Beca de Iniciación
a la Investigación

Mayo, 2010

Dualidad T y gravedad tipo Einstein-Gauss-Bonnet

Mikael Rodríguez Chala[1],

bajo la dirección de
Bert Janssen[2]

Departamento de Física Teórica y del Cosmos and
Centro Andaluz de Física de Partículas Elementales
Universidad de Granada, 18071 Granada, España

RESUMEN

El presente informe recoge la memoria del proyecto de investigación realizado por Mikael Rodríguez Chala para el disfrute de la Beca de Iniciación a la Investigación en el Departamento de Física Teórica y del Cosmos de la Universidad de Granada, bajo la tutela del doctor Bert Janssen. Este texto se desarrolla como sigue: en la primera parte se presenta una larga introducción, con la motivación e interés de investigar en esta parte de la física teórica y para esclarecer el objetivo de esta investigación. La segunda sección está dedicada a introducir los conceptos y técnicas necesarios para abordar el problema principal. El estudio de estas técnicas (con todo el bagage que ello conlleva) ha ocupado gran parte del tiempo dedicado a esta beca. Por último, se detallan los resultados a los que se han llegado con este trabajo y se citan las preguntas aún no respondidas.

[1]E-mail: `mikir@member.fsf.org`.
[2]E-mail: `bjanssen@ugr.es`.

1. Introducción

Nuestra moderna descripción de la gravedad está descrita por la teoría de la relatividad general de Einstein. De acuerdo a esta, la gravedad es una manifestación de la geometría del espacio-tiempo, que queda completamente caracterizada por el contenido de materia y energía en el mismo, a través de las ecuaciones de Einstein. No obstante, dado que es una teoría de campos, se prefiere describir esta teoría a través de una acción, dado que permite acceder más fácilmente a sus simetrías y otras características de interés totalmente codificadas en el lagrangiano. La acción que da lugar a las ecuaciones de Einstein se denomina acción de Einstein-Hilbert,

$$S = \int d^4x\sqrt{|g|}R, \tag{1.1}$$

donde g representa la métrica del espacio-tiempo y R el escalar de Ricci o de curvatura. Esta acción describe totalmente la dinámica del espacio-tiempo, y en principio, para postular este lagrangiano, no hay más motivación que el hecho de que da lugar a ecuaciones de movimiento de segundo orden, que son las que aceptamos en la física para obtener un problema de valores iniciales bien formulado. No obstante, existen términos de orden mayor en la curvatura que dan lugar también a ecuaciones diferenciales de segundo orden. El ejemplo más importante es el denominado *término de Gauss-Bonnet*,

$$\mathcal{L}_{\text{GB}} = \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \gamma R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda}, \qquad (\alpha, \beta, \gamma) = (1, -4, 1). \tag{1.2}$$

Para cualquier otra terna (α, β, γ) las ecuaciones de movimiento contienen derivadas de órdenes más altos. Sin embargo, ocurre en que dimensión 4, el término de *Gauss-Bonnet es un invariante topológico*, en el sentido de que vale lo mismo para distintas geometrías siempre que se mantenga la topología del espacio ambiente. La topología del espacio-tiempo consideramos que es fija, que solo cambia la métrica g, y en consecuencia, el término de Gauss-Bonnet no modifica la dinámica, con lo que su inclusión, para dimensión 4, resulta inocua. Sin embargo, en dimensión superior, este lagrangiano ya no es un invariante topológico, con lo que en principio su introducción en la acción resulta casi obligatoria. Ahora bien, cabe preguntarse si se hace física en dimensión superior, y la respuesta es que sí. Como ejemplo, consideremos las denominadas teorías de *supergravedad N = 1* (SUGRA). El sector común de todas estas teorías (de sus respectivas acciones) viene descrito por

$$S = \frac{1}{2}\int d^{10}x\sqrt{|g|}\ e^{-2\phi}[R - 4(\partial\phi)^2 - \frac{3}{4}H^2]. \tag{1.3}$$

Como vemos, esta teoría describe la gravedad y la dinámica de otros campos (gauge y escalares). En ausencia de estos, el lagrangiano describe la relatividad de Einstein pero en dimensión 10. Hoy en día sabemos que SUGRA se puede derivar, en el límite de bajas energías, de una teoría más fundamental, la *teoría de cuerdas*, que además genera como primera corrección en el sector gravitatorio de la acción el término de Gauss-Bonnet. Era de esperar este término como primera corrección dada la discusión anterior: es el siguiente término en orden de curvatura que da lugar a ecuaciones de movimiento físicamente aceptables. En conclusión, sabemos que la acción efectiva que se deriva de la teoría de cuerdas tiene la forma

$$S = \frac{1}{2}\int d^{10}x\sqrt{|g|}\ e^{-2\phi}[R + R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda} - 4(\partial\phi)^2 - \frac{3}{4}H^2 + \mathcal{L}_{\text{mat}}]. \tag{1.4}$$

