



# UNIVERSIDAD DE GRANADA

---

Facultad de Ciencias

GRADO EN FÍSICA

TRABAJO FIN DE GRADO

**AGUJEROS NEGROS EN  
DIMENSIONES ARBITRARIAS**

Presentado por:  
**D. Cristóbal Vázquez García**

Curso Académico 2021/2022

## **Resumen**

Hemos generalizado las típicas soluciones esféricamente simétricas y estáticas de Relatividad General a variedades con dimensión  $N$ , siendo una de ellas temporal y el resto espaciales. Se estudian algunas de las propiedades relevantes y su variación en función del número de dimensiones, así como el estudio de geodésicas nulas y temporales.

## **Abstract**

We have generalised the typical spherically symmetric and static solutions of General Relativity to  $N$ -dimensional manifolds, always keeping one temporal and the rest spatial. We have also studied some of the most relevant properties and their variation as a function of the dimension, as well as the null and time-like geodesics.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>4</b>
1.1	¿Por qué estudiar Relatividad General en $N > 4$ ?	4
1.2	Notación y conceptos clave	5
<b>2</b>	<b>La solución de Schwarzschild</b>	<b>6</b>
2.1	Derivación de la métrica de Schwarzschild	6
2.2	Curvas geodésicas nulas	8
2.3	Cantidades conservadas y órbitas	9
<b>3</b>	<b>La solución de Schwarzschild-Tangherlini</b>	<b>12</b>
3.1	Derivación de la métrica de Schwarzschild-Tangherlini	12
3.2	Curvas geodésicas nulas	14
3.3	Cantidades conservadas y órbitas	15
<b>4</b>	<b>La solución N dimensional de Reissner-Nordström</b>	<b>16</b>
4.1	Derivación de la métrica N-dimensional de Reissner-Nordström	16
4.2	Curvas geodésicas nulas en presencia de un campo electromagnético	20
4.3	Cantidades conservadas y órbitas en presencia de un campo electromagnético	20
<b>5</b>	<b>La solución N dimensional de Schwarzschild-(Anti)-De-Sitter</b>	<b>22</b>
5.1	Derivación de la métrica N-dimensional de Schwarzschild-(A)dS	22
5.2	Curvas geodésicas nulas en presencia de una constante cosmológica	23
5.3	Cantidades conservadas y órbitas en presencia de una constante cosmológica	24
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>25</b>
	<b>Referencias</b>	<b>28</b>

## 1 Introducción

### 1.1 ¿Por qué estudiar Relatividad General en $N > 4$ ?

Sabemos que la Relatividad General es uno de los principales pilares de la física moderna, capaz de solucionar graves problemas de la mecánica newtoniana, como lo son el principio de acción a distancia o la precesión del perihelio de Mercurio, así como la predicción de algunos fenómenos, entre los que se encuentran las ondas gravitacionales por LIGO, por ejemplo. Se trata de una teoría revolucionaria que nos hace entender la gravedad no como una fuerza misteriosa que actúa a distancia como nos hacía pensar Newton, sino como una propiedad del propio espacio-tiempo en el que vivimos. Sin embargo, la Relatividad no es la última palabra, pues en los últimos años han surgido teorías más generales que requieren de un universo de mayor número de dimensiones, en particular, las teorías de cuerdas.

Aún con todo esto, la mecánica newtoniana es un buen marco teórico en muchas situaciones donde los efectos de la Relatividad no son tan extremos. Sin embargo, tiene una limitación muy importante cuando queremos extender nuestra teoría a espacios de mayor dimensión, pues se puede comprobar que si intentamos generalizar el potencial newtoniano a mayores dimensiones (1.1), resolviendo la ecuación de Laplace, no existen órbitas estables, a diferencia de lo que ocurre en Relatividad General.

$$\Phi(r) = \frac{G_N m}{r^{N-3}}. \quad (1.1)$$

Esta imposibilidad de órbitas no es única del potencial newtoniano, se puede demostrar que si un potencial central simple decrece más rápido que  $r^{-1}$  no pueden existir órbitas estables. Sin embargo, la Relatividad General es capaz de predecir varios tipos de órbitas, incluido estables, para dimensiones superiores, así como la posibilidad de que partículas sin masa se vean afectadas por campos gravitacionales, lo cual no contempla la mecánica newtoniana. Además de esto, el estudio de la Relatividad General en más dimensiones resulta de interés por sí mismo, ya que sabemos que en muchos campos de la física teórica la búsqueda de resultados abstractos y sin aparente significado físico nos ayuda a comprender mejor la propia naturaleza de la teoría. En principio, los agujeros negros parecen ser soluciones extrañas a la ecuación de Einstein, cuya esencia no terminamos de entender y que, de alguna manera, parece que nuestro entendimiento de estos objetos está limitada por la propia teoría. Es por ello que quizá, al igual que en otras muchas ocasiones, un estudio más abstracto de los agujeros negros nos permita comprender mejor su comportamiento, aunque las premisas usadas y los resultados obtenidos no tengan siempre un significado físico real.

