FACULTAD DE CIENCIAS DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA Y DEL COSMOS

Trabajo de Fin de Master:

Soluciones Cosmológicas en la Gravedad de Gauss-Bonnet

Trabajo realizado por el alumno Manuel Luis González Hernández para obtener el título del máster en Física y Matemáticas (FisyMat)

Tutorizado por el profesor Bert Janssen del Departamento de Física Teórica y del Cosmos de la Universidad de Granada

.

DECLARACIÓN

En cumplimiento de la normativa aprobada en Consejo de Gobierno de 4 de marzo de 2013, sobre Directrices de la Universidad de Granada para el desarrollo de la asignatura ”Trabajo Fin de Máster”de sus títulos de máster (Art 8,4)

D.Dª Manuel Luis González Hernández

Asume la originalidad del trabajo fin de máster, entendida en el sentido de que no ha utilizado fuentes sin citarlas debidamente.

Granada, a 11 de SEPTIEMBRE de 2017

Fdo.:

Resumen

Introduciremos dos teorías diferentes de la gravedad, la de Eintein-Hilbert y la de Gauss-Bonnet, las cuales vamos a desarrollar y comparar sus predicciones. Hallaremos las ecuaciones que debe cumplir la métrica, según cada gravedad, y las compararemos. Veremos que a este nivel ya predicen diferentes dinámicas de la gravedad con un distinto régimen dimensional e implicaciones sobre el tensor de Weyl. Estamos interesados también en conocer sus diferencias en cuanto a soluciones de las ecuaciones de movimiento se refiere por ello, estudiaremos un caso concreto. Hallaremos las ecuaciones Friedmann de cada gravedad, estudiaremos las diferencias entre las mismas a nivel formal y a nivel de las soluciones. A nivel formal abordaremos dos problemas: la variación de la densidad total con el tiempo, dependiendo de la geometría de las secciones espaciales, y el estudio de la ecuación de aceleración. Veremos que ambas gravedades predicen diferentes dinámicas de los espaciotiempos ya a nivel formal de las ecuaciones de Friedmann, pero para verlo de una forma más evidente, las solucionaremos en algunos casos determinados. Compararemos las soluciones de la gravedad de Eintein-Hilbert y Gauss-Bonnet para el universo estático de Einstein, espacio de De Sitter, espacio de Anti-de Sitter, universo de Milne, espacio de Einstein-de Sitter y otros universos espacialmente planos. Veremos qué soluciones son propias de cada gravedad y cuáles son similares, desarrollando las condiciones que deben cumplir, en cada caso, para que las soluciones sean la misma. Se dejará en los apéndices los desarrollos matemáticos, para no hacer pesada la lectura del texto, además de un estudio, no tan exhaustivo, de otra teoría de la gravedad, la de Einstein-Hilbert-Gauss-Bonnet.

Palabras clave

Gravitación, gravedad de Einstein-Hilbert, gravedad de Gauss-Bonnet, ecuaciones de Friedmann, espaciotiempo máximamente simétrico.

Convenios y Notación

Usaremos unidades naturales salvo que se especifique lo contrario.

Consideramos un espaciotiempo con una métrica semiriemanniana $g_{\mu\nu}$, N-dimensional con signatura lorentziana $\{1, -1, -1, ...\}$.

Tomamos como índices espaciotemporales las letras griegas: $\{\mu, \nu, \rho, \lambda, \sigma, \alpha, ...\}$ y como índices espaciales letras latinas: $\{i, j, k, l, m, n, o...\}$.

Consideramos el tensor de Riemman definido de la forma

$$R_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho},$$

que tiene las siguientes simetrías

$$R_{\mu\nu\rho\lambda} = -R_{\nu\mu\rho\lambda} = -R_{\mu\nu\lambda\rho} = R_{\rho\lambda\mu\nu},$$

y que cumple la identidad de Bianchi

$$R_{\mu\nu\rho\lambda} + R_{\mu\lambda\nu\rho} + R_{\mu\rho\lambda\nu} = 0.$$

Podemos tomar la traza del tensor de Riemann, obteniendo el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}{}^{\lambda} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\lambda\nu} - \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu},$$

que es simétrico en sus índices. También, si tomamos la traza del tensor de Ricci, obtenemos el escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

Entonces, el tensor de Riemann lo podemos descomponer en sus distintas trazas y en la parte sin traza

$$R_{\mu\nu\rho\lambda} = W_{\mu\nu\rho\lambda} + \frac{2}{(N-2)}\left(g_{\mu[\rho}R_{\lambda]\nu} - g_{\nu[\rho}R_{\lambda]\mu}\right) - \frac{2}{(N-1)(N-2)} R g_{\mu[\rho}g_{\lambda]\nu},$$

donde $W_{\mu\nu\rho\lambda}$ es la parte sin traza del tensor de Riemann, el tensor de Weyl, con las mismas simetrías que el tensor de Riemann.