$\mathcal{L}_{\text{mat}}$ contiene la correción de primer orden en los campos gauge. La dificultad de obtenerlo como una consecuencia de la teoría de cuerdas es inmensa, con lo que este término aún no es conocido. En principio, prodría derivarse con procedimientos alternativos, que describimos más adelante. De hecho, **encontrar este lagrangiano de corrección es el objetivo fundamental de este proyecto de investigación**.
La teoría de cuerdas tiene una simetría denominada *dualidad T*, que relaciona la dinámica cuerdas distintas moviéndose en espacio-tiempos distintos. Aunque esta simetría es intrínsecamente cuérdica, en la acción efectiva (1.3) se manifiesta como la actuación de un grupo $\mathbb{Z}_2$ (grupo de dos elementos) de transformaciones que dejan la acción invariante. Como consecuencia de la teoría de cuerdas, la acción efectiva tiene que ser invariante bajo dualidad T a cualquier orden. Por tanto, la estrategia que seguimos para obtener los términos de corrección de los campos es inmediata: añadimos el $\mathcal{L}_{\text{mat}}$ más general que transforme la acción (1.4) en invariante bajo dualidad T. Nótese además que este término, por supuesto, ha de ser invariante bajo difeomorfimos (cambios generales de coordenadas) en 10 dimensiones y bajo transformaciones gauge.
Para tal fin, nos olvidamos por completo de que SUGRA puede derivarse de una teoría más fundamental, y consideramos la dualidad T como una mera simetría del lagrangiano. Es más, en este estudio utilizaremos el lagrangiano más general, (1.2), con α, β, γ genéricos. Como veremos más adelante, construimos primero el lagrangiano más general invariante bajo dualidad T que contiene solo correcciones gravitatorias en R^2. Es decir, tomamos $\beta = \gamma = 0$. El resultado más importante de este proyecto es haber construido explícitamente esta teoría, sin añadir correcciones de orden superior en las reglas de dualidad T. Además, demostramos que para correcciones de orden superior en la curvatura, sí es necesario introducir modificaciones de primer orden en la simetría. El siguiente paso es encontrar las ecuaciones de movimiento de los campos que se derivan de esta teoría. Sabemos que la solución de *onda gravitatoria* es exacta para cualquier corrección de gravedad, y que su correspondiente solución bajo dualidad T a orden cero es la solución de *cuerda fundamental*. Por tanto, tenemos garantizado que la solución de cuerda fundamental también es exacta para una teoría con corrección del tipo R^2, puesto que en este caso no aparecen términos de dualidad T a orden 1 o superior. Cabe esperar modificaciones en la solución de la cuerda fundamental para correcciones gravitatorias más generales, pero dado que en este proyecto no construimos explícitamente el lagrangiano de estas teorías, no podemos hallar estas diferencias.
Para fijar las ideas principales de esta introducción, remarquemos los puntos importantes de este proyecto: consideramos una teoría de gravedad en 10 dimensiones (acoplada a otro tipo de campos) más general y, en principio, más natural que la de Einstein, que incorpora correcciones en la curvatura. Construimos las correcciones necesarias para que la teoría sea invariante bajo dualidad T y obtenemos las ecuaciones de movimiento, de las que son soluciones la onda gravitatoria y la cuerda fundamental.
Este texto está organizado de la siguiente manera: en la parte 2 introducimos los conceptos y ténicas necesarios para abordar el cálculo de las correcciones en los campos, aplicamos estas técnicas a teorías concretas de interés físico y presentamos la dualidad T. En la sección 3, describimos el trabajo de investigación, detallamos el procedimiento exhaustivamente y hacemos cálculos concretos de las correcciones. Mostramos el lagrangiano resultado de este proyecto, y encontramos las ecuaciones de movimiento.

2. Trabajo preparatorio

Gran parte del esfuerzo empleado en este trabajo ha sido el aprendizaje de los nuevos conceptos y técnicas para poder abordar los cálculos. En particular, existen dos formalismos, que no se abordan a lo largo de la carrera de Física, que son esenciales para aplicar las reglas de dualidad T. Por eso, dedidimos introducir brevemente los conceptos clave y ecuaciones fundamentales que necesitamos para proceder más adelante. El aprendizaje en esta dirección se ha apoyado, casi totalmente, en las referencias [1], [2][chapter 3], [4][pág 290-301]. Además, para adquirir conocimiento sobre teorías de gravedad con correcciones en la curvatura, especialmente Gauss-Bonnet, remitimos al artículo [3].

