En la sección 4.2 se discute la configuración de las ecuaciones de Maxwell en la que se supone la existencia de monopolos magnéticos. Esta configuración la propone Dirac en [1] para explicar la cuantización de la carga eléctrica e impide definir un potencial globalmente. Finalmente, en la sección 4.3 se realiza una revisión del efecto Aharonov-Bohm siguiendo sobre todo las referencias [15], [27], [29] y [30] con el objetivo de comprender cuál es el significado físico de los potenciales gauge a nivel cuántico. En esencia, la clave de este Capítulo consiste en traducir los elementos físicos que aparecen en las tres aplicaciones previamente mencionadas en términos de los conceptos matemáticos de la teoría de fibrados presentados en el Capítulo 3.

El párrafo final de la mayoría de las secciones se plantea como resumen recogiendo las ideas clave expuestas en la sección en cuestión. Además al final de la memoria se presenta una conclusión final del trabajo con una mirada inspiradora hacia estudios futuros.

Las referencias están numeradas, en la medida de lo posible, por orden de aparición en la memoria, siendo inevitable alguna aparición desordenada cuando se repiten frecuentemente en distintas partes del texto.

Conclusiones

En conclusión, hemos explorado la estructura matemática de los fibrados. Aprovechando su riqueza geométrica, ponemos de manifiesto varias representaciones físicas que consolidan la importancia de los fibrados en la descripción de la realidad.

En primer lugar, los fibrados conforman el espacio necesario para la descripción matemática de teorías gauge. Es decir, proporcionan una estructura sólida donde incluir espacios asociados a grados de libertad internos (tales como la fase de una función de onda o el isospin) sobre cada punto del espacio-tiempo. En este trabajo, nos hemos centrado en el Electromagnetismo como teoría gauge. Se ha comprobado que la ecuación de Schrödinger es invariante bajo cambios de fase locales de la función de onda siempre y cuando aparezcan unos potenciales ϕ y $\vec{A}$ que satisfagan las transformaciones gauge. De esta forma, podemos apreciar cómo emergen los potenciales electromagnéticos al imponer ciertas simetrías en las ecuaciones. Desde el punto de vista matemático, hemos descrito el Electromagnetismo como un fibrado principal trivial de fibra $U(1)$, los potenciales como conexiones locales del fibrado y la curvatura como la fuerza electromagnética.

Por otro lado, pese a no haberse observado aún en la naturaleza, hemos analizado los monopolos magnéticos en detalle. El estudio de los monopolos magnéticos fue llevado a cabo por Dirac (1931) para explicar la cuantización de la carga eléctrica. En este trabajo, hemos reproducido este cálculo obteniendo $q_e = \frac{n\hbar c}{2g}$ y concluimos que es imposible construir un potencial global bien definido en todo el espacio siguiendo el procedimiento empleado por Wu y Yang. En este contexto, para describir la configuración del monopolo magnético es necesario recurrir a un fibrado no trivial. Concretamente, a un fibrado principal no trivial de fibra $U(1)$.

Además, hemos discutido si los potenciales tienen un significado físico o no. Nuestro procedimiento se basa en el efecto Aharonov-Bohm para un campo magnético en el interior de un solenoide. Sin embargo, este efecto también se ha observado con campos eléctricos, y estudios recientes (2022) han medido este efecto en un campo gravitatorio [32]. Se concluye que los potenciales gauge no tienen significado físico, sino que es el flujo magnético el responsable de la desviación en el patrón de interferencias. De esta forma, en este experimento se pone de manifiesto la no localidad de la Mecánica Cuántica.

Los párrafos previos muestran la importancia del uso de fibrados en nuestra descripción de la realidad. A partir de ahora, alzamos la vista hacia fronteras que no se han explorado en este trabajo pero podrían ser entendidas bajo el formalismo de los fibrados. Como se mencionó, el Modelo Estándar que engloba las interacciones electronucleares puede entenderse como un fibrado principal cuya fibra es $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Entonces, resulta inspirador pensar que teorías de unificación más generales siguen este esquema geométrico pero con otros grupos de estructura más ricos, tales como $SU(5)$ o $SO(10)$, que contienen al Modelo Estándar. Investigaciones más allá del objetivo de este trabajo podrían consistir en el estudio de Teorías de Gran Unificación a través del formalismo de fibrados.

