UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias

GRADO EN FÍSICA

TRABAJO FIN DE GRADO

MASA Y ENERGIA EN RELATIVIDAD GENERAL

Presentado por:
D. Alejandro Muñoz Ovalle

Curso Académico 2019/2020

Resumen

Demostraremos que la energía de un espaciotiempo no es una cantidad globalmente conservada en general. El Teorema de Noether y la invariancia bajo transformaciones generales e infinitesimales de coordenadas de una acción proporcionan la ley de continuidad del tensor energía-momento. Sin embargo, la obtención de una cantidad conservada a partir de una ley de conservación es imposible en este caso ya que la ecuación involucra una magnitud tensorial. Una vez comprobada la ineficacia de tener en cuenta la energía y el momento del campo gravitatorio, procedemos a tratar de construir una ecuación de continuidad que pueda aplicarse a un vector y que nos proporcione la energía como cantidad globalmente conservada. Para ello, será necesario que la geometría del espaciotiempo en cuestión esté equipada con un vector de Killing temporal. Cuando esta condición es verificada, la construcción de un vector corriente es posible mediante la contracción del vector de Killing y el tensor de Ricci y es su ecuación de continuidad la que nos permite hallar la conservación de la energía. Debido a que el proceso proporciona como resultado que tan solo la frontera del espaciotiempo es relevante, se procederá finalmente a elaborar un método que permita definir la energía como cantidad conservada en un espacio carente de vector de Killing temporal global, pero asintóticamente plano, es decir, un sistema físico aislado general.

Abstract

We will prove that the energy of a spacetime is not a globally conserved quantity in general. Noether's Theorem and invariance under general and infinitesimal coordinate transformations of an action provide the continuity law of the energy-momentum tensor. However, obtaining a conserved quantity from a conservation law is impossible in this case since the equation involves a tensorial magnitude. Having verified the ineffectiveness of taking into account the energy and the momentum of the gravitational field, we try to obtain a continuity equation that can be applied to a vector and that provides energy as a globally conserved quantity. For this, it will be necessary that the geometry of the spacetime in question is equipped with a timelike Killing vector. When this condition is verified, the construction of a current vector is possible by contracting the Killing vector and the Ricci tensor and it is its continuity equation that allows us to find the conservation of energy. Since the process provides as a result that only the boundary of spacetime is relevant, we will finally proceed to develop a method that allows energy to be defined as a quantity conserved in a space lacking a globally timelike Killing vector but asymptotically flat , that is, a general isolated physical system.

Índice

1 Introducción

Masa y energía han sido conceptos clave en la historia de la ciencia. La conservación de las mismas es y fue uno de los pilares fundamentales sobre el que se ha sostenido la física clásica. Así pues, el estudio de ambas siempre ha estado presente en la evolución de los principios, modelos y teorías que los científicos formulaban para explicar la realidad.
A pesar de que estas dos magnitudes siempre han estado relacionadas en cualquiera de las teorías aceptadas por la comunidad científica, no fue hasta el desarrollo de la Relatividad Especial (Einstein (1905)) cuando se descubrió que este vínculo tomaba un carácter más íntimo si cabe, el cual viene descrito por la famosa ecuación

$$E^2 = \left(\vec{p}\,c\right)^2 + \left(mc^2\right)^2. \tag{1.1}$$

No es que masa y energía guarden una simple correspondencia, sino que la transformación de una en otra es posible. Esto trajo consigo grandes aportes a la hora de desarrollar nuevas hipótesis e incluso de predecir fenómenos ignotos hasta la época. Por tanto la conservación de masa y energía dio paso a la conservación de las dos magnitudes en su conjunto.

Sin embargo, dicho avance generó un grave problema. Al describir mediante una formulación covariante el espaciotiempo, nos encontramos con una estrecha relación entre dos conceptos que, hasta entonces, habían sido considerados como absolutos e independientes. Tiempo y espacio no podían ser estudiados separadamente, sino que eran las componentes de un cuadrivector. Las consecuencias que dicho fenómeno trae consigo son demasiado extensas y complejas para ser tratadas en este trabajo y requirirían de una asignatura entera para poder comenzar a comprenderse. Por tanto, nos restringiremos únicamente a la siguiente: la energía no es una magnitud escalar, como se pensaba hasta la época, sino una de las componentes de un cuadrivector.