2.1. El formalismo del vielbein

El formalismo del *vielbein* es una descripción de la geometría de una variedad diferenciable en la que las coordenadas no juegan el papel fundamental. Cuando se estudia la geometría diferencial utilizando sistemas de coordenadas, se está eligiendo, automáticamente, una base coordenada en cada espacio tangente de la variedad. La elección de estas bases es útil para una gran cantidad de cálculos, pero no para nuestro propósito. En este caso, lo que hacemos es elegir, en cada espacio tangente, una base que diagonalice la métrica a $\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. En general, si el espacio no es plano, ambas bases no coinciden. Cada una de estas bases no coordenadas se denomina *vielbein*. Las componentes de vectores y tensores en esta base transforman bajo un cambio de vielbein, que se puede ver como una transformación de Loretnz *local*, en el sentido de que en cada espacio tangente (en cada punto de la variedad) se hace una transformación de Lorentz distinta. Evidentemente, en cada punto podemos relacionar las componentes de un vector en una y otra base (coordenada y no coordenada), de manera que un campo vectorial V_μ se relaciona[3] con V_a a través de ciertas funciones e^a_μ (y sus inversas):

$$V_\mu = e^a_\mu V_a, \qquad V_a = e^\mu_a V_\mu, \qquad e^\mu_a e^b_\mu = \delta^b_a, \qquad e^a_\mu e^\nu_a = \delta^\nu_\mu. \tag{2.1}$$

De hecho, usaremos siempre estas funciones para cambiar índices planos a índices curvos. De la misma manera que bajo cambios generales de coordenadas tenemos definida una derivada covariante, podemos construir aquí una derivada covariante bajo transformaciones locales de Lorentz. La conexión de esta derivada covariante se denomina *conexión de espín* $\omega^b_{\mu a}$, y queda completamente caracterizada por la conexión de Levi-Civita. La relación entre una formulación y otra viene dada por

$$D_\mu V^b = \partial_\mu V^b + \omega^b_{\mu a} V^a, \qquad \omega^b_{\mu a} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^\nu_a e^b_\rho - e^\nu_a \partial_\mu e^b_\nu. \tag{2.2}$$

Para un campo escalar, ambas derivadas coinciden, y para un vector covariante cambia el signo de la conexión de espín. Las componentes de los tensores de curvatura en el vielbein vienen dados, a través de la conexión de espín, como sigue:

$$\begin{aligned} R_{ab} &= \partial_a \omega^c_{cb} - \partial_c \omega ab^c - \omega^c_{ab}\omega^d_{dc} + \omega^d_{ca}\omega^c_{db}, \\ R^d_{abc} &= 2\partial_{[a}\omega^d_{b]c} - 2\omega^f_{[a|c|}\omega^d_{b|f} - 2\omega^f_{[ab]}\omega^d_{fc}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

[3]Los índices latinos, llamados "índices planos", representan componentes en el vielbein.

Por supuesto, los tensores de curvatura tienen las mismas propiedades de simetría y antisimetría que sus equivalentes en el formalismo afín. Por último, recalquemos que para subir un índice plano utilizamos la métrica plana η_{ab}, y evidentemente seguimos utilizando la métrica $g_{\mu\nu}$ para subir índices curvos. La relación entre ellas, como siempre, está dada a través de

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}, \qquad \eta_{ab} = e^\mu_a e^\nu_b g_{\mu\nu}. \tag{2.4}$$

Este formalismo nos ayuda, como mostramos en la siguiente sección, a comprender las técnicas de reducción dimensional, donde, dada la posibilidad de elegir un vielbein concreto, podemos simplificar los cálculos involucrados en este procedimiento.

2.2. Reducción dimensional

La reducción dimensional es un procedimiento mediante el cual, una teoría de campos formulada en un espacio-tiempo (d+1)-dimensional compactificado[4], se reinterpreta como una teoría de *más* campos en dimensión d. Las simetrías de la teoría en dimensión superior (invariancia bajo difeomorfismos) se rompen en las simetrías del espacio-tiempo de dimensión inferior más invarianza gauge. Es decir, las simetrías en las dimensiones compactas pasan a ser simetrías internas de la teoría. En nuestro caso, solo compactificamos una dimensión con la topología de una circunferencia S^1. La reducción dimensional en este caso es la más sencilla. A la coordenada en la dirección compactificada le ponemos el subíndice x, al resto μ, y las agrupamos según $\hat{\mu} = (\mu, x)$. Siempre se puede elegir un vielbein de la forma

$$\left(\hat{e}^{\hat{a}}_{\hat{\mu}}\right) = \begin{pmatrix} e^a_\mu & kA_\mu \\ 0 & k \end{pmatrix}, \qquad \left(\hat{e}^{\hat{\mu}}_{\hat{a}}\right) = \begin{pmatrix} e^\mu_a & -A_a \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

De acuerdo a la ecuación (2.4), esta elección del vielbein implica que la métrica (d+1)-dimensional puede descomponerse como una métrica d-dimensional más un campo vectorial A_μ en d-dimensiones. Si en la teoría original tenemos, además, un campo dinámico $\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, este se descompone en otro campo tensorial $B_{\mu\nu}$ y uno vectorial B_μ. Existen argumentos de simetría para esclarecer que las componentes de estos campos tensoriales en la dirección compacta han de comportarse como verdaderos vectores d-dimensionales, pero para verlo en más detalle remitimos a [2] [pág 40]. Expresado en ecuaciones, tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - k^2 A_\mu A_\nu, & \hat{B}_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} + A_{[\mu} B_{\nu]}, \\ \hat{g}_{x\mu} &= -k^2 A_\mu, & \hat{B}_{x\mu} &= B_\mu, \\ \hat{g}_{xx} &= -k^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Esto, de forma inmediata da lugar a que

$$\sqrt{|\hat{g}|} = k\sqrt{|g|}. \tag{2.7}$$

Notemos también que $\hat{R}$ se reduce según

$$\hat{R} = R + 2\nabla_\mu \nabla^\mu \log k - \frac{1}{4} k^2 F^2 + 2(\partial \log k)^2, \tag{2.8}$$