Bibliografía

[1] P. Dirac,
Quantised singularities in the electromagnetic field,
Proc. F. Soc. Lond. A, **133**(821), 1931.

[2] O. Belkind,
Physical Systems: Conceptual Pathways between Flat Space-time and Matter,
Springer, 2012.

[3] A.P. Balachandran, G. Marmo, B.S. Skagerstam, A. Stern,
Gauge Theories and Fibre Bundles - Applications to Particle Dynamics,
Springer "Lecture Notes in Physics", p. 188, 1983. arXiv:1702.08910.

[4] H. Seifert,
Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume,
Acta Mathematica, **60**, p. 147–238, 1933.

[5] H. Hopf,
Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche,
Mathematische Annalen, **104**, p. 654–656, 1931.

[6] C. N. Yang,
The conceptual origins of and gauge theory,
Physics today, **67**(11), p.45, 2014.

[7] C.N. Yang, R.L. Mills,
Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance,
Physical Review, **96**(1): p. 191-195, 1954.

[8] A. Hatcher,
Algebraic topology,
Cambridge Univ. Press, 2000.

[9] M. Nakahara,
Geometry, Topology and Physics,
IOP Publishing Ltd, 2003.

[10] H. Ardeh, M. S. Allen,
Investigating Cases of Jump Phenomenon in a Nonlinear Oscillatory System,
Springer, Topics in Nonlinear Dynamics, **1**, p. 299-318, 2013.

[11] E. Malek,
Topology and geometry for physicists,
Proceedings of the XIII Modave Summer School in Mathematical Physics, 2017.

[12] Fibre bundle of mobius strip. Image:
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Mobius_strip_illus.svg

[13] A. M. Cuevas,
Fundamentos de Mecánica Analítica y de los Medios Continuos,
Editorial Técnica Avicam, 2020.

[14] T. Frankel,
The geometry of physics: an introduction,
Cambridge University Press, 2004.

[15] B. Janssen
Teoría de la Relatividad General,
Editorial Universidad de Granada, 2022.

[16] A. M. Jordá
101 Problemas de Mecánica Teórica,
Editorial Universidad de Granada, 2013.

[17] C. J. Isham,
Modern Differential Geometry for Physicists,
World Scientific Publishing Company, 1999.

[18] S. Rea,
Lectures on the Geometric Anatomy of Theoretical Physics,
Course delivered by Frederic P. Schüller, Universität Erlangen-Nürnberg, 2013/14.

[19] B. Janssen, A. J. Cano, J. A. Orejuela, P. S. Moreno,
(Non-)Uniqueness of Einstein–Palatini Gravity,
Springer, p. 49-59, 2021.

[20] S. Kadam, R. N. Banavar,
Geometric controllability of the Purcell's swimmer and its symmetrized Cousin,
IFAC-PapersOnLine, **49**(18), p. 988-993, 2016. arXiv 1511.00799v3.

[21] W. Tung,
Group theory in Physics,
World Scientific Publishing Company, 1985.

[22] N. Steenrod,
The Topology of Fibre Bundles.,
Princeton University Press, 1951.

[23] V. Fock
Zur Schrödingerschen Wellenmechanik,
Zeitschrift für Physik, **38**(3), p. 242–250, 1926.

[24] W. Pauli,
Relativistic theories of elementary particles,
Rev. Mod. Phys. **13**(3), p. 203, 1941.

[25] Physics travel guide. Fiber Bundles. Image:
https://physicstravelguide.com/advanced_tools/fiber_bundles#tab_
_intuitive

[26] R. C. Ibáñez
Teorías gauge y gravedad de Chern-Simons en 2+1 dimensiones,
Tesis de Grado, Universidad de Valladolid, 2020.

[27] Y. Aharanov, D. Bohm
Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory,
Physical Review, **115**(3), p. 485, 1959.

[28] H. J. Bernstein, A. V. Phillips,
Fiber Bundles and Quantum Theory,
Scientific American, **245**(1), p. 122-137, 1981.

[29] A. Heil, A. Kersch, B. Reifenhauser, H. Vogel,
Application of topological ideas to the Aharonov-Bohm effect,
European Journal of Physics, **9**(3), p.200, 1988.

[30] R. Penrose,
The road to reality: A complete guide to the laws of the universe,
Random house, 2005.