Aunque a nivel del lagrangiano hablemos de constante cosmológica como Λ (sobretodo en la sección 'Introducción'), cuando desarrollemos el trabajo vamos a considerarla como una densidad de energía más, la denominamos como ρ_Λ.

1. Introducción

El desarrollo de la Relatividad General (RG) a principios del siglo XX cambió el paradigma del fenómeno de la gravedad. Hasta entonces la gravedad se entendía como una fuerza, pero A. Einstein, en su teoría de la gravitación, propuso entenderla como la curvatura del espaciotiempo. Esta nueva concepción tenía nuevas predicciones como que la gravedad curva la luz o dilata los intervalos de tiempo, las cuales, han sido comprobadas experimentalmente.
La curvatura del espaciotiempo queda determinada por la métrica de éste, por tanto para describir la gravedad debemos conocer este campo tensorial. También, tenemos que caracterizar la fuente del campo gravitatorio. La fuente de la gravedad, acorde con la teoría de Newton, es la masa pero, por la equivalencia entre masa y energía de la Relatividad Especial, en una teoría relativista de la gravitación también debe de serlo la energía. En la RG se sintetizan estas dos ideas en la ecuación tensorial

$$G_{\mu\nu} = -\kappa \, T_{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

donde $G_{\mu\nu}$ es un tensor que representa la geometría del espaciotiempo y $T_{\mu\nu}$ el tensor energía-momento que describe el contenido en energía y materia de éste. El signo negativo se introduce por convenio, para tomar la constante κ positiva. Esta es una constante de proporcionalidad que acopla la fuente del campo gravitatorio al mismo. Como el campo tensorial a determinar es la métrica del espaciotiempo, $G_{\mu\nu}$ debe ser función de ésta. Por lo tanto para hallar este tensor, se imponen ciertas condiciones que debe cumplir:

1) $G_{\mu\nu}$ debe ser simétrico en sus índices, ya que $T_{\mu\nu}$ lo es.

2) $G_{\mu\nu}$ debe ser un tensor puramente geométrico construido a partir de la métrica y sus derivadas.

3) $\nabla^{\mu} G_{\mu\nu}$, la divergencia de este tensor geométrico debe ser nula, ya que $\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0$.

4) Para espaciotiempo plano se debe satisfacer que $G_{\mu\nu} = 0$, pues queremos que el espaciotiempo de Minkowski sea solución.

5) Queremos tener una teoría dinámica de la gravedad, que respete causalidad. Para ello $G_{\mu\nu}$ debe contener al menos derivadas segundas de la métrica. Esto implica que, para mantener el carácter tensorial de $G_{\mu\nu}$, debe tener términos con el tensor de Riemann o sus contracciones.

6) Queremos tener una teoría de la gravedad *físicamente aceptable*[1], para ello debemos obtener una ecuación diferencial de segundo orden (y no más) en la métrica, de forma que $G_{\mu\nu}$ debe tener términos en el tensor de Riemann o sus contracciones, pero no en las derivadas de estos.

La expresión más simple para $G_{\mu\nu}$ que cumple estas condiciones la desarrolló Einstein en 1915 en su teoría de la RG, siendo

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \tag{1.2}$$

entonces la ecuación (1.1) toma la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa_{EH} \, T_{\mu\nu}. \tag{1.3}$$

[1] Nos referimos con este término a teorías que describan la física de un fenómeno natural sin presentar problemas teóricos. Podemos entenderlo con una analogía con la Mecánica Clásica, para determinar el movimiento de una partícula solo necesitamos ecuaciones diferenciales de movimiento de orden dos. Podríamos plantearnos teorías con derivadas de orden superior, pero no es necesario para describir la física de un sistema y además estas teorías tienen problemas teóricos.