[4]Entendemos por compactificación que nuestro espacio-tiempo $\mathcal{M}$ tiene la estructura $\mathcal{S} \times \mathcal{C}$, donde $\mathcal{C}$ es una variedad compactca.

donde $F^2 = F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Por último, podemos definir una 3-forma $H_{\mu\nu\rho} = \partial_{[\mu}B_{\nu\rho]}$. En dimensión superior, esta 3-forma $\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} = \hat{e}^{\hat{\mu}}_{\hat{\alpha}}\hat{e}^{\hat{\nu}}_{\hat{\beta}}\hat{e}^{\hat{\rho}}_{\hat{\gamma}}\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}$. En consecuencia, se descompone según

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\alpha\beta x} &= \frac{1}{3k}e^{\mu}_{\alpha}e^{\nu}_{\beta}F_{\mu\nu}(B), \\
\hat{H}_{\alpha\beta\gamma} &= e^{\mu}_{\alpha}e^{\nu}_{\beta}e^{\rho}_{\gamma}\left[\partial_{[\mu}B_{\nu\rho]} + \frac{1}{2}A_{[\mu}F_{\nu\rho]}(B) + \frac{1}{2}B_{[\mu}F_{\nu\rho]}(A)\right] \\
&= e^{\mu}_{\alpha}e^{\nu}_{\beta}e^{\rho}_{\gamma}H_{\mu\nu\rho} = H_{\alpha\beta\gamma}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

La consecuencia inmediata es que $\hat{H}^2$ se reduce como $\hat{H}^2 = H^2 - \frac{1}{3k^2}F^2(B)$. Este resultado (y los anteriores) lo usaremos ampliamente al reducir la acción de Einstein-Hilbert y la acción de supergravedad. Para mostrar cómo se lleva a cabo este ejercicio, escribimos las siguientes dos subsecciones. Por último, aclaremos que el interés de la reducción dimensional, en nuestro propósito[5], es que las reglas de dualidad T las aplicamos de forma muchísimo más sencilla en la acción reducida.

2.3. Acción de Einstein-Hilbert

La acción de Einstein-Hilbert describe la relatividad general clásica, dando lugar a las ecuaciones de campo de Einstein. Su generalización a 10 dimensiones es simplemente trivial. Para obtener la acción reducida en 9 dimensiones utilizamos los resultados de la sección anterior[6]:

$$\begin{aligned}
\int d^{10}\hat{x}\sqrt{|\hat{g}|}\hat{R} &\simeq \int d^9x\sqrt{|g|}k\{R + 2\nabla_\mu\nabla^\mu \log k - \frac{1}{4}k^2F^2 + 2(\partial \log k)^2\} \\
&= \int d^9x\sqrt{|g|}k\{R - \frac{1}{4}k^2F^2 + \frac{2}{k}\nabla_\mu\nabla^\mu \log k\} \\
&\simeq \int d^9x\sqrt{|g|}k\{R - \frac{1}{4}k^2F^2\}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

En el último paso hemos utilizado que el término en derivadas covariantes es un término de frontera, donde suponemos que los campos se anulan. Como vemos, la acción de Einstein-Hilbert en d dimensiones da lugar a gravedad más electromagnetismo en $d-1$ dimensiones, además de un campo escalar k, que desde su aparición en los primeros trabajos de Kaluza y Klein dio lugar a controversia y a la no inmediata aceptación de la teoría como unificadora de las interacciones electromagnética y gravitatoria.

2.4. Acción de supergravedad

El sector común de SUGRA $N = 1$ $D = 10$, viene descrito por la acción de Einstein-Hilbert acoplada de otro tipo de campos a través del lagrangiano

[5] Aunque en su día fue una idea de Kaluza y Klein en un intento de unificar la gravedad y el electromagnetismo.

[6] Con $\simeq$ queremos indicar que las acciones a ambos miembros son equivalentes, en el sentido de que, aunque matemáticamente pueden no ser iguales, dan lugar a las mismas ecuaciones de movimiento; hecho que ocurre cuando son proporcionales o se diferencian en una derivada total en el lagrangiano.

$$S = \frac{1}{2}\int d^{10}x\sqrt{|\hat{g}|}e^{-2\hat{\phi}}\{\hat{R} - 4(\partial\hat{\phi})^2 - \frac{3}{4}\hat{H}^2\}. \tag{2.11}$$

