Trabajo de la beca de iniciación de la UGR: Invariancia gauge de las acciones efectivas no abelianas de D-branas

Jesús Montero Aragón

Dirigido por: Bert Janssen
Dpto. de Física Teórica y del Cosmos

Mayo 2009

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Una de las mayores metas actuales de la Física es el desarrollo de una teoría que abarque y describa adecuadamente tanto el carácter cuántico del universo como la gravitación de Einstein que lo gobierna a gran escala. Una de las teorías candidatas más populares es la Teoría de Cuerdas (ST), innovadora en el sentido de que no intenta unificar las teorías ya existentes, sino que desarrolla una nueva descripción de nuestro universo. En principio, de forma independiente, se desarrolló la teoría de Supergravedad (Sugra) en diez dimensiones (y que, a diferencia de ST, es una teoría de campos) para intentar renormalizar la descripción cuántica de la Relatividad General. Aunque en principio no pareció tener éxito, los avances en este campo de la Física han llegado a dar una visión de las distintas versiones de Sugra como aproximaciones de baja energía de las correspondientes versiones en ST, reanimando el interés en el estudio de estas teorías.

En este proyecto vamos a tratar con las llamadas *D-branas* o branas de tipo Dirichlet, que son las hipersuperficies que se forman de las condiciones de contorno de tipo Dirichlet de los extremos de las cuerdas abiertas. En la aproximación de Sugra, se considera a las D-branas como objetos dinámicos, estudiándose sus interacciones con los otros elementos de la teoría a través de sus acciones efectivas.

La descripción que vamos a tratar está enmarcada en las denominadas teorías gauge, en las que los campos básicos de la teoría presentan más componentes que grados de libertad físicos, posibilitando el variar los campos de ciertas formas determinadas (mediante las *transformaciones gauge* o de "contraste") sin que la física subyacente se vea afectada, lo que se conoce como una simetría gauge. Es por ello que las acciones de una teoría gauge y ciertos de sus campos sólo pueden verse modificados al efectuar una transformación gauge de forma que las ecuaciones del movimiento del sistema no varíen con la transformación (esto es, que sean *invariantes gauge*, respetando entonces la teoría la correspondiente simetría gauge). En el caso de las acciones, esto limita las modificaciones a una derivada total.

Tal es el afianzamiento del concepto de los campos gauge y de las correspondientes invariancias de las acciones, que se toma como un requisito a cumplir por las mismas, hasta el punto de que, en caso de no resultar invariante frente a alguna transformación válida, se puede llegar a modificar la acción añadiendo los términos de correción necesarios para recuperar la invariancia.

Nuestro estudio tiene como objetivo un tipo particular de trasnformaciones gauge, las de Stückelberg, que se emplean para eliminar un campo supérfluo de la descripción de Sugra tipo IIA masiva (sólo pueden definirse en esta teoría): si bien para una única D-brana o varias paralelas separadas, estas transformaciones no son difíciles de definir ni de aplicar, sabiéndose que las acciones efectivas y los campos transforman adecuadamente bajo ellas; la situación es muy distinta en el caso de varias D-branas coincidentes, pues entonces la descripción se vuelve mucho más complicada (de hecho, no abeliana), de forma que resulta difícil saber cómo se definen y actúan las transformaciones gauge (véase p.ej. cualquiera de los artículos de la bibliografía), en especial las de Stückelberg.

En este proyecto se intentará por tanto esclarecer la función de las transformaciones de Stückelberg en el caso no abeliano.

Capítulo 2

Trabajo preparatorio

El objetivo de este capítulo es el de introducir los conceptos y el marco teórico necesarios para abordar el estudio del comportamiento de las acciones efectivas no abelianas bajo transformaciones de Stückelberg, presentando simultáneamente el trabajo preparatorio que el estudiante debió realizar en esa dirección.
En su mayor parte, lo aquí expuesto se reduce básicamente al guión de trabajo proporcionado por el Profesor Janssen, complementado por las respuestas de los ejercios más significativos, así como por impresiones y comentarios considerados relevantes. Nótese que muchas de las expresiones empleadas no pudieron calcularse explícitamente (las acciones, los field strentghs, la forma básica de las variaciones gauge de los campos,...), pues se derivan en la teoría de Supergravedad, cuyo estudio formal cae fuera de los objetivos del presente trabajo.

2.1. Acciones y soluciones

En esta primera sección veremos, a modo ilustrativo, un modelo simplificado de métrica para describir Dirichlet-branas de p dimensiones espaciales (o *p-branas*, de forma resumida) en un espacio D-dimensional, así como un ejemplo sencillo de cómo se relacionan entre sí un tipo de campos que aparecen frecuentemente en la teoría. Una aclaración de la notación empleada en esta y en posteriores secciones puede hallarse en el correspondiente apéndice.

Consideremos en primer lugar la acción de gravedad D-dimensional acoplada a un escalar ϕ y a un tensor antisimétrico $C_{\mu_1\dots\mu_{p+1}}$ de rango $p+1$:

$$S = \int d^D x \sqrt{|g|} \left\{ e^{-2\phi} \left[R - 4\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right] + \frac{(-1)^{p+1}}{2(p+2)!} e^{a\phi} F_{\mu_1\dots\mu_{p+2}} F^{\mu_1\dots\mu_{p+2}} \right\} \tag{2.1}$$

siendo R el escalar de Ricci de la métrica $g_{\mu\nu}$, que viene multiplicado por el factor $e^{-2\phi}$. Obsérvese que esta forma de acoplar el campo escalar a la gravedad no es la habitual, empleada en el einstein frame, sino que es la correspondiente al denominado string frame, que tiene algunas ventajas en teoría de cuerdas. Siempre y cuando no se afirme lo contrario, trabajeros en el string frame, de cuya métrica $g^{(\sigma)}_{\mu\nu}$ siempre se puede pasar a la métrica $g^{(E)}_{\mu\nu}$ del Einstein frame re-escalando:

$$g^{(E)}_{\mu\nu} = e^{\frac{-4}{D-2}\phi} g^{(\sigma)}_{\mu\nu} \tag{2.2}$$

En la acción (2.1) también aparece $F_{\mu_1\dots\mu_{p+2}}$, el así llamado *field strength* del campo tensorial $C_{\mu_1\dots\mu_{p+1}}$, esto es:

$$F_{\mu_1\dots\mu_{p+2}} = (p+2)\partial_{[\mu_1} C_{\mu_2\dots\mu_{p+2}]}$$

Con esta definición, $F_{\mu_1\dots\mu_{p+2}}$ es invariante bajo la transformación gauge del campo tensorial $\delta C_{\mu_1\dots\mu_{p+1}} = \partial_{[\mu_1}\Lambda_{\mu_2\dots\mu_{p+1}]}$, pues entonces la transformación δF_{p+2} no es sino la antisimetrización de la derivada segunda (objeto simétrico frente al intercambio de índices) del campo Λ_p:

$$\delta F_{\mu_1\dots\mu_{p+2}} = \partial_{[\mu_1}\partial_{\mu_2}\Lambda_{\mu_1\dots\mu_{p+2}]} \equiv 0$$

En el sentido de campo y potencial del mismo, F_{p+2} y C_{p+1} son una generalización del campo $F_{\mu\nu}$ y el potencial A_μ que aparecen en la formulación covariante de la teoría de Maxwell ($F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$).