Con esta expresión para el tensor geométrico $G_{\mu\nu}$ llegamos en el límite no relativista a la ecuación de Poisson de la gravedad newtoniana

$$\bar{\nabla}^2\Phi(\bar{r},t) = 4\pi G_N \rho(\bar{r},t), \tag{1.4}$$

donde $\bar{\nabla}$ representa el gradiente tridimensional. Para llegar a este límite newtoniano κ_{EH}, la constante de acoplamiento de (1.3), debe ser

$$\kappa_{EH} = 8\pi G_N. \tag{1.5}$$

Le damos a esta constante de acoplamiento el nombre κ_{EH} pues la expresión (1.2) fue propuesta paralelamente por A. Einstein y D. Hilbert (EH). Otras teorías geométricas de la gravedad, que se basan en la idea de la ecuación (1.1), llegando a una expresión distinta para $G_{\mu\nu}$, tendrán una constante de acoplamiento diferente.

Este fue el procedimiento que siguió Einstein para llegar a la ecuación (1.3), pero como ya hemos mencionado, paralelamente Hilbert también llegó a esta siguiendo el método variacional. Para ello planteó la acción más simple construida a partir de escalares de curvatura e hizo variar la métrica, hallando así las ecuaciones de movimiento que debe satisfacer este campo tensorial. La acción que planteó Hilbert, conocida como acción de EH, más una acción que describe los campos materiales fue

$$S[g^{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa_{EH}} \int d^4x\sqrt{|g|}R + \int d^4x\sqrt{|g|}\mathscr{L}_{Mat}, \tag{1.6}$$

donde $|g|$ es el determinante de la métrica y $\mathscr{L}_{Mat}$ es el lagrangiano que representa el contenido en energía y materia del espaciotiempo. Variando esta acción con respecto a la métrica, llegamos a las expresiones

$$G_{\mu\nu} = \frac{\delta(\sqrt{|g|}R)}{\delta g^{\mu\nu}}, \qquad T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta(\sqrt{|g|}\mathscr{L}_{Mat})}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{1.7}$$

que, si las desarrollamos, obtenemos la ecuación (1.3). El tensor $G_{\mu\nu}$ así definido cumple las seis condiciones anteriormente expuestas. Todas de trivial demostración menos la condición 3) y la 6). La condición 3) se demuestra por del teorema de Noether aplicado a la simetría de cambios arbitrarios de coordenadas. La condición 6) se cumple sistemáticamente para este lagrangiano de EH, pues en el desarrollo del cálculo variacional, las derivadas de orden superior a dos para la métrica se anulan. Sin embargo, esto no ocurre para cualquier lagrangiano, una combinación arbitraria de escalares de curvatura nos lleva a una expresión para $G_{\mu\nu}$ con derivadas de orden superior a dos. Por lo tanto, si queremos una teoría de la gravedad *físicamente aceptable*, debemos tener una combinación de escalares de curvatura específica que anule estas derivadas de orden superior. Hemos visto ya una, el lagrangiano de EH, y durante el desarrollo del trabajo veremos más.

Por tanto hemos presentado los dos procedimientos que se plantearon para llegar a la ecuación (1.3). El procedimiento que siguió Einstein se basa en qué condiciones físicas debe cumplir la ecuación (1.1), para llegar a una teoría geométrica de la gravedad físicamente admisible. Siguiendo este procedimiento la condición no trivial es la 3), pues cualquier combinación de tensores de curvatura no tendrá divergencia nula. Hilbert, sin embargo, siguió un procedimiento mas sistemático que, como ya hemos dicho, por la propia maquinaria matemática del formalismo lagrangiano cumple las primeras cinco condiciones para (1.1). Siguiendo esta vía no es seguro que se cumpla la condición 6) pues, en general, para un lagrangiano de escalares de curvatura se deducen ecuaciones para la métrica con derivadas de orden superior a dos.

El procedimiento actual para proponer teorías de la gravedad es el formalismo lagrangiano. Muchas de estas teorías ignoran que se cumpla la condición 6), como por ejemplo, teorías $f(R)$ o $f(R_{\mu\nu})$. Sin embargo ciertos lagrangianos, en las ecuaciones para los campos, no tienen derivadas de la métrica de orden superior a dos.
En 1938, C. Lanzcos encontró que al variar con respecto a la métrica el término de Gauss-Bonnet (GB)

$$\mathscr{L}_{GB} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda}, \tag{1.8}$$

las derivadas de orden mayor que dos, en las ecuaciones para los campos, se anulan [1]. Esto se debe a los coeficientes específicos de cada escalar de curvatura, pues cada término tiene derivadas de orden superior a dos pero en conjunto se anulan. Se debe suponer un espaciotiempo de $N > 4$, pues para esta dimensión este es un término topológico (la característica de Euler cuatridimensional) y no contribuye a las ecuaciones para los campos.