Para utilizar los resultados de esta sección reducimos la acción anterior sin el término de la 3-forma $H_{\mu\nu\rho}$. Además, hemos de "elegir" la regla de reducción para el dilaton, $\hat{\phi}$. Al ser el dilaton un campo escalar, no existen argumentos de "preservar simetría" que distingan entre una reducción u otra, pudiendo elegirse arbitrariamente. Por comodidad, elegimos la siguiente regla de reducción:

$$\hat{\phi} = \phi + \frac{1}{2}\log k. \tag{2.12}$$

En consecuencia, podemos ya reducir la acción de supergravedad con $H = 0$, dando lugar a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} S &= \int d^{10}x\sqrt{|\hat{g}|}e^{-2\hat{\phi}}\{\hat{R} - 4(\partial\hat{\phi})^2\} \qquad (2.13)\\ &\simeq \int d^9x\sqrt{|g|}\ e^{-2\phi}\{R + 2\nabla_\mu\nabla^\mu\log k - \frac{1}{4}k^2F^2 + 2(\partial\log k)^2 - 4(\partial\phi)^2 + \\ &\qquad (\partial\log k)^2 + 4(\partial_\mu\log k)(\partial^\mu\phi)\} \\ &= \int d^9x\sqrt{|g|}\ e^{-2\phi}\{R - \frac{1}{4}k^2F^2 - 4(\partial\phi)^2 + (\partial\log k)^2\} + \\ &\qquad 2\int d^9x\sqrt{|g|}\ e^{-2\phi}\{\nabla_\mu\nabla^\mu\log k - 2(\partial_\mu\log k)(\partial^\mu\phi)\}. \end{aligned}$$

Esta última integral puede escribirse introduciendo un término de frontera que incluya al dilaton, de tal forma que se simplifiquen los cálculos:

$$\begin{aligned} I &= \int d^9x\sqrt{|g|}\ e^{-2\phi}\{\nabla_\mu\nabla^\mu\log k - 4(\nabla_\mu\log k)(\nabla^\mu\phi)\} \qquad (2.14)\\ &= \int d^9x\sqrt{|g|}\{\nabla_\mu(e^{-2\phi}\nabla^\mu\log k) - \nabla_\mu e^{-2\phi}\nabla^\mu\log k - 2e^{-2\phi}(\nabla_\mu\log k)(\nabla^\mu\phi)\} \\ &\simeq \int d^9x\sqrt{|g|}\{2e^{-2\phi}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\log k - 2e^{-2\phi}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\log k\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, la acción de supergravedad queda, en 9 dimensiones, y para $H_{\mu\nu\rho} = 0$, como sigue:

$$\int d^9x\sqrt{|g|}\ e^{-2\phi}\{R - \frac{1}{4}k^2F^2 - 4(\partial\phi)^2 + (\partial\log k)^2\}. \tag{2.15}$$

2.5. Dualidad T

La dualidad T es una simetría intrínsecamente cuérdica, que relaciona la dinámica de cuerdas distintas en espacios distintos. En nuestro contexto, sin embargo, lo que nos interesa es cómo se manifiesta en la acción de supergravedad, y ni siquiera hay que pensar en ella como una "regla que deriva de teoría de cuerdas", sino simplemente como una simetría de la teoría y su actuación en el lagrangiano. Así que, para introducir la dualidad T en el marco de la supergravedad, hemos de caracterizarla como transformaciones que dejan la acción

$$S = \frac{1}{2}\int d^{10}x\sqrt{|\hat{g}|}e^{-2\hat{\phi}}\{\hat{R} - 4(\partial\hat{\phi})^2 - \frac{3}{4}\hat{H}^2\} \tag{2.16}$$

invariante. Estas transformaciones intercambian componentes de la métrica con las de H. La forma en que lo hacen es más fácil de visualizar en la acción reducida,

$$S = \frac{1}{2}\int d^{9}x\sqrt{|g|}\; e^{-2\phi}\{R - 4(\partial\phi)^2 + \frac{3}{4}H^2 + (\partial\log k)^2 - \frac{1}{4}k^2F^2(A) - \frac{1}{4}k^{-2}F^2(B)\} \tag{2.17}$$

donde vemos que si hacemos la transformación de simetría $\mathbb{Z}_2^{(T)}$

$$\tilde{A_\mu} = B_\mu, \qquad \tilde{B_\mu} = A_\mu, \qquad \tilde{k} = k^{-1}, \tag{2.18}$$

la acción queda trivialmente invariante. Usando las reglas de reducción inversas, uno se da cuenta de que la simetría anterior se corresponde con las transformaciones entre componentes de la métrica en la dirección de la isometría y el campo B:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - (g_{x\mu}g_{x\nu} - B_{x\mu}B_{x\nu})/g_{xx}, \\
\tilde{B}_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} - (g_{x\mu}B_{x\nu} - g_{x\nu}B_{x\mu})/g_{xx}, \\
\tilde{g}_{x\mu} &= B_{x\mu}/g_{xx}, \\
\tilde{B}_{x\mu} &= g_{x\mu}/g_{xx}, \\
\tilde{g}_{xx} &= 1/g_{xx}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Estas reglas de transformación se conocen con el nombre de "transformaciones de Buscher", y pueden derivarse dentro del marco de la teoría de cuerdas a través de la acción de una cuerda moviéndose en un espacio-tiempo fijo, pero no necesariamente plano, con métrica $g_{\mu\nu}$. Notamos cómo es muchísimo más fácil aplicarlas en la acción reducida, debido a que se mantiene la covarianza general.
En rigor, la transformación de dualidad (2.18) es solo el término a orden 0. Y es que, estrictamente hablando, la dualidad T se expresa como un desarrollo perturbativo en un parámetro[7] α' de la siguiente manera:

$$T = T_0 + \alpha' T_1 + \alpha'^2 T_2 + \cdots \tag{2.20}$$

donde T_0 es la regla (2.18). Ahora bien, la acción de supergravedad completa, contiene no solo el lagrangiano (1.3), sino correcciones de orden superior,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{EH}} + \mathcal{L}_{\text{GB}} + \cdots \tag{2.21}$$

Pero al aplicar T a $\mathcal{L}$, si nos quedamos a orden 0, la única contribución es la de $T_0\mathcal{L}_{EH}$. No obstante, cuando añadamos el término de Gauss-Bonnet, tendremos que tener en cuenta otras contribuciones y, en consecuencia, la posibilidad de encontrar términos de orden mayor en el desarrollo (2.20).

[7] En teoría de cuerdas, este parámetro está relacionado con la tensión de una cuerda.

3. Trabajo de investigación

El objetivo de esta sección es ya el de mostrar los resultados propios obtenidos a lo largo del proyecto de investigación. Como se comenta en la introducción, lo que se pretende construir es una teoría de supergravedad con correcciones de primer orden (el término de Gauss-Bonnet para la parte gravitatoria) que sea invariante bajo dualidad T, obteniendo, además, las correcciones a primer orden en los campos. Queremos detallar a continuación, de forma minuciosa, el procedimiento que seguimos para encontrar las citadas correcciones. Partimos de (1.4), la acción de SUGRA con su primera corrección gravitatoria, el término de Gauss-Bonnet. Queremos que, tras aplicar la tranformación de dualidad T, la acción permanezca invariante. Expresemos esta idea en ecuaciones, teniendo en cuenta que, ahora, hemos de considerar no sólo T_0, sino también T_1:

$$\begin{aligned} T(\mathcal{L}_{\text{SUG}} + \mathcal{L}_{\text{GB}} + \mathcal{L}_{\text{mat}}) &= (T_0 + \alpha' T_1)(\mathcal{L}_{\text{SUG}} + \mathcal{L}_{\text{GB}} + \mathcal{L}_{\text{mat}}) \\ &= T_0(\mathcal{L}_{\text{SUG}}) + \alpha' T_1(\mathcal{L}_{\text{SUG}}) + T_0(\mathcal{L}_{\text{GB}} + \mathcal{L}_{\text{mat}}) \\ &= \mathcal{L}_{\text{SUG}} + T_0(\mathcal{L}_{\text{GB}}) + T_0(\mathcal{L}_{\text{mat}}) + \alpha' T_1(\mathcal{L}_{\text{SUG}}). \end{aligned} \tag{3.22}$$

En la segunda igualdad hemos utilizado que T_1 sobre $\mathcal{L}_{\text{mat}}$ y sobre $\mathcal{L}_{\text{GB}}$ proporciona correcciones de orden mayor del que buscamos. En la tercera igualdad utilizamos que $\mathcal{L}_{\text{SUG}}$ es invariante bajo dualidad T a orden 0. De exigir que este lagrangiano sea invariante bajo esta simetría se sigue que

$$\begin{gathered} T(\mathcal{L}_{\text{SUG}} + \mathcal{L}_{\text{GB}} + \mathcal{L}_{\text{mat}}) = \mathcal{L}_{\text{SUG}} + \mathcal{L}_{\text{GB}} + \mathcal{L}_{\text{mat}} \Longrightarrow \\ T_0(\mathcal{L}_{\text{GB}}) + T_0(\mathcal{L}_{\text{mat}}) = \mathcal{L}_{\text{GB}} + \mathcal{L}_{\text{mat}} - \alpha' T_1(\mathcal{L}_{\text{SUG}}). \end{gathered} \tag{3.23}$$

