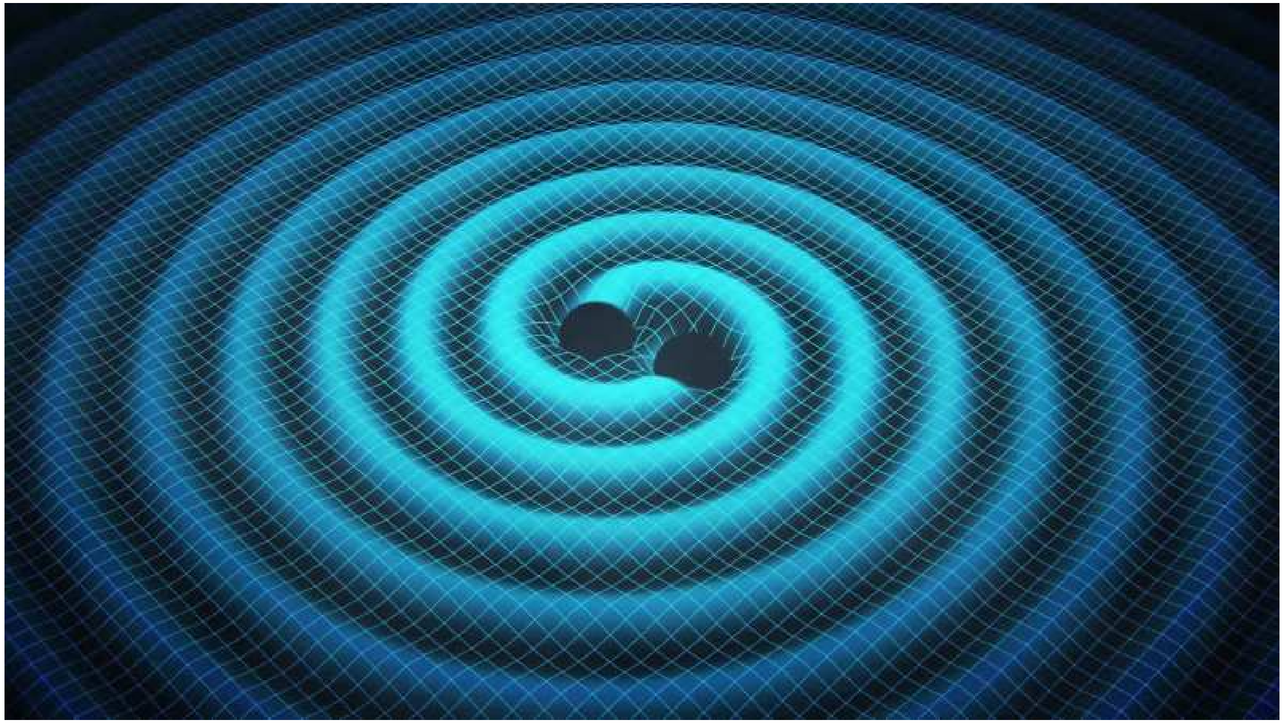
Relatividad y Geometría

Hechas la una para la otra



Bert Janssen

Dpto. de Física Teórica y del Cosmos &
Centro Andaluz de Física de Partículas Elementales

Plan de la charla

1. Relatividad Especial y geometría lorentziana

- Dilatación temporal & contraccion de Lorentz
- Espacio de Minkowski

Plan de la charla

1. Relatividad Especial y geometría lorentziana

- Dilatación temporal & contraccion de Lorentz
- Espacio de Minkowski

2. Relatividad General y geometría riemanniana

- Principio de Equivalencia
- Geometría riemanniana
- Gravedad y curvatura

Plan de la charla

1. Relatividad Especial y geometría lorentziana

- Dilatación temporal & contraccion de Lorentz
- Espacio de Minkowski

2. Relatividad General y geometría riemanniana

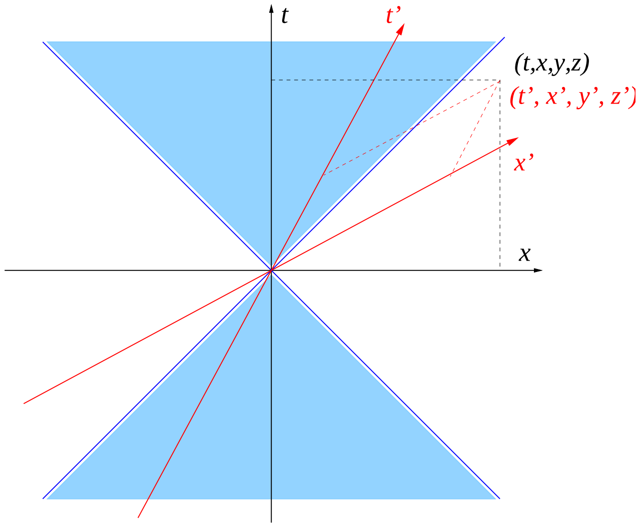
- Principio de Equivalencia
- Geometría riemanniana
- Gravedad y curvatura

3. Manifestaciones de espaciotiempo curvo

- Efectos en sistema solar
- Ondas gravitacionales
- Cosmología
- Agujeros negros

Parte I

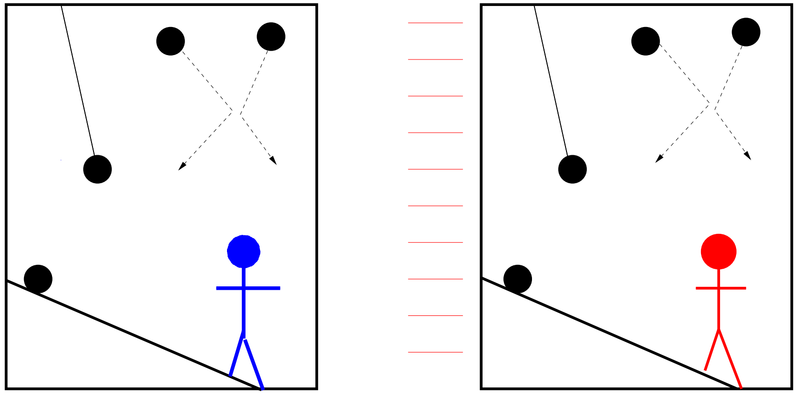
Relatividad Especial y geometría lorentziana



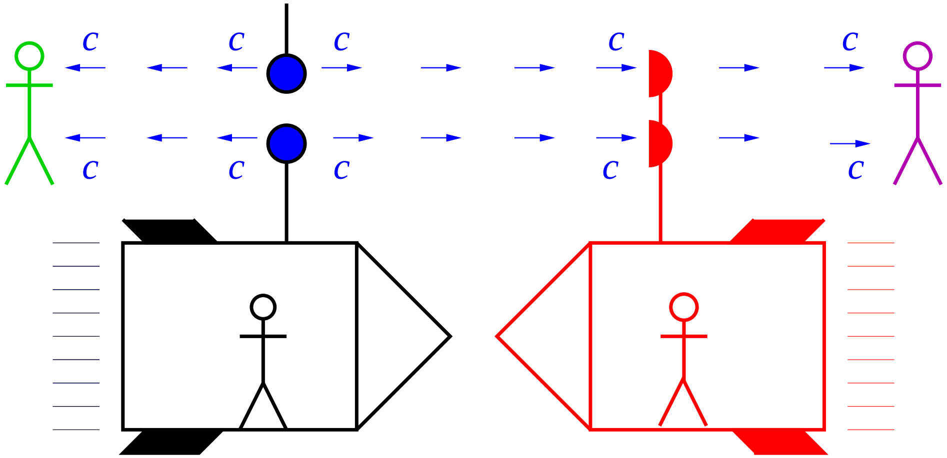
Postulados de la Relatividad especial:

Einstein (1905)

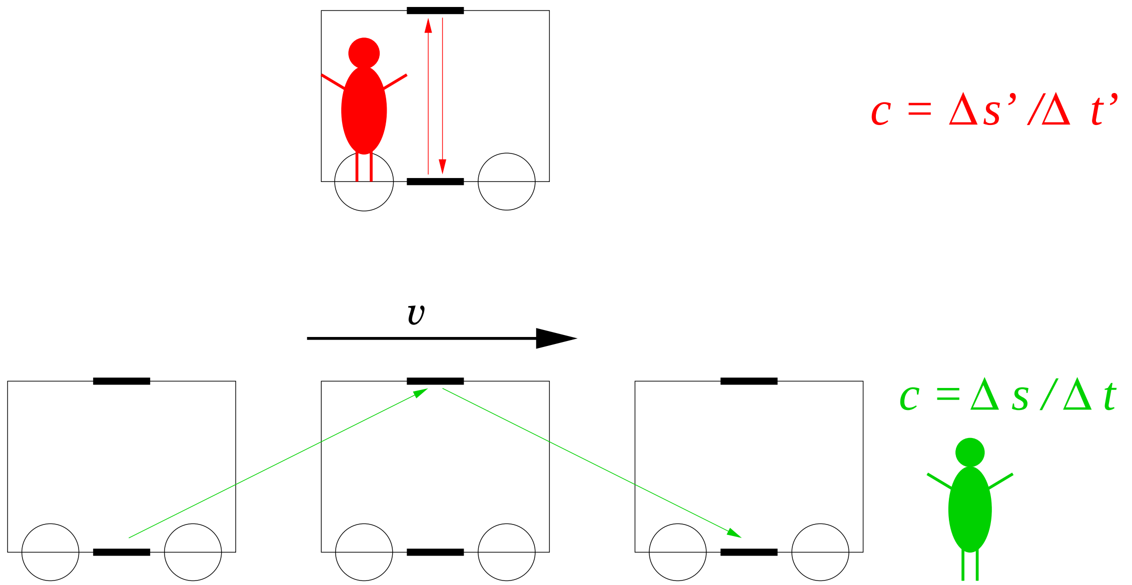
- Todos los observadores inerciales son equivalentes



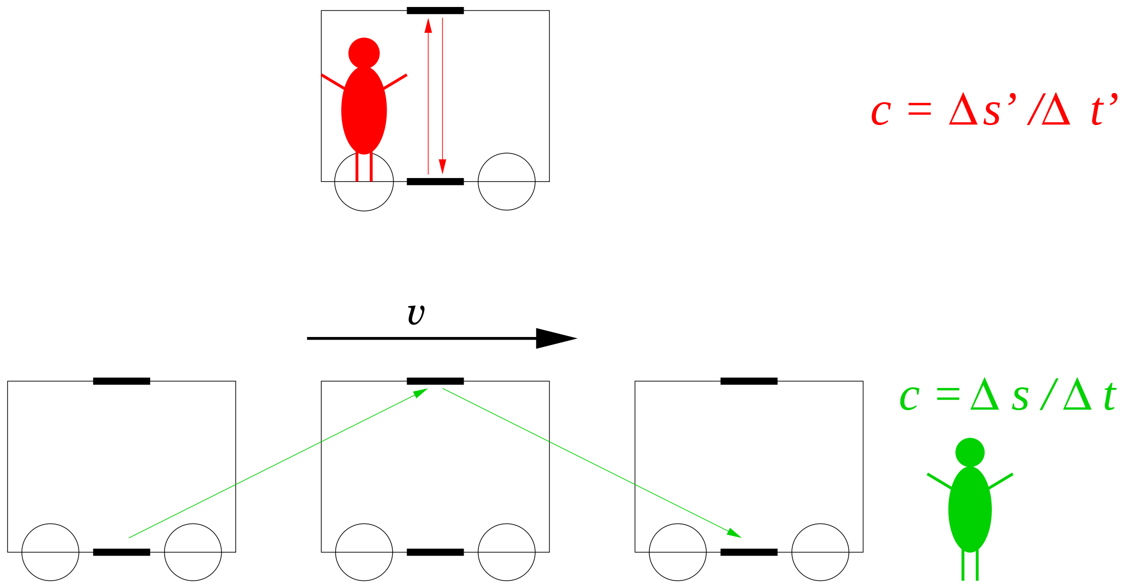
- La velocidad de la luz es constante, independientemente del estado de movimiento de la fuente o del detector



Dilatación temporal:



Dilatación temporal:

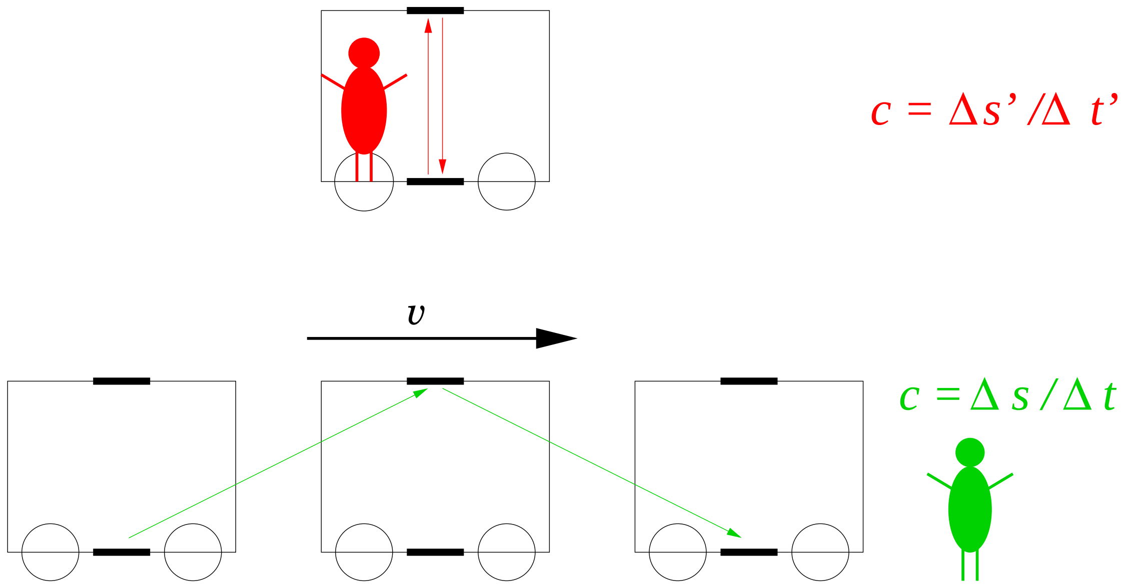


$$\left.\begin{array}{rcl} c & = & c \\ \Delta s'_{AC} & < & \Delta s_{AC} \end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta t'_{AC} < \Delta t_{AC} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Entre los eventos A y C:

- ha pasado más tiempo para el jefe de estación que para el maquinista

Dilatación temporal:

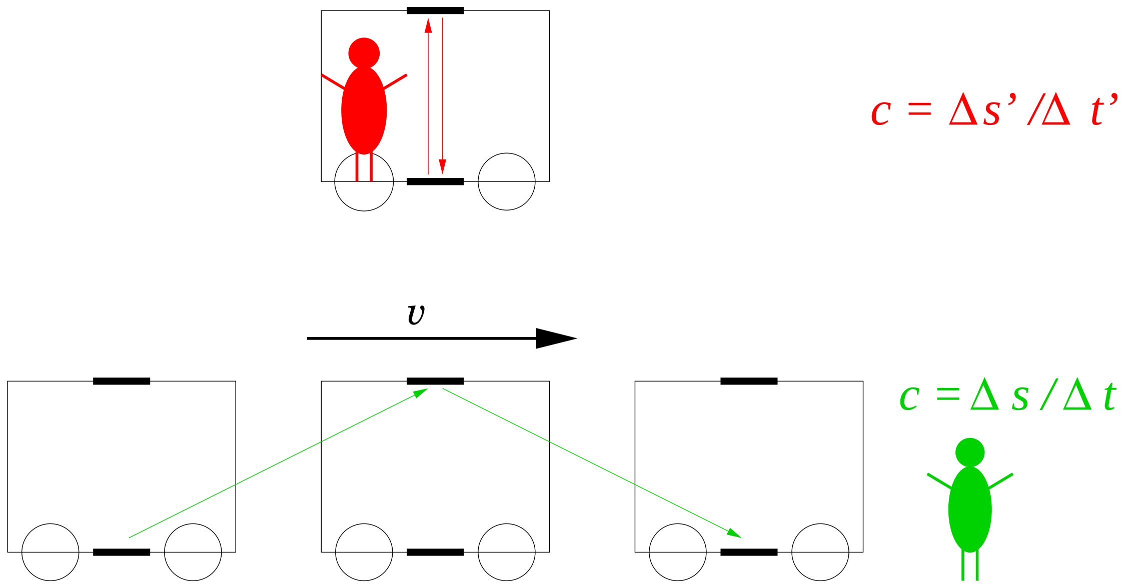


$$\left.\begin{array}{l} c \;=\; c \\ \Delta s'_{AC} \;<\; \Delta s_{AC} \end{array}\right\} \Longrightarrow \;\; \Delta t'_{AC} \;<\; \Delta t_{AC} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Entre los eventos A y C:

- ha pasado más tiempo para el jefe de estación que para el maquinista
- el reloj del jefe de estación ha avanzado más que el del maquinista

Dilatación temporal:



$$\left.\begin{array}{rcl} c & = & c \\ \Delta s'_{AC} & < & \Delta s_{AC} \end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta t'_{AC} < \Delta t_{AC} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

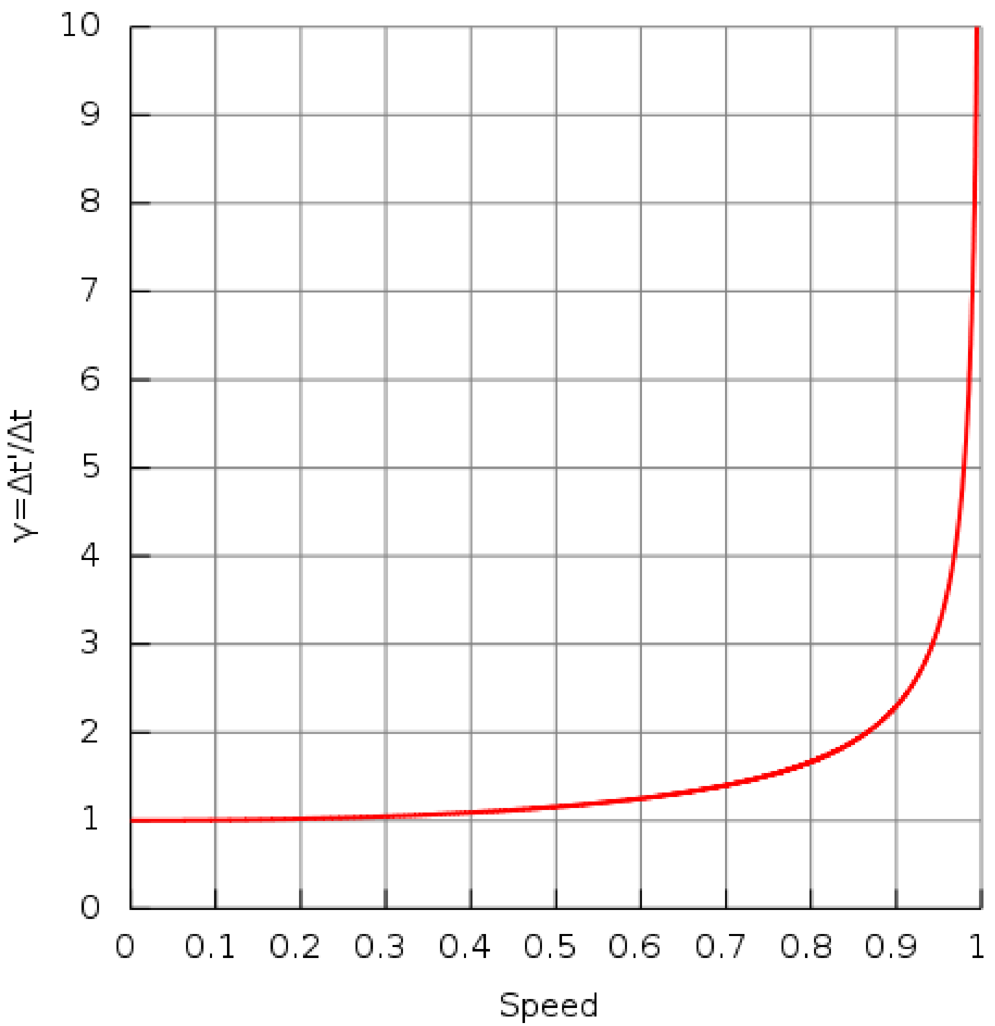
Entre los eventos A y C:

- ha pasado más tiempo para el jefe de estación que para el maquinista
- el reloj del jefe de estación ha avanzado más que el del maquinista
- el jefe de estación ha envejecido más que el maquinista

Dilatación temporal:

El tiempo corre más lento para los observadores en movimiento

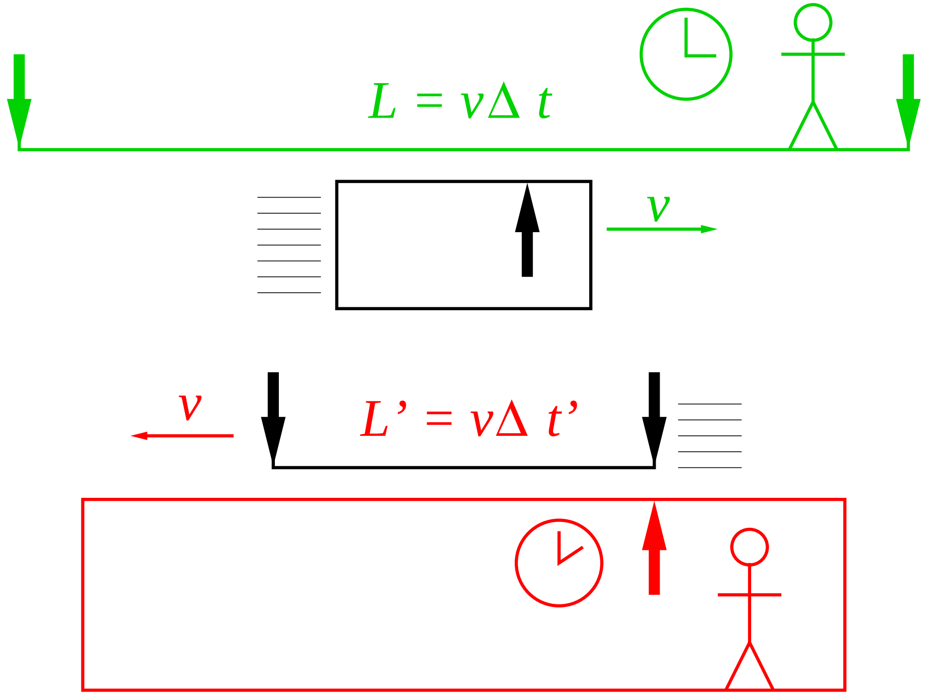
Efectos apreciables a partir de $v \sim 0,3\,c \approx 100\,000\,km/s$



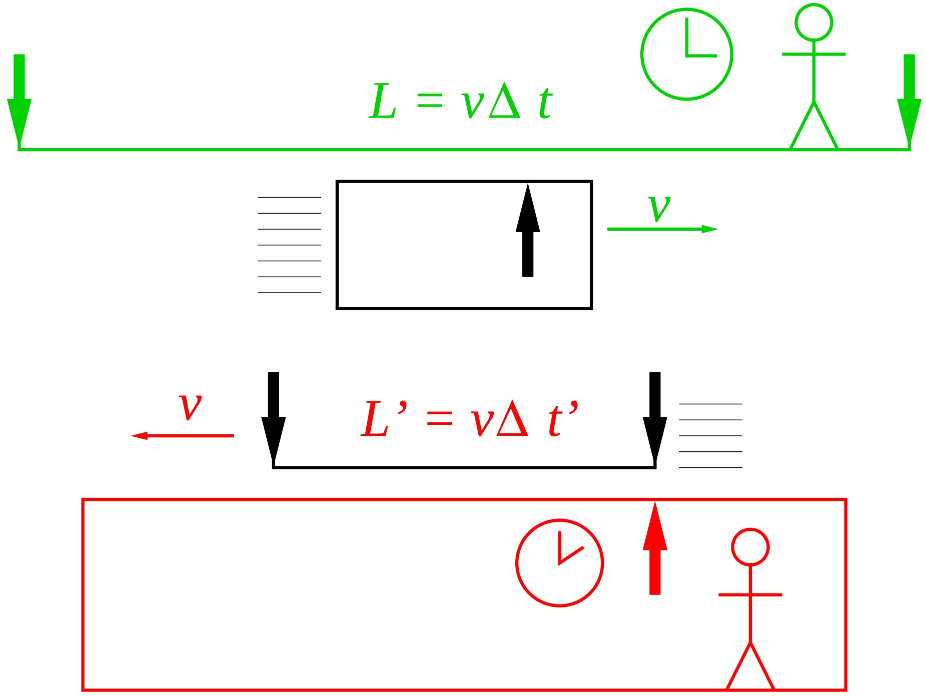
$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\begin{aligned} v \ll c: &\quad t' \approx t, \\ v \approx c: &\quad t' \gg t, \\ v \to c: &\quad t' \to \infty \end{aligned}$$

El jefe de estación y el maquinista miden la longitud del andén



El jefe de estación y el maquinista miden la longitud del andén



$$\left.\begin{array}{l} v \;=\; v \\ \Delta t' \;<\; \Delta t \end{array}\right\} \Longrightarrow \; L' \;<\; L \qquad \Longrightarrow \qquad L' = L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

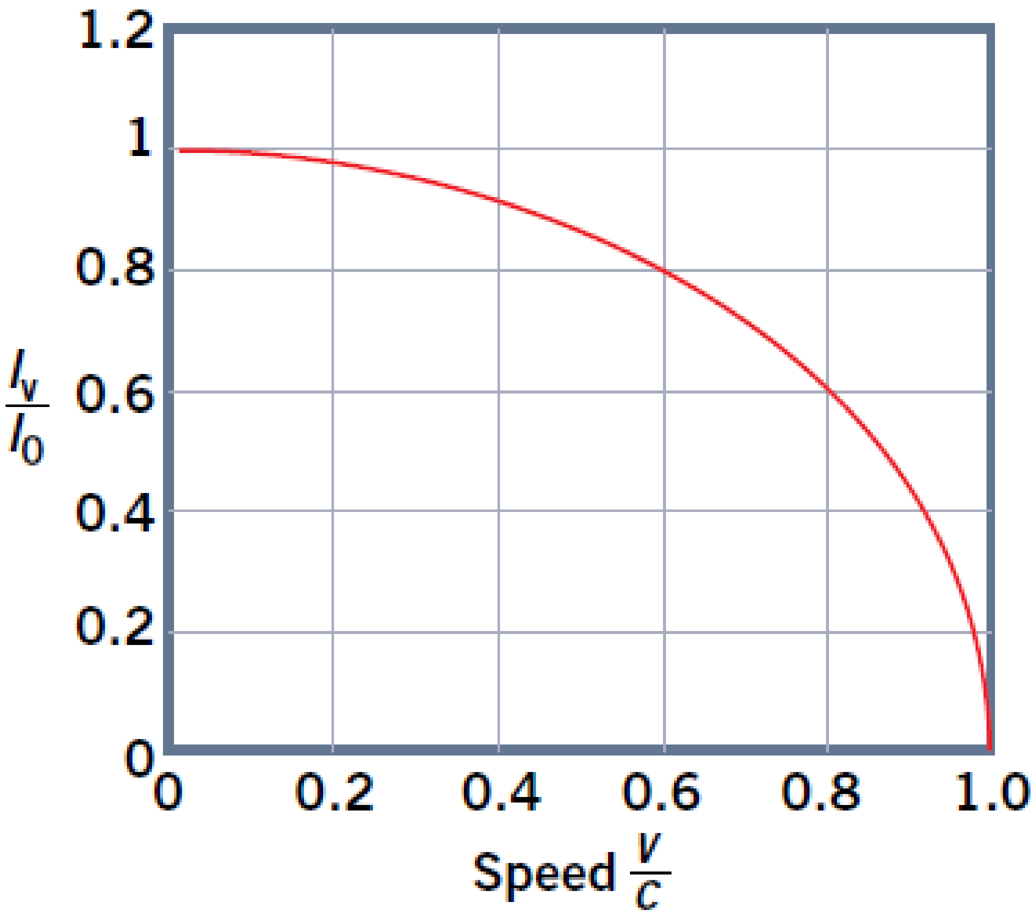
$\longrightarrow$ El andén es más corto para el maquinista que para el jefe de estación

Contracción de Lorentz:

Los objetos en movimiento son más cortos que en reposo

Las distancias en movimiento son más cortas que en reposo

Efectos notable a partir de $v \sim 0,1c \approx 30\,000\, km/s$



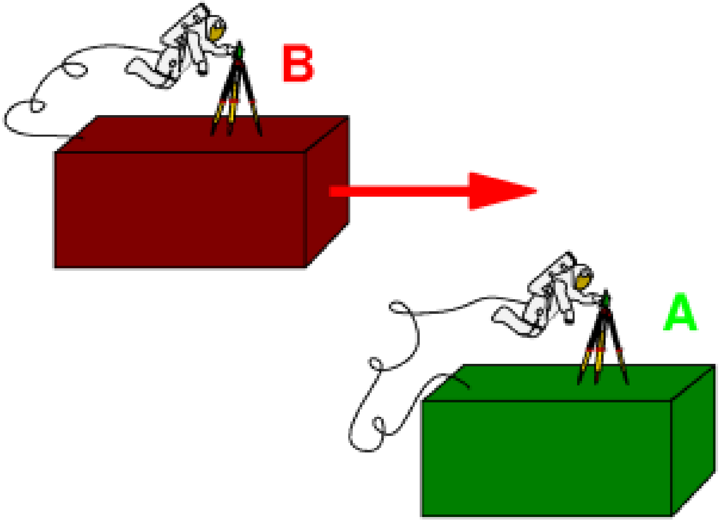
$$L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$v \ll c : \quad L' \approx L$$

$$v \approx c : \quad L' \ll L$$

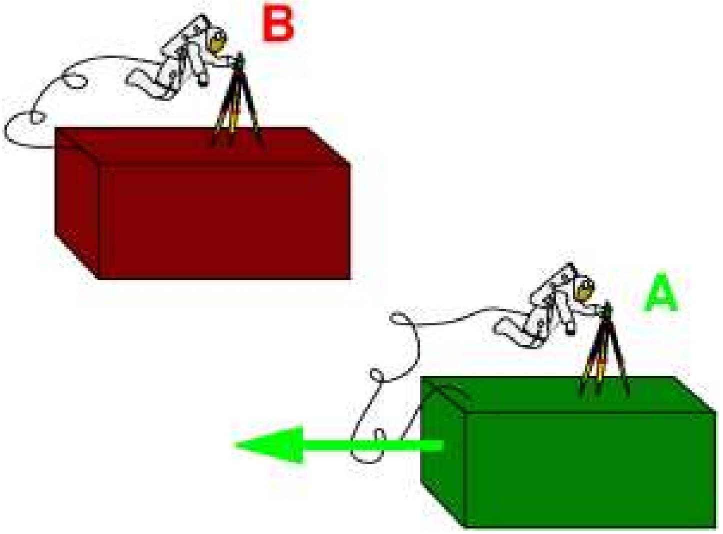
$$v \to c : \quad L' \to 0$$

¿Quién realmente está en reposo y quién realmente se mueve?