Las ecuaciones del movimiento de la acción (2.1), tomando como grados libertad de la misma la métrica y los campos ϕ y C_{p+1}, se pueden obtener exigiendo que la acción sea extremal:

$$\begin{aligned}
&R_{\mu\nu} \;-\; 2\nabla_\mu\partial_\nu\phi \;+\; \frac{(-1)^{p+1}}{2(p+1)!}e^{a\phi}\left[F_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_{p+1}}F_\nu{}^{\lambda_1\ldots\lambda_{p+1}} - \frac{1}{2(p+2)}g_{\mu\nu}F_{\lambda_1\ldots\lambda_{p+2}}F^{\lambda_1\ldots\lambda_{p+2}}\right] = 0\ ;\\
&R \;+\; 4\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \;-\; 4\nabla_\mu\partial^\mu\phi \;-\; \frac{a(-1)^{p+1}}{4(p+2)!}e^{(a+2)\phi}F_{\lambda_1\ldots\lambda_{p+2}}F^{\lambda_1\ldots\lambda_{p+2}} = 0\ ;\\
&\nabla_\mu\left[e^{a\phi}F^{\mu\lambda_1\ldots\lambda_{p+1}}\right] = 0
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Si bien las p-branas son soluciones de estas ecuaciones del movimiento, y representan objetos extendidos p-dimensionales cargados respecto de los campos F_{p+2}; siendo en cierto modo la generalización de los agujeros negros con carga eléctrica en Relatividad General o de los electrones en electromagnetismo. La forma explícita de la solución depende del número total D de dimensiones del espacio-tiempo en nuestra teoría, del rango (p+2) del tensor F_{p+2} y del acoplo a del campo escalar ϕ al mismo.

Un caso sencillo pero ilustrativo se tiene tomando para $D = 10$ un acoplamiento $a = 0$, simplificándose así notablemente las ecuaciones de (2.3). En este caso se puede comprobar que la configuración:

$$\begin{gathered}
ds^2 = H^{-1/2}\eta_{mn}dx^m dx^n - H^{1/2}\delta_{ij}dy^i dy^j\ ; \qquad (2.4)\\
e^{-2\phi} = H^{\frac{p-3}{2}}\ ; \qquad F_{012\ldots pi} = \partial_i H^{-1}
\end{gathered}$$

con $m, n \in \{0, 1, 2, ..., p\}$, $i, j \in \{1, 2, ..., 9-p\}$ y η_{mn} la métrica del espacio-tiempo plano, es una solución de las ecuaciones del movimiento para $p \leq 9$ y siendo H una función armónica que depende sólo de las coordenadas y^i:

$$H = H(y) = 1 + Q/r(y)^{9-p-2}\ ; \qquad \partial_m\partial^m H(y) = 0$$

donde Q es una constante interpretable como la carga de la brana frente a los campos F_{p+2}, y $r = \sqrt{y_m\ y^m}$ es la distancia transversal del punto considerado a la brana, pues ésta abarca el espacio en el que $H(y)$ es singular (compárese con la carga puntual en electrostática). Por tanto, el *worldvolume* o volumen de universo[1] de una p-brana comprende la coordenada temporal y las p espaciales x^m, de forma que se tienen $D - p - 1 = 9 - p$ coordenadas transversales y^i.

En este ejemplo en concreto, al depender H sólo de las coordenadas transversales, el espacio-tiempo para un observador en la brana sería plano (H es un factor, constante en el worldvolume, que multiplica a la métrica η_{mn}); de esta forma, la curvatura del espacio-tiempo y su divergencia al aproximarse a la brana se observarían exclusivamente en las coordenadas transversales.

2.2. Dualidad Hodge

Los grados de libertad de un tensor antisimétrico de rango q en D dimensiones se pueden describir de forma dual en forma de un tensor antisimétrico de rango $D - q$. Veamos el ejmplo de la $(p+2)$-forma $F_{\mu_1\ldots\mu_{p+2}}$ (que cumple la identidad de bianchi por ser el field strength de $C_{\mu_2\ldots\mu_{p+2}}$) de la acción (2.1).

Consideremos la acción:

$$\begin{aligned}
\tilde{S} \;=\; &\int d^Dx\sqrt{|g|}\left\{e^{-2\phi}\left[R - 4\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right] + \frac{(-1)^{p+1}}{2(p+2)!}e^{a\phi}F_{\mu_1\ldots\mu_{p+2}}F^{\mu_1\ldots\mu_{p+2}}\right\}\\
&+ \frac{(-1)}{p!(D-p-1)!}\int d^Dx\ \epsilon^{\mu_1\ldots\mu_{D-p-3}\nu_1\ldots\nu_{p+3}}B_{\mu_1\ldots\mu_{D-p-3}}\partial_{\nu_1}F_{\nu_2\ldots\nu_{p+3}}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

[1] El worldvolume consiste en el espacio-tiempo (p+1)-dimensional (una dirección temporal y p espaciales) en el que se extiende el objeto estudiado. Por ejemplo, una partícula, como un punto 0-dimensional que se extiende en el tiempo, tendría un worldvolume 1-dimensional, la llamada *línea de universo* de la partícula.

Resulta ser invariante bajo las transformaciones gauge $\delta B_{\mu_1\ldots\mu_{D-p-3}} = \partial_{[\mu_1}\Sigma_{\mu_2\ldots\mu_{D-p-3}]}$. Así mismo se puede comprobar cómo la ecuación del movimiento de $B_{\mu_1\ldots\mu_{D-p-3}}$ implica la identidad de Bianchi para $F_{\mu_1\ldots\mu_{p+2}}$; de forma que la acción (2.5) resulta ser físicamente equivalente a la (2.1), actuando $B_{\mu_1\ldots\mu_{D-p-3}}$ como multiplicador de Lagrange para imponer la identidad de Bianchi.

Por otra parte, la ecuación del movimiento que se obtiene de la acción para $F_{\mu_1\ldots\mu_{p+2}}$ considerándolo un campo independiente implica la siguiente relación entre él y $B_{\mu_1\ldots\mu_{D-p-3}}$:

$$F^{\mu_1\ldots\mu_{p+2}} = \frac{1}{(D-p-2)!}\frac{e^{-a\phi}}{\sqrt{|g|}}\epsilon^{\mu_1\ldots\mu_{p+2}\nu_1\ldots\nu_{D-p-2}}G_{\nu_1\ldots\nu_{D-p-2}} \tag{2.6}$$

donde $G_{\nu_1\ldots\nu_{D-p-2}} = (D-p-2)\partial_{[\mu_1}B_{\mu_2\ldots\mu_{D-p-2}]}$, de forma que toda la información codificada en $F^{\mu_1\ldots\mu_{p+2}}$ está también en $G_{\nu_1\ldots\nu_{D-p-2}}$, sin que exista una relación directa entre los campos gauge $C_{\mu_1\ldots\mu_{p+1}}$ y $B_{\mu_1\ldots\mu_{D-p-3}}$.

