



# UNIVERSIDAD DE GRANADA

---

Facultad de Ciencias

GRADO EN FÍSICA

TRABAJO FIN DE GRADO

## GRAVITOMAGNETISMO

Presentado por:  
**D. Enrique Valiente Moreno**

Curso Académico 2019/2020

## Resumen

El formalismo gravitoelectromagnético se obtiene como consecuencia directa al linealizar las ecuaciones de campo de Einstein. Esto se consigue realizando un desarrollo perturbativo de las mismas, hasta primer orden, en torno a soluciones conocidas como la de Minskowski, que será la adecuada para estudiar efectos gravitatorios débiles lejos del origen de otras soluciones más complejas. Comenzaremos analizando brevemente las principales propiedades, ecuaciones y magnitudes linealizadas de la gravedad. De forma natural encontraremos las primeras analogías formales entre gravitación y electromagnetismo, incluyendo la existencia de ondas gravitacionales. En un esfuerzo por ahondar en dichas analogías se estudiarán más a fondo los grados de libertad del campo gravitatorio empleando las herramientas perturbativas que ya se habrán presentado, obteniendo finalmente el formalismo gravitoelectromagnético de la gravedad linealizada. Introduciremos el agujero negro de Kerr en rotación para estudiar un fenómeno de interés con este modelo, el arrastre de sistemas inerciales (y Efecto Lense-Thirring), para así mostrar su practicidad. Finalmente se revisará el experimento Gravity Probe B, que efectivamente comprobó la existencia de dicho efecto gravitomagnético, pero en la Tierra.

## Abstract

Gravitoelectromagnetic formalism is obtained as a direct consequence of linearizing Einstein's field equations. This is achieved by performing a perturbative expansion of them, up to the first order, around known solutions such as Minskowski's, which will be the ideal one to study weak gravitational effects far from the origin of other more complex solutions. We begin by briefly analyzing the main properties, equations, and linearized magnitudes of gravity. This project will naturally find the first formal analogies between gravitation and electromagnetism, including the existence of gravitational waves. In an effort to delve into the analogies, the degrees of freedom of the gravitational field will be further studied using the perturbative tools that have already been presented, finally obtaining the gravitoelectromagnetic formalism of linearized gravity. We will introduce the Kerr rotating black hole in order to study a phenomenon of interest with this model, the Lense-Thirring effect, and thus show its practicality and finally the Gravity Probe B experiment will be reviewed, which effectively verified the existence of this gravitomagnetic effect, but on Earth.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción y motivación</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Fundamentos: Expansión del campo débil</b>	<b>6</b>
2.1	Geometría diferencial . . . . .	6
2.2	Teoría perturbativa en Relatividad General . . . . .	7
2.3	Libertad de gauge en gravedad linealizada . . . . .	10
2.4	Perturbaciones sobre Minkowski y ondas gravitacionales . . . . .	12
<b>3</b>	<b>De gravedad linealizada a formalismo gravitomagnético</b>	<b>13</b>
3.1	Grados de libertad gravitatorios . . . . .	14
3.2	Formalismo gravitomagnético de las ecuaciones de Einstein . . . . .	17
3.2.1	Restricción del tipo de soluciones . . . . .	17
3.2.2	Ecuaciones de onda para los potenciales gravitatorios . . . . .	18
3.2.3	Campos gravitoelectromagnéticos . . . . .	19
3.3	Conclusiones . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Fuerza de Coriolis. Una aplicación del formalismo</b>	<b>21</b>
4.1	Soluciones gravitomagnéticas. El agujero negro de Kerr en rotación . . . . .	21
4.2	Arrastre de sistemas inerciales ( <i>Frame dragging</i> ) . . . . .	22
4.2.1	Análisis general desde Lense y Thirring . . . . .	23
4.2.2	Análisis empleando el formalismo gravitomagnético . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Detección del efecto Lense-Thirring, <i>Gravity Probe B</i></b>	<b>30</b>
5.1	Efecto de Lense-Thirring a partir del <i>frame dragging</i> . . . . .	30
5.2	Verificación experimental. <i>Gravity Probe B</i> . . . . .	32
5.2.1	Dificultades observacionales . . . . .	32
5.2.2	Características del experimento . . . . .	32
5.2.3	Resultados . . . . .	33
5.2.4	Aplicaciones y planes para un futuro próximo . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>34</b>
	<b>Referencias</b>	<b>36</b>

## 1 Introducción y motivación

Como bien se sabe, la analogía entre gravitación y electromagnetismo se remonta a la mecánica clásica newtoniana, donde se describían las interacciones entre masas y cargas puntuales mediante una ecuación muy similar, fundamentada en la ley del inverso del cuadrado de la distancia relativa entre las mismas.