Así pues, dada la relación entre la energía y el momento lineal que nos proporciona la Relatividad Especial surge de manera natural la siguiente pregunta, ¿se conserva la energía? La necesidad de responder sí a esta cuestión tiene profundas raíces históricas, pero no hemos de dejar que la tradición nuble nuestro razonamiento. Para poder dar una respuesta clara a nuestro dilema, hemos de acudir necesariamente a la teoría de la Relatividad General (Albert Einstein (1915)), cuyo principal resultado es la existencia de una relación entre la geometría del espaciotiempo y el contenido del mismo, la cual viene descrita por la ecuación de Einstein:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = -8\pi G_N \mathcal{T}_{\mu\nu}, \tag{1.2}$$

donde , $\mathcal{R}_{\mu\nu}$, $\mathcal{R}$ y $g_{\mu\nu}$ son el tensor Ricci, el escalar de Ricci y la métrica, es decir, el miembro izquierdo de la ecuación describe la geometría de nuestra variedad. Por otra parte, $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento, el cual codifica el contenido del espaciotiempo.

Por tanto, para poder hallar una solución satisfactoria a nuestra duda, forzosamente habremos de desarrollar unas herramientas que nos ayuden a desentrañar las condiciones que ha de cumplir la geometría del espaciotiempo para que se conserve (o no) la energía.

Antes de comenzar con el desarrollo de nuestra formulación, trataremos de buscar ejemplos sencillos de la mecánica newtoniana en los cuales la energía no sea una magnitud conservada para, así, motivar aún más nuestro estudio:

- Un muelle con constante elástica cambiante.
- Un péndulo de longitud variable.
- Un plano inclinado cuyo ángulo varía.

En estos tres sistemas se aprecia que, conforme pasa el tiempo, la energía total de los mismos no se preserva, ya que aparece o desaparece energía potencial que no proviene de o se transforma en energía cinética. Si analizamos la mecánica lagrangiana llegamos a un resultado que, por ser sobradamente conocido, podría pasarse por alto: la cantidad que puede estar conservada en este formalismo es el hamiltoniano $\mathcal{H}$, el cual puede coincidir con la energía si se dan las condiciones adecuadas. Es fácil probar que la conservación solo es cierta si el lagrangiano es independiente explícitamente del tiempo empleando que el hamiltoniano $\mathcal{H}$ es la transformada de Legendre del lagrangiano $\mathcal{L}$ [1]

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L} \Longrightarrow \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \dot{p}\dot{q} + p\ddot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\ddot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \tag{1.3}$$

donde q, $\dot{q}$ y p son las coordenadas generalizadas, las velocidades generalizadas y los momentos conjugados generalizados respectivamente.

Si ahora aplicamos la definición de momento conjugado $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ y tenemos en cuenta que dicha definición combinada con la ecuacion de Hamilton $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$ nos proporciona $\dot{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$, podemos reducir la derivada temporal de $\mathcal{H}$ a

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \tag{1.4}$$

Ahora bien, aunque no se de la correspondencia hamiltoniano-energía de manera general, sí sabemos que solo tendremos una cantidad conservada en esta teoría si el lagrangiano no posee dependencia temporal explícita.

Además que en los ejemplos no se pueda definir la energía como cantidad globalmente conservada tiene una simple justificación: no estamos teniendo en cuenta en nuestro sistema todos los fenómenos que en él intervienen. Sin embargo, ¿existe algún sistema físico que lo contenga todo?

La respuesta es clara: sí. Cualquier modelo de universo, por definición, no deja elemento alguno por abarcar. Es claro que, dado que el universo no deja nada fuera de sí, si su energía no se conserva, la explicación antes proporcionada no será válida. A pesar de que hay muchos modelos de universo en los que se cumple este fenómeno, nos centraremos en el más sencillo: el espaciotiempo de De Sitter [2], o sea, un espaciotiempo vacío, pero con expansión exponencial, en el cual no tiene sentido hablar de la energía como cantidad globalmente conservada.