Desde punto de vista de A:

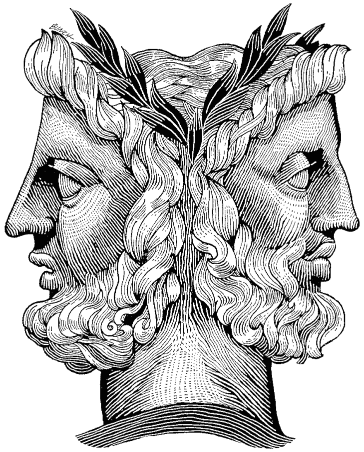
- el reloj de B corre más lento
- La nave de B es más corta

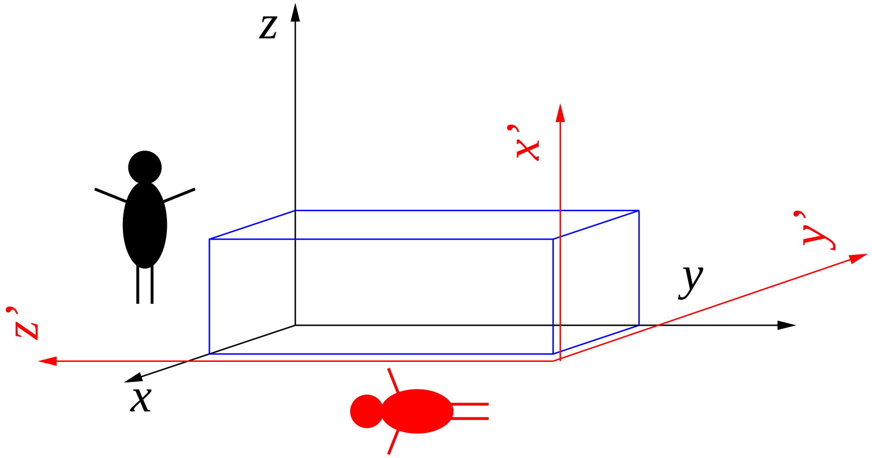


Desde punto de vista de B:

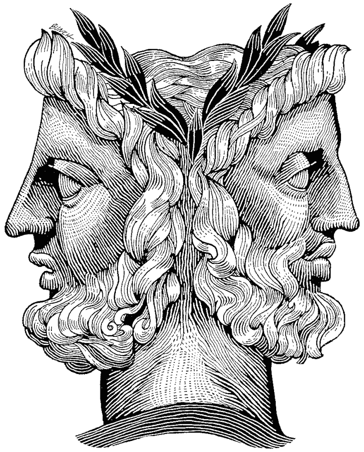
- el reloj de A corre más lento
- La nave de A es más corta

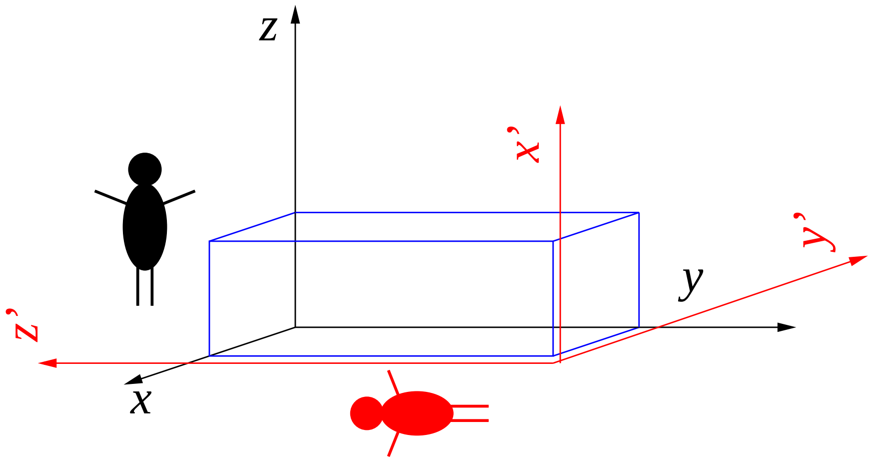
$\longrightarrow$ **¿Quién tiene razón?**



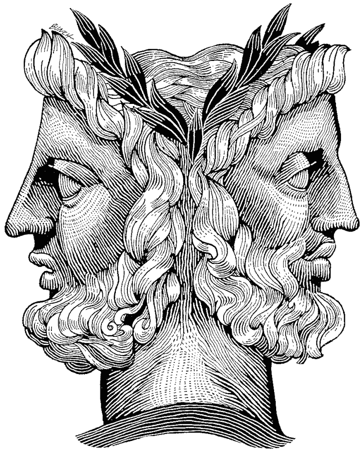


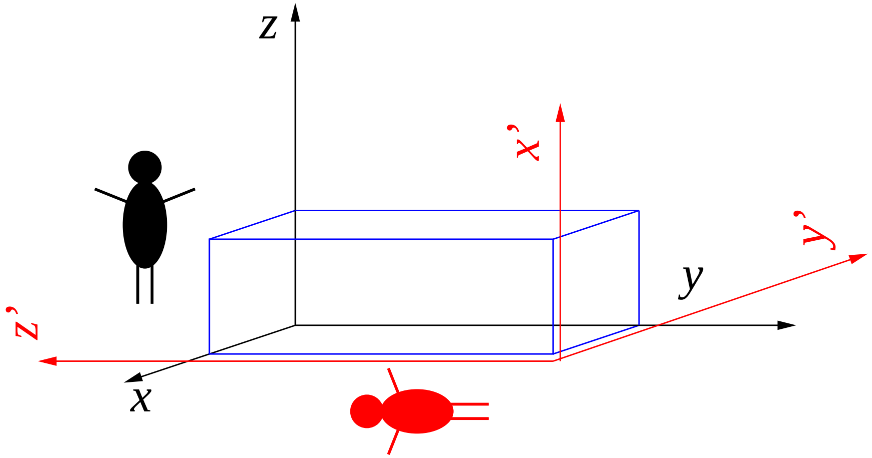
- Delante, atrás, izquierda, derecha, arriba, abajo son conceptos relativos





- Delante, atrás, izquierda, derecha, arriba, abajo son conceptos relativos
- "¿Cuánto mide la caja de alto?" no tiene respuesta objetiva
  "¿Cuánto tiempo ha pasado entre A y B?" no tiene respuesta objetiva

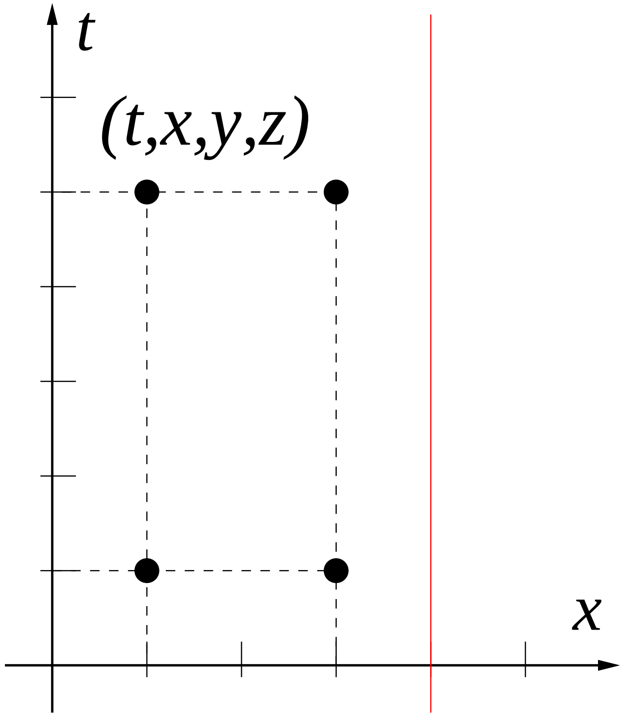




- Delante, atrás, izquierda, derecha, arriba, abajo son conceptos relativos
- "¿Cuánto mide la caja de alto?" no tiene respuesta objetiva
  "¿Cuánto tiempo ha pasado entre A y B?" no tiene respuesta objetiva
- Contraintuitivo, pero no inconsistente
- Tiempo se comporta como dimensión más
  $\longrightarrow$ Estructura de espaciotiempo con coordenadas (t, x, y, z)

Hermann Minkowski (1907):

"A partir de ahora el espacio en sí mismo y el tiempo en sí mismo están destinados a diluirse en meras sombras y solo un tipo de unión de los dos conservará una realidad independiente."

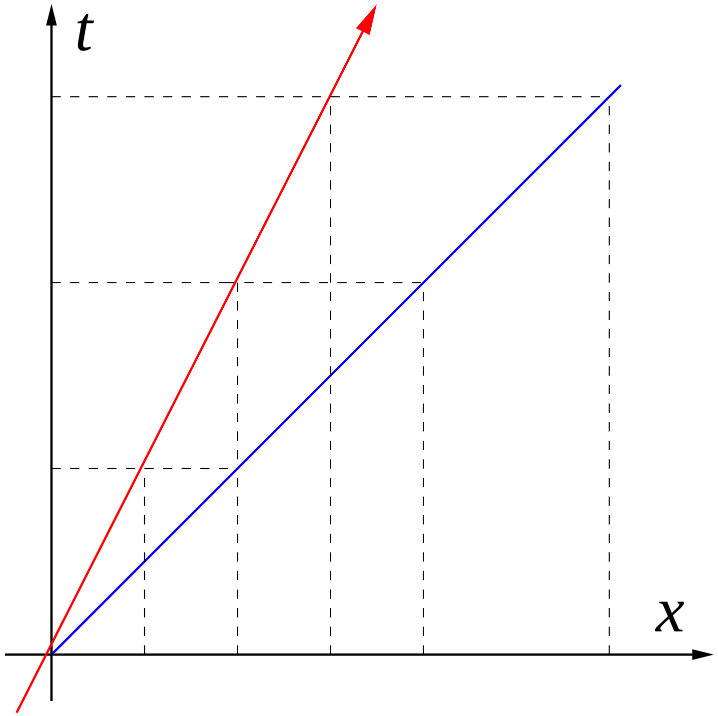


Evento se describe con 4 coordenadas espacio-temporales: $\vec{x} = (t,\ x,\ y,\ z\,)$

Curva temporal describe línea de universo de partícula

Hermann Minkowski (1907):

“A partir de ahora el espacio en sí mismo y el tiempo en sí mismo están destinados a diluirse en meras sombras y solo un tipo de unión de los dos conservará una realidad independiente.”

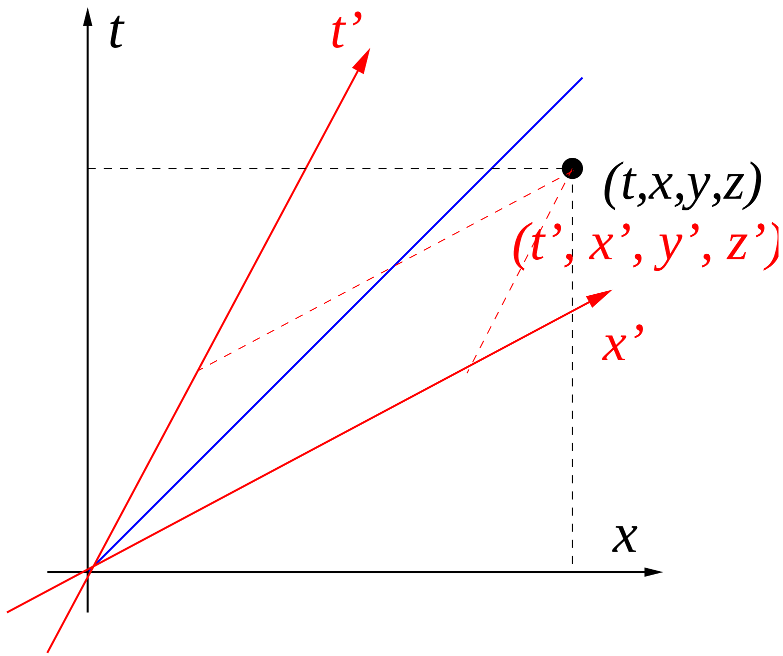


Un rayo de luz se mueve a velocidad c hacia la derecha

Un observador inercial se mueve a velocidad $v < c$ hacia la derecha

Hermann Minkowski (1907):

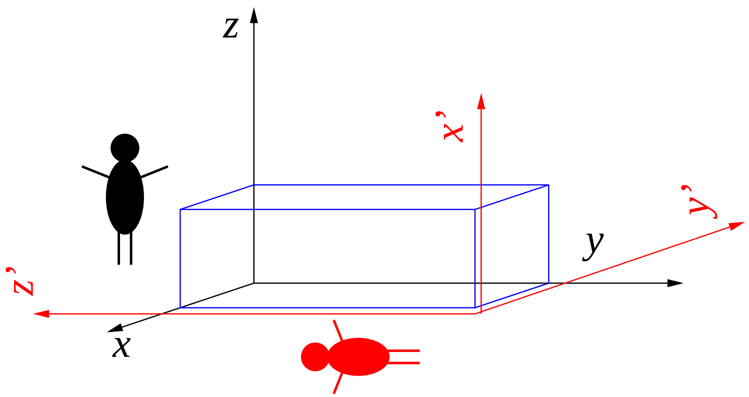
"A partir de ahora el espacio en sí mismo y el tiempo en sí mismo están destinados a diluirse en meras sombras y solo un tipo de unión de los dos conservará una realidad independiente."