No obstante, ésto solo describía interacciones electroestáticas, es decir, entre cargas en reposo. Con el descubrimiento del magnetismo por Hans Christian Ørsted (1820) y seguido de la unificación de los fenómenos electrostáticos y magnéticos a través de las Leyes de Maxwell (1865), la teoría electromagnética quedaría descrita como una teoría de campos, abandonando la idea clásica de fuerzas sobre la que se basaba la física newtoniana.

La gravedad no tardaría mucho más en poder ser descrita también mediante una elegante teoría de campos. Así fue como Einstein la desarrollaba en la Teoría de la Relatividad General, presentada en 1915. En ella, la interacción gravitatoria vendría modelada como un efecto geométrico de la curvatura del espacio-tiempo. Esto es, mientras que el electromagnetismo, las interacciones débiles o las interacciones fuertes se formulan sobre un espacio-tiempo determinado; en gravitación, gravedad y geometría dependen íntimamente una de otra, de modo que la gravedad define por si misma el espacio-tiempo, que deja de ser un simple escenario para convertirse en un objeto dinámico más. Esto es consecuencia del Principio de Equivalencia, uno de los pilares sobre los que Einstein se apoya para extender la Relatividad Especial, añadiendo la interacción gravitatoria.

Todo lo comentado se refleja en el resultado que obtuvo el físico alemán para las ecuaciones que describen este campo (en unidades tales que  $c = 1$ )<sup>1</sup>:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = -\kappa\mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde  $\kappa = 8\pi G_N$ , con  $G_N$  la constante de Gravitación Universal.

En dicha ecuación vemos cómo se relacionan la geometría del espacio-tiempo, a través de su tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  (tensor simétrico de orden 4), y su curvatura, representada por  $\mathcal{R}_{\mu\nu}$  y  $\mathcal{R}$ , que serían el tensor y escalar de Ricci respectivamente, con las fuentes del campo gravitatorio (es decir, de dicha curvatura).

Las fuentes del campo gravitatorio en Relatividad General serían la masa (como encontramos en la gravedad newtoniana) y también la energía, que es uno de los principales conceptos que se heredan de la Relatividad Especial. Todo esto lo encontramos condensado en el tensor de energía-momento,  $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ .

Aunque se introducirá con más detalle posteriormente, conviene aquí resaltar que la descripción matemática de esta teoría se realizará pues en el marco de la geometría diferencial, de forma que para solucionar las ecuaciones tensoriales (1.1) bastaría con encontrar la forma del tensor métrico, pues el tensor y escalar de Ricci (que no es más que la traza del mismo) son funciones de la métrica y sus derivadas. Se relacionan por medio de la conexión afín, que a grandes rasgos nos proporciona una noción de curvatura u otra. En lo que sigue nos restringimos a la conexión de Levi-Civita por convención.

Las ecuaciones de Einstein entonces resultan ser un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden en la métrica, mostrando que efectivamente son ecuaciones dinámicas que propagan el campo. Debido a su no-linealidad, no hay manera de resolverlas de

<sup>1</sup>Trabajaremos en dichas unidades a lo largo de todo este trabajo.

forma general, y todas las soluciones exactas que se han encontrado ha sido gracias a la enorme simetría del sistema en concreto estudiado. No obstante y como en otras situaciones familiares en física, podemos plantear un desarrollo perturbativo de las mismas en torno a alguna solución conocida y sencilla, de manera que incluso restringiéndonos a orden lineal podremos obtener mucha información sobre diversos sistemas. Será en este contexto en el que comiencen a aparecer las primeras analogías entre Gravedad y Electromagnetismo, aunque a priori no encontrásemos más que el hecho de que ambas teorías se comportan bien bajo cambios generales de coordenadas.