En 1971, D. Lovelock desarrolló una teoría de la gravitación para espaciotiempos en N dimensiones. Demostró que se puede construir un lagrangiano de escalares de curvatura hasta orden n en el tensor de Riemann que cumpliera la condición 6) [2]. Esta teoría engloba los términos de EH y de GB, siendo la expresión general para el tensor geométrico

$$G_{\mu\nu} = \frac{\delta\left(\sqrt{|g|}\sum_{a=0}^{n}\kappa_a \cdot \mathscr{L}_{LL}{}^{a}\right)}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{1.9}$$

con κ_a, las distintas constantes de acoplamiento de cada término del lagrangiano. El término de orden n contribuye en las ecuaciones para los campos en espaciotiempos de dimensión $N > 2n$. Para dimensión $N = 2n$ es un término topológico y para dimensiones $N < 2n$ es idénticamente nulo. Algunos de los términos del lagragiano de Lovelock son:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{LL}{}^{0} = \Lambda, \quad \text{la constante cosmologica.}\\
&\mathscr{L}_{LL}{}^{1} = \mathscr{L}_{EH} = R, \quad \text{el lagrangiano propuesto por Hilbert.}\\
&\mathscr{L}_{LL}{}^{2} = \mathscr{L}_{GB} = R^2 - 4R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^{\mu\nu\rho\lambda}R_{\mu\nu\rho\lambda}, \quad \text{el lagrangiano de Gauss} - \text{Bonnet.}\\
&\mathscr{L}_{LL}{}^{3} = R^3 - 12RR^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + 16R^{\mu\nu}R_{\nu\rho}R^{\rho}{}_{\mu} + 24R^{\mu\nu\rho\lambda}R_{\mu\rho}R_{\nu\lambda} + RR^{\mu\nu\rho\lambda}R_{\mu\nu\rho\lambda}+\\
&\qquad + 24R^{\mu\nu\rho\lambda}R_{\rho\lambda\nu\sigma}R^{\sigma}{}_{\mu} + 8R^{\mu\nu}{}_{\rho\lambda}R^{\rho\sigma}{}_{\nu\delta}R^{\lambda\delta}{}_{\mu\sigma} + 2R^{\mu\nu\rho\lambda}R_{\rho\lambda\sigma\delta}R^{\sigma\delta}{}_{\mu\nu},\\
&\qquad \text{el termino de orden tres en el tensor de Riemann.}
\end{aligned}$$

Vemos que la teoría de Lovelock incluye a la teoría de la gravedad EH y GB, además de términos cada vez más complicados. Para $N = 4$ el lagrangiano de Lovelock se reduce únicamente al lagrangiano de EH con constante cosmológica, siendo el término de GB una derivada total y el resto de términos idénticamente nulos. Análogamente, para $N = 6$ el lagrangiano de Lovelock se reduce a los lagrangianos de EH y GB (cada uno pesado por su constante de acoplamiento) con constante cosmológica.

En este trabajo nos disponemos a estudiar el lagrangiano de EH y de GB por separado, es decir, como dos teorías de la gravedad distintas y compararemos sus predicciones. Para ello consideraremos un espaciotiempo $N-$dimensional y veremos que predicciones tiene la teoría de EH y la teoría de GB sobre la dinámica de éste. Según lo que hemos expresado antes, en este espaciotiempo $N-$dimensional, hay términos del desarrollo de Lovelock de orden superior que contribuirían a las ecuaciones para los campos, pero no los vamos a considerar.
Como la gravedad de EH está muy estudiada (para ello se puede acudir a textos como [3], [4],

se expande. Podemos calcular el tiempo del universo si conocemos la constante de Hubble en el tiempo actual t_0. La constante de Hubble se define como $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ y entonces el tiempo actual del universo será

$$t_0 = \frac{2}{(N-1)(\omega+1)} H_0. \tag{5.31}$$

Nos hemos encontrado con un tipo de universos que tienen inicio, los espacialmente planos. La diferencia que existe entre ellos son los tipos de densidad de energía que consideremos en ellos. Dependiendo de esta, tendremos universos acelerados o decelerados y universos con curvatura positiva, negativa o nula. Vamos a considerar ahora estos tipos de universos en la gravedad GB y comparar sus propiedades con los de la gravedad EH.

