



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias

GRADO EN FÍSICA

TRABAJO FIN DE GRADO

TEORÍAS DE UNIFICACIÓN DE GRAVEDAD Y ELECTROMAGNETISMO

Presentado por:

D./D^a. David Sánchez Martínez

Curso Académico 2021/2022

Resumen

El Santo Grial de la Física Teórica es conseguir la unificación de las fuerzas fundamentales en una sola teoría, la Teoría del Todo. En este trabajo presentamos dos intentos históricos de unificación de la Gravedad y el Electromagnetismo: La Teoría de Unificación de Campos de Weyl y la Teoría de Kaluza-Klein. Pese a resultar erróneas, dieron lugar a un cambio de paradigma en la interpretación de la física moderna. Gracias a la Teoría de Weyl aprenderemos la importancia del Principio de Invariancia Gauge, clave en el desarrollo del Modelo Estándar que unifica tres de las interacciones fundamentales. Veremos cómo surge de manera natural la invariancia gauge de una propiedad geométrica en la Teoría de Kaluza-Klein al considerar dimensiones adicionales compactificadas. Este nuevo concepto de dimensiones adicionales y compactificación son la base de las Teorías de Cuerdas, que se cree que conseguirá la unificación de todas las interacciones.

Abstract

The Holy Grail of Theoretical Physics is to achieve the unification of the fundamental forces in a single theory, the Theory of Everything. In this work we present two historical attempts to unify Gravity and Electromagnetism: The Weyl's Unification Field Theory and the Kaluza-Klein Theory. Despite being wrong, they led to a paradigm shift in the interpretation of modern physics. Thanks to the Weyl Theory we will learn the importance of the Principle of Gauge Invariance, key in the development of the Standard Model that unifies three of the fundamental interactions. We will see how the gauge invariance arises naturally as a geometric property in the Kaluza-Klein Theory by considering extra compactified dimensions. This new concept of extra dimensions and compactification are the basis of String Theories, which are believed to lead to the unification of all interactions.

Índice

1	Introducción	4
2	Nociones de Geometría Diferencial	6
2.1	Variedad diferenciable	6
2.2	Transformaciones generales de coordenadas	6
2.3	Conexión afín y curvatura	7
2.4	Transformaciones de Weyl	8
2.5	Formalismo del Vielbein	9
2.6	Electromagnetismo en notación covariante	10
3	Teoría de campos unificada de Weyl	12
3.1	Teoría de Weyl aplicada al formalismo del Vielbein	12
3.2	Gaugeando el grupo de Weyl	14
3.3	Problemas de la teoría de Weyl	19
3.3.1	Acción de la teoría	19
3.3.2	Second Clock Effect	19
3.3.3	No es electromagnetismo	22
3.4	Discusión	22
4	Teoría de Kaluka-Klein	25
4.1	Modos de Kaluza-Klein	25
4.2	Descomposición de la métrica	26
4.3	Gravedad en cinco dimensiones	27
4.4	Discusión	29
5	Conclusiones	31
	Referencias	32

1 Introducción

En 1865, James Clerk Maxwell publica sus Leyes de Maxwell, una elegante teoría que unificó el trabajo de varias décadas sobre las fuerzas eléctricas y magnéticas bajo el paraguas de una misma interacción: el electromagnetismo. Fue la primera teoría de campos y la primera que presentaba la propiedad de *invariancia gauge*¹: el potencial electromagnético, \mathcal{A}_μ , no estaba totalmente determinado sino que existían infinitos potenciales que describían el mismo campo electromagnético

$$\mathcal{A}_\mu \rightarrow \mathcal{A}'_\mu = \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad (1.1)$$

con Λ una función arbitraria. La incompatibilidad entre el electromagnetismo y la *mecánica newtoniana* llevó a Albert Einstein a desarrollar su *Teoría de la Relatividad Especial* (1905) y, posteriormente, la *Teoría de la Relatividad General* (1915) que suponía un cambio en la interpretación de la fuerza gravitatoria. Gracias al *Principio de Equivalencia* se podía explicar la interacción gravitatoria como resultado de la geometría del espaciotiempo. Las palabras de John Wheeler ("La materia le dice al espaciotiempo cómo curvarse y el espaciotiempo le dice a la materia cómo moverse") resumen las ecuaciones de Einstein

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = -\kappa\mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

en unidades naturales² ($c = 1$), donde $g_{\mu\nu}$ es el *tensor métrico*, $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ el *tensor de Ricci*, \mathcal{R} el *escalar de Ricci*, $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ el *tensor de energía-momento* y $\kappa = 8\pi G_N$, con G_N la *constante gravitacional de Newton*.