Este problema tiene demasiadas incógnitas, de forma que nuestra estrategia será la siguiente: conocemos $\mathcal{L}_{\text{GB}}$ y T_0, por tanto podemos aplicar esta última sobre el primero. El resultado de esta operación será un término $\mathcal{L}'$, que contendrá una serie de sumandos. Algunos de estos sumandos serán también sumandos de $\mathcal{L}_{\text{GB}}$. Esto ocurrirá siempre que un término de $\mathcal{L}_{\text{GB}}$ vaya a sí mismo o a otro término de $\mathcal{L}_{\text{GB}}$ bajo la acción de T_0. Evidentemente, no todos irán a $\mathcal{L}_{\text{GB}}$, de manera que el resto habremos de interpretarlos como parte de $\mathcal{L}_{\text{mat}}$. Nótese además, y esto es de vital importancia, que todo este procedimiento se realiza en 9 dimensiones, donde todo es covariante. Pero el lagrangiano original que ha de ser un escalar está definido sobre 10 dimensiones. Los términos que hemos encontrado en $\mathcal{L}_{\text{mat}}$ han de "venir" de otros términos en dimensión superior. Por ejemplo, $k^2 F^2(A)$ es un escalar en 9 dimensiones, pero no existe $F(A)$ en 10 dimensiones, éste solo puede ser el resultado de haber reducido el escalar de Ricci $\hat{R}$. Ahora bien, y este punto es clave, al reducir $\hat{R}$ no solo obtenemos $k^2 F^2(A)$, sino que también aparecen otros términos. En consecuencia, si por ejemplo hemos encontrado, tras actuar con T_0 sobre $\mathcal{L}_{\text{GB}}$, un término en $\mathcal{L}_{\text{mat}}$ tal como $k^2 F^2(A)$, por la discusión anterior sabemos que no viene solo, sino que viene acompañado de otros términos a los que habrá que aplicar T_0, de acuerdo a la ecuación (3.23). Este proceso lo vamos repitiendo hasta conseguir no generar términos extra, si es que se da el caso. Si este "círculo" no cierra, hemos de considerar, como pasa para correcciones del tipo $R_{\mu\nu\rho\lambda} R^{\mu\nu\rho\lambda}$, un término T_1.

Hagamos hincapié de nuevo en que aplicar T_0 es fácil en dimensión 9, y en consecuencia hay que reducir todo el término de Gauss-Bonnet, algo que no es precisamente un camino de rosas. A continuación mostramos cómo hacerlo.

3.1. Reducción del término de Gauss-Bonnet

El término de Gauss-Bonnet (en 10 dimensiones) es cuadrático en la curvatura. Hay que reducir los escalares $\hat{R}^2$, $\hat{R}_{\mu\nu}\hat{R}^{\mu\nu}$ y $\hat{R}_{\mu\nu\rho\lambda}\hat{R}^{\mu\nu\rho\lambda}$ y, con este fin, hay que reducir los tensores de curvatura. $\hat{R}$ ya lo tenemos, y para los otros dos solo hay que reducir el tensor de Riemann y luego contraer para obtener el de Ricci. Puede parecer, en principio, que reducir todas las componentes del tensor de Riemann es una tarea imposible, dado que existen, en 10 dimensiones, 825 componentes independientes. Nada más lejos de la realidad. Para nuestro propósito, solo necesitamos conocer[8] $\hat{R}_{abcd}$, $\hat{R}_{abcx}$ y $\hat{R}_{axbx}$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
&\hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{R}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{R}_{\hat{a}\hat{b}}\hat{R}^{\hat{a}\hat{b}} = \hat{R}_{ab}\hat{R}^{ab} + 2\hat{R}_{ax}\hat{R}^{ax} + \hat{R}_{xx}\hat{R}^{xx} \qquad (3.24)\\
&\hat{R}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}}\hat{R}^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = \hat{R}_{abcd}\hat{R}^{abcd} + 4\hat{R}_{abcx}\hat{R}^{abcx} + 4\hat{R}_{xaxb}\hat{R}^{xaxb}.
\end{aligned}
$$

Para reducir el tensor de Riemann necesitamos utilizar su expresión en el vielbein:

$$
\hat{R}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = 2\partial_{[\hat{a}}\hat{\omega}_{\hat{b}]\hat{c}\hat{d}} - 2\hat{\omega}^{\hat{e}}_{[\hat{a}|\hat{c}}\hat{\omega}_{|\hat{b}]\hat{e}\hat{d}} + 2\hat{\Omega}^{\hat{e}}_{\hat{a}\hat{b}}\hat{\omega}_{\hat{e}\hat{c}\hat{d}}. \qquad (3.25)
$$

Como resultado, obtenemos la reducción de los términos necesarios para el cálculo del lagrangiano de Gauss-Bonnet:

$$
\begin{aligned}
&\hat{R} = R + 2\nabla_\mu\nabla^\mu \log k - \frac{1}{4}k^2F^2 + 2(\partial\log k)^2, \qquad (3.26)\\
&\hat{R}_{ab} = R_{ab} + D_aD_b\log k - \frac{1}{2}k^2F^d_aF_{db} + (\partial_a\log k(\partial_b\log k)),\\
&\hat{R}_{xx} = -\nabla_\mu\nabla^\mu\log k - \frac{1}{4}k^2F^2 - (\partial\log k)^2,\\
&\hat{R}_{abcd} = \hat{R}_{abcd} + \frac{1}{2}k^2F_{[b|c}F_{a]d} - \frac{1}{2}k^2F_{ab}F_{cd},\\
&R_{abcx} = kD_{[a}F_{b]c} - k\partial_c\log kF_{ab},\\
&\hat{R}_{xaxb} = -D_aD_b\log k - \partial_a\log k\partial_b\log k + \frac{1}{4}k^2F_{ad}F^d_b.
\end{aligned}
$$