GAUSS-BONNET.
Los universos espacialmente planos dominados por una densidad de energía con parámetro $\omega \neq -1$, en la gravedad GB deben cumplir

$$\frac{1}{2}\frac{(N-1)!}{(N-5)!}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4 = \kappa_{GB}\,\rho_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-(N-1)(\omega+1)} ; \qquad R_\omega^{GB} = \left(\frac{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)}{2\kappa_{GB}\,\rho_0\,a_0^{(N-1)(\omega+1)}}\right)^{1/4}. \tag{5.32}$$

La constante R_ω^{GB} es, como en la gravedad EH, análoga al radio del espaciotiempo de De Sitter. Integrando la ecuación diferencial llegamos a la solución para el factor de escala

$$a(t) = \left[\frac{(N-1)(\omega+1)}{4}\left(R_\omega^{GB}\right)^{-1} t\right]^{\frac{4}{(N-1)(\omega+1)}}. \tag{5.33}$$

Vemos que al igual que el factor de escala para la gravedad EH es proporcional a una potencia del tiempo, pero distinta. Para comparar ambas soluciones consideraremos algunos casos, no en general.
Si tomamos materia fría como la densidad dominante del universo, para la gravedad de GB, el factor de escala crece con el tiempo de forma $a(t) \sim t^{4/(N-1)}$, mientras que para EH $a(t) \sim t^{2/(N-1)}$. Análogamente en un universo dominado por radiación el factor de escala para la gravedad GB es $a(t) \sim t^{4/N}$, mientras que para EH $a(t) \sim t^{2/N}$. Para estos universos, para la misma dimensión, el ritmo de crecimiento es mayor para GB que para EH. Cabe preguntarse si esto será así en general, solo tenemos que fijarnos en el exponente del tiempo de ambas teorías. Para el mismo tipo de energía y para la misma dimensión, el ritmo de crecimiento del factor de escala de la gravedad GB es siempre un factor dos mayor que el de la gravedad EH.

Vemos que esta solución de la gravedad GB cumple las predicciones de la ecuación de aceleración, anulándose para $\omega = -\frac{(N-5)}{(N-1)}$, siendo positiva para valores menores y negativa para valores mayores. Solo tenemos que fijarnos en el exponente de la solución del factor de escala, si es igual, menor o mayor que 1.

Al igual que en la teoría de EH, este factor de escala de la gravedad GB se anula en $t = 0$. Por la forma funcional del mismo sabemos que es una singularidad física, pero para comprobarlo tenemos que calcular el escalar de Ricci

$$R = \frac{8\left[2N - (N-1)(\omega+1)\right]}{(N-1)(\omega+1)^2} t^{-2}. \tag{5.34}$$

Por lo tanto también tienen un inicio los universos espacialmente planos en la gravedad GB. Igual que en la gravedad de EH, esta expresión no es válida para un universo dominado por la constante cosmológica y dependiendo del parámetro ω tendremos curvatura del espaciotiempo positiva, negativa o nula.

Al igual que en EH, podemos calcular la edad del universo conocida la constante de Hubble. Para esta gravedad tenemos

$$t_0 = \frac{4}{(N-1)(\omega+1)} H_0. \tag{5.35}$$

Para la misma dimensión, parámetro de estado y constante de Hubble, la edad de un universo de EH es la mitad de la edad de un universo de GB: $t_0^{GB} = 2t_0^{EH}$.

Los universos espacialmente planos con una densidad de energía dominante de parámetro ω, tienen una expresiones para el factor de escala similares que, bajo ciertas condiciones, pueden tener la misma tendencia. Ambas teorías predicen el Big Bang de estos universos pero, en general, difieren en la edad de ellos. También el los intervalos para los cuales el escalar de Ricci es positivo o negativo.