Por entonces, las únicas fuerzas fundamentales que se conocían eran la gravedad y el electromagnetismo, por lo que, al igual que Maxwell consiguió unificar la fuerza eléctrica y la fuerza magnética en una sola teoría, los físicos empezaron a trabajar en una teoría unificadora de la gravedad y el electromagnetismo convencidos de que había alguna relación entre ambas fuerzas ya que ambas se podían expresar en el mismo lenguaje. En este contexto, Hermann Weyl propone su teoría para unificar la gravedad y el electromagnetismo (*Unified Field Theory*, 1918) al generalizar la geometría *riemanniana (lorentziana)* en la Relatividad General) a una que fuera invariante bajo cambios de escala (*Eichinvarianz*) suponiendo que no se notarían cambios en las propiedades si las reglas de medida cambiaban por igual. De esta manera, al igual que en la Relatividad General de Einstein la fuerza gravitatoria surge como una propiedad geométrica del espaciotiempo gracias al Principio de Equivalencia, Weyl intentaba derivar el electromagnetismo como una propiedad geométrica del espaciotiempo en vez de ser una interacción simplemente embebida en él.

En 1921, poco después de que Weyl presentaba su teoría de unificación, Theodore Kaluza propuso una generalización de la Relatividad General a cinco dimensiones (una temporal y cuatro espaciales) que permitía unificar la gravedad y el electromagnetismo en cuatro dimensiones. En principio la idea de considerar una dimensión espacial extra

¹El término *gauge*, que significa 'calibrar' en inglés, procede del término *Eichinvarianz* (o invariancia bajo recalibraciones en alemán) que usó Weyl cuando postuló su teoría de unificación de gravedad y electromagnetismo.

²Usaremos las unidades naturales a lo largo del trabajo.

parece un poco extraña, pues experimentalmente se ha medido que el potencial gravitatorio decrece como $V(r) \sim r^{-1}$ y, sabiendo que ha de satisfacer la *ecuación de Laplace*, implica que el número de dimensiones espaciales es de tres. Sin embargo, las mediciones experimentales son de escalas macroscópicas pero no sabemos como se comporta la gravedad a escalas microscópicas. En 1926, Oskar Klein introdujo una corrección a la teoría al proponer que la dimensión extra fuera compacta y enrollada sobre sí misma, de manera que tuviera una dimensión microscópica mucho menor a las escalas medidas, permitiendo explicar porqué no se observaba dicha dimensión extra.

El objetivo de este trabajo es presentar dichos intentos de unificación, los problemas que presentaban y los conocimientos que se pueden sacar de ambas teorías. En particular, de la teoría de Weyl surgió el concepto del *Principio Gauge* que hoy en día permite explicar todas las interacciones fundamentales, tanto la gravedad como las del *Modelo Estándar*. Por otro lado, la teoría de Kaluza-Klein introdujo las técnicas que se emplean en las *teorías de cuerdas* que sugieren que vivimos en un espaciotiempo de mayor dimensión al observado. Por ello creemos que el trabajo es interesante para aprender el origen de la física actual.

El trabajo se estructura de la siguiente manera:

- En la sección 2 introducimos las herramientas matemáticas que nos permitirá comprender el desarrollo teórico de esta revisión bibliográfica.
- En la sección 3 introducimos en un primer apartado las características de la teoría de Weyl y derivamos la teoría mediante un cálculo propio desde la perspectiva actual de las *teorías gauge*. Finalmente presentamos los problemas y aprendizajes que se derivan.
- En la sección 4 presentamos el cálculo moderno para reducir la teoría de cinco dimensiones a una teoría efectiva en cuatro dimensiones y la física que percibe el observador en el espaciotiempo cuadrimensional. Finalizamos con una discusión de sus problemas y utilidades.