Puede comprobarse como sustituyendo (2.6) en la acción (2.5) se obtiene una acción equivalente en términos solo de $G_{\nu_1\ldots\nu_{D-p-2}}$:

$$\tilde{\tilde{S}} = \int d^Dx\sqrt{|g|}\left\{e^{-2\phi}\left[R - 4\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right] + \frac{(-1)^{p+1}}{2(D-p-2)!}e^{-a\phi}G_{\mu_1\ldots\mu_{D-p-2}}G^{\mu_1\ldots\mu_{D-p-2}}\right\} \tag{2.7}$$

2.3. La acción de Supergravedad tipo IIA masiva

También conocida como teoría de Romans, Supergravedad de tipo IIA masiva, o simplemente $mIIA$, es una extensión de Supergravedad tipo IIA en la que uno de los campos adquiere una masa, y describe la dinámica de los campos del espacio de fondo o *background*; siendo las D-branas soluciones particulares de la acción. La teoría requiere 10 dimensiones (1 temporal + 9 espaciales) y su contenido en campos bosónicos consiste en la métrica $g_{\mu\nu}$, un escalar ϕ llamado dilatón, un tensor antisimétrico $B_{\mu\nu}$ de rango dos, llamado el campo de Kalb-Ramond, así como un vector C_μ y un tensor antisimétrico $C_{\mu\nu\rho}$ de rango tres, conocidos como los campos de Ramond-Ramond (R-R). La parte bosónica de la acción tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S_{mIIa} \;=\; & \int d^{10}x\sqrt{|g|}\left\{e^{-2\phi}\left[R \;-\; 4\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \;+\; \frac{1}{12}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}\right] - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \;-\; \frac{1}{48}F_{\mu\nu\rho\lambda}F^{\mu\nu\rho\lambda} - \frac{1}{2}m^2\right\} \\ & -\frac{1}{144}\int d^{10}x\ \epsilon^{\mu_1\ldots\mu_{10}}\left\{\partial_{\mu_1}C_{\mu_2\mu_3\mu_4}\partial_{\mu_5}C_{\mu_6\mu_7\mu_8}B_{\mu_9\mu_{10}} \;+\; \frac{1}{2}m\partial_{\mu_1}C_{\mu_2\mu_3\mu_4}B_{\mu_5\mu_6}B_{\mu_7\mu_8}B_{\mu_9\mu_{10}}\right. \\ & \left. +\frac{9}{80}m^2B_{\mu_1\mu_2}B_{\mu_3\mu_4}B_{\mu_5\mu_6}B_{\mu_7\mu_8}B_{\mu_9\mu_{10}}\right\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Esta acción consiste en dos partes: la geométrica, multiplicada por $\sqrt{|g|}$ y que contiene los términos cinéticos de los campos, y la topológica, multiplicada por el símbolo de Levi-Civita 10-dimensional ϵ^{10}, y en la cuál no aparece reflejada la métrica. Asimismo, en ella R es el escalar de Ricci de la métrica $g_{\mu\nu}$, m es la masa, asociada a los denominados términos masivos (que diferencian las teorías IIA y mIIA) y $H_{\mu\nu\rho}$, $F_{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu\rho\lambda}$ son respectivamente los field strengths de $B_{\mu\nu}$, C_μ y $C_{\mu\nu\rho}$:

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu\rho} &= 3\partial_{[\mu}B_{\nu\rho]} \ ; \\ F_{\mu\nu} &= 2\partial_{[\mu}C_{\nu]} + mB_{\mu\nu} \ ; \\ F_{\mu\nu\rho\lambda} &= 4\partial[\mu C_{\nu\rho\lambda]} - 4H_{[\mu\nu\rho}C_{\lambda]} + 3mB_{[\mu\nu}B_{\rho\lambda]} \end{aligned} \tag{2.9}$$

los cuales son invariantes bajo las transformaciones gauge de los campos B_2 ($\equiv B$), C_1 y C_3:

$$\begin{aligned} \delta B_{\mu\nu} &= 2\partial_{[\mu}\Sigma_{\nu]} \ ; \\ \delta C_\mu &= \partial_\mu\Lambda - m\Sigma_\mu \ ; \\ \delta C_{\mu\nu\rho} &= 3\partial_{[\mu}\Lambda_{\nu\rho]} + 3\partial_{[\mu}\Lambda B_{\nu\rho]} - 3m\Sigma_{[\mu}B_{\nu\rho]} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Por ejemplo, para H_3 ($\equiv H$) y F_4 (usando ya la notación con los índices suprimidos):

$$
\begin{aligned}
\delta H &= 3\partial(\delta B) = 6\partial\partial\Sigma \equiv 0 \ ; \\
\delta F_4 &= 4\partial\delta C_3 - 4H\delta C_1 + 6mB\delta B \\
&= 4\partial\left(3\partial\Lambda_2 + 3\partial\Lambda_0 B - 3m\Sigma B\right) - 12\partial B(\partial\Lambda_0 - m\Sigma) + 12mB\partial\Sigma \\
&= -12\partial\Lambda_0\partial B - 12m\partial\Sigma B + 12m\Sigma\partial B - 12\partial B\partial\Lambda_0 + 12m\partial B\Sigma + 12mB\partial\Sigma \\
&= 0
\end{aligned}
$$

donde se ha tenido en cuenta que $\partial\delta = \delta\partial$ por la linealidad de ambos operadores, así como que $\partial\partial A \equiv \partial_{[\mu}\partial_{\nu]}A \equiv 0$ para A un tensor completamente antisimétrico.

En este punto resulta importante notar que las transformaciones gauge suelen tratarse como variaciones infinitesimales, tal y como se está haciendo en nuestro caso. De esta forma, rigen para las transformaciones las reglas de Leibniz para la derivación: $\delta(AB) = \delta A\, B + A\, \delta B$, y en particular $\delta(A^2) = 2A\delta A$ (obsérvese el ejemplo de δF_4). Si se considedaran transformaciones finitas, es decir ΔA en lugar de δA, sería necesario introducir términos de correción en la variación de los campos Ramond-Ramond C_p empleando el procedimiento de Noether, para mantener así la invariancia gauge de los field strentghs. Estas correciones serán necesarias y se calcularán en la parte del trabajo.

La invariancia de la parte geométrica de la acción (la que multiplica al determinante de la métrica y contiene los términos cinéticos de los campos) se deduce directamente de la de los field strenghts. Calculando explícitamente la variación de la parte topológica, se ve que ésta es nula, salvo una derivada total, por lo que resulta asimismo ser invariante.

Así pues, tenemos los fields strengths:

$$
\begin{aligned}
H &= 3\partial B \ , \\
F_2 &= 2\partial C_1 + mB \ , \\
F_4 &= 4\partial C_3 - 4HC_1 + 3mB^2 \ , \\
F_6 &= 6\partial C_5 - 20HC_3 + 15mB^3 \ , \\
F_8 &= 8\partial C_7 - 56HC_5 + 105mB^4 \ , \\
F_{10} &= 10\partial C_9 - 120HC_7 + 945mB^5
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

o bien de forma general, la convención para los field strengths de los campos R-R es:

$$
\begin{aligned}
F_n &= n\partial C_{n-1} - \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)HC_{n-3} + (n-1)!!\, mB^{n/2} \ ; \quad n = 2,4,6,8,10 \\
H &= 3\partial B
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Estos campos son pues invariantes bajo las transformaciones gauge:

$$
\begin{aligned}
\delta B &= 2\partial\Sigma \ , \\
\delta C_1 &= \partial\Lambda_0 - m\Sigma \ , \\
\delta C_3 &= 3\partial\Lambda_2 + 3\Lambda_0 B - 3m\Sigma B \ , \\
\delta C_5 &= 5\partial\Lambda_4 + 30\partial\Lambda_2 B + 15\partial\Lambda_0 B^2 - 15m\Sigma B^2 \ , \\
\delta C_7 &= 7\partial\Lambda_6 + 105\partial\Lambda_4 B + 315\partial\Lambda_2 B^2 + 105\partial\Lambda_0 B^3 - 105m\Sigma B^3 \ , \\
\delta C_9 &= 9\partial\Lambda_8 + 252\partial\Lambda_6 B + 1890\partial\Lambda_4 B^2 + 3780\partial\Lambda_2 B^3 + 945\partial\Lambda_0 B^4 - 945m\Sigma B^4
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

siendo la forma general de las transformaciones de los campos R-R:

$$
\begin{aligned}
\delta C_p &= p\partial\Lambda_{p-1} + \frac{p!}{2(p-3)!}\partial\Lambda_{p-3}B + \frac{p!}{8(p-5)!}\partial\Lambda_{p-5}B^2 + \frac{p!}{48(p-7)!}\partial\Lambda_{p-7}B^3 \\
&\quad + \frac{p!}{384(p-9)!}\partial\Lambda_{p-9}B^4 - p!!m\Sigma B^{(p-1)/2} \\
&= \sum_{n=0}^{[\frac{p-1}{2}]} \frac{p!}{(2n)!!(p-2n-1)!}\partial\Lambda_{p-2n-1}B^n - p!!\, m\Sigma B^{(p-1)/2}
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

donde en la primera igualdad sólo aparecerían para un p dado aquellos sumandos cuyos subíndices fueran mayores o iguales que cero, y en la última los corchetes denotan las parte entera de su argumento.
Los field strengths F_6, F_8 y F_{10} son respectivamente los duales Hodge de F_4, F_2 y m (contemplado como una 0-forma). Se puede comprobar que son también invariantes bajo las transformaciones δC_p , δB.