En este punto hemos analizado las similitudes y diferencias de las teorías de gravedad de EH y GB para un caso concreto. En general hemos visto que las soluciones de ambas teorías a las EdF son distintas. Nos hemos encontrado con soluciones que existen en GB pero no en EH (universo estático de Einsten con $k = -1$), soluciones de EH que no se repiten en GB (espaciotiempo de Anti-de Sitter), soluciones funcionalmente iguales pero con parámetros distintos (universo estático de Einstein y espaciotiempo de De Sitter), soluciones funcionalmente diferentes (Einstein-de Sitter y otros universos espacialmente planos) y soluciones exactamente iguales (espaciotiempo de Milne). Hemos analizado las soluciones que son distinta y que condiciones deben cumplirse para que sean iguales.
Por tanto, ademas de las diferencias que hemos analizado ya antes, aplicando ambas teorías a un caso particular, vemos que se parecen (en el sentido que comparten soluciones) pero tienen predicciones bastante diferentes.

6. Conclusiones

En este trabajo hemos desarrollado dos teorías distintas de la gravedad, la de Einstein-Hilbert y la de Gauss-Bonnet, considerándolas como teorías independientes. Cada teoría, a partir de un lagrangiano de escalares de curvatura, proporciona una ecuación que debe satisfacer la métrica que, como hemos visto, son distintas y por tanto, tendrán diferentes predicciones. Este trabajo se centra en estudiar estas predicciones viendo qué tienen de similar y en qué se diferencian.

En la sección 2 desarrollamos la ecuación que debe satisfacer la métrica según la gravedad de GB (2.15), que difiere bastante de ecuación para la gravedad EH (1.3). Estudiamos las diferencias que tienen al nivel de la ecuación tensorial y encontramos dos fundamentales. En la gravedad EH el contenido en energía y materia no impone ninguna condición sobre el tensor de Weyl, mientras que la gravedad de GB impone una ligadura que debe satisfacer. Como ya hemos expresado, este es un punto que se debe desarrollar más en profundidad. También, estas gravedades, difieren en el régimen dimensional, la gravedad de EH influye en la dinámica de espaciotiempos con dimension $N > 2$, mientras que la gravedad de GB en aquellos que tienen dimensión $N > 4$. Por esta razón, para comparar ambas teorías de la gravedad en un mismo espaciotiempo hemos tenido que considerar uno con $N > 4$.
En esta sección hemos visto que las dos gravedades tienen diferencias notables, pero para ha-

cerlas mas evidentes, vamos a estudiar un caso particular, lo que nos ha abarcado el resto del trabajo.

En la sección 3 aplicamos ambas gravedades a un caso particular, espaciotiempos descritos por el Ansatz Friedmann-Robertson-Walker, hallando las ecuaciones que debe satisfacer la función libre de este Ansatz, el factor de escala. Las ecuaciones de Friedmann para la gravedad EH son (3.29) y (3.30), mientras que para la gravedad GB son 3.34) y (3.35). Nos damos cuenta que las ecuaciones así escritas, para un espaciotiempo $N-$dimensional, cumplen el régimen dimensional de cada gravedad, en EH son válidas para $N > 2$ y en GB para $N > 4$. Durante el desarrollo de ambas ecuaciones nos damos cuenta de una propiedad general que tienen las EdF de cualquier teoría geométrica de la gravedad: la ecuación de la componente temporal más la ecuación de continuidad implican la ecuación de la componente espacial. Demostrando esta propiedad (cuando $\dot{a} \neq 0$) la búsqueda de soluciones de estas ecuaciones se simplifica mucho.

En la sección 4 comparamos, a nivel formal, las EdF. Nos damos cuenta que ambos sets de ecuaciones tienen una estructura muy parecida, de forma que podemos dar una expresión general para ambas. Dejamos planteado una posible continuación de este trabajo que es estudiar las EdF para lo siguientes términos del lagrangiano de Lovelock y ver asi si la estructura se repite. Además, en esta sección abordamos dos estudios diferentes de estas ecuaciones. Nos planteamos el estudio de la evolución de la densidad de energía total con el tiempo, dependiendo de la geometría de las secciones espaciales y el estudio de la ecuación de aceleración de ambas teorías. En cuanto a la primera, que llamamos *problema de la planitud* por la motivación histórica, vemos que ambas gravedades predicen el mismo comportamiento para la densidad total en el caso de geometría euclídea, para la geometría esférica un crecimiento o decrecimiento más rápido de la misma en la gravedad GB que en EH, pero la diferencia mas evidente aparece en la geometría hiperbólica. En esta geometría la gravedad GB predice comportamientos transitorios, a tiempos tempranos, que dependen de la velocidad del factor de escala cosa que no ocurría en la gravedad EH. A tiempos tardíos, coinciden para el caso de aceleración positiva pero difieren completamente en el caso de aceleración negativa, la gravedad EH predice un decrecimiento de la densidad total mientras que GB un crecimiento.
En el estudio de la ecuación de aceleración nos damos cuenta que, así como la aceleración del factor de escala en la gravedad EH no depende de la geometría de las secciones espaciales, en la gravedad de GB sí. Las predicciones en el caso de la geometría euclídea y esférica son similares a las predicciones de EH, solo difieren en el parámetro de estado que separa los regímenes de aceleración y deceleración. En el caso de la gravedad EH este es $\omega_0^{EH} = -\frac{(N-1)}{(N-3)}$, mientras que en la gravedad GB es $\omega_0^{GB} = -\frac{(N-1)}{(N-5)}$. Sin embargo, hemos visto que las predicciones en el caso de la geometría hiperbólica difieren bastante. En el caso de la gravedad EH son las mismas que para las demás geometrías, pero para la gravedad GB que se de aceleración o deceleración dependerá del valor inicial de la velocidad y eEsto no tiene análogo en la gravedad EH.
Empezamos a ver diferencias muy evidentes entre ambas teorías de la gravedad, estas diferencias se hacen aun más claras en las soluciones de las EdF.