¿De dónde saca este espacio la energía necesaria para expandirse? Dado que es una solución de vacío, no puede extraerla de su contenido en materia y, sin embargo, prosigue su expansión. Así pues, encontramos un modelo físico que no viola principio o postulado alguno de la física, pero aún así no conserva su energía. Hemos dado con un ejemplo en el que, a priori, no podemos justificar la conservación de la energía, pero el cual tampoco puede tildarse de absurdo o incongruente.

Resulta interesante comentar que, tanto los tres ejemplos de la mecánica newtoniana como el espacio de De Sitter comparten entre sí una característica fundamental, ninguno de ellos es invariante frente a traslaciones temporales, lo que, como veremos, determina que su energía ni esté conservada ni tan siquiera definida.

2 Conceptos clave de la Geometría Diferencial

Previo al estudio de la conservación de la energía, conviene aclarar algunos aspectos básicos de la Geometría Diferencial, los cuales serán empleados constantemente a lo largo de este trabajo, ya que nos permitirán trabajar en una variedad con curvatura.

Lo primero que hemos de saber es que nunca trabajaremos en la variedad como tal, sino que todas nuestras operaciones tendrán lugar en los planos tangentes en cada uno de los puntos de esta variedad, puesto que estos planos tienen estructura de espacio vectorial y resultará muy cómodo hacerlo de esta manera. Inmediatamente cabe preguntarse por la relación que existe entre dichos planos.

La respuesta está en la conexión afín de la variedad $\left(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\right)$ [3]. A priori, cualquier conexión sería válida, pero el desarrollo de la Teoría de la Relatividad General posee como postulado la conexión de Levi-Civita. Esta conexión es muy interesante ya que que provoca que tanto las geodésicas afines (curvas cuyo vector tangente se mantiene paralelo a sí mismo bajo transporte paralelo a lo largo de la misma, es decir, trayectorias de partículas a no aceleradas) y las geodésicas métricas (curva más corta entre dos puntos, por lo que provienen del principio variacional) coincidan,por lo que genera un espaciotiempo que concuerda con el experimental.

La conexión de Levi-Civita viene definida mediante dos propiedades:

- Simetría de la conexión:
$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}. \tag{2.1}$$

- Compatibilidad de la métrica:
$$\nabla_{\mu} g_{\nu\rho} = 0. \tag{2.2}$$

Antes de explicar qué es el operador ∇_{μ}, escribamos explícitamente los elementos de la conexión de Levi-Civita.

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} \left[\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu} \right]. \tag{2.3}$$

Ahora, definamos la derivada covariante ∇_{μ} [3, 4]. Dado que nuestro espacio no es plano, la derivada convencional ya no transforma de manera covariante, pero esto no puede permitirse en la elaboración de una teoría física coherente con una variedad curva. La solución es sencilla, construimos un operador covariante que actúe como una derivada en nuestro espaciotiempo. Para evitar una complejidad inncesaria en el trabajo, plasmaremos el resultado, pues es lo relevante para nuestro estudio

$$\begin{aligned} \nabla_{\rho} T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} = {} & \partial_{\rho} T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} \\ & + \Gamma^{\mu_1}_{\rho\lambda} T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} + \dots + \Gamma^{\mu_m}_{\rho\lambda} T^{\mu_1 \dots \mu_{m-1} \lambda}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} \\ & - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu_1} T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_n} - \dots - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu_n} T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_{n-1} \lambda}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Así pues, aunque por separado ∂_{μ} y $\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}$ no transforman de manera covariante, la combinación de los mismos permite que ∇_{λ} sí lo haga.