3.2. Dualidad T aplicada a R^2

Con el propósito de construir una teoría invariante bajo dualidad T y que contenga el término de Gauss-Bonnet, dividimos nuestro trabajo en sectores: el sector del escalar de Ricci, el del tensor y el del tensor de Riemann. Nuestro objetivo más inmediato, entonces, es construir un lagrangiano invariante que contenga a R^2:

$$
\mathcal{L} = S = \int d^{10}x\sqrt{|\hat{g}|}e^{-2\hat{\phi}}\{\hat{R} + \hat{R}^2 - 4(\partial\hat{\phi})^2 - \frac{3}{4}\hat{H}^2\}. \qquad (3.27)
$$

Para ello, hemos de calcular cómo se reduce $\hat{R}^2$, que es inmediato de los resultados anteriores, y luego aplicarle las transformaciones de dualidad y estudiar la covarianza general según el procedimiento descrito más arriba. $\hat{R}^2$ queda como

[8] En este momento estamos ya trabajando en índices planos, que es lo adecuado para llevar a cabo la reducción dimensional.

$$
\begin{aligned}
\hat{R}^2 =& \underline{R^2} + 4R\nabla_\mu\nabla^\mu \log k - \frac{1}{2}k^2 R F(A)^2 + \underline{4R(\partial \log k)^2} + \underline{4(\nabla_\mu\nabla^\mu)(\nabla_\nu\nabla^\nu \log k)} \\
&- k^2F(A)^2\nabla_\mu\nabla^\mu \log k + 8\nabla_\mu\nabla^\mu \log k(\partial \log k)^2 + \frac{1}{16}k^4F(A)^4 \\
&- k^2F(A)^2(\partial \log k)^2 + \underline{4(\partial \log k)^4}.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Los términos subrayados quedan invariantes bajo las reglas de Buscher. El resultado de aplicar estas mismas reglas al resto de los términos es que, en nuestro lagrangiano desconocido (que incorpora las correcciones en los campos gauge) tenemos los siguientes términos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{mat}} \supset& -4R\nabla_\mu\nabla^\mu \log k - \underline{\frac{1}{2k}RF(B)^2} + \frac{1}{k^2}F(B)^2\nabla_\mu\nabla^\mu \lg k \\
&- 8\nabla_\mu\nabla^\mu \log k(\partial \log k)^2 + \frac{1}{16k^4}F(B)^4 - \underline{\frac{1}{k^2}F(B)^2(\partial \log k)^2}.
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

En conjunto, estos términos, aunque covariantes en dimensión 9, no darían lugar a un escalar en dimensión 10. Hemos de preocuparnos, entonces, de encontrar qué término 10-dimensional puede dar lugar a estos otros términos. Fijémonos, en primer lugar, en los términos subrayados. Solo pueden ser resultado de reducir, en 10 dimensiones, el término $\frac{3}{2}\hat{H}^2\hat{R}$, pero además generamos términos extra. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{2}\hat{H}^2\hat{R} =& \underline{\frac{3}{2}H^2R} + 3H^2\nabla_\mu\nabla^\mu \log k - \frac{3}{8}H^2k^2F(A)^2 + \underline{3H^2(\partial \log k)^2} - \frac{1}{2k^2}RF(B)^2 \\
&- \frac{1}{k^2}\nabla_\mu\nabla^\mu \log k F(B)^2 + \underline{\frac{1}{8}F(B)^2F(A)^2} - \frac{1}{k^2}F(B)^2(\partial \log k)^2.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

De nuevo, obtenemos términos invariantes bajo las transformaciones de Buscher (los subrayados) y términos de los que preocuparnos "de dónde vienen". Seguimos realizando estos pasos hasta que obtenemos, con suerte y muchos muchos cálculos, un lagrangiano completamente "cerrado", una acción de supergravedad corregida e invariante bajo dualidad T. La siguiente acción es el **resultado principal de este proyecto**:

$$
\begin{aligned}
S = \frac{1}{2}\int d^{10}x\sqrt{|g|}\; e^{-2\phi}[R + R^2 - 4(\partial\phi)^2 + \frac{3}{4}H^2 + 16(\nabla^2\phi)^2 - 8R\nabla^2\phi \\
+ \frac{3}{2}H^2R - 6H^2\nabla^2\phi + \frac{9}{16}H^4].
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Agradecimientos

Quisiera agradecer las fructíferas conversaciones a compañeros de clase y, especialmente, a Jonathan Gutiérrez. También al departamento de Física Teórica y del Cosmos, por ofrecerme esta oportunidad. Y por supuesto a mi profesor Bert Janssen. Por todo, simplemente.

Referencias

[1] Bert Janssen, *Apuntes de relatividad general: geometría diferencial desde el espacio tangente.*

[2] Bert Janssen, *Duality of Strings and Branes.*

[3] Mónica Borunda, Bert Janssen and Mar Bastero-Gil *Palatini versus metric formulation in higher-curvature gravity*, JCAP 0811 (2008) 008.

[4] Tomás Ortín, *Gravity and Strings.*