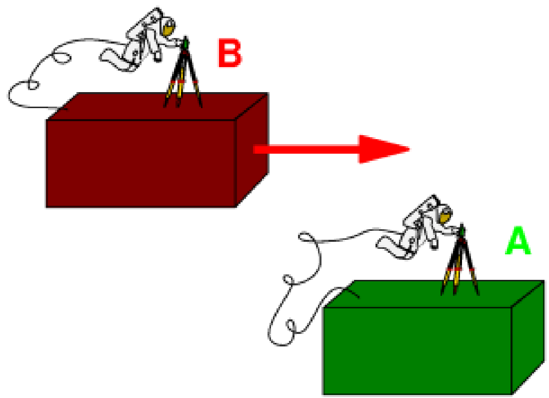


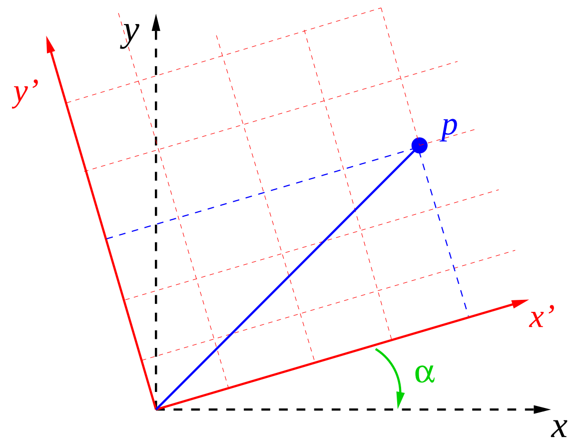
La velocidad de la luz es la misma para todos los obervadores

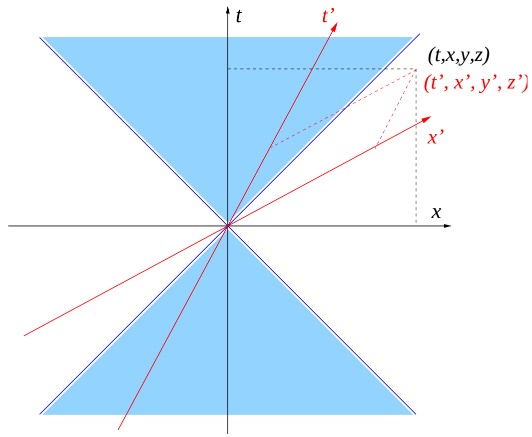
Cada observador describe los eventos en su propio sistema de referencia

Transformación de Lorentz $\sim$ rotación espacial









$$M^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^i{}_j = \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta & 0 & 0 \\ \sinh\beta & \cosh\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ rotación en plano yz

$\longrightarrow$ rotación en plano tx

$\longrightarrow$ t se comporta como dirección más!!

Espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$:

- Espacio vectorial 4-dimensional: $x = (x^0,\ x^2,\ x^2,\ x^3)$
- Norma no-definido positiva (lorentziana):

$$\|x\|^2 \ = \ (x^0)^2 \ - \ (x^1)^2 \ - \ (x^2)^2 \ - \ (x^2)^2$$

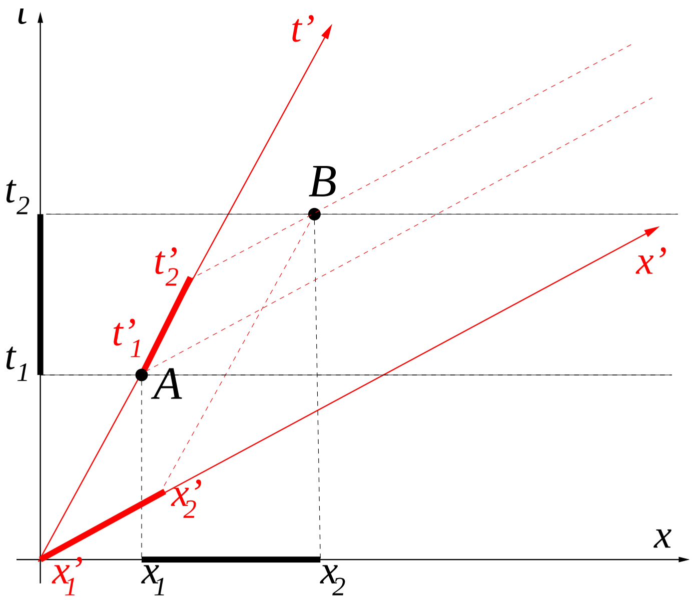
Espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$:

- Espacio vectorial 4-dimensional: $x = (x^0,\ x^2,\ x^2,\ x^3)$

- Norma no-definido positiva (lorentziana):

$$\|x\|^2 \ = \ (x^0)^2 \ - \ (x^1)^2 \ - \ (x^2)^2 \ - \ (x^2)^2$$

- Observadores inerciales son sistemas de coordenadas cartesianas
  Transformaciones de Lorentz son transf ortogonales entre bases



$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

$$(t')^2 \ - (x')^2 \ = \ t^2 \ - x^2$$

$$\eta \ = \ \Lambda^t\, \eta\, \Lambda \qquad\qquad \Lambda \in SO(1,3)$$

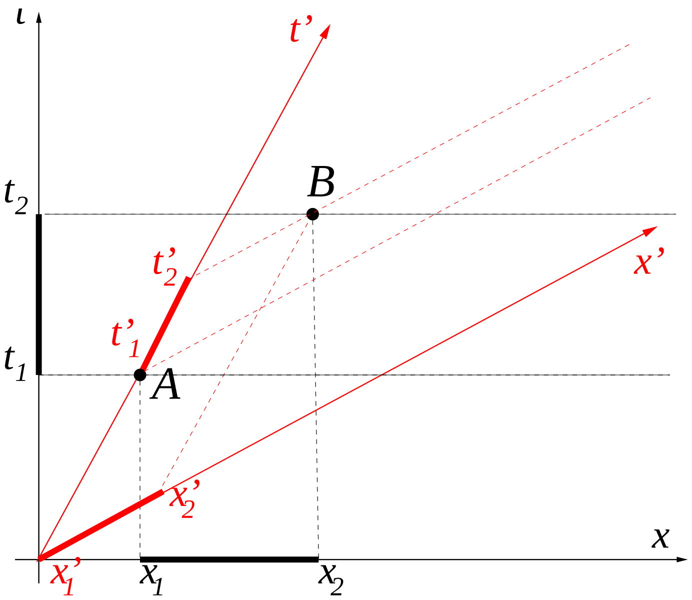
Espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$:

- Espacio vectorial 4-dimensional: $x = (x^0,\ x^2,\ x^2,\ x^3)$

- Norma no-definido positiva (lorentziana):

$$\|x\|^2 \;=\; (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^2)^2$$

- Observadores inerciales son sistemas de coordenadas cartesianas
  Transformaciones de Lorentz son transf ortogonales entre bases



$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

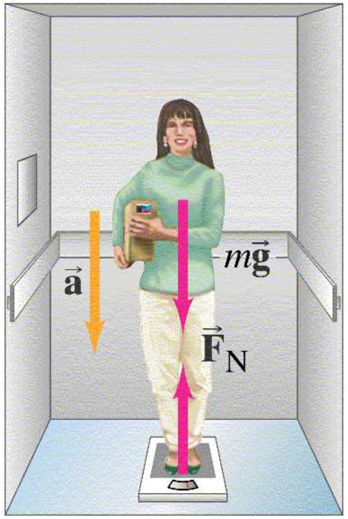
$$(t')^2 - (x')^2 = t^2 - x^2$$

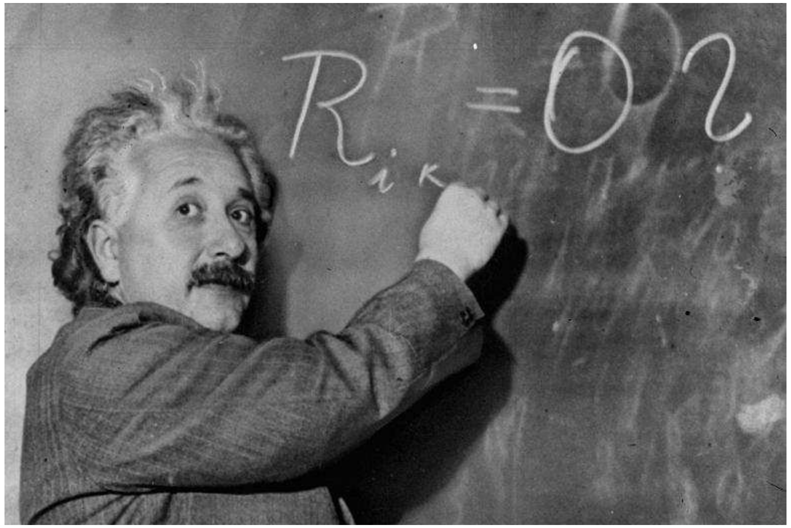
$$\eta = \Lambda^t \eta \Lambda \qquad \Lambda \in SO(1,3)$$

- Relatividad Especial = álgebra lineal en espacio de Minkowski

Parte II

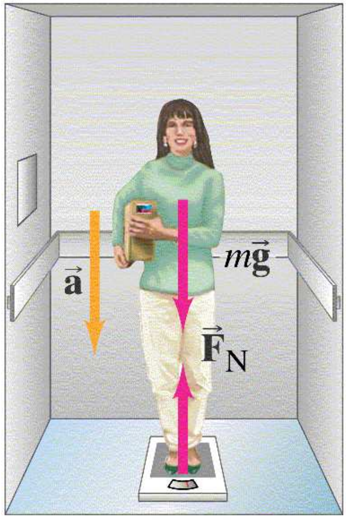
Relatividad General y geometría riemanniana





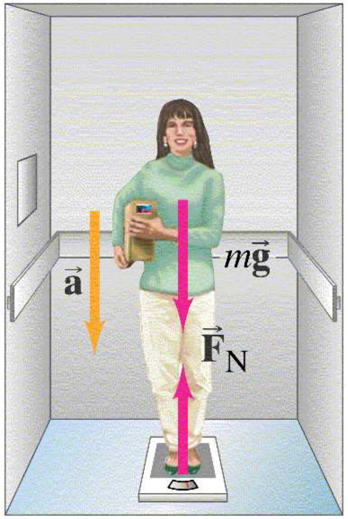
Principio de Equivalencia

La fuerza gravitatoria se puede aumentar o disminuir con aceleraciones...

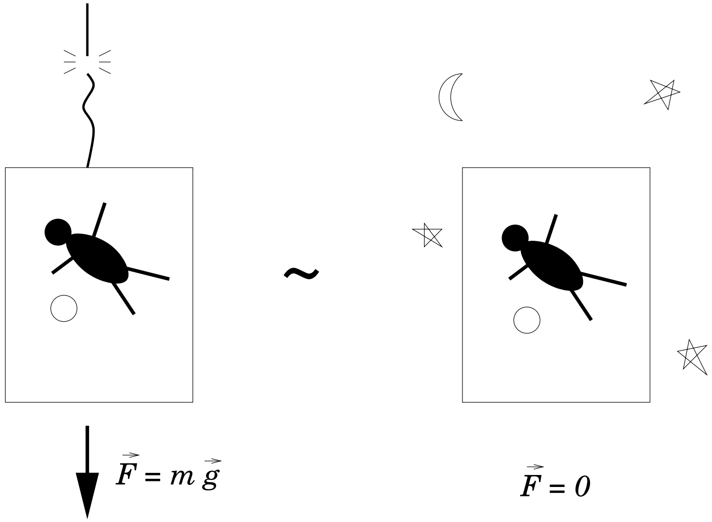


Principio de Equivalencia

La fuerza gravitatoria se puede aumentar o disminuir con aceleraciones...

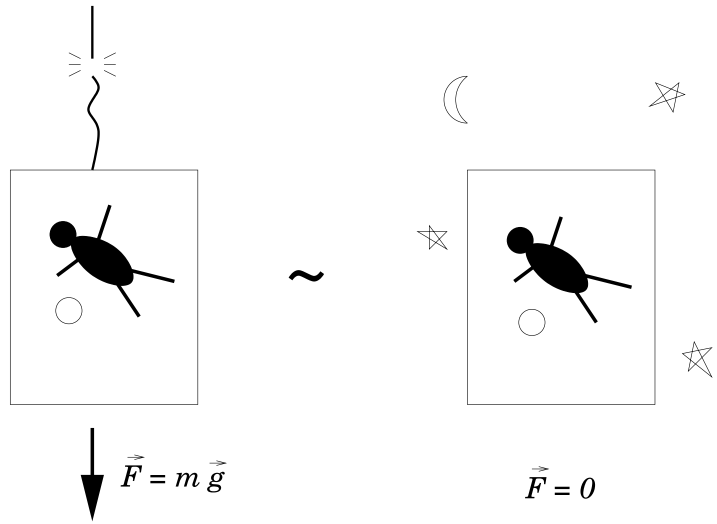


hasta tal punto que...

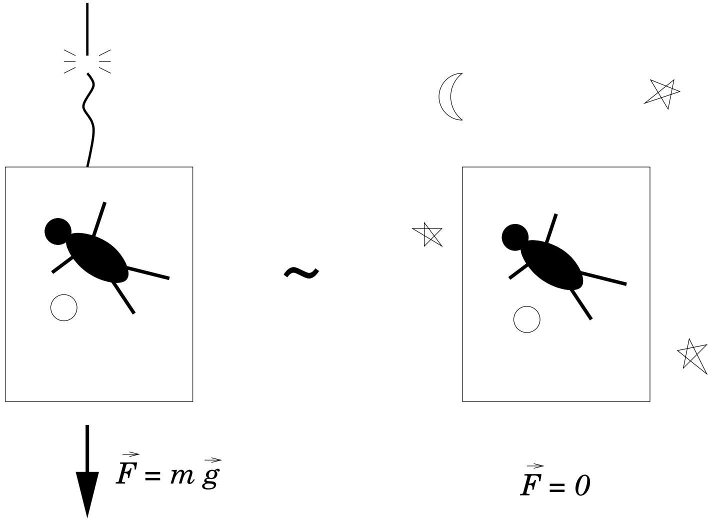


Un observador en caída libre es *localmente* indistinguible de un observador inercial

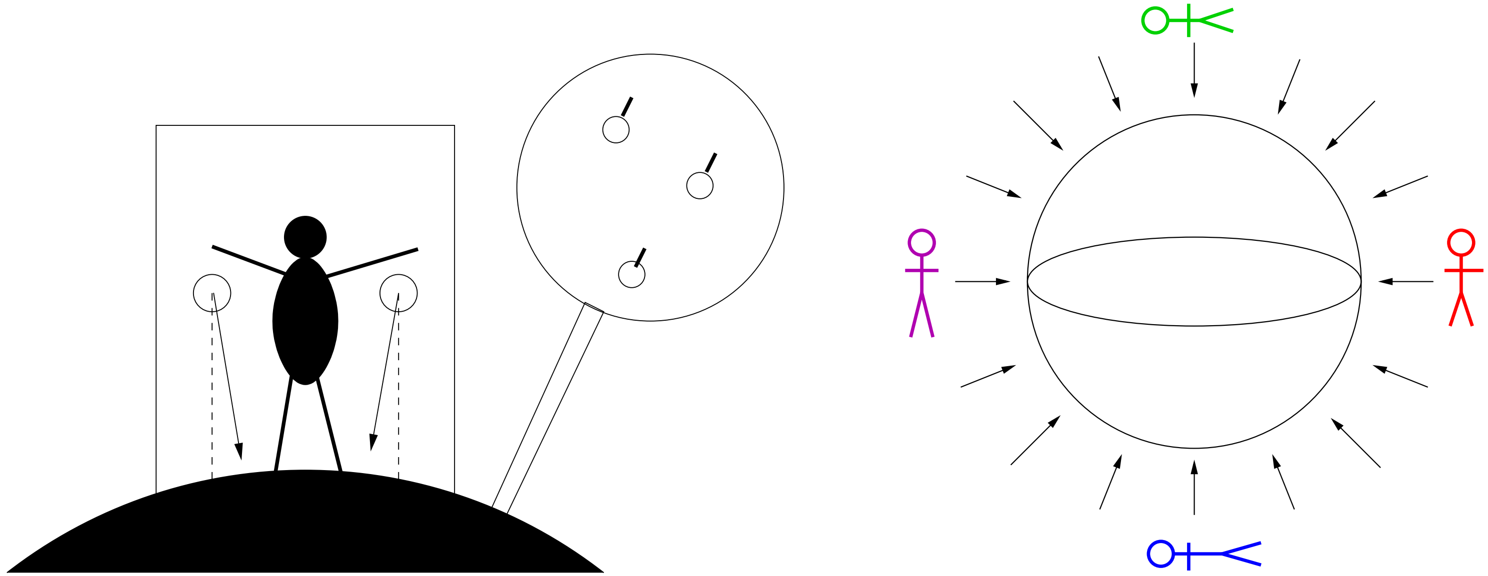
Se puede “apagar” la gravedad con un cambio de coordenadas...