Resulta interesante el conmutador de la derivada covariante, actuando sobre un vector contravariante:

$$\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] V^\lambda = \mathcal{R}_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda} V^\rho, \tag{2.5}$$

donde el tensor $R_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda}$ (tensor de Riemann) viene definido por

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho}; \tag{2.6}$$

y sobre un vectro contravariante.Este tensor codifica la geometría del espaciotiempo

$$\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] V_\lambda = -\mathcal{R}_{\mu\nu\lambda}{}^{\rho} V_\rho. \tag{2.7}$$

Este tensor no solo codifica la geometría del espaciotiempo, si no que también satisface las siguientes propiedades cuando está contenido en una conexión simétrica:

- Propiedades de conmutación de índices

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda} = -\mathcal{R}_{\nu\mu\rho\lambda} = -\mathcal{R}_{\mu\nu\lambda\rho} = \mathcal{R}_{\rho\lambda\mu\nu} = \mathcal{R}_{\nu\mu\lambda\rho}. \tag{2.8}$$

- Primera Identidad de Bianchi

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda} + \mathcal{R}_{\nu\rho\mu\lambda} + \mathcal{R}_{\rho\mu\nu\lambda} = 0. \tag{2.9}$$

- Segunda Identidad de Bianchi

$$\nabla_\mu \mathcal{R}_{\nu\rho\sigma}{}^{\lambda} + \nabla_\nu \mathcal{R}_{\rho\sigma\mu}{}^{\lambda} + \nabla_\rho \mathcal{R}_{\sigma\mu\nu}{}^{\lambda} = 0. \tag{2.10}$$

El tensor de Riemann también puede contraerse para generar el tensor de Ricci, y este, a su vez, para formar el escalar de Ricci; ambos cruciales en el desarrollo de la Teoría de la Relatividad General

$$\mathcal{R}_{\mu\lambda\nu}{}^{\lambda} = \mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\nu\mu}, \tag{2.11}$$

donde la última igualdad es solo cierta en la conexión de Levi-Civita.

$$g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}. \tag{2.12}$$

Si combinamos estas dos ecuaciones con la Segunda Identidad de Bianchi (2.10) y las propiedades de antisimetría del tensor de Riemann (2.8), podemos encontrar la Segunda Identidad de Bianchi Contraída:

$$\nabla_\nu \mathcal{R}^\nu_\mu = \frac{1}{2}\nabla_\mu \mathcal{R}. \tag{2.13}$$

Además, podemos emplear el tensor y escalar de Ricci para definir el tensor de Einstein

$$G^{\mu\nu} = \mathcal{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\mathcal{R}. \tag{2.14}$$

Este tensor resultará muy útil más adelante ya que, por construcción, verifica

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0. \tag{2.15}$$

3 Teorema de Noether y Cantidades Conservadas

Para alcanzar nuestro objetivo, hemos de tener en cuenta que la física ha desarrollado poderosas herramientas a la hora de facilitar la comprensión de situaciones similares a la nuestra. Es el momento propicio de emplear el teorema de Noether [5]:

“Cualquier simetría diferenciable, proveniente de un sistema físico, tiene su correspondiente ley de conservación y viceversa.”

Ha de quedar claro que una ley de conservación y una cantidad globalmente conservada, aunque se encuentran fuertemente relacionadas, no son equivalentes. Una ley de conservación no es más que una ecuación de continuidad, es decir, la divergencia de una magnitud igualada a cero lo que se traduce en que el flujo de dicha cantidad es nulo. Cuando ese elemento es un vector, se le denomina corriente de Noether, puesto que la integración de su ley de conservación proporciona una carga de Noether globalmente conservada.

Este teorema se emplea en numerosas demostraciones pertenecientes a la mayoría de ramas de la física. Para ilustrarlo mejor, lo utilizaremos para probar que la carga eléctrica es una cantidad globalmente conservada.

3.1 Conservación de la carga

Es razonable pensar que la clave para hallar la conservación de la energía se encuentre en el electromagnetismo (el formalismo de la gravitación y el del electromagnetismo han sido muy similares históricamente), el cual posee una descripción covariante, por lo que, debido a la naturaleza de nuestro problema, resultará conveniente emplearla.