No obstante, para encontrar dichas similitudes en las que vamos a basar este trabajo hemos de dar algunos pasos atrás. El gravitoelectromagnetismo se motiva a partir de la analogía formal ya comentada entre la ley de Newton de la gravitación y la ley de Coulomb para la electrostática. Entonces, lo más natural es que la teoría newtoniana de la gravedad se interpretase en términos de un hipotético campo gravitoelectrónico. Por dicha similitud, cualquier teoría de campos que consiga conectar gravitación newtoniana e invarianza lorentziana, necesariamente y de alguna forma conllevará también un campo gravitomagnético.

Podemos ilustrar con un ejemplo sencillo como aparece de forma natural la necesidad de añadir una nueva componente física a la tradicionalmente aceptada interacción radial gravitatoria (gravitoelectrónica debido a masas estáticas). Supongamos dos partículas, cargadas y con masas, las cuales están en reposo de tal manera que esta fuerza atractiva gravitatoria se encuentra compensada por la repulsión electrostática. Ahora podremos considerar un observador, el cual se mueve de manera uniforme y rectilínea respecto de ambas partículas, para el cual éstas ya no están en reposo, sino que ambas están en movimiento y por poseer carga no trivial, cada una de ellas (corriente eléctrica) producirá una fuerza de atracción sobre la contraria, debido a la componente de campo magnético no nula que generan. Si en esta segunda situación estudiamos la gravedad únicamente desde la perspectiva newtoniana, entonces ambas partículas ya no estarán en reposo, las fuerzas no están compensadas y ambas se moverían hacia el mismo punto. Puesto que no es posible que un cambio de sistema de referencia modifique la estaticidad de una configuración, entonces podemos concluir que en esta descripción de la interacción gravitatoria falta una componente que parece estar relacionada con el movimiento de las masas, al igual que ocurre con el magnetismo, de ahí que se denomine componente "gravitomagnética".

En este trabajo encontraremos una descripción de este campo gravitomagnético sin análogo newtoniano, el cual encontrará su fuente en los flujos no triviales de masa (como cuerpos masivos en rotación). Se darán razones para aceptar que esta construcción no es más que un formalismo, muy útil y que permite descubrir propiedades y características físicas de una forma más intuitiva y sencilla, pero que no mantiene la generalidad de la teoría de la relatividad completa.

Para poner fin a este apartado, comentar que puesto que estamos entremezclando conceptos newtonianos y cantidades de campo relativistas, realmente se trabajará en regiones distantes al origen de las soluciones a la ecuación de Einstein que consideraremos, de forma que el campo sea débil y podamos trabajar con perturbaciones del espacio plano de Minkowski. En este límite será donde encontremos la conexión entre ambas teorías.

se obtuvo una precisión para este último del 19%. Permitía confirmar este fenómeno, aunque con bastante margen de mejora.

#### 5.2.4 Aplicaciones y planes para un futuro próximo

La confirmación del efecto geodético con tal precisión sirve como una prueba más para la verificación de la teoría de la Relatividad de Einstein, además de servir, junto a la consideración del efecto Lense-Thirring, para poder investigar otros fenómenos no probados aún.

El efecto de arrastre gravitacional además pone en evidencia la utilidad del formalismo gravitomagnético, y más allá de ello será de gran interés para el estudio de agujeros negros en rotación, en cuyas proximidades este arrastre y las fuerzas de marea pueden ser realmente intensas. Además, la interacción del efecto de Lense-Thirring con los campos magnéticos creados en la vecindad de los mismos se prevee que sean los responsables de los jets de energía que emergen de éstos.

Verificar que dicho efecto es cierto y que es proporcional al momento angular del cuerpo en cuestión permitirá extrapolar los resultados obtenidos en la Tierra al estudio de cuerpos mucho más masivos, como cuásares también.

Finalmente comentar que, gracias a los avances científicos y tecnológicos que se han conseguido desde 2004-2005, se podrá reproducir éste experimento con tal precisión que incluso se podrá medir el efecto de un cuerpo muy masivo en rotación sobre partículas cuánticas. En esto consistirá el *HYPER Project*, propuesto su lanzamiento en los próximos años [5], y basado, en lugar de en giróscopos, en dos interferómetros atómicos para medir, además del efecto de Lense-Thirring, la constante de estructura fina y diversos efectos cuánticos gravitatorios.