Llegados a este punto resulta importante resaltar que empleamos tres tipos de transformaciones gauge (infinitesimales), a saber:

1. R-R : $\delta C = \partial \Lambda e^B$
2. NS-NS: $\delta B = \partial \Sigma$
3. masivas: $\delta B = \partial \Sigma$; $\delta C = m\Sigma e^B$

Estas expresiones compactas son las habituales para hacer referencia rápida a las distintas transformaciones. Sus definiciones contiene los factores numéricos adecuados, y en ellas se toman de e^B los sumandos necesarios del desarrollo en serie de Taylor de la exponencial; de forma que con $\partial \Lambda e^B = \partial \Lambda_{n-1} + \partial \Lambda_{n-3} B + ...$ se tomarían sólo los primeros factores de la transformación de C_n, hasta llegar a Λ_0.

Nótese que las transformaciones R-R y las NS-NS (o las R-R y las masivas) son independientes entre sí (no hay por qué efectuarlas simultánamente), no obstante, las transformaciones masivas incluyen a las NS-NS, pues ambas dependen del parámtero Σ. Así mismo, en mIIA, los términos de masa m en los field strengths tanto de los campos del background como de la brana, así como explícitamente en las acciones efectivas (véase la próxima sección), hacen que todos estos sean invariantes bajo transformaciones R-R y/o masivas, pero no bajo las NS-NS efectuadas por separado. Por tanto, una transformación con $\Sigma \neq 0$ debe efectuarse siempre como masiva en la teoría mIIA.

2.4. Las acciones efectivas abelianas de D-branas

La dinámica de las Dp-branas está descrita por su acción efectiva, que describe la dinámica de estos objetos desde el punto de vista del volumen de universo o *worldvolume* de la brana. La aproximación empleada consiste en considerarla como un objeto de prueba o una sonda que se coloca en el background para ver como interacciona con sus campos, pero sin perturbarlos. Este *approach* es similar al empleado al estudiar p.ej. un electrón bajo la influencia de un campo externo que no se ve afectado por el mismo. La acción consiste en dos partes: la acción de Born-Infield (BI), que describe la masa de la brana y cómo está embebida en la geometría del espacio, y la acción de Chern-Simons (CS), que da cuenta de las interacciones de la brana con los campos gauge del background. Precisamente es esta última con la que trabajaremos. En la teoría mIIA (y también en la IIA) se describen sólo las p-branas con $p = 0,\ 2,\ 4,\ 6$ y 8, quedando las impares para Sugra tipo IIB.

Las acciones efectivas contienen dos tipos de campos: los del worldvolume, que son los que describen la dinámica de la brana, y los campos del background, que no son dinámicos desde el punto de vista de las acciones efectivas (pues no se ven influenciados por las branas). En el caso de las D-branas, los campos del worldvolume son los llamados *escalares de embedding* X^i, que describen la posición y las fluctuaciones de la brana en la dirección transversal x^i, y el vector de Born-Infield V_a, que describe las puntas de cuerdas abiertas atadas a las D-branas. El vector de BI tiene una simetría gauge $U(1)$, como los potenciales gauge en la teoría de Maxwell, y aparte se acopla al campo Kalb-Ramond $B_{\mu\nu}$ del background (las cuerdas abiertas unidas a las branas están cargadas con respecto a este campo, transmitiendo así su influencia a éstas), por lo que transforma también bajo las transformaciones gauge de $B_{\mu\nu}$.

Los campos del background se acoplan a la acción del worldvolume a través de un *pullback*; por lo que un campo $\Omega_{\mu_1...\mu_N}$ en el background (incluyendo p.ej. la métrica) induce un campo $\Omega_{a_1...a_N}$ en el worldvolume de la forma:

$$P[\Omega_{\mu_1...\mu_N}] \equiv \Omega_{a_1...a_N} = \Omega_{\mu_1...\mu_N} \partial_{a_1} X^{\mu_1} ... \partial_{a_N} X^{\mu_N} \tag{2.15}$$

Las transformaciones gauge del vector de BI vienen dadas por:

$$\delta V_a = \partial\chi - \Sigma_\mu \partial_a X^\mu \tag{2.16}$$

donde vemos que en realidad se tienen dos transformaciones independientes efectuadas simultáneamente: la del grupo de simetría $U(1)$, dada a través del parámetro χ, y una dada por el pullback del parámetro Σ de las NS-NS ($\delta B = 2\partial\Sigma$).
Se comprueba trivialmente que el field strength $\mathcal{F}_{ab} = 2\partial_{[a}V_{b]} + B_{\mu\nu}\partial_{[a}X^\mu\partial_{b]}X^\nu$ resulta ser invariante bajo las transformaciones de δV_a y de $B_{\mu\nu}$, de hecho, es invariante bajo las transformaciones de $U(1)$, dadas por χ, y bajo las NS-NS de Σ por separado.

Ya estamos en condiciones de identificar los términos que contiene la acción efectiva de Chern-Simons de las p-branas de mIIA, cuya expresión general es:

$$\mathcal{L}_{Dq} = (-1)^{[\frac{q+1}{2}]}\left[\sum_{n=0}^{[\frac{q+1}{2}]} \frac{(-1)^n}{(2n)!!(q-2n+1)!} C_{q-2n+1}\mathcal{F}^n + (-2)^{(q+2)/2}\frac{(q+1)!!}{(q+2)!} mV(\partial V)^{q/2}\right] \tag{2.17}$$

Estas acciones efectivas de q-branas (con $q+1$ índices) se dan (dentro las correspondientes integrales (q+1)-dimensionales) totalmente contraídas con un tensor de Levi-Civita ϵ^{q+1}, el cuál tiene el efecto de antisimetrizar los índices de la acción. Por ello se emplea una notación especialmente compacta, no sólo para señalar la antisimetrización de los índices (véase el apéndice), sino también para los pullbacks. A modo de ejemplo:

$$C_3\mathcal{F}^2 = C_{[a_1a_2a_3}\mathcal{F}_{a_4a_5}\mathcal{F}_{a_6a_7]} = C_{\mu_1\mu_2\mu_3}\partial_{[a_1}X^{\mu_1}\partial_{a_2}X^{\mu_2}\partial_{a_3}X^{\mu_3}\mathcal{F}_{a_4a_5}\mathcal{F}_{a_6a_7]}$$

De ahora en adelante se seguirá esta notación, de modo que con un campo del background dentro de la acción efectiva de una brana denotaremos al correspondiente pullback del campo en el worldvolume de la brana.