Partiremos de uno de los principales resultados de la Teoría de Maxwell: la ley de continuidad del cuadrivector corriente [6]

$$\nabla_\mu j^\mu = 0. \tag{3.1}$$

Si ahora integramos esta ley en un volumen V obtendremos

$$0 = \int_V d^4x \sqrt{|g|} \nabla_\mu j^\mu = \int_V d^4x \partial_\mu \left[\sqrt{|g|} j^\mu \right], \tag{3.2}$$

donde en la segunda igualdad hemos empleado que, en la conexión de Levi-Civita, la divergencia de un cuadrivector A^μ viene dada por la expresión $\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left[\sqrt{|g|} A^\mu \right]$.

Ahora es momento de aplicar el Teorema de Stokes [7, 8]:

$$\int_V d^4x \partial_\mu \left[\sqrt{|g|} j^\mu \right] = \int_{\partial V} d^3x \sqrt{|\tilde{g}|} N_\mu j^\mu, \tag{3.3}$$

donde $\tilde{g}_{ij}$ es la métrica inducida en la hipersuperficie y N_μ es un vector unitario y ortogonal a la hipersuperficie.

Nosotros, como se muestra en la figura 1, tomaremos 2 hipersuperficies espaciales Σ_1 y Σ_3 y una hipersuperficie temporal Σ_2 (recordemos que una hipersuperficie es temporal (espacial) si el vector perpendicular a ella en todo punto de la misma es espacial (temporal)). Por tanto, obtendremos

La métrica de dicha solución puede obtenerse del elemento de línea

$$ds^2 \approx \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2M}{r}\right) \left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right]. \tag{6.7}$$

Puesto que trabajaremos en la frontera de nuestro espacio, se ha de verificar que $r \gg M$ y, por tanto, la métrica inducida de las secciones asintóticas de las secciones espaciales toma la forma

$$\bar{h}_{ij} = \left(1 + \frac{2M}{r}\right) \delta_{ij}. \tag{6.8}$$

Si sustituimos ahora en (6.6), tenemos

$$E_{ADM} = \frac{1}{2\kappa} \int_{S_\infty} dS_i \frac{4Mx^i}{r^3} = \frac{1}{2\kappa} \int_{S_\infty} r^2 d\Omega_2^2 \frac{4M}{r^2} = \frac{16\pi M}{2\kappa} = \frac{M}{G_N} = m, \tag{6.9}$$

donde en la penúltima igualdad hemos usado que $\kappa = 8\pi G_N$ y en la última que $M = G_N m$.

Como vemos, hemos obtenido el mismo resultado que al emplear la integral de Komar, aunque el origen geométrico de ambos métodos es completamente diferente. Obviamente, este no es un resultado particular, sino que las energías proporcionadas por ambos métodos siempre coinciden.

7 Conclusiones

La energía no es una cantidad globalmente conservada. El Teorema de Noether nos proporciona una ecuación de continuidad para una magnitud por cada una de las simetrías con las que se haya equipado el espaciotiempo. Sin embargo no es cierto que a cada ley de conservación le corresponda una cantidad globalmente conservada. La invariancia de una acción o, lo que es lo mismo, bajo un cambio general de coordenadas infinitesimal trae como consecuencia la ley de conservación del tensor energía-momento, pero dicha ley presenta un problema, es una ecuación de un tensor, no de un vector. Dado que no tiene sentido definir el flujo de un tensor a través de una superficie, no puede aplicarse el teorema de Stokes a la divergencia de un vector. Esto es un problema geométrico, por lo que insertar en nuestra teoría la energía y el momento del campo gravitatorio no soluciona de modo alguno nuestro inconveniente, de hecho, nos añade la violación del principio de equivalencia. Por tanto, a pesar de que es cierta la existencia de una ecuación de continuidad del tensor energía-momento en una teoría física bien construida, la energía como cantidad globalmente conservada no puede extraerse de ella.

