Trabajo Fin de Grado en Física

Ondas Gravitacionales en Gravedad Gauss-Bonnet

Carlos Ruiz Sánchez

Junio de 2019

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Resumen

En este trabajo estudiaremos la Gravedad de Gauss-Bonnet como una extensión a la Relatividad General de Einstein en dimensiones mayores a la clásica. El interés principal del estudio de esta teoría reside en que, a pesar de depender derivadas segundas de la métrica, proporciona ecuaciones de segundo grado cuando podrían ser de hasta cuarto grado. Encontraremos dichas ecuaciones de movimiento en el vacío y las usaremos para caracterizar que tipo de geometrías nos permiten que haya ondas gravitacionales para esas ecuaciones. Para ello daremos la definición de onda gravitacional y sus propiedades geométricas que desembocaran en las denominadas geométrias Kundt y nos quedaremos con las de tipo no-gyratonic , que significa que la fuente de las perturbaciones carecen de momento angular. Haremos un estudio general a través de las ecuaciones de movimiento que nos permitirán restringir la forma de la métrica para luego particularizar en algunos casos sencillos.

Abstract

In this work we will study the Gauss-Bonnet Gravity as a extension of Einstein's General Relativity in higher dimensions. The main interest of this theory is that, despite depending on second derivatives of the metric, we obtain second order equations of motion when they can be up fourth order.

We will find these motion equation in the vacuum and will use them to characterize what kind of metrics allow us the existence of gravitational waves. To do this we will give the definition of gravitational wave and its geometric properties that lead to the so-called Kundt geometry and we will stay with the non-gyratonic type, that is means the source of the pertubation lack angular momentum. We will do a general treatment with the equations of motion that will allow us to restrain the form of the metric and then particularize in some simple cases.

Índice

1 Preliminares Teóricos **6**

2 Introducción **8**

2.1 Un pequeño paseo sobre Relatividad General y Extensiones 8

2.1.1 ¿Gravedad en dimensiones menores? 11

2.2 Gravedad de Gauss-Bonnet 11

2.2.1 Breve historia 11

2.2.2 Gravedad cuadrática 12

2.2.3 Teoría Lovelock 13

3 Ondas Gravitacionales **15**

3.1 Predicción de Einstein 15

3.2 Propiedades geométricas 15

3.2.1 Coordenadas adaptadas 15

3.2.2 Escalares Ópticos 16

3.3 Geometría Kundt 17

3.4 Ondas Gravitacionales pp 18

3.5 Espacios VSI (Vanish Scalar Invariants) 18

4 Espacio-tiempos Kundt en Gravedad Gauss-Bonnet **19**

4.1 Caso General 19

4.2 Geométrias privilegiadas 24

4.2.1 Espacio-tiempos con espacio transversal de curvatura constante . . 24

4.3 Ondas pp 25

4.4 Espacios VSI 26

5 Conclusiones **27**

5.1 Ecuación de Campo de Gauss-Bonnet 29

5.2 Identidades útiles 29

5.3 Parte Einstein-Hilbert 29

5.4 Parte Gauss-Bonnet 30

Referencias **33**

Quisiera agradecer esta trabajo a mi familia, la cual siempre me ha apoyado y ha confiado en mi hasta en los peores momentos y han hecho que este llegue hasta aquí.
A Dr. Bert Janssen, tutor de esta memoria por toda la ayuda proporcionada, el cual siempre ha estado disponible para cualquier duda que me ha surgido y la libertad que me ha dado para poder decidir el camino que mejor me parecido que siguiera el trabajo.
A mis Scronchos, los cuales han hecho que mi trayectoria durante la carrera haya sido la mejor época de mi vida y sea inolvidable.
Por último, también con cariño y con muchísima gratitud, lo quiero dedicar a mi compañero y amigo Juan Silverio Martinez, por todas la horas que hemos pasado hablando del tema, por el apoyo cuando más lo necesitaba y por el tiempo que ha dedicado altruistamente a corregir y sugerir mejoras del trabajo.

1 Preliminares Teóricos

Antes de empezar, vamos a asentar los términos matemáticos que en los que se sustenta toda la teoría de la Relatividad General y sus extensiones.