Se puede comprobar que la acción correspondiente a cada p-brana (ó q-brana, con $p \equiv q$) es invariante bajo las transformaciones gauge masivas y las R-R de la sección 2.3, salvo una derivada total (la cuál, en el formalismo de las acciones que se emplea, no afecta a las ecuaciones del movimiento).

A modo de ejemplo, para $\mathcal{L}_{D0}$:

$$\mathcal{L}_{D0} = C_1 - mV \;\;\Rightarrow\;\; \delta\mathcal{L}_{D0} = \delta C_1 - m\delta V = \partial(\Lambda_0 - m\chi) \tag{2.18}$$

y en el caso de $\mathcal{L}_{D4}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{D4} &= \frac{1}{5!}\left[C_5 - 10C_3\mathcal{F} + 15C_1\mathcal{F}^2 - 20mV(\partial V)^2\right] \quad\Rightarrow \\
\delta\mathcal{L}_{D4} &= \frac{1}{5!}\left[\delta C_5 - 10\delta C_3\mathcal{F} + 15\delta C_1\mathcal{F}^2 - 20m\delta V(\partial V)^2 - 40mV\partial(\delta V)\right] \\
&= \frac{1}{5!}\partial\left(5\Lambda_4 - 60\Lambda_2\partial V + 60\Lambda_0(\partial V)^2 - 40mV\partial V\Sigma - 20\chi(\partial V)^2\right) \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

donde se ha empleado que $\delta\mathcal{F} = 0$. Para los otros casos se obtienen expresiones similares, pero con un número mayor de términos dentro de la derivada para $\delta\mathcal{L}_{D6}$ y $\delta\mathcal{L}_{D8}$.

2.5. Las transformaciones de Stückelberg

Observando las transformaciones gauge (2.14), puede verse que el campo C_1 transforma con un shift bajo la transformación NS-NS de B: $\delta C_1 = -m\Sigma$. Esto conlleva que C_1 no representa un grado de libertad físico, pudiéndose eliminar de la descripción por medio de una transformación gauge de B.
De esta forma, introducimos las transformaciones de Stückelberg como una redefinición de campos, tal que C_1 ya no aparezca en los field strengths (y por tanto tampoco en la acción (2.8) de mIIA) ni en las acciones efectivas de las Dp-branas.

2.5.1. Aplicación a los campos del background

El primer field strength en el que aparece C_1 es F_2, por lo que empezamos exigiendo que:

$$F_2 = 2\partial C_1 + mB \stackrel{!}{=} m\tilde{B} \;\Rightarrow\quad \tilde{B} = B + \frac{2}{m}\partial C_1 \tag{2.20}$$

Nótese que por tanto $H = 3\partial B = 3\partial\tilde{B}$. Procediendo de igual forma con F_4, se tiene:

$$F_4 = 4\partial C_3 - 4HC_1 + 3mB^2 \stackrel{!}{=} 4\partial\tilde{C}_3 + 3m\tilde{B}^2 \;\Rightarrow\quad \tilde{C}_3 = C_3 - 3C_1B - \frac{3}{m}C_1\partial C_1 \tag{2.21}$$

donde se ha tenido en cuenta que el término HC_1, junto con el proviniente de $B = \tilde{B} - \frac{2}{m}\partial C_1$ necesariamente habían de agruparse con C_3 para formar $\tilde{C}_3$.

De esta forma hemos obtenido los campos redefinidos $\tilde{B}$ y $\tilde{C}_3$ a partir de los originales, siendo, como hemos exigido, $\tilde{F}_4(\tilde{C}_3, \tilde{B}) = F_4(C_3, C_1, B)$ así como $\tilde{F}_2(\tilde{B}) = F_2(C_1, B)$ (esta redefinición de campos está implementada de forma que sea una transformación gauge, como veremos más adelante).

El procedimiento puede seguirse para los duales F_6, F_8 y F_{10}, obteniéndose la definición de los nuevos campos $\tilde{C}_5$, $\tilde{C}_7$ y $\tilde{C}_9$ en los función de los R-R originales. P. ej. para F_6 y C_5 obtenemos:

$$\begin{aligned}
F_6 &\stackrel{!}{=} 6\partial\tilde{C}_5 - 20H\tilde{C}_3 + 15m\tilde{B}^3 \qquad \Rightarrow \\
\tilde{C}_5 &= C_5 - 15C_1B^2 - \frac{30}{m}C_1\partial C_1 B - \frac{20}{m^2}C_1(\partial C_1)^2
\end{aligned}$$

Para los campos R-R redefinidos podemos calcular sus correspondientes transformaciones gauge a partir de las correspondiente a los campos originales de sus definiciones. Veamos el caso de $\tilde{B}$ y $\tilde{C}_3$:

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{B} &= \delta B + \frac{2}{m}\partial(\delta C_1) = 2\partial\Sigma + \partial(\partial\Lambda_0 - m\Sigma) = 0\ ; \\
\delta\tilde{C}_3 &= \delta C_3 - 3\delta C_1 B - 3C_1\delta B - \frac{3}{m}\delta C_1\partial C_1 - \frac{3}{m}C_1\partial(\delta C_1) \\
&= 3\partial\Lambda_2 - \frac{3}{m}\partial\Lambda_0\partial C_1 - 3C_1\partial\Sigma + 3\partial C_1\Sigma \\
&= 3\partial\left(\Lambda_2 - \frac{1}{m}\Lambda_0\partial C_1 + C_1\Sigma\right)
\end{aligned}$$

de esta forma, podemos escribir:

$$\delta\tilde{C}_3 = 3\partial\tilde{\Lambda}_2\ ;\quad \tilde{\Lambda}_2 \equiv \Lambda_2 - \frac{1}{m}\Lambda_0\partial C_1 + C_1\Sigma$$

Nótese que, el hecho de que

$$0 = \delta F_4 = 4\partial(\delta\tilde{C}_3) + 6m\delta\tilde{B} = 4\partial(\delta\tilde{C}_3)$$

conlleva que $\delta\tilde{C}_3$ efectivamente debe poder expresarse como una derivada total.

Para los field strengths las transformaciones de Stückeleberg no son más que un reagrupamiento de términos, por lo que son automáticamente invariantes bajo las transformaciones de los campos redefinidos (no obstante esto se puede comprobar explícitamente evaluando los $\delta\tilde{F}_{p+2} = f(\tilde{C}_{p+1}, \tilde{C}_{p-1}, \tilde{B})$).

Asimismo resulta remarcable el que $\delta\tilde{B} = 0$, lo cuál implica $\tilde{B}$ ya no es un campo gauge, volviéndose entonces masivo y apareciendo así en la parte geométrica de la acción de mIIA (2.8) un término de masa del campo $\tilde{B}$ en la forma $m^2\tilde{B}^2$, al efectuar las transfomaciones de Stückelberg.