5 Conclusiones

A lo largo del trabajo hemos presentado las dos primeras teorías que intentaron, sin éxito, unificar gravedad y electromagnetismo. Es más, ni siquiera son teorías cuánticas, sino clásicas. Hoy en día sabemos que el electromagnetismo está más vinculado con la fuerza débil y se unifica con esta en la interacción electrodébil que, a su vez, se unifica con la fuerza fuerte en las *Teorías de Gran Unificación*. La gravedad es una interacción diferente del resto, por lo que cualquier teoría que intente unificar la gravedad ha de hacerlo con las tres a la vez, no por separado.

A pesar de que la teoría expuesta por Weyl no fuera correcta cambió para siempre la forma de interpretar la física, ya que fue fundamental para establecer el Principio de Invariancia Gauge, es decir, la idea de invariancia bajo ciertos tipos de simetría o transformaciones gauge (aunque no invariancia bajo transformaciones de escala). Una de las lecciones que aprendemos del Principio Gauge es que las interacciones surgen de algo más profundo: las simetrías subyacentes del universo. Exigiendo que se respeten las simetrías gauge aparecen los campos gauge de las interacciones. De los campos gauge de las teorías Yang-Mills, al cuantizarlas, surgen los bosones gauge que median dichas interacciones. La Relatividad General no es una teoría tipo Yang-Mills, por lo que para cuantizarla es necesario otro procedimiento. Aunque no tengamos una teoría de gravedad cuántica estamos seguros de que existe el gravitón, bosón sin masa de espín 2 mediador de la interacción gravitatoria. Ya que el Principio Gauge nos ha enseñado que la existencia de las simetrías es más fundamental que el propio campo¹².

En las teorías de Kaluza-Klein la perspectiva es diferente, en vez de tener simetrías internas sin representación en el espacio, las teorías gauge surgen de simetrías espaciales en un espaciotiempo de mayor dimensión (mayor de cuatro en todo caso). Se asemeja más a cómo Einstein interpretó la interacción gravitatoria, como una propiedad del espaciotiempo. La teoría de Kaluza-Klein es capaz de conectar con el Principio Gauge mediante el denominado *mecanismo de Kaluza-Klein* que consiste en la ruptura de simetría desde un espaciotiempo de múltiples dimensiones, algunas de ellas compactas, al espaciotiempo cuadrimensional que observamos junto con diversas interacciones que surgen como teorías gauge.

¹²Los bosones gauge obtenidos no tienen masa y sus interacciones tendrían alcance infinito, lo que contradecía los experimentos con la fuerza débil. Esto parecía el fin de las teorías gauge. Sin embargo, era demasiado prometedor para abandonarlo y finalmente se demostró que se puede conseguir bosones masivos con la *Ruptura Espontánea de la simetría*.

Referencias

- [1] J.L. Bell and H. Korté, *Hermann Weyl*, Stanford Encyclopedia of Philosophy, <https://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/weyl/>
- [2] M. Blagojević and F.W. Hehl, *Gauge Theories of Gravitation: A Reader with Commentaries*, Imperial College Press (2013), [arXiv:1210.3775](https://arxiv.org/abs/1210.3775) [gr-qc].
- [3] M. Blau, *Lecture Notes on General Relativity*, Bern University, 2022. <http://www.blau.itp.unibe.ch/GRlecturenotes.html>
- [4] S.M. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, University of California, 1997. <https://www.preposterousuniverse.com/grnotes/>
- [5] S.M. Carroll, *The Biggest Ideas in the Universe*, <https://www.preposterousuniverse.com/blog/category/biggest-ideas-in-the-universe/>
- [6] A. Delhom, I.P. Lobo, G.J. Olmo, C. Romero, *Conformally invariant proper time with general non-metricity*, Eur. Phys. J. C **80** 415 (2020), [arXiv:2001.10633](https://arxiv.org/abs/2001.10633) [gr-qc].
- [7] S. Hawking and G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, 1973.
- [8] J.D. Jackson and L.B. Okun, *Historical roots of gauge invariance*, Rev.Mod.Phys. **73** (2001) 663-680, [arXiv:hep-ph/0012061](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0012061).
- [9] B. Janssen, *Teoría de la Relatividad General*, Universidad de Granada, 2021.
- [10] L. O’Raifeartaigh and N. Straumann, *Gauge theory: Historical origins and some modern developments*, Rev. Mod. Phys. **72** (2000), DOI: [10.1103/RevModPhys.72.1](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.72.1).
- [11] J. A. Orejuela, *Lovelock Theories as extensions to General Relativity*, PhD Thesis, Universidad de Granada, 2020.
- [12] T. Ortín, *Gravity and Strings*, Cambridge University Press, 2004.
- [13] J.M. Overduin and P.S. Wesson, *Kaluza-Klein Gravity*, Phys. Rept. **283** (1997) 303-380, [arXiv:gr-qc/9805018](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9805018).
- [14] R. Penrose, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Jonathan Cape, 2004.
- [15] E. Poisson, *A Relativist’s Toolkit*, Cambridge University Press, 2004.
- [16] *Gauge theory*, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Gauge_theory