Se puede “apagar” la gravedad con un cambio de coordenadas...

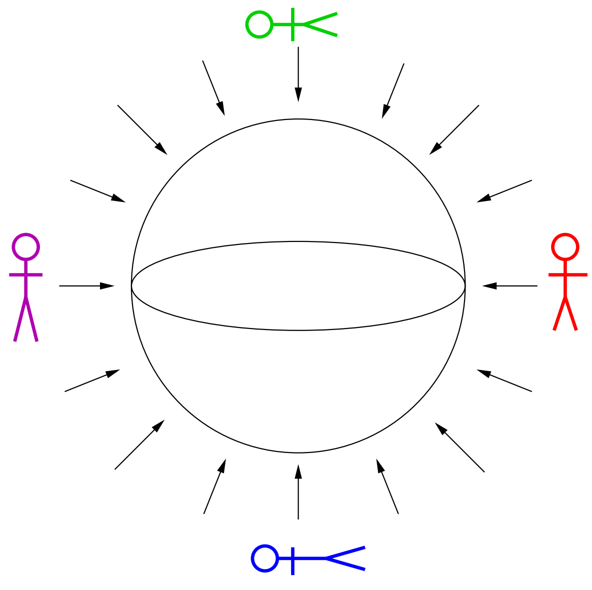


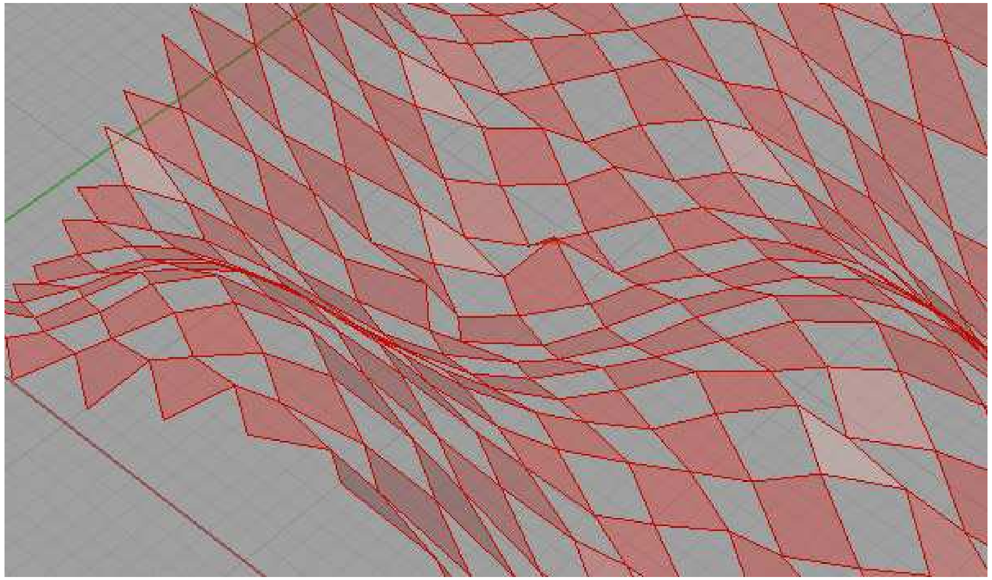
... pero solo localmente...



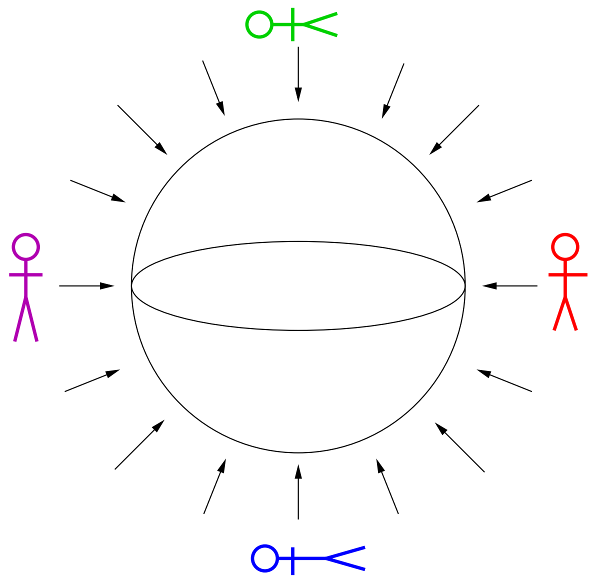
No hay sistema de referencia donde aceleración relativa se anula

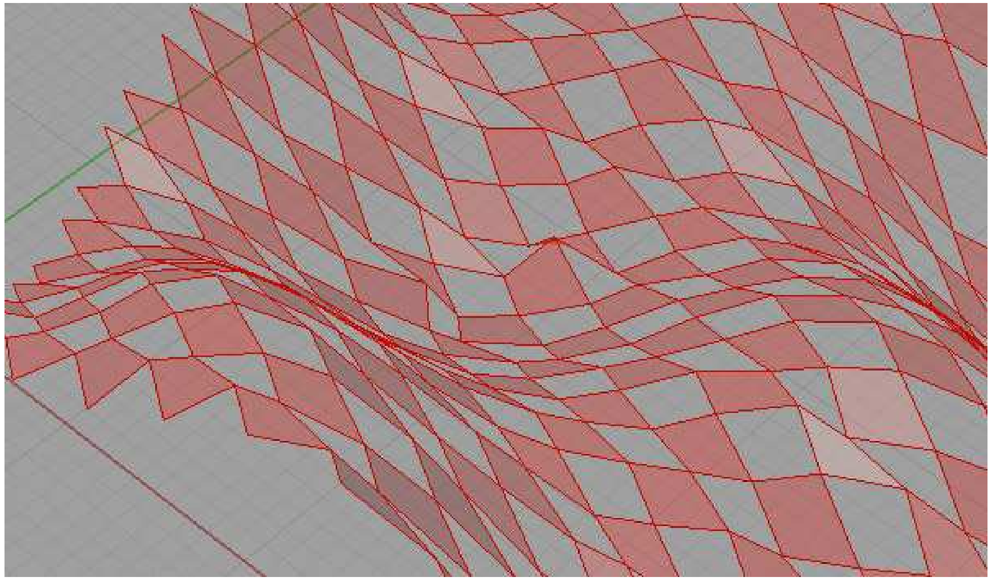
Cada observador ve espacio plano en su entorno local



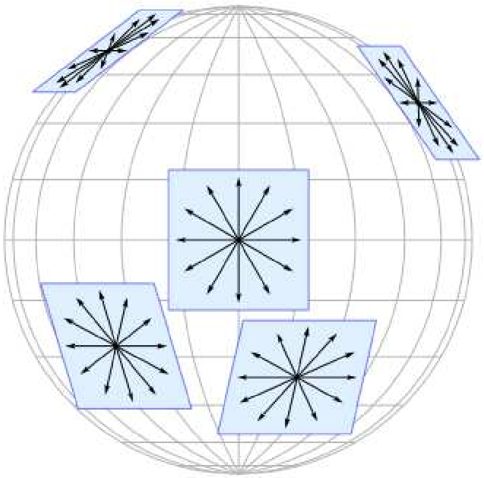


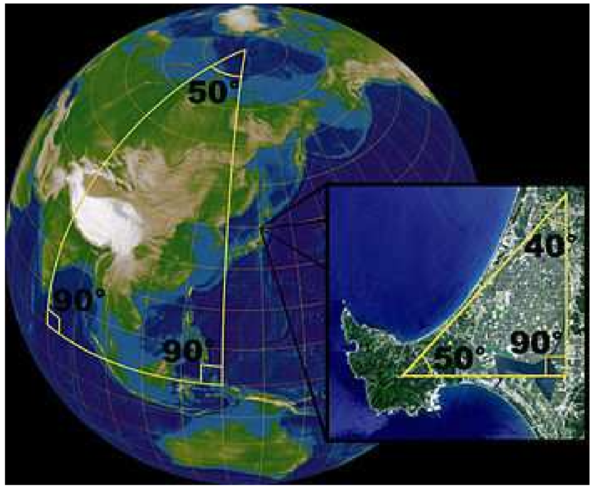
Cada observador ve espacio plano en su entorno local





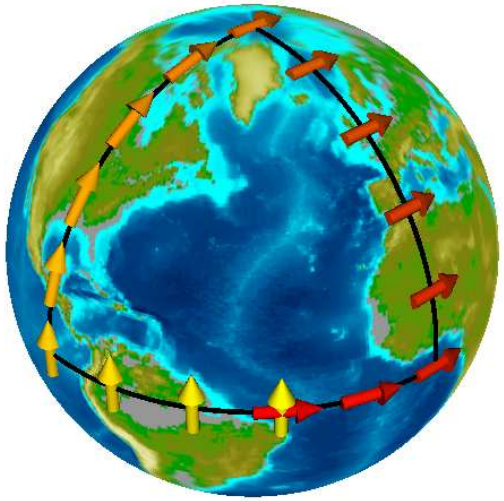
Variedad diferenciable = espacio localmente plano, pero no globalmente





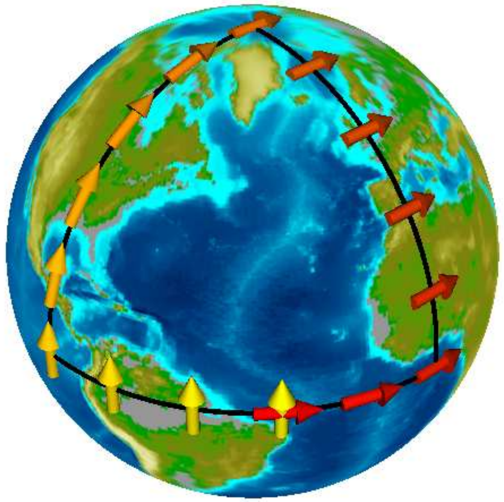
Geometría Riemanniana

Bernhard Riemann: Curvatura intrínseca de variedades arbitrarias

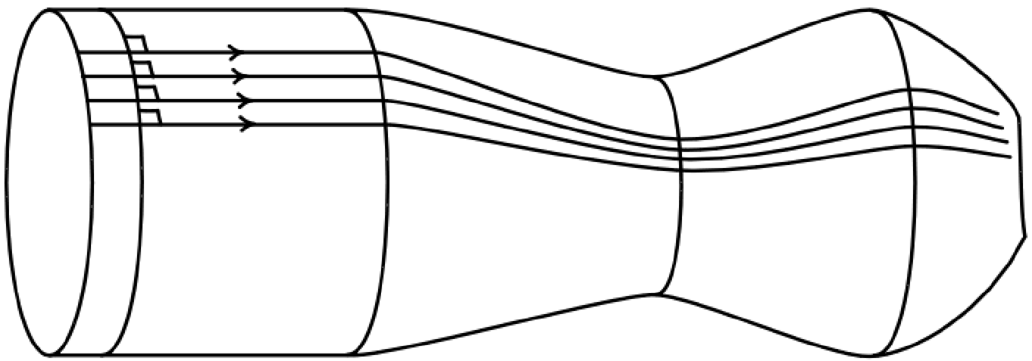
 

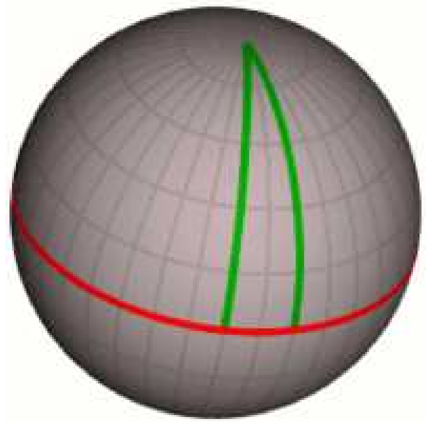
Geometría Riemanniana

Bernhard Riemann: Curvatura intrínseca de variedades arbitrarias



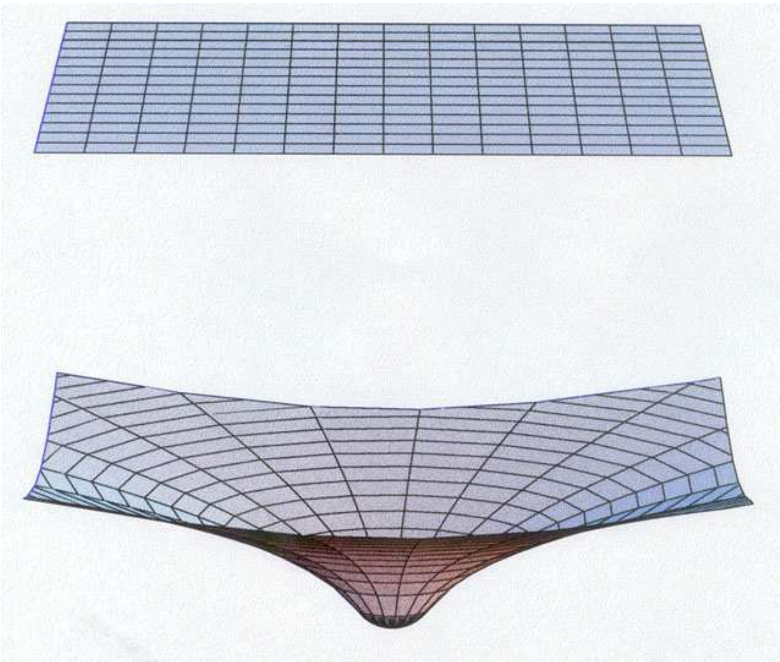
Desviación geodésica o fuerza misteriosa?