Resumiendo, tenemos que los field strengths redefinidos son:

$$\begin{aligned}
H &= 3\partial\tilde{B} \ , \\
F_2 &= m\tilde{B} \ , \\
F_4 &= 4\partial\tilde{C}_3 + 3m\tilde{B}^2 \ , \\
F_6 &= 6\partial\tilde{C}_5 - 20H\tilde{C}_3 + 15m\tilde{B}^3 \ , \\
F_8 &= 8\partial\tilde{C}_7 - 56H\tilde{C}_5 + 105m\tilde{B}^4 \ , \\
F_{10} &= 10\partial\tilde{C}_9 - 120H\tilde{C}_7 + 945m\tilde{B}^5
\end{aligned} \tag{2.22}$$

y que resultan ser invariantes bajo las transformaciones gauge de los campos redefinidos:

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{B} &= 0 \ , \\
\delta\tilde{C}_3 &= 3\partial\tilde{\Lambda}_2 \ , \\
\delta\tilde{C}_5 &= 5\partial\tilde{\Lambda}_4 + 30\partial\tilde{\Lambda}_2\tilde{B} \ , \\
\delta\tilde{C}_7 &= 7\partial\tilde{\Lambda}_6 + 105\partial\tilde{\Lambda}_4\tilde{B} + 315\partial\Lambda_2\tilde{B}^2 \ , \\
\delta\tilde{C}_9 &= 9\partial\tilde{\Lambda}_8 + 252\partial\tilde{\Lambda}_6\tilde{B} + 1890\partial\tilde{\Lambda}_4\tilde{B}^2 + 3780\partial\tilde{\Lambda}_2\tilde{B}^3
\end{aligned} \tag{2.23}$$

donde $\tilde{\Lambda}_4$, $\tilde{\Lambda}_6$ y $\tilde{\Lambda}_8$ son funciones de los campos originales, de igual modo que $\tilde{\Lambda}_2$.

Nótese que tanto los field strengths redefinidos como las nuevas transformaciones son formalmente idénticos a los originales si se toma $C_1 = 0$ en estos field strengths y $\Lambda_0 = \Sigma = 0$ en las transformaciones de los campos -véanse las expresiones (2.12) y (2.14). Por tanto, una transformación general (R-R + masivas) sobre los campos redefinidos por Stückelberg se reduce a $\delta\tilde{B} = 0$ y $\delta\tilde{C} = \partial\tilde{\Lambda}e^{\tilde{B}}$, esto es, al haber fijado el gauge de las masivas, la transformación general se reduce a una R-R con los nuevos parámetros $\tilde{\Lambda}_p$.

2.5.2. Aplicación a las acciones efectivas abelianas de las Dp-branas

Para las acciones efectivas podemos plantear las transformaciones de Stückelberg teniendo en cuenta que éstas ya están definidas para los campos del background, y por ende para sus respectivos pullbacks en la brana. De esta forma, sólo quedaría por definir las transformaciones para los campos propios de la brana que se ven afectados por las transformaciones R-R o las masivas, esto es, para V_a y su field strength $\mathcal{F}_{ab}$. Procedemos análogamente a como lo hicimos para los campos del background:

$$\mathcal{F} = 2\partial V + B \stackrel{!}{=} 2\partial\tilde{V} + \tilde{B} \quad \Rightarrow \quad \tilde{V} = V - \frac{1}{m}C_1 \ ; \tag{2.24}$$
$$\delta\tilde{V} = \delta V - \frac{1}{m}\delta C_1 \quad \Rightarrow \quad \delta\tilde{V} = \partial\tilde{\chi}$$

donde se ha introducido $\tilde{\chi} \equiv \chi - \frac{\Lambda_0}{m}$.

Con estas dos redefiniciones quedan determinadas las transformaciones de Stückleberg para el caso abeliano, y podemos proceder a comprobar cómo transforman bajo ellas las acciones efectivas. Para ello basta con tomar la correspondiente expresión (2.17) para la p-brana y expresar en ella los campos C_p y B en función de los $\tilde{C}_p$ y $\tilde{B}$. De esta forma se puede comprobar que la dependencia de la acción transformada por Stückelberg en los campos $\tilde{V}$, $\tilde{B}$ y $\tilde{C}_p$ es la misma, salvo a lo sumo una derivada total, que la de la acción original en los campos V, B y C_p, si se toman $C_1 \equiv 0$ en esta última. P.ej. para las primeras tres acciones:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{D0} &= C_1 - mV = -m\tilde{V} \equiv \tilde{\mathcal{L}}_{D0}(\tilde{V}) \ ; \\
\mathcal{L}_{D2} &= -\frac{1}{3!}\left[C_3 - 3C_1\mathcal{F} + 3mV\partial V\right] = -\frac{1}{3!}\left[\tilde{C}_3 + 3m\tilde{V}\partial\tilde{V}\right] \equiv \tilde{\mathcal{L}}_{D2}(\tilde{V},\tilde{C}_3) \ ; \\
\mathcal{L}_{D4} &= \frac{1}{5!}[\tilde{C}_5 - 10\tilde{C}_3\tilde{\mathcal{F}} - 20m\tilde{V}(\partial\tilde{V})^2 + \partial f(C_1,\tilde{V})] \equiv \tilde{\mathcal{L}}_{D4}(\tilde{V},\tilde{B},\tilde{C}_5,\tilde{C}_3) + \frac{1}{5!}\partial f(C_1,\tilde{V})
\end{aligned} \tag{2.25}$$

donde $f(C_1,\tilde{V}) = \frac{20}{m}\tilde{V}C_1\partial C_1 + 40\tilde{V}\partial\tilde{V}C_1$.

Para las transformaciones gauge de las acciones transformadas por Stückelberg ocurre lo mismo que para las de los campos del background, coinciden formalmente con las originales si se toma en éstas $\Sigma = \Lambda_0 = 0$. Véase el ejemplo de $\tilde{\mathcal{L}}_{D4}$:

$$\delta\tilde{\mathcal{L}}_{D4} = \frac{1}{5!}\partial\left(5\tilde{\Lambda}_4 + 60\partial\tilde{\Lambda}_2\tilde{V} - 20m\tilde{\chi}(\partial\tilde{V})^2\right) \tag{2.26}$$

$$\delta\mathcal{L}_{D4} = \frac{1}{5!}\partial\left(5\Lambda_4 + 60\partial\Lambda_2 V - 20m\chi(\partial V)^2 + 60\Lambda_0(\partial V)^2 - 40mV\partial V\Sigma\right) \tag{2.27}$$

A lo largo de esta sección hemos definido y tratado las transformaciones de Stückelberg sobre los campos del background, del worldvolume y sobre las acciones, pudiendo observar que se llega a una descripción formalmente idéntica a la original pero en la cuál no aparece C_1 ni en los field strengths ni en las acciones, ni tampoco el parámetro Λ_0 de su transformación R-R. Esto se consigue a costa de que B pierda el carácter de campo gauge al redefinirlo a $\tilde{B}$, de forma que el parámetro Σ de su transformación, la NS-NS, tampoco aparece en la nueva descripción.
Nótese así mismo que tanto los fields strentghs como las acciones efectivas son invariantes (salvo a lo sumo una derivada total para las últimas) bajo las tranformaciones de Stückelberg, lo cuál acentúa su carácter de transformaciones gauge de algún tipo. Así pues se podría decir que B absorbe el grado de libertad no físico de C_1 fijando su propio gauge en la transformación de Stückelberg correspondiente, y volviéndose así un campo masivo, $\tilde{B}$.
Como se verá en la parte del trabajo, el poder contemplar las transformaciones de Stückelberg como un gauge resulta de ayuda para tratarlas en el caso no abeliano.

2.6. Introducción a las teorías gauge no abelianas

En esta parte se nos introduce a los conceptos necesarios para comprender adecuadamente la forma de una descripción no abeliana como la de N branas coincidentes en mIIA. Para ello empezamos viendo la estructura de una teoría de este tipo con un ejemplo muy representativo: la teoría de Maxwell del electromagnetismo, cuyo grupo de simetría gauge, $U(1)$, es abeliano. Acto seguido veremos la generalización de Yang-Mills de teorías gauge con grupos no abelianos, para terminar viendo la formulación matricial de la misma, que resulta ser más compacta.