UNIVERSIDAD
DE GRANADA



Facultad de
Ciencias
Sección de
Físicas

Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Física

Tutor/a:	Bert Janssen
Departamento y Área de Conocimiento:	Departamento de Física Teórica y del Cosmos Área de Física Teórica
Cotutor/a:	
Departamento y Área de Conocimiento:	

Título del Trabajo: Teorías de unificación de gravedad y electromagnetismo				
Tipología del Trabajo: (Segun punto 3 de las Directrices del TFG aprobadas por Comisión Docente el 10/12/14)	(Marcar con X)	1. Revisión bibliográfica	X	4. Elaboración de nuevas prácticas de laboratorio
		2. Estudio de casos teórico-prácticos		5. Elaboración de un proyecto
		3. Trabajos experimentales		6. Trabajo relacionado con prácticas externas

Breve descripción del trabajo:

En este TFG se pretende investigar la importancia del Principio Gauge y algunos intentos de unificar la Relatividad General y la Teoría de Maxwell: la Teoría de Gauge de Weyl y la Teoría de Kaluza-Klein. Se introducen las transformaciones de Weyl (conformes) y su conexión con la Teoría de Weyl. Asimismo, se describe la Teoría de Kaluza-Klein en la que se incluye una dimensión extra compacta y se encuentra una conexión entre la geometría y la invariancia gauge. Se sientan así las bases de las teorías gauge, fundamentales en la comprensión de la física moderna, pues describe todas las fuerzas fundamentales y ha permitido derivar el Modelo Estándar que unifica tres de éstas cuatro fuerzas.

Objetivos planteados:

Introducir el Principio Gauge, base del Modelo Estándar, y comprender su importancia en la física moderna. Descripción de la Teoría de Kaluza-Klein y de la Teoría de Weyl y aprendizajes que se derivan del intento y fracaso de unificar el campo gravitatorio y el campo electromagnético.

Metodología:

Trabajo consistente en una revisión bibliográfica de los textos relacionados con el tema a tratar, así como la descripción matemática de la misma.

Bibliografía:

- B. Janssen, *Teoría de la Relatividad General*, Universidad de Granada (2020)
- J.D. Jackson and L.B. Okun, *Historical roots of gauge invariance*, Rev.Mod.Phys., Vol 73, No 3, 663-680.
- E. Poisson, *A Relativist's Toolkit*, Cambridge University Press, 2004.
- T. Ortín, *Gravity and Strings*, Cambridge University Press, 2004.
- S. Hawking and Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, 1973.

Campus
Fuentenueva
Avda. Fuentenueva
s/n
18071 Granada
Tfno. +34-958242902
fisicas@ugr.es

Comisión Docente de Físicas
Facultad de Ciencias



UNIVERSIDAD
DE GRANADA



Facultad de
Ciencias
Sección de
Físicas

A rellenar sólo en el caso que el alumno sea quien realice la propuesta de TFG
Alumno/a propuesto/a: David Sánchez Martínez

Granada, 12 de Junio 2020

Campus
Fuentenueva
Avda. Fuentenueva
s/n
18071 Granada
Tfno. +34-958242902
fiscas@ugr.es

Comisión Docente de Físicas
Facultad de Ciencias