El espacio-tiempo está representado por una variedad Lorentziana. Una variedad diferenciable D-dimensional es un espacio topológico localmente difeomorfo a $\mathbb{R}^N$, es decir para cada abierto de la variedad existe un difeomorfismo, aplicación diferenciable con inversa diferenciable, con un abierto de $\mathbb{R}^D$. Estas aplicaciones permiten definir, dado un punto p de la variedad, el espacio tangente a ese punto, T_pM que es isomorfo a $\mathbb{R}^D$, lo cual permite definir coordenadas locales sobre ella. Dado el carácter local de esta construcción, los vectores deben estar referidos al punto donde está definido el espacio tangente.

Ademas, esta variedad va equipada con una métrica. Una métrica es un tensor 2-covariante simétrico, es decir

$$< | >: T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} \tag{1.1}$$

bilineal y simétrica. A partir de este tensor podemos calcular distancias, ángulos,ect. Este objeto tiene toda la información geométrica de la variedad.

Dada una base $\{e_i\}_p$ de T_pM, definimos las componentes de la métrica como

$$g_{ij} =< e_i|e_j > .$$

Gracias a las componentes, podemos ver la métrica como una matriz real cuadrada simétrica y por tanto diagonalizable. Definimos el índice de una métrica como el número de autovalores negativos y el radical como el número de autovalores nulos. Ya estamos en condiciones de poder definir nuestro objeto de trabajo.

Una variedad Lorentziana es una variedad diferencial equipada con una métrica con índice 1 y radical 0. Usaremos el siguiente convenio y notación.

1. La signatura de la métrica es $(+, -, -, -)$.
2. Usaremos unidades naturales, $c = 1$, para agilizar los cálculos, sin olvidar que debe estar presente acompañando a la componente temporal.
3. Denotaremos por g^{ij} las componentes de la matriz inversa de la métrica.
4. Convenio de sumación de Einstein para indices repetidos.
$$V^i W_i := \sum_i V^i W_i. \tag{1.2}$$
5. Tensores covariantes y contravariantes. Si $T^{a_1..a_r}_{b_1..b_s}$ son las componentes de un tensor en una determinada base, diremos que es un tensor r-covariante y s-contravariante o tipo-(r,s).
6. Subir y bajar índices. Si el tensor métrico es no degenerado, g_{ij} proporciona un isomorfismo natural entre vectores covariantes y contravariantes.
$$V_i = g_{ij}V^j \quad V^i = g^{ij}V_j, \tag{1.3}$$
donde ya estamos utilizando el convenio de Einstein. Lo mismo sucede para las componentes de un tensor de cualquier rango.

A partir de estas aplicaciones podemos hacer la siguiente clasificación para los vectores

1. Si $V_i V^i < 0$ diremos que es un vector espacial.
2. Si $V_i V^i > 0$ diremos que es un vector temporal.
3. Si $V_i V^i = 0$ diremos que es un vector nulo o luminoso.

Ahora tenemos un campo vectorial que queremos derivar un una cierta dirección $V = V^i e_i$ donde $\{e_i\}$ es una base el espacio vectorial tangente a la variedad. Si derivamos con respecto a una coordenada, debido a que la base es local y depende del punto donde estemos trabajando, también va a cambiar

$$\frac{\overline{\partial} V}{\partial x^i} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^i} e_\mu + V^\mu \frac{\partial e_\mu}{\partial x^i}, \tag{1.4}$$

donde podemos descomponer la dependencia de la derivada de la base en términos de la misma

$$\frac{\partial e_m}{\partial x^i} = \Gamma^k_{mi} e_k \tag{1.5}$$

Esto nos permite definir el concepto de derivada covariante de un vector como

$$\nabla_j V^i = \frac{\partial V^i}{\partial x^j} + V^k \Gamma^i_{kj}, \tag{1.6}$$

donde Γ^i_{kj} son las componentes de la conexión, que nos dicen como se conectan los planos tangentes entre si. Esta definición se puede generalizar a un tensos de cualquier orden de la siguiente manera,

$$\nabla_i T^{a_1..a_r}{}_{b_1...b_s} = \partial_i T^{a_1..a_r}{}_{b_1...b_s} + \Gamma^{a_1}_{ji} T^{j..a_r}{}_{b_1...b_s} + \cdots - \Gamma^j_{ib_s} T^{a_1..a_r}{}_{b_1...j} \tag{1.7}$$