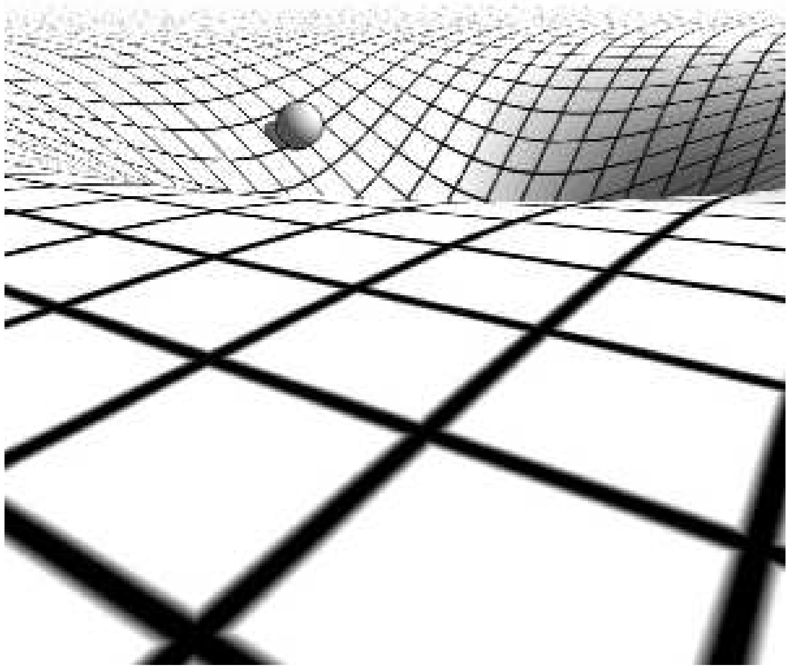




$\longrightarrow$ Conceptos claves para Relatividad General!

Gravedad = espaciotiempo curvo



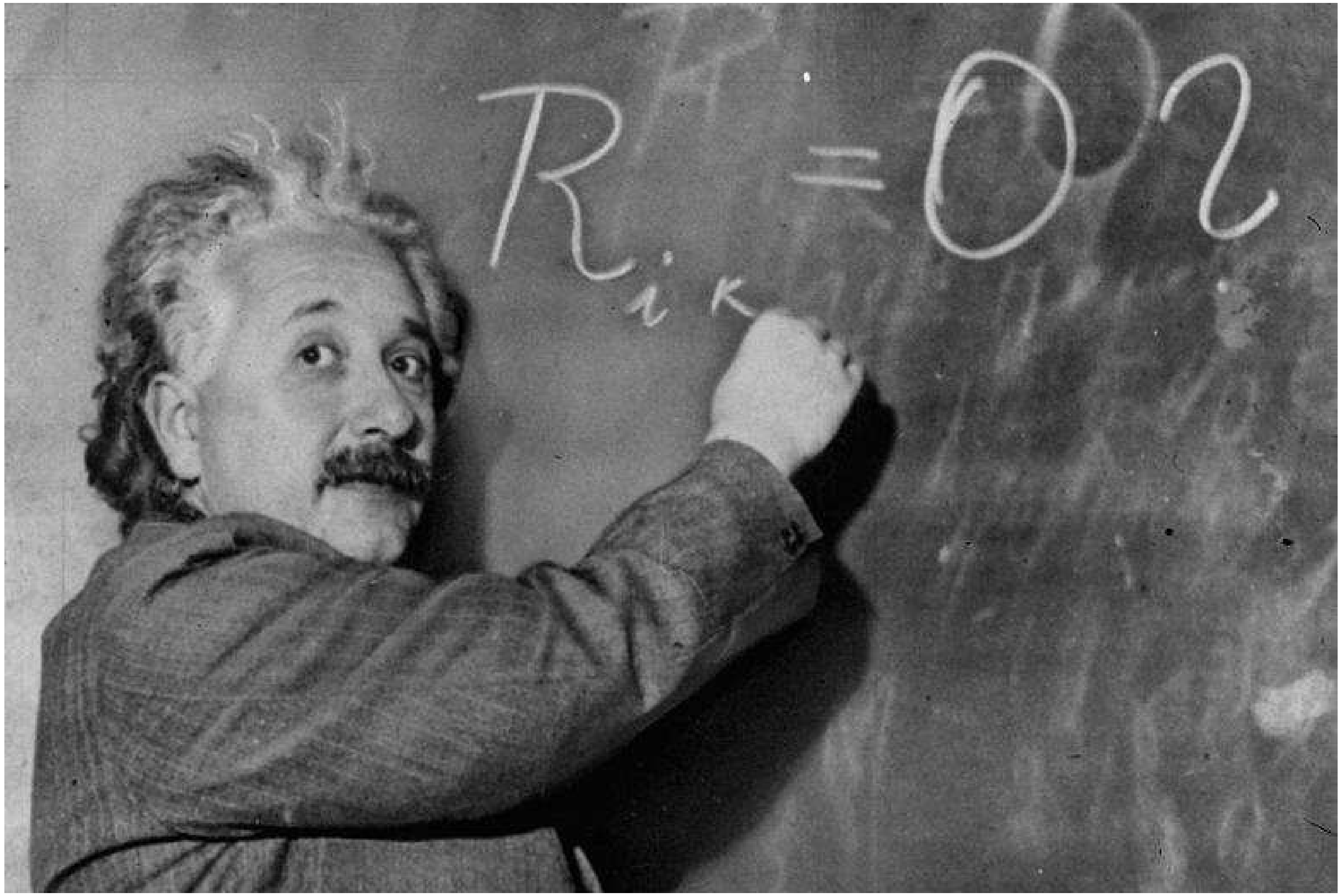


Newton: fuerza gravitatoria $\vec{F}_{\text{grav}} = m\,\ddot{\vec{x}}$

Einstein: curvas geodésicas $\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\,\dot{x}^\nu\,\dot{x}^\rho = 0$

Campo gravitatorio descrito por la ecuación de Einstein

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R = -\, \frac{8\pi G_N}{c^4}\, T_{\mu\nu}}$$



$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = - \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu}$$

- $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$: curvatura del espaciotiempo
- $T_{\mu\nu}$: contenido de energía y materia

$\longrightarrow$ Ecn diferencial para $g_{\mu\nu}$ para $T_{\mu\nu}$ dado

$$R_{\mu\nu} \; - \; \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R \; = - \; \frac{8\pi G_N}{c^4}\, T_{\mu\nu}$$

- $R_{\mu\nu} \; - \; \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R$: curvatura del espaciotiempo
- $T_{\mu\nu}$: contenido de energía y materia

$\longrightarrow$ Ecn diferencial para $g_{\mu\nu}$ para $T_{\mu\nu}$ dado

$$\nabla_{\dot{x}}\, \dot{x} \; = \; 0$$

- $x^\mu(\tau)$: trayectoria de la partícula
- $\nabla(g)$: derivada covariante

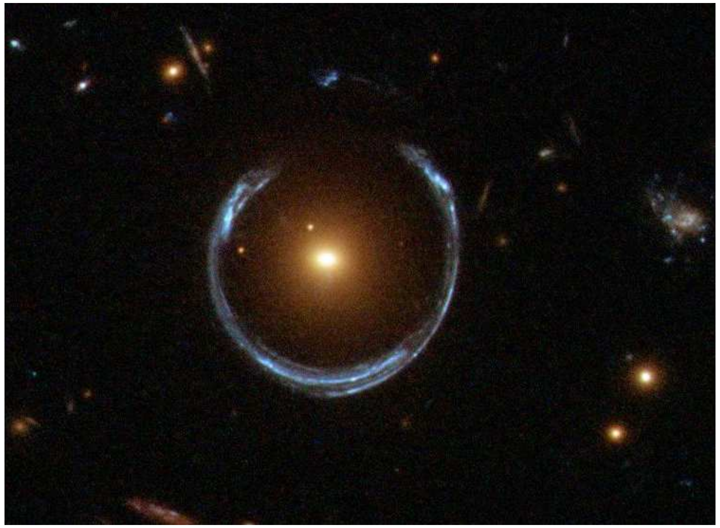
$\longrightarrow$ Ecn diferencial para $x^\mu(\tau)$ para $g_{\mu\nu}$ dado

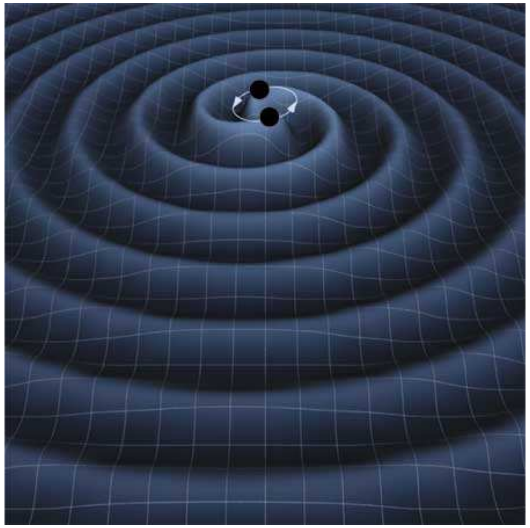
Resumen de Wheeler:

La materia indica cómo se curva el espacio.
El espacio indica cómo se mueve la materia.

Parte III

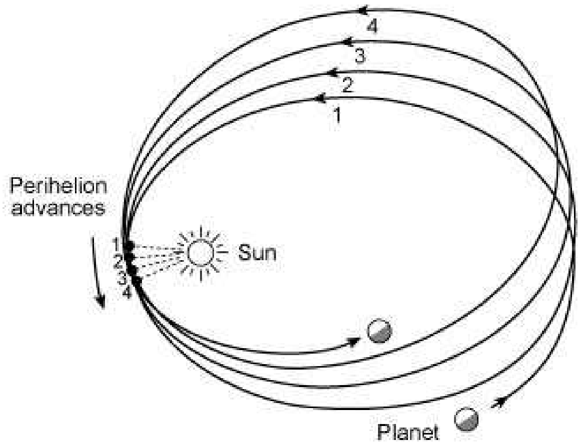
Manifestaciones de espaciotiempo curvo





Avance del perihelio

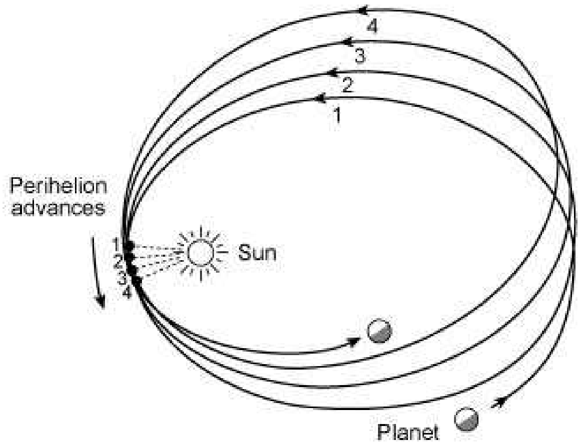
1859: Le Verrier descubrió precesión anómala del perihelio de Mercurio



Efecto de 574 arcoseg/siglo:
- 531 arcoseg/siglo debido a demás planetas
- 43 arcoseg/siglo sin explicar

Avance del perihelio

1859: Le Verrier descubrió precesión anómala del perihelio de Mercurio

Efecto de 574 arcoseg/siglo: • 531 arcoseg/siglo debido a demás planetas
• 43 arcoseg/siglo sin explicar

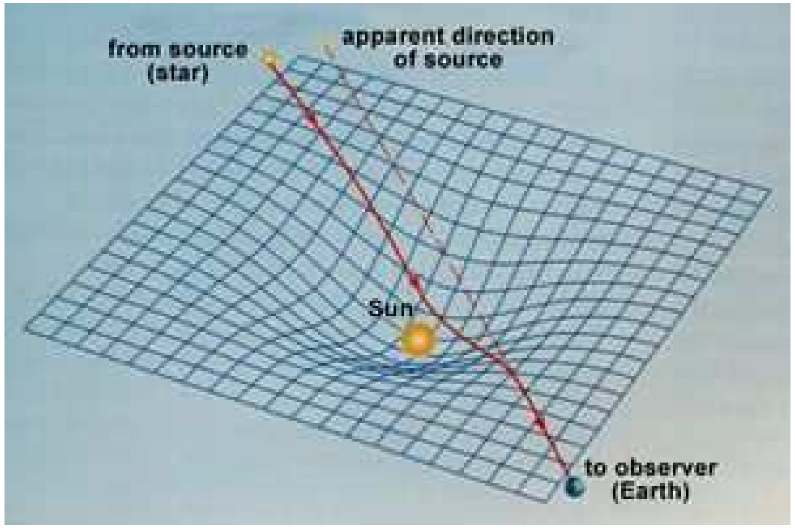
1915: Einstein calcula corrección al potencial newtoniano

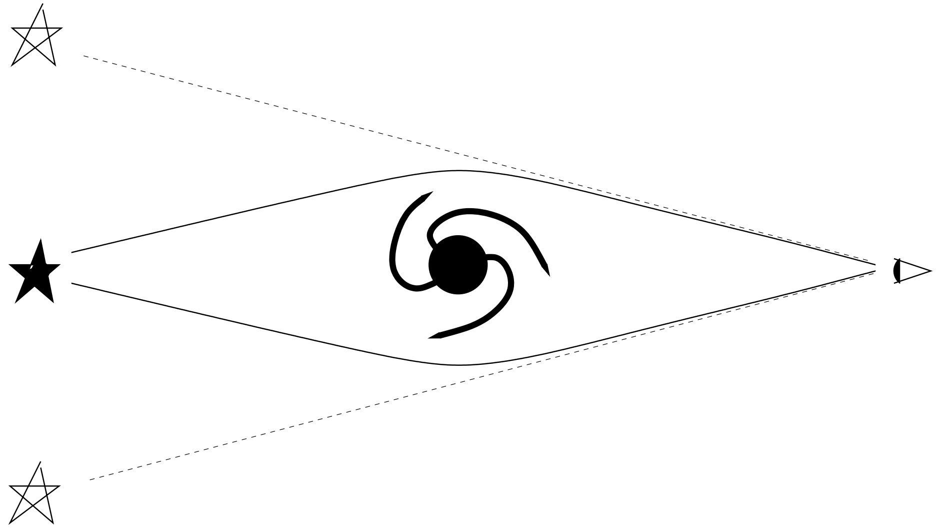
$$V_{\text{eff}}(r) \;=\; \Big(1 + \frac{\ell^2}{2r^2}\Big)\Big(1 - \frac{2Gm}{r}\Big) \;=\; 1 \;-\; \frac{2Gm}{r} \;+\; \frac{\ell^2}{2r^2} \;-\; \frac{Gm\ell^2}{r^3}$$

- $\frac{2Gm}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2}$: potencial newtoniano & barrera de momento angular
- $\frac{Gm\ell^2}{r^3}$: corrección relativista de $42{,}98 \pm 0{,}04$ arcoseg/siglo

Derviación de la luz

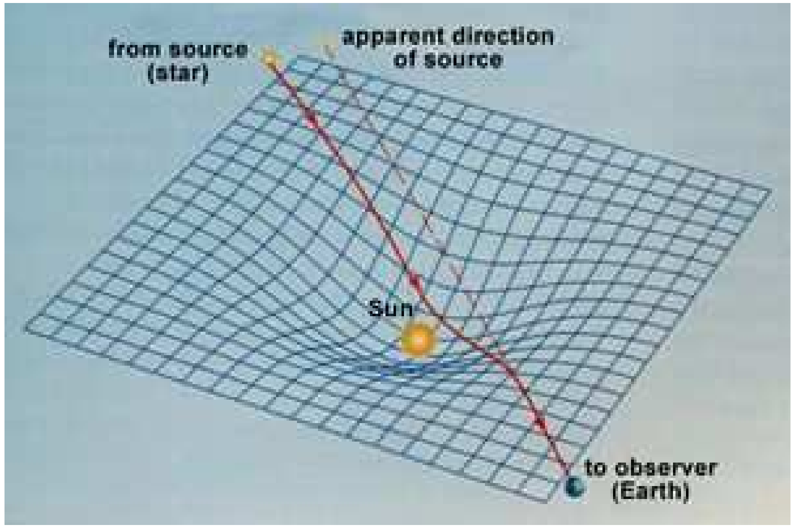
La luz sigue geodésicas nulas:

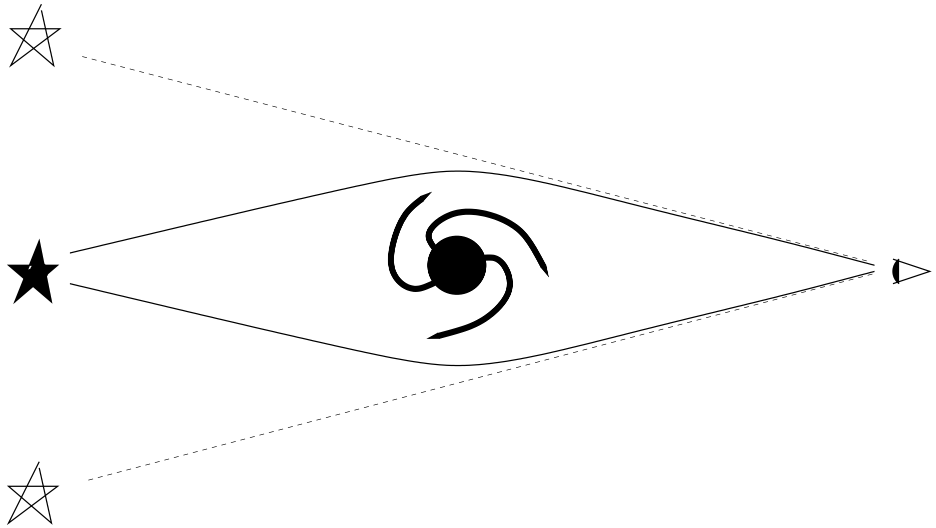




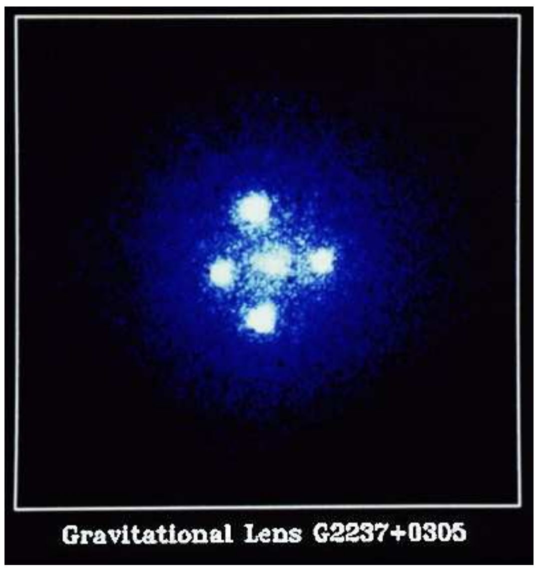
Derviación de la luz

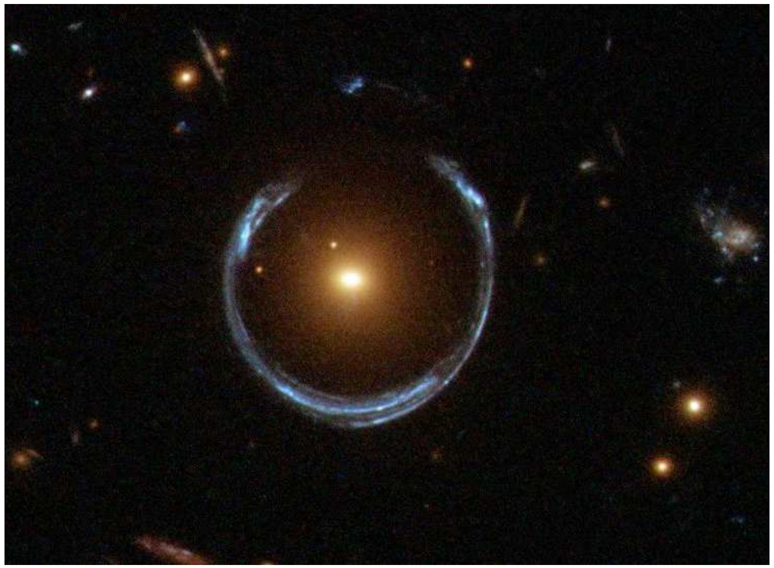
La luz sigue geodésicas nulas:





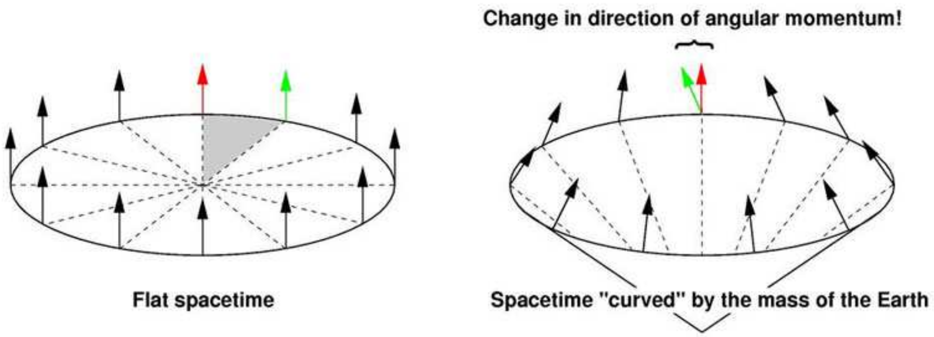
$\longrightarrow$ lentes gravitatorios y anillos de Einstein

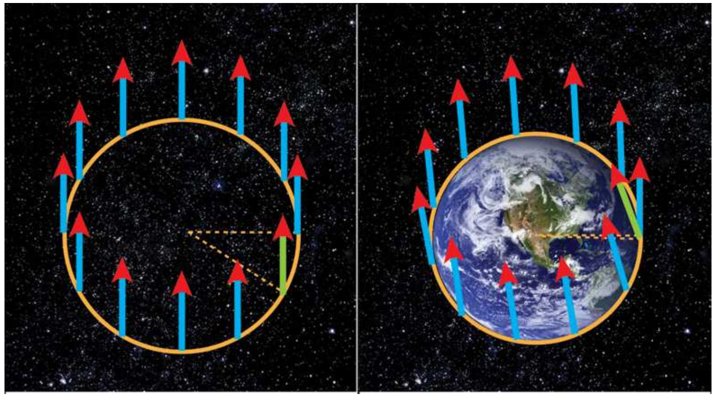




Efecto geodético

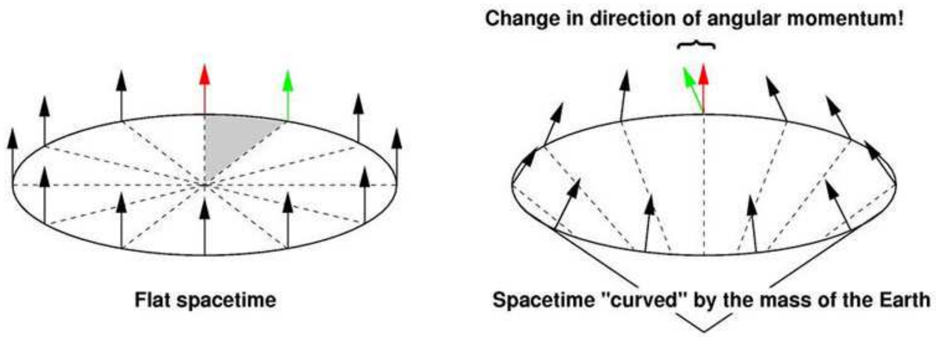
Precesión de giróscopo debido a la curvatura del espaciotiempo ($\Delta = 0,5\,\%$)

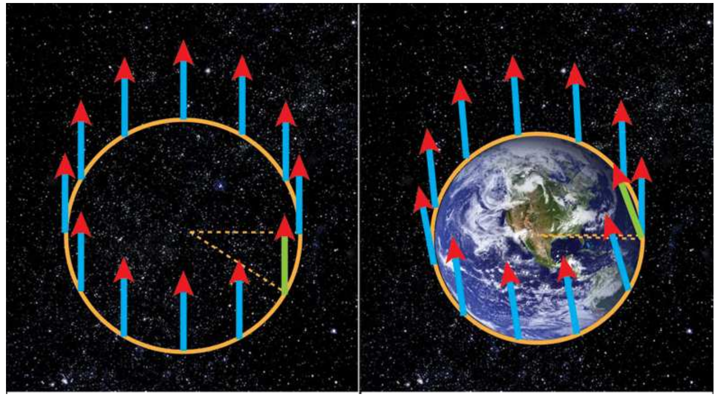




Efecto geodético

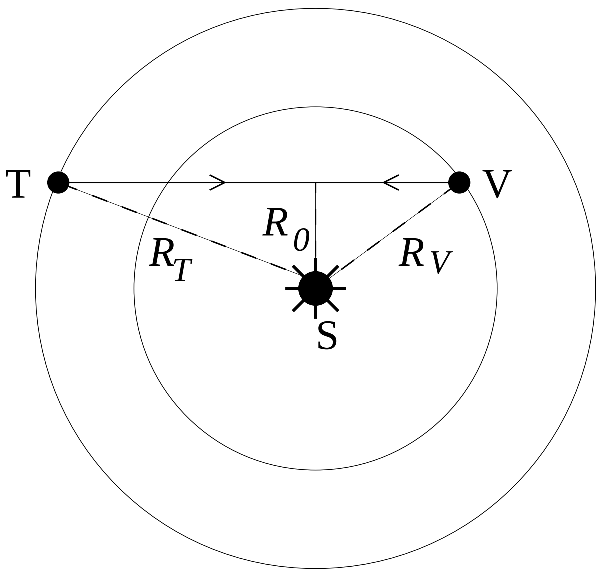
Precesión de giróscopo debido a la curvatura del espaciotiempo ($\Delta = 0,5\,\%$)

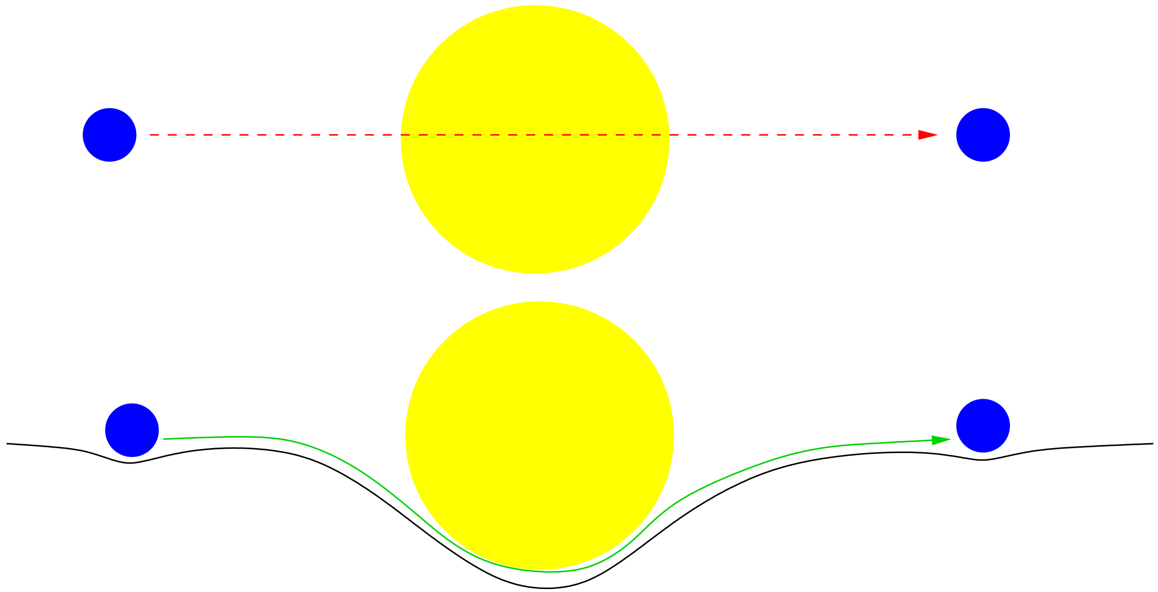




Efecto Shapiro

Retraso en señal al viajar por espaciotiempo curvo ($\Delta = 0,0012\,\%$)





Ondas gravitacionales

El espaciotiempo no es un escenario estático

Es una parte dinámica de la física

NO

más como...

Ondas gravitacionales

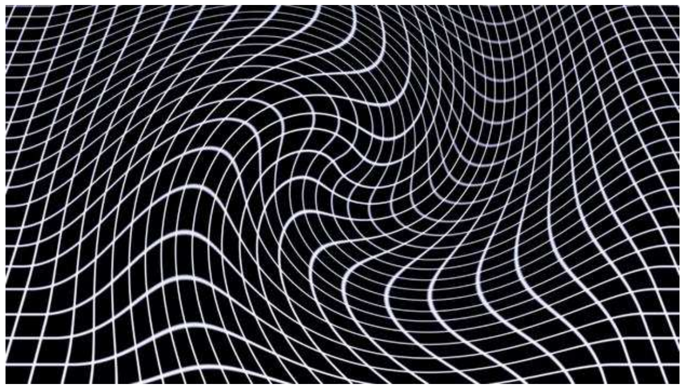
El espaciotiempo no es un escenario estático

Es una parte dinámica de la física

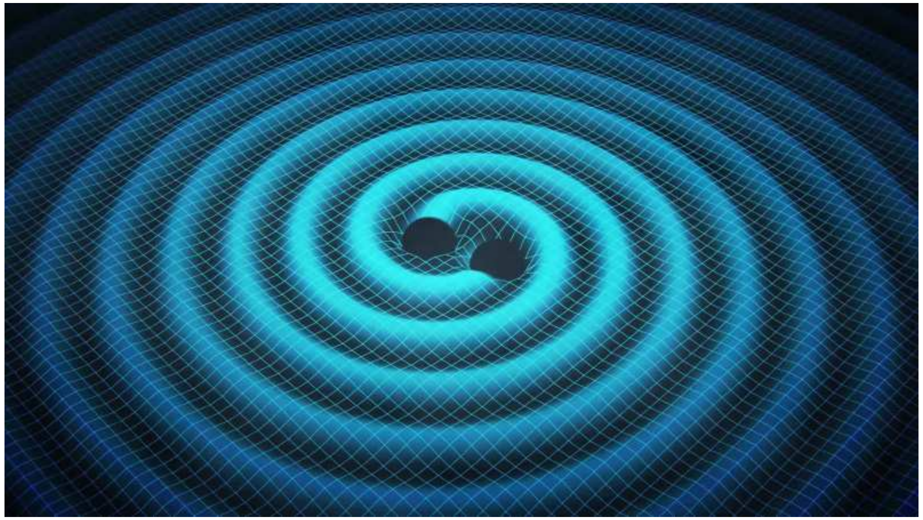
NO

más como...