## 6 Conclusiones

El gravitomagnetismo ha resultado ser uno de los efectos más sorprendentes de la gravedad y el cual había sido prácticamente ignorado hasta la Teoría de la Relatividad. El estudio más profundo de las ecuaciones de Einstein desde una perspectiva perturbativa, tratando de encontrar la modelización y entendimiento de efectos relativistas de “débil” intensidad fue el principal impulsor hacia búsqueda de analogías entre dos de las teorías de campos más conocidas de la Física: la teoría de Maxwell del electromagnetismo y la de Einstein de la Relatividad General, aunque éstas inicialmente no mostrasen demasiado parentesco desde la descripción de campos.

A partir de la linealización de las ecuaciones de campo gravitatorio se consigue deducir el formalismo gravitoelectromagnético, por analogía con el electromagnetismo. A parte de la utilidad teórica y práctica de este modelo, conviene resaltar que se han obtenido diversas características de gran importancia sobre el campo gravitatorio al estudiar sus ecuaciones linealizadas, como es por ejemplo la libertad de gauge que presentan las perturbaciones métricas genéricas, así como el carácter de retroalimentación que presentan las mismas mientras se propagan por el espacio-tiempo.

En cuanto a la aplicación teórica y práctica del formalismo estudiado se observa su gran utilidad teórica pues permite visualizar y modelar efectos que podrían presentarte

oscurecidos por la notación en el caso general, como por ejemplo el carácter “magnético” de la materia cuando está en movimiento, lo cual se ha presentado con el *frame dragging*. En cuanto a la relevancia práctica es muy notable cómo se agiliza el cálculo, por ejemplo, de la velocidad de precesión de cuerpos con momento angular que orbitan soluciones rotatorias (efecto de Lense y Thirring), o el hecho de expresar la interacción que sufre un cuerpo de dichas características por un objeto como el agujero negro de Kerr mediante la ley de fuerzas de Lorentz usada en electromagnetismo.

Sin embargo y a modo de conclusión, merece la pena remarcar la limitación de este modelo, en lo que generalidad se refiere debido al hecho de tener un gauge fijado y no transformar bien bajo transformaciones generales de Lorentz. No obstante no implica que, como vemos, no tenga gran utilidad en casos concretos, pero no se ha de perder de vista que, como todo modelo físico, presenta gran margen de mejora, por ejemplo eliminando la truncación de la métrica o trabajando con gauge genérico.

## Referencias

- [1] Bert Janssen,  
*Teoría de la Relatividad General*,  
Universidad de Granada (Preprint), 2019.
- [2] I. Ciufolini  
*A comprehensive introduction to the LAGEOS gravitomagnetic experiment: from the importance of the gravitomagnetic field in physics to preliminary error analysis and error budget*,  
International Journal of Modern Physics A (1989).
- [3] G.F. Smoot  
*Thomas Precession*,  
Physics 139 Relativity. University of California, Berkeley (1998).
- [4] Juan Antonio Guerrero Montero,  
*El agujero negro de Kerr*,  
TFG, Universidad de Granada, 2017.
- [5] M. L. Ruggiero, A. Tartaglia,  
*Gravitomagnetic effects*,  
Nuovo Cim. B117:743-768 (2002), ArXiv: 0207065 [gr-qc]
- [6] Subrahmanyan Chandrasekhar ,  
*The Mathematical Theory of Black Holes*,  
Oxford University Press, 1983.
- [7] Syksy Räsänen  
*Applicability of the linearly perturbed FRW metric and Newtonian cosmology*,  
Phys.Rev. D81:103512 (2010), ArXiv:1002.4779 [gr-qc].
- [8] Sean M. Carroll,  
*Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*,  
Addison-Wesley, 2004.
- [9] Solution of Inhomogeneous Wave Equation,  
<http://farside.ph.utexas.edu/teaching/jk1/lectures/node7.html>
- [10] Tex Stack Exchange,  
<https://tex.stackexchange.com/questions/54830/tikz-code-for-frame-dragging>
- [11] Momento dipolar,  
[http://laplace.us.es/wiki/index.php/Dipolo\\_magn%C3%A9tico](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Dipolo_magn%C3%A9tico)
- [12] Overview of the GP-B Mission,  
<http://einstein.stanford.edu/MISSION/mission1.html>