[31] A. Tonomura, N. Osakabe, T. Matsuda, et al,
Evidence for Aharonov-Bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave,
Phys. Rev. Lett. **56**(8), 1986.

[32] A. Roura,
Quantum probe of space-time curvature,
Science, **375**(6577), p. 142-143, 2022.

[33] I.J.R. Aitchison,
Gauge theory in Particle Physics. A practical introduction,
Taylor & Francis, 2012.

[34] R. L. Cohen
The Topology of Fiber Bundles lecture notes,
Standford University, 1998.

[35] B. Roos,
Principal bundles, Hopf bundles and Eigenbundles,
ETH Zurich, 2018.

[36] D. Bleecker,
Gauge theory and variational principles,
Addison-Wesley Publishing Company INC, 1981.

[37] C. N. Yang,
Magnetic monopoles, fibre bundles and gauge fields,
Annals of the New York Academy of Sciences, **294**, 1977.

[38] T. Goldberg,
What is a connection, and what is it good for?
Lectures note Cornell University, 2008.

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias
Sección de Físicas

Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Física

Tutor/a:	Bert Janssen
Departamento y Área de Conocimiento:	Dpto de Física Teórica y del Cosmos
Correo electrónico:	
Cotutor/a:	
Departamento y Área de Conocimiento:	
Correo electrónico:	

Título del Trabajo: Teoría de fibrados en física

Tipología del Trabajo: *(Segun punto 3 de las Directrices del TFG aprobadas por Comisión Docente el 10/12/14)*

(Marcar con X)

1. Revisión bibliográfica	*X*	*4. Elaboración de nuevas prácticas de laboratorio*	
2. Estudio de casos teórico-prácticos		*5. Elaboración de un proyecto*	
3. Trabajos experimentales		*6. Trabajo relacionado con prácticas externas*	

Breve descripción del trabajo:
Un fibrado es un espacio(tiempo) que localmente se puede escribir como el producto directo de dos espacios, pero globalmente no. Hay muchos tipos de fibrados, pero probablemente los más interesantes son los fibrados principales, donde uno de los dos espacios es una variedad de grupo. Aunque es una construcción matemática, en física hay varios ejemplos muy interesantes que realizan esta idea: el monopolo de Wu y Yang, la teoría de Kaluza-Klein y en general la descripción matemática de teorías gauge. En este TFG se estudiará las propiedades geométricas de los fibrados y las consecuencias físicas que implican.

Objetivos planteados:
- *Entender la estructura geométrica de fibrados principales*
- *Entender las aplicaciones y realizaciones de fibrados principales en problemas físicas*

Metodología:
Este es un trabajo teórico, en que el alumno y reproducirá ciertos resultados de la literatura, pero también hará sus propios cálculos.

Bibliografía:

- A.P. Balachandran, G. Marmo, B.S. Skagerstam and A. Stern, *Gauge Theories and Fibre Bundles - Applications to Particle Dynamics*, in Springer "Lecture Notes in Physics", 188 (1983), arXiv:1702.08910 [quant-ph].
- T. Eguchi, P. Gilkey and A. Hansson, *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry,* Phys.Rept. 66 (1980) 213.
- J. Figueroa-O'Farrill, *Connections on principle fibre bundles*, https://empg.maths.ed.ac.uk/Activities/GT/Lect1.pdf.
- T, Goldberg, *What is a connection, and what is it good for*, http://pi.math.cornell.edu/~goldberg/Notes/AboutConnections.pdf.
- Bert Janssen, *Teoría de la Relatividad General*, Universidad de Granada (2021).
- M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics,*Institute of Physics Publishing, 1990.
- M. Robinson, T. Ali, G.B. Cleaver, *A simple introduction to Particle Physics Part II*, arXiv:0908.1395 [hep-th].
- A. Trautman, *Fiber bundles, gauge fields, and gravitation* (1981).
- H.K. Urbantke, *The Hopf fibration—seven times in physics*, Journal of Geometry and Physics 46(2003) 125-150.

A rellenar sólo en el caso que el alumno sea quien realice la propuesta de TFG

Alumno/a propuesto/a: Miguel Clavero Rubio

Granada, 18 de mayo 2021

Sello del Departamento

Campus
Fuentenueva
Avda. Fuentenueva
s/n
18071 Granada
Tfno. +34-958242902
fisicas@ugr.es

Comisión Docente de Físicas
Facultad de Ciencias