2.6.1. La Teoría de Maxwell como teoría gauge

Consideremos el lagrangiano de un campo escalar complejo en el espacio-tiempo plano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi \tag{2.28}$$

Éste resulta ser invariante bajo las transformaciones $\delta\phi = ie\Lambda\phi$ sólo si Λ no depende de las coordenadas x_μ (esto es, es invariante bajo transformaciones globales, pero no locales). Nótese que la trasnformación $\delta\phi$ es la versión infinitesimal del cambio de fase $\phi' = e^{ie\Lambda}\phi$ (una representación del grupo $U(1)$).

El hecho de que $\partial\phi$ no transforme como ϕ con las transformaciones locales es lo que impide que la acción sea invariante en este caso. Por ello definimos la derivada covariante:

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi \tag{2.29}$$

la cuál transforma como ϕ, (esto es, en la forma $D_\mu\phi = ie\Lambda D_\mu\phi$), si $\delta A_\mu = \partial_\mu\Lambda$. En vista a este resultado, se modifica la acción (2.28) para hacerla invariante bajo transformaciones locales:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}D_\mu\phi^* D^\mu\phi + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2.30}$$

donde el último término se ha adjuntado para proporcionar un término cinético a A_μ, haciendo dinámico a los campos $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, que cumplen la identidad de bianchi $D_{[\mu}F_{\nu\rho]} = 0$.
Tal y como buscábamos, esta acción resulta ser invariante bajo las transformaciones locales siempre y cuando $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$.

Obsérvese que tanto el término cinético como la transformación de A_μ permiten identificar este campo como el potencial electromagnético de la teoría de Maxwell, siendo $F_{\mu\nu}$ el tensor del campo electromagnético.

2.6.2. Yang-Mills en componentes

Consideremos el lagrangiano de N campos escalares reales en el espacio-tiempo plano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a \ , \qquad (a = 1, ..., n) \tag{2.31}$$

Se pueden ver los campos ϕ^a como componentes de un vector N-dimensional del grupo $\mathcal{G}$. Este lagrangiano resulta ser invariante bajo las transformaciones globales $\delta\phi^a = i\, e\, f^a_{bc}\Lambda^b\phi^c$, pero no bajo las locales. Aquí las constantes f^a_{bc} son las constantes de estructura (antisimétricas en los índices inferiores).

Un objeto que transforme bajo las transformaciones de $\mathcal{G}$ como $\delta X^a = ief^a_{bc}\Lambda^b X^c$ se dice que está en la representación adjunta del grupo.
Al igual que con el grupo $U(1)$, necesitamos la derivada covariante para que la acción sea invariante localmente:

$$D_\mu \phi^a = \partial_\mu \phi^a - f^a_{bc} A^b_\mu \phi^c \tag{2.32}$$

donde ahora $D_\mu\phi^a$ está en la adjunta (esto es, transforma como los ϕ^a), siempre que $\delta A^a_\mu = \partial_\mu \Lambda^a + f^a_{bc}\Lambda^b A^c_\mu$.
Nótese que en vez de un solo campo gauge A_μ se han introducido N diferentes que transforman como un vector bajo cambios de coordenadas (con el índice μ) pero ahora también bajo transformaciones del grupo $\mathcal{G}$ (con el índice a).

El conmutador de dos derivadas covariantes resulta ser:

$$[D_\mu, D_\nu]\phi^a = -f^a_{bc} F^b_{\mu\nu}\phi^c \tag{2.33}$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - f^a_{bc} A^b_\mu A^c_\nu$ que cumplen la identidad de Bianchi $D_{[\mu}F^a_{\nu\rho]} = 0$.
Así mismo, $\delta F^a_{\mu\nu} \neq 0$ sino que $F^a_{\mu\nu}$ está en la adjunta, pero siendo invariante el término $F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}$.

Con todo ello, claramente la modificación de (2.31) que es invariante bajo transformaciones locales viene dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} D_\mu \phi^a D^\mu \phi^a + \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} \tag{2.34}$$

2.6.3. Yang-Mills como matrices

Sean T_a los generadores del grupo $\mathcal{G}$:

$$[T_a, T_b] = f^c_{ab} T_c \tag{2.35}$$

Se definen las siguientes matrices:

$$\phi = \phi^a T_a \ , \quad \Lambda = \Lambda^a T_a \ , \quad A_\mu = A^a_\mu T_a \ , \quad F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu} T_a \tag{2.36}$$

Con ello, la acción

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \tag{2.37}$$

es invariante bajo transformaciones globales $\delta\phi = [\Lambda, \phi]$. Cualquier objeto X que transforma como $\delta X^a = [\Lambda, X]$ está pues en la adjunta de $\mathcal{G}$.

Análogamente a los casos anteriores,

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - [A_\mu, \phi] \tag{2.38}$$

Está en la adjunta a condición de que $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda + [\Lambda, A_\mu]$; siendo en esta ocasión.

$$[D_\mu, D_\nu]\phi = -[F_{\mu\nu}, \phi] \tag{2.39}$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu]$, estando $F_{\mu\nu}$ en la adjunta y cumpliendo $D_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0$.

Denotando Tr tomar la traza sobre los índices del grupo gauge, la acción

$$\mathcal{L} = Tr\left\{\frac{1}{2} D_\mu \phi D^\mu \phi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right\} \tag{2.40}$$

es invariante bajo transformaciones locales, siendo la misma acción que la dada por (2.34).

2.6.4. Las acciones efectivas no abelianas

A N branas paralelas pero no coincidentes le corresponden N vectores de Born-Infeld con simetría $U(1)$ así como N conjuntos de $9-p$ escalares de embedding, que pueden agruparse en $9-p$ matrices diagonales N x N, siendo cada valor propio de las mismas la posición de una de las branas en la dirección transversal que corresponda a esa matriz. En el límite en el que las branas coinciden, el grupo de simetría pasa a ser $U(N)$, formando los N vectores de Born-Infeld una única matriz de Yang-Mills V_a y dejando de ser diagonales las matrices de los escalares de embedding (para más detalles véase el resumen de [1]).

Para mantener la invariancia de las acciones frente al grupo $U(N)$, se hace necesario reemplazar las derivadas parciales por covariantes (incluso en los pullbacks) en la forma $D_a X^\mu = \partial X^\mu + i[V_a, X^\mu]$, con p. ej. $\delta V_a = D_a \chi$, siendo χ el parámetro (ahora matricial) de la transformación $U(N)$.

A partir de la acción de la 9-brana, de la teoría IIB, que debe coincidir con su análoga abeliana (pues la brana ocupa todas las nueve direcciones espaciales existentes), se van deduciendo las acciones para la 8-brana, 7-brana, etc. empleando las tranformaciones de T-Dualidad (simetría que se emplea e para relacionar las acciones y sus campos de p- y $p \pm 1$-branas. Las acciones halladas están compuestas por términos de la forma:

$$\mathcal{L} = STr\left\{P[(i_X i_X)^r (C_p B^k)] F^m\right\}$$

donde STr indica la prescripción de tomar la traza simetrizada de las matrices U(N), siendo $F_{ab} = 2\partial_{[a} V_{b]} + i[V_a, V_b]$ y denotándose $(i_X i_X C)_{\mu_1 \ldots \mu_n} = \frac{1}{2}[X^\rho, X^\nu] C_{\nu\rho\mu_1\ldots\mu_n}$ a la contracción de los conmutadores de los escalares de embedding con los campos.

También por T-Dualidad se llega a una relación entre el vector de Born-Infeld y los escalares de embedding, de forma que estos últimos deben transformar también bajo las NS-NS, y en la forma $\delta X^\mu = i\Sigma_\rho [X^\rho, X^\mu]$; provocando que todos los campos dependientes de las coordenadas transversales transformen también con Σ, independientemente de sus propias transformaciones gauge.