En la sección 5 resolvemos las EdF para ambas teorías de la gravedad en ciertas situaciones especificas. Empezamos planteando el universo estático de Einstein, en el que vemos que la gravedad EH tiene solución para geometría esférica y que GB, además de esta, también tiene solución para geometría hiperbólica. Después nos planteamos el espaciotiempo de De Sitter, para este vemos que ambas gravedades contemplan todos los posibles espacios con diferentes geometrías y que solo difieren en la definición del radio de De Sitter. Nos planteamos también el espacio de Anti-de Sitter, y aquí nos encontramos que así como la gravedad EH tiene esta

solución, GB no pues, la ecuación diferencial no tiene solución real para el factor de escala. Después solucionamos las EdF para vacío y llegamos con ambas teorías al mismo espaciotiempo, el universo de Milne, que resulta ser el espaciotiempo de Minkowski con secciones espaciales hiperbólicas. Por último, nos planteamos los universos espacialmente planos con un parámetro de estado ω general. Entre estos está el espaciotiempo de Einstein-de Sitter con $\omega = 0$. Llegamos a una solución para el factor de escala muy similar en ambas teorías, una potencia del tiempo, pero el exponente es distinto. Estos espaciotiempos tienen un inicio, un Big Bang, en el cual la curvatura tiende a infinito. Por tanto, el tiempo del universo es finito y podemos calcularlo y comparar el que predicen ambas gravedades. Llegamos a que, para la misma dimensión, parámetro de estado y constante de Hubble, la edad de un universo GB es el doble que la de un universo EH.
Por tanto cada gravedad tiene soluciones distintas para las ecuaciones de Friedmann, otra prueba más de que son teorías de la gravedad muy distintas.

En este trabajo nos hemos dado cuenta que, mucho de lo que conocíamos de la gravedad Einstein-Hilbert únicamente es intrínseco a ella misma, pues la siguiente teoría fundamental de la gravedad que podemos plantearnos, la gravedad Gauss-Bonnet, difiere sustancialmente en las predicciones. Faltaría estudiar en la gravedad de GB otros fenómenos muy conocidos en EH como la métrica de Schwarzschild o las ondas gravitacionales, comparando así sus semejanzas y diferencias.

Es interesante darse cuenta que es válido para cualquier teoría de la gravedad que provenga de un lagrangiano de escalares de curvatura: Einstein-Hilbert, Gauss-Bonnet, cualquier combinación de términos del lagrangiano de Lovelock, teorías $f(R)$, $f(R_{\mu\nu})$..., es un resultado general para el Ansatz FRW. Esto es debido a la gran estructura de este Ansatz pues describe espaciotiempos con secciones espaciales máximamente simétricas y solo tiene una función a determinar con dependencia únicamente temporal. Todas estas restricciones hacen que las ecuaciones que se deduzcan de este Ansatz estén relacionadas entre si. También hay que resaltar la condición $\dot{a} \neq 0$ que, si no se cumple, el teorema anterior no es válido. La mayoría de soluciones del universo la cumplen, pero el *Universo estático de Einstein* no. Cuando nos planteemos esta solución veremos que tendremos que resolver la EdF de la componente tt) y la EdF de la componente ij) o lo que es lo mismo la ecuación de aceleración.