Por otro lado, existe una manera de transformar nuestra ley de conservación de un tensor en una de un vector si la geometría del espaciotiempo es invariante bajo traslaciones temporales, es decir, es estacionario. Para poder codificar esta simetría de manera independiente a las coordenadas ha de emplearse un vector de Killing temporal. Si contraemos este vector con el tensor de Ricci obtenemos una corriente de Noether asociada a esta nueva simetría que verifica su propia ley de conservación y, dado que se trata de un vector, podemos aplicar a dicha ecuación el Teorema de Stokes y extraer la energía como cantidad globalmente conservada. Así, llegamos a que la energía de un espaciotiempo solo está definida si la geometría del mismo permite la existencia de un vector de Killing temporal que codifique la simetría bajo traslaciones temporales. Puesto que tan solo puede definirse la energía como cantidad globalmente conservada si se verifica esta condición, llegamos a la conclusión de que la energía no depende de manera alguna del contenido en materia del espaciotiempo si no que es una propiedad puramente geométrica.

Finalmente, se tiene un resultado de gran relevancia: debido a que la definición de energía solo incluye la frontera del espaciotiempo, cabe esperar que pueda definirse la energía como cantidad globalmente conservada para sistemas físicos aislados, los cuales están descritos por espaciotiempos asintóticamente planos. Dichas geometrías poseen un vector de Killing temporal únicamente en su frontera. Mediante el formalismo hamiltoniano y la descomposición 3+1 de nuestro espaciotiempo, llegamos a una expresión para la energía del mismo que, aunque tiene una forma y un origen geometrico diferente a la energía construida mediante los vectores de Killing, proporciona el mismo resultado que esta.

Así pues, hemos encontrado un método que nos permite definir la energía como cantidad globalmente conservada en un espaciotiempo siempre que este contenga un vector de Killing temporal ya que si no no tiene sentido hacerlo; y otro para los sistemas físicos aislados, los cuales son usualmente empleados en los modelos físicos que nos permite relajar en cierta manera esta condición.

Referencias

[1] Herbert Goldstein,
Mecánica Clásica,
Editorial Reverté, 2009.

[2] H.-J. Treder,
The General Metrical Fundamental Form of the DE SITTER Universes,
Astronomische Nachrichten (1975).

[3] Bert Janssen,
Teoría de la Relatividad,
Universidad de Granada (Preprint), 2019.

[4] Christian Fronsdal,
What is a covariant derivative?,
Journal of Geometry and Physics, 1990.

[5] U. E. Schröder,
Noether's Theorem and the Conservation Laws in Classical Field Theories,
Fortschritte der Physik, 1968.

[6] Katherine A. Brading,
Which symmetry? Noether, Weyl, and conservation of electric charge,
Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 2002.

[7] Brothers, John E.,
Stokes' Theorem,
American Journal of Mathematics, 1970.

[8] Taylor and Francis Group,
The classical version of Stokes' theorem revisited,
International Journal of Mathematical Education, 2008.

[9] B.P. Abbot et al (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration),
Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger
Phys. Rev. Lett. 116, 061102 (2016), arXiv:1602.03837 [gr-qc].

[10] B.P. Abbot et al (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration),
GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence
Phys. Rev. Lett. 116, 241103 (2016), arXiv:1606.04855 [gr-qc].

[11] B.P. Abbot et al (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration),
GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2
Phys. Rev. Lett., 118, 221101 (2017), arXiv:1706.01812 [gr-qc].

[12] Willmore, T. J.,
The Definition of Lie Derivatived,
Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1960.

[13] Fecko, Marian,
Differential Geometry and Lie Groups for Physicists ,
Cambridge, 2006.

[14] Dolan, Brian P.,
On the definition of mass in general relativity: Noether charges and conserved quantities in diffeomorphism invariant theories,
Phys. Rev. D 98, 044010 (2018), arXiv:1804.10451 [gr-qc].

[15] Ashtekar, Abhay; Magnon-Ashtekar, Anne,
On conserved quantities in general relativity,
Journal of Mathematical Physics, 1979.

[16] R. Horak,
Analysis of Schwarzschild's solution,
Physics Letters, 1964.

[17] John Wiley and Sons,
Reconsidering Schwarzschild's original solution,
Astronomische Nachrichten, 2001.

[18] Leo Brewin,
A simple expression for the ADM mass,
Gen.Rel.Grav.39:521-528 (2007), arXiv:gr-qc/0609079 [gr-qc].