Capítulo 3

Las transformaciones de Stückelberg en las acciones efectivas no abelianas

La estructura compleja de las acciones efectivas en el caso no abeliano, así como el hecho de que todos los campos con dependencia en las coordenadas transversales transformen con las transformaciones NS-NS, hacen que no resulte trivial el encontrar unas transformaciones que eliminen al campo C_1 de la descripción tal y como se hizo en el caso abeliano. De hecho, se presenta a continuación una posible estrategia para definir las transformaciones de Stückelberg, basada en poder identificar a éstas como transformaciones **masivas finitas**; siendo ya conocidas la actuación de las masivas infinitesimales e invariancia de las acciones no abelianas frente a las mismas.

3.1. La relación con las transformaciones gauge masivas

En la sección 2.5 vimos cómo las transformaciones de Stückelberg en el caso abeliano se definen de forma que el campo C_1 se elimine de la descripción, pues C_1 transforma como $\delta C_1 = -m\Sigma$, esto es, con un shift de la transformación de B. Asimismo vimos como la invariancia de field strengths y acciones, así como la pérdida del carácter de campo gauge de B con $\delta\tilde{B} = 0$ hacían que se pudiera contemplar las transformaciones como un gauge de B.

Efectivamente, considérese la transformación [1] de Stückelberg (2.20):

$$\Delta_S B \equiv \tilde{B} - B = \frac{2}{m}\partial C_1$$

Obsérvese que no es más que la masiva $\delta_m B = 2\partial\Sigma$ fijando el gauge mediante la eleción de su parámetro como $\Sigma = \frac{1}{m}C_1$.
Con este Σ se tiene que la transformación masiva del campo C_1 se reduce a $\delta_m C_1 = -m\Sigma = -C_1$, de forma que el campo transfomado desaparece: $\tilde{C_1} \equiv C_1 + \delta_m C_1 = 0$. Esto muestra claramente cómo se elimina a C_1 en la nueva descripción de la teoría aprovechando que transforma con un shift de B. Así mismo, ahora resulta evidente que $\delta\tilde{B} = 0$, ya que para obtener $\tilde{B}$ se ha fijado el gauge.

Podría parecer, llegados a este punto, que ambos tipos de transformaciones, masivas y de Stückelberg, son en realidad la misma, no obstante, si tomamos la componente masiva $\delta_m C_3 = -3m\Sigma B$, de la transformación δC_3 dada en (2.14), sustituimos $\Sigma = C_1/m$ y comparamos con $\Delta_S C_3$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \delta_m C_3 &= -3C_1 B \\ \Delta_S C_3 &= -3C_1 B - \frac{3}{m} C_1 \partial C_1 \end{aligned}$$

Vemos que la transformación de Stückelberg proporciona un término que no aparece en la masiva con $\Sigma = C_1/m$. La dicrepancia entre ambas expresiones se debe a que las transformaciones masivas se

[1] Resultará conveniente denotar a las transformaciones de Stückelberg con Δ_S y a las masivas con δ_m para las infinitesimales y Δ_m para las finitas, como se verá en breve

construyen como infinitesimales (véase la sección 2.3), satisfaciendo el que las variaciones infinitesimales δF_p de los field strengths sean nulas, con un parámetro gauge Σ lo suficientemente pequeño para que la aproximación lineal de la dependencia en ese parámetro sea adecuada; por contra, las transformaciones de Stückelberg se construyen como una diferencia o variación finita de los campos, que equivalen a una transformación masiva pero finita, pues $\Sigma = C_1/m$ no tiene por qué ser adecuado para una aproximación lineal.
Es por ello que la correspondencia entre las transformaciones (implícitamente finitas) de Stückelberg y las masivas infinitesimales sólo se da en principio cuando la dependencia en Σ o en C_1 sea lineal, caso que se restringe a $\delta_m B$ y $\delta_m C_1$.

Para lograr la equivalencia completa es necesario por tanto añadir términos de correción al resto de transformaciones masivas infinitesimales, las cuáles no son lineales en Σ, para hallar así las correspondentes masivas finitas, las cuáles sí que serán equivalentes a las de Stückelberg, como veremos.

Las correciones necesarias en las transformaciones masivas infinitesimales $\delta_m A$, para obtener las finitas $\Delta_m A$, se obtienen exigiendo la invariancia gauge de los field strengths F_p bajo variaciones finitas de los campos de los que dependen, deduciéndose correciones $Cor(A)$, de forma que $\Delta_m A = \delta_m A + Cor(A)$. Veámoslo explícitamente con la primera variación a corregir, la de C_3:

$$\begin{aligned} F_4 &= 4\partial C_3 - 4HC_1 + 3mB^2 \quad \Longrightarrow \\ \Delta_m F_4 &= 4\partial(\Delta_m C_3) - 4\Delta_m H C_1 - 4H\Delta_m C_1 - 4\Delta_m H\,\Delta_m C_1 + 6mB\Delta_m B + 3m(\Delta_m B)^2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde se ha de tener en cuenta que $\Delta_m B = \delta_m B$; $\Delta_m C_1 = \delta_m C_1$; $\Delta_m H_3 = \delta_m H_3 = 0$, así como que $\Delta(A^n) = (A + \Delta A)^n - A^n$. Exigiendo ahora $\Delta F_4 = 0$, obtenemos ΔC_3, y con ello, la correspondiente correción $Cor(A) = \Delta_m A - \delta_m A$.
Resulta importante notar que para obtener $\Delta_m C_5$ de

$$0 \stackrel{!}{=} \Delta_m F_6 = 6\partial(\Delta_m C_5) - 20H\Delta_m C_3 + 15m\Delta_m(B^3)$$

es necesario introducir el $\Delta_m C_3$ recién hallado; esto es, el cálculo de $\Delta_m C_p$ requiere conocer previamente $\Delta_m C_{p-1}$ (de esta forma, para llegar p.ej. a $\Delta_m C_9$ ineludiblemente se habrá de calcular antes el resto).

Las correcciones así obtenidas son:

$$\begin{aligned} Cor(B) &= 0\ ; \\ Cor(C_1) &= 0\ ; \\ Cor(C_3) &= -3m\Sigma\partial\Sigma\ ; \\ Cor(C_5) &= -30mB\Sigma\partial\Sigma - 20m\Sigma(\partial\Sigma)^2\ ; \\ Cor(C_7) &= -315mB^2\Sigma\partial\Sigma - 420mB\Sigma(\partial\Sigma)^2 - 210m\Sigma(\partial\Sigma)^3\ ; \\ Cor(C_9) &= -3780mB^3\Sigma\partial\Sigma - 7560mB^2\Sigma(\partial\Sigma)^2 - 7560mB\Sigma(\partial\Sigma)^3 - 3024m\Sigma(\partial\Sigma)^4 \end{aligned} \tag{3.2}$$

quedando entonces las transformaciones masivas finitas como:

$$\begin{aligned} \Delta_m B &= 2\partial\Sigma\ ; \\ \Delta_m C_1 &= -m\Sigma\ ; \\ \Delta_m C_3 &= -3m\Sigma B - 3m\Sigma\partial\Sigma\ ; \\ \Delta_m C_5 &= -15m\Sigma B^2 - 30mB\Sigma\partial\Sigma - 20m\Sigma(\partial\Sigma)^2\ ; \\ \Delta_m C_7 &= -105m\Sigma B^3 - 315mB^2\Sigma\partial\Sigma - 420mB\Sigma(\partial\Sigma)^2