Nuestro punto de partida serán las ecuaciones de campo de Einstein, que nos permiten relacionar la geometría del espacio, codificada mediante el tensor de Ricci  $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ , con el contenido de materia del mismo, dado por el tensor energía-momento  $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ :

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = -\kappa\mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

donde  $\kappa$  es una constante y  $g_{\mu\nu}$  es la métrica del espacio. Vemos de esta forma que el contenido en materia del espacio altera la curvatura del mismo. En este trabajo solo estudiaremos dimensiones mayores a cuatro, concretamente las soluciones esféricas y estáticas. Dependiendo del contenido en materia, la solución será distinta debido

al tensor de energía-momento. Nosotros consideraremos las siguientes: la solución de Schwarzschild, que se corresponde con el vacío, la solución de Reissner-Nordström, la cual se obtiene considerando la presencia de un campo electromagnético, y la solución de Schwarzschild-(Anti)-De-Sitter, en la que se cubre el espacio con una constante cosmológica  $\Lambda$  cuyo signo nos determina el tipo de solución, correspondiéndose el positivo con De Sitter, abreviado como dS, y el signo negativo para Anti-De Sitter, abreviado como AdS.

Aunque nuestro trabajo se limita a dimensiones superiores o iguales a cuatro, esto no significa que  $N < 4$  carezca de interés o relevancia. No obstante, las soluciones en estas dimensiones son fundamentalmente distintas a las típicas esféricamente simétricas y estáticas que nosotros trataremos, por lo que está fuera del contenido del trabajo. Además, el interés por las soluciones esféricas no es arbitrario, ya que, en dimensiones superiores, podemos considerar métricas con distinta estructura a la esférica y obtener soluciones exóticas, siendo muchas de ellas simples artificios matemáticos, apareciendo topologías extrañas como  $\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^2$ , por ejemplo, el cual se trata de un tema abstracto y complejo que ya se discute en otros artículos como *Black Rings* [3]. Tampoco trabajaremos con agujeros negros rotacionales que, a pesar de su gran relevancia, ya que son los que realmente encontramos en el universo, su solución es sumamente complicada de obtener incluso en cuatro dimensiones, debido a la falta de estaticidad y de simetría esférica.

Con todo esto, en este trabajo hablaremos de las típicas soluciones para agujeros negros de la ecuación de Einstein, generalizándolas a dimensión arbitraria y estudiando tanto de forma cuantitativa como cualitativa algunas de sus propiedades, tratando de encontrar la relación entre sus propiedades y la dimensión del espacio en el que viven, comparándolas siempre con la típica solución de Schwarzschild 4-dimensional, que nos sirve como base para el desarrollo teórico del resto de agujeros. Estudiaremos la existencia y posiciones de los horizontes de eventos, sus características y las trayectorias que se forman cuando una partícula, ya sea con masa o que se mueva a la velocidad de la luz, interacciona con la curvatura del agujero negro.

## 1.2 Notación y conceptos clave

En primer lugar, usaremos la notación usual en física para el tensor métrico:

$$g = ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.3)$$

donde además estamos empleando el convenio de suma de Einstein para índices contraídos:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.4)$$

Como elección, tomamos los índices griegos,  $\mu$  y  $\nu$  por ejemplo, para representar cualquier coordenada de forma general, mientras que los índices latinos ( $a$ ,  $b$ , etc.) se usan exclusivamente para coordenadas angulares de la hiperesfera.

Asumimos que la conexión elegida es siempre la de Levi-Civita, por lo que la métrica es compatible y la conexión simétrica. Esta elección nos da una relación inequívoca entre métrica y conexión: los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (1.5)$$

Hemos omitido los términos constantes del potencial debido a que no aportan información físicamente relevante. En primer lugar, los dos primeros términos de (5.16) corresponden al potencial efectivo newtoniano en  $N$  dimensiones, como hemos visto anteriormente. Seguido, encontramos las correcciones relativistas al potencial, donde una es propia del espacio de (Anti)De sitter,  $\frac{\Lambda}{2} \frac{r^2}{R_0^2}$  y el último término es debido al agujero de Schwarzschild situado en dicho espacio. Este potencial tiene una dependencia  $-r^{-N+1}$  entorno a cero, alcanzando un máximo a medida que avanzamos en  $r$ , debido a la barrera de potencial positiva, en el que se situará una órbita inestable, mientras que para grandes distancias va como  $-\Lambda r^2$ , debido al término  $\frac{1}{R_0^2}$ . Esto nos da mucha información ya que, si nos encontramos en un espacio de tipo Anti-De Sitter, el potencial diverge hacia infinito positivamente para distancias infinitamente lejanas, lo que nos quiere decir que siempre existirá una órbita, y esta será además estable. Sin embargo, para De Sitter, cuanto mayor sea el valor de  $\Lambda$  más rápido decrecera hacia menos infinito, llegando al punto de que si decrece lo suficientemente rápido no se puedan producir órbitas circulares estables. Podemos ilustrar la situación del potencial para AdS mediante la gráfica (5).

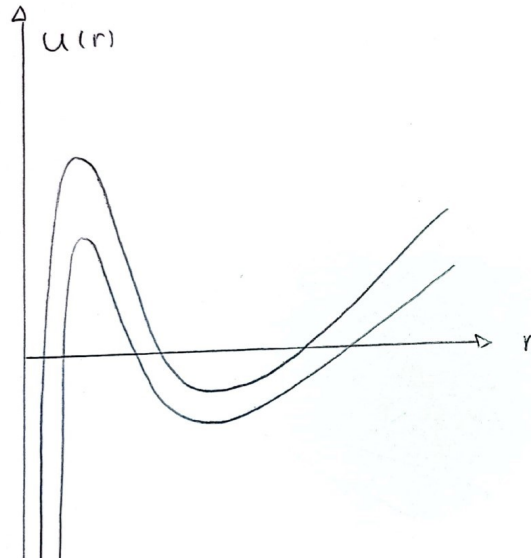


Figura 5: Potencial efectivo  $U(r)$  en función de la coordenada radial para distintos valores de  $\Lambda < 0$ . Vemos que, independientemente del valor de la constante cosmológica siempre tenemos órbitas estables en la solución de Schwarzschild-Anti-De-Sitter. El término proporcional a  $+r^2$  nos recuerda al potencial de la ley de Hooke, lo cual le otorga este comportamiento tan extraño a AdS.

## 6 Conclusiones

Hemos estudiado las propiedades de los agujeros con simetría esférica y estaticidad en un número de dimensiones arbitrario, pero considerando siempre una única dimensión temporal. Se han tratado distintos tipos de agujeros negros según el contenido en materia. En particular, se han generalizado las típicas soluciones de Schwarzschild, Reissner-Nordström y (A)dS a un número  $N$  de dimensiones, y así estudiado algunas de sus

propiedades.

En primer lugar hemos encontrado que, para Schwarzschild-Tangherlini, independientemente del número de dimensiones, tenemos siempre un único horizonte de eventos, tal y como ocurre en el caso cuatridimensional, cuya posición depende de la dimensión. Hemos comprobado también que si extendemos la solución del vacío a dimensión arbitraria el potencial (3.20) se deforma de tal manera que la restricción sobre los valores de  $L$  y  $M$  es más estricta (2) para la existencia de órbitas circulares estables. Aunque en ambas soluciones tenemos órbitas circulares inestables, solo ocurre para el caso  $N = 4$  que el valor de  $L^2$  debe ser aproximadamente menor a  $12M^2$ , tal y como hemos comprobado, para que no existan órbitas circulares estables. Sin embargo, la dependencia con  $N$  nos produce que el potencial newtoniano deje de dominar a grandes distancias y se convierta la barrera de potencial en la dominante. En consecuencia, solo existen órbitas elípticas y circulares metaestables para unos valores muy concretos de  $L$ , ya que si es lo suficientemente alto la barrera impedirá que se formen órbitas, mientras que si es demasiado pequeño tampoco existirán. En todos los demás casos tenemos una órbita circular inestable en lo alto del pico de la barrera. Otro resultado importante para Schwarzschild-Tangherlini es que podemos encontrar una ley de Kepler generalizada a  $N$  dimensiones (3.16), si identificamos la masa geométrica  $M$  con  $G_N m$ , tal y como vemos que nos permite hacer la aproximación a baja curvatura. Es decir, en cualquier dimensión, podemos interpretar que los cuerpos interactúan con el agujero negro como si se tratara de una masa  $M = G_N m$  generando un potencial Newtoniano, lo que nos permite crear una analogía formal entre la curvatura del agujero negro y el movimiento de las partículas bajo la influencia de un potencial efectivo. Por otro lado, usando las condiciones de estaticidad y simetría esférica hemos observado que, independientemente del contenido en materia del universo, hay dos magnitudes que siempre se conservan: la energía y el momento angular (2.19) en el plano de la órbita a considerar, entendiendo que la órbita es plana. La energía dependerá del tipo de agujero negro a considerar.