Por último, usaremos el siguiente convenio para ahorrar notación:

1. $V^i{}_{,j} := \partial_j V^i = \frac{\partial V^i}{\partial x^j}$.
2. $V^i{}_{;j} := \nabla_j V^i$.
3. $T_{[a_1,..,a_n]} = \frac{1}{n!}(\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) T_{a_{\sigma(1)},..,a_{\sigma(n)}})$. Antisimetrización de n índices.
4. $T_{(a_1,..,a_n)} = \frac{1}{n!}(\sum_{\sigma \in S_n} T_{a_{\sigma(1)},..,a_{\sigma(n)}})$. Simetrización de n índices.
5. $g_{uu||ij}$ va a denotar la derivada covariante de g con respecto a las coordenadas espaciales.

5 Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado propiedades de la teoría gravitatoria Gauss-Bonnet como una extensión a la Teoría General de la Relatividad de Einstein. En el segundo capítulo hemos visto por qué eran necesarias cuatro dimensiones para que la Teoría de Einstein diera una dinámica, lo cual nos motivó a pensar que si aumentamos las dimensiones pudieran manifestarse en nuestras ecuaciones.

El teorema de Lovelock nos asegura que la única ecuación de movimiento de segundo orden es la ecuación de campo de Einstein, pero no nos dice nada sobre como debe ser el lagrangiano. Este es uno de los hechos que nos dio a pie a pensar en el término cuadrático de Gauss-Bonnet ya que, al ser un invariante topológico para variedades cuatro-dimensionales (como lo es el escalar de Ricci en dos dimensiones), no afecta a las ecuaciones de movimiento en esa dimensión, pero si en dimensiones superiores a cuatro.

En el tercer capítulo hemos derivado la ecuación de Einstein-Hilbert y Gauss-Bonnet mediante el principio variacional. Para el nuevo termino hemos visto explícitamente que genera ecuaciones de movimiento de segundo orden.

En el cuarto capítulo nos hemos metido de lleno en el campo de las ondas gravitacionales, empezando por un enfoque histórico de como se predijeron y terminando en unas propiedades geométricas que debe cumplir el espacio-tiempo. Este hecho nos ha llevado a seleccionar un tipo de geometría muy particular, las métricas Kundt, dentro de las cuales hemos visto diferentes tipos de soluciones.

En el último capítulo hemos introducido la métrica Kundt en nuestra ecuación de campo. Hemos visto que en el caso general muchas de las ecuaciones son muy complicadas y que hay que hacer simplificaciones inteligentes para poder abordarlas. También hemos visto que si queremos este tipo de geometrías, las constantes que determinan la teoría, como la constante cosmologica, deben tener valores precisos, lo cual restringe bastante. Para intentar afrontar la dificultad se ha obtado por elegir algunos tipos de geometría más sencilla pudiendo avanazar en los resultados.

Referencias

[1] Janssen Bert,
Teoría de la Relatividad General

[2] S. Weinberg ,
Gravitation and Cosmology,
Wiley,1972.

[3] B. Zumino, Phys. Rep. 137 (1986) 109.

[4] Stephani H, Kramer D, MacCallum M, Hoenselaers C and Herlt E,
Exact Solutions of Einstein's Field Equations,
Cambridge University Press, 2003.

[5] Griffiths J and Podolský J,
Exact Space-Times in Einstein's General Relativity,
Cambridge University Press, 2009.

[6] Lovelock D,
The uniqueness of the Einstein field equations in a four-dimensional space,,
Arch. Rational Mech. Anal. 33 54–70, 1969.

[7] Iyer V and Wald R M,
Some Properties of Noether Charge and a Proposal for Dy- namical Black Hole Entropy,
Phys. Rev. 50 846–64, 1994.

[8] Lü H, Pang Y and Pope C N,
Conformal Gravity and Extensions of Critical Gravity,
Phys. Rev. D 84 064001

[9] F. F. Faria,
Conformal theory of everything

[10] Pravda V, Pravdová A, Coley A, and Milson R,
Bianchi identities in higher dimensions,
uantum Grav. 21 2873–98

[11] Karamazov M,
Exact spacetimes in modified theories of gravity,
Master Thesis, Charles University, 2017.