- Interacciona con el contenido de energía y materia
- Tiene dinámica propia: puede cambiar de forma y tamaño



Cambios en configuración de materia
$\Longrightarrow$ cambios en curvatura local
$\Longrightarrow$ perturbaciones en geometría
$\Longrightarrow$ ondas gravitacionales

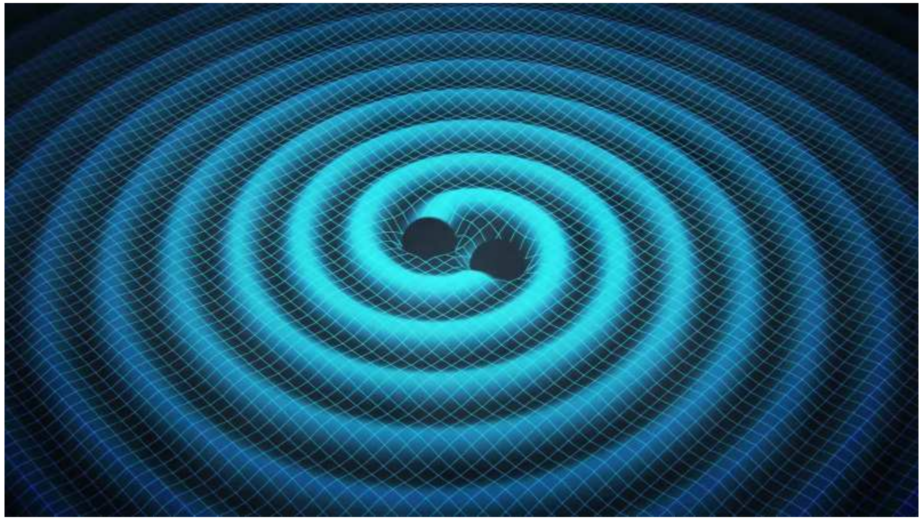


Cambios en configuración de materia

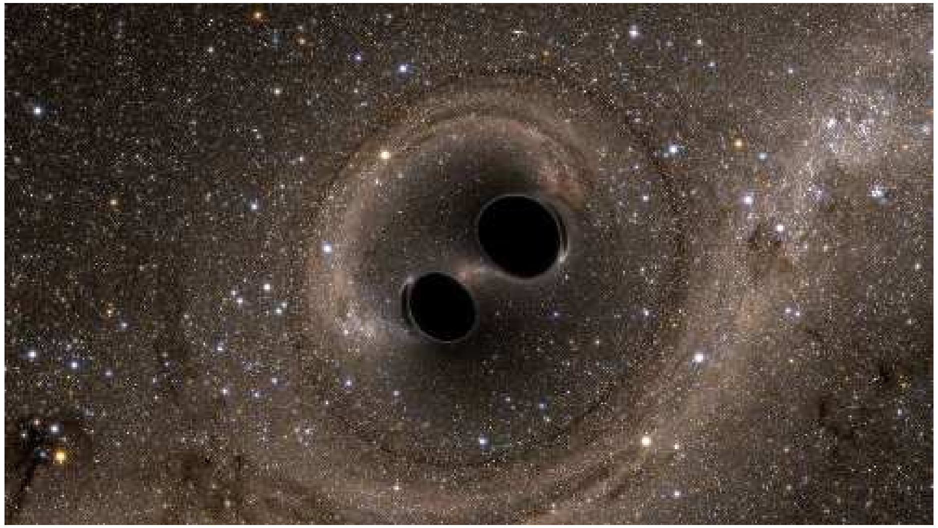
$\Longrightarrow$ cambios en curvatura local

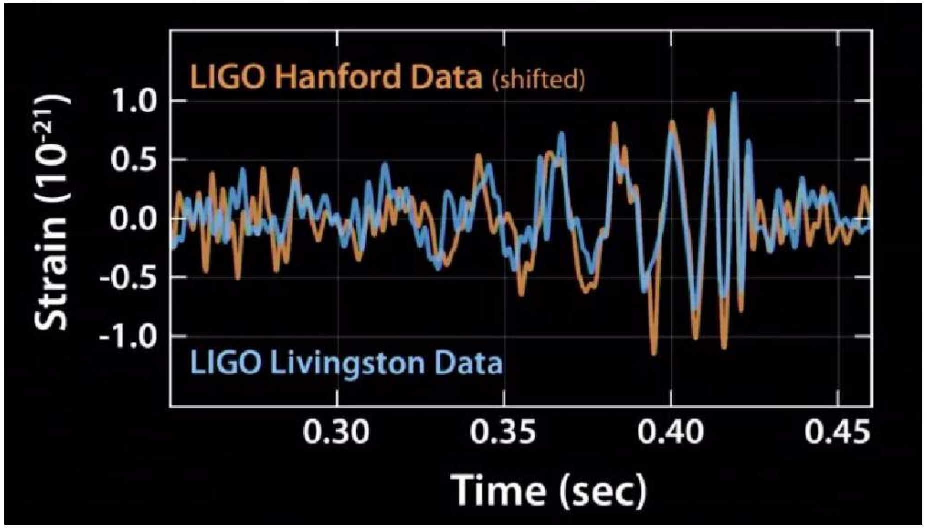
$\Longrightarrow$ perturbaciones en geometría

$\Longrightarrow$ ondas gravitacionales



Detección directa en LIGO:





• 14 septiembre 2015: fusión de agujeros negros de $m_1 = 36M_\odot$ y $m_2 = 29M_\odot$

• más de 10 eventos detectados hasta ahora

Agujeros negros

Con suficiente materia acumulada, colapso gravitacional es inevitable

$\longrightarrow$ Aumento local de la curvatura del espaciotiempo

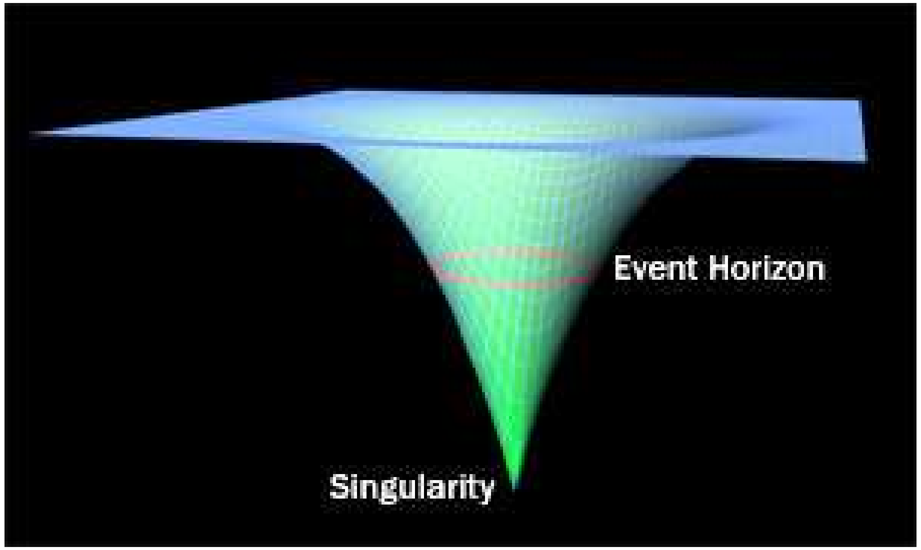
$\longrightarrow$ Geodésicas nulas y temporales dirigidas hacia dentro

$\longrightarrow$ Se forma un horizonte: no salen señales des de el interior

$\longrightarrow$ membrana causal unidireccional

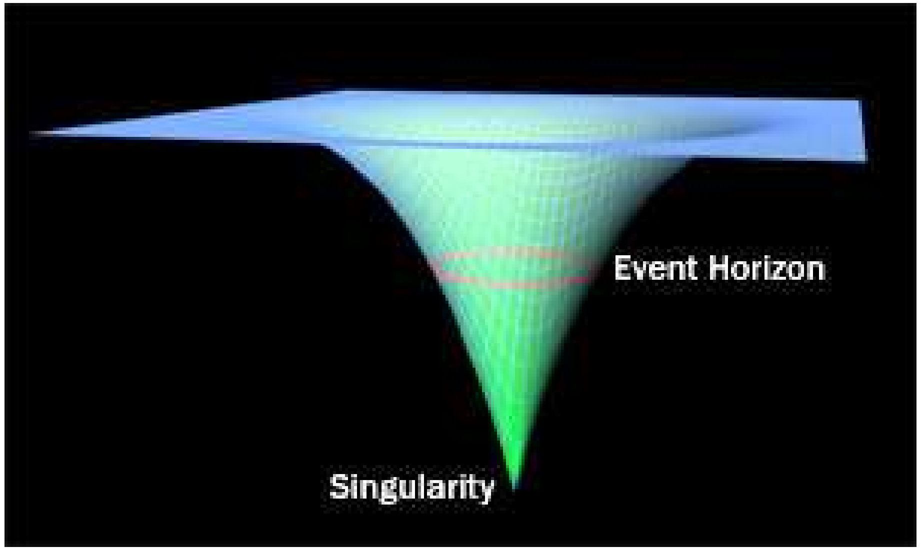
NO:

Solo representa curvatura espacial



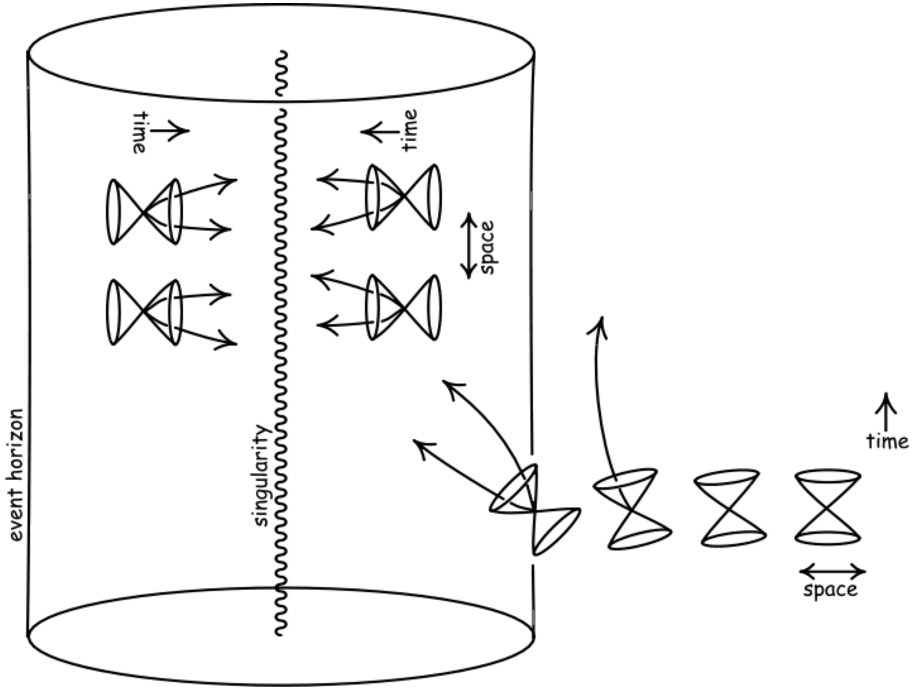
NO:

Solo representa curvatura espacial



Mejor:

Dibuja las geodésicas nulas y temporales



Cosmología

Gravedad determina la geometría del espaciotiempo

Gravedad determina la geometría del universo entero

Predicción de Relatividad General: el espacio expande

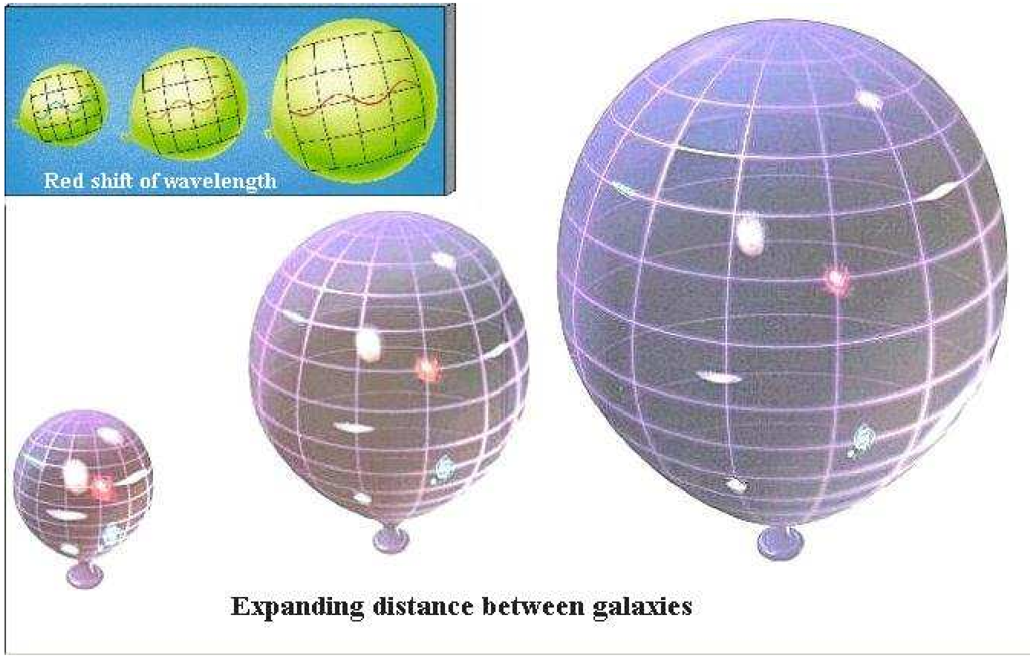
Cosmología

Gravedad determina la geometría del espaciotiempo

Gravedad determina la geometría del universo entero

Predicción de Relatividad General: el espacio expande

Métrica Friedmann-Robertson-Walker: $g = \mathbb{R}_t \times f(t) M_3$



NO

Mejor

$$
\begin{aligned}
\text{Expansión del universo} &= \text{expansión de las secciones espaciales } M_3 \\
&= \text{creación constante de espacio nuevo}
\end{aligned}
$$

Resumen

1. Relatividad Especial y geometría lorentziana

- Nuestro mundo es un espacio cuadrimensional con signatura lorentziana
- Relatividad Especial relaciona observadores inerciales a través de cambios de coordenadas entre bases cartesianas

Resumen

1. Relatividad Especial y geometría lorentziana

- Nuestro mundo es un espacio cuadrimensional con signatura lorentziana
- Relatividad Especial relaciona observadores inerciales a través de cambios de coordenadas entre bases cartesianas

2. Relatividad General y geometría riemanniana

- Gravedad es una manifestación de la curvatura del espaciotiempo
- Geometría riemanniana describe forma y evolución de nuestro mundo

Resumen

1. Relatividad Especial y geometría lorentziana

- Nuestro mundo es un espacio cuadrimensional con signatura lorentziana
- Relatividad Especial relaciona observadores inerciales a través de cambios de coordenadas entre bases cartesianas

2. Relatividad General y geometría riemanniana

- Gravedad es una manifestación de la curvatura del espaciotiempo
- Geometría riemanniana describe forma y evolución de nuestro mundo

3. Manifestaciones de espaciotiempo curvo

- Las matemáticas obligan la Naturaleza obedecer ciertas estructuras
- La Naturaleza ofrece realizaciones concretas de estructuras matemáticas

¡Gracias por vuestra atención!