Hemos visto que la solución de Reissner-Nordström tiene unas propiedades peculiares, debido a que entre la constante  $M$ , que relacionamos con la masa, y la constante  $Q$ , relacionada con la carga, se produce una condición de extremalidad, que nos da tres clases de agujeros negros de Reissner-Nordström distintos, en función del número de horizonte de eventos, aunque uno de ellos nos proporciona una singularidad desnuda, por lo que descartamos dicha solución. Las otras dos soluciones nos proporcionan, en ambos casos, una singularidad cubierta en una región causalmente aislada, pero que, una vez que el observador entra en dicha región, puede ver la singularidad y moverse alrededor de ella sin caer. Lo más sorprendente de este resultado es que su interpretación es totalmente independiente de la dimensión, ya que hemos comprobado que el número de horizontes de eventos es siempre el mismo, y únicamente cambia su posición. Además, en la solución de Reissner-Nordström las propiedades de las órbitas son aún más peculiares que en Schwarzschild-Tangherlini. Hemos obtenido que solo existirán órbitas si el valor del momento angular no es demasiado alto, pero para el resto de casos no se produce ningún tipo de órbita cerrada, ya sea estable, inestable o metaestable. Las órbitas que se producen para valores de  $L$  que no sean demasiado altos son elipses, además de una única órbita circular estable. Más aún, hemos discutido que la condición de extremalidad entre  $M$  y  $Q$  tiene efecto en la forma del potencial efectivo, y por lo tanto en las órbitas.

También hemos visto para la solución de Schwarzschild-(Anti)-De-Sitter que el signo

y magnitud de la constante cosmológica es fundamental en el comportamiento de los cuerpos en presencia de la curvatura del espacio. Además, el estudio de los horizontes de eventos es complicado, ya que de forma general no parece ser que tenga solución analítica. También hemos visto que, aunque a primera instancia suena anti-intuitivo, la presencia de un agujero negro en un espacio (A)dS puede contrarrestar la expansión del universo, permitiendo la formación de órbitas. Todavía más, en condiciones adecuadas, se pueden formar órbitas circulares estables en torno al agujero negro, que serían imposibles sin su existencia. Sin embargo, la existencia de estas órbitas está condicionada también por la dimensión del espacio, como hemos comprobado en la relación (5.13), que nos permite ver que a medida que crece el número de dimensiones, mientras que el valor de  $\Lambda$  sea constante, la relación es más fácil de satisfacer, por lo que la posibilidad de obtener órbitas es mayor. A mayor  $\Lambda$ , mayor tiene que ser la curvatura del agujero, o más cercana la órbita, para poder contrarrestar la expansión. Además, de esta relación vemos que la forma del potencial y su dependencia con el signo de  $\Lambda$  es tal que en AdS siempre existirán órbitas circulares estables, mientras que en dS solo existirán en determinadas condiciones.



## Referencias

- [1] B. Janssen,  
*Teoría de la Relatividad General*,  
Universidad de Granada, 2020.
- [2] E. Roberto y R. S. Harvey,  
*Black Holes in Higher Dimensions*,  
Living Rev.Rel.11:6,2008. [arXiv:0801.3471 [hep-th]].
- [3] E. Roberto y R. S. Harvey,  
*Black Rings*,  
Class.Quant.Grav.23:R169,2006. [arXiv:hep-th/0608012].
- [4] S. M. Carroll,  
*An introduction to General Relativity, Spacetime and Geometry*,  
University of Chicago, 2004.
- [5] R. D’Inverno,  
*Introducción Einstein’s Relativity*,  
University of Southampton, 1992.
- [6] E. Poisson,  
*A Relativist’s toolkit. The Mathematics of Black-Hole Mechanics*,  
University of Guelph, 2004.
- [7] B. Janssen,  
*Gravitación y geometría*,  
Universidad de Granada, 2022.
- [8] I. B. Khriplovich,  
*General Relativity*,  
Budker Institute of Nuclear Physics, 2005.
- [9] R. M. Wald,  
*General Relativity*,  
University of Chicago, 1984.
- [10] G. ’t Hooft,  
*Introduction to the theory of Black Holes*,  
Lectures on Black Holes estructura,  
University of Utrecht, 2009.
- [11] M. Ludvigsen,  
*General Relativity. A geometric approach*,  
University of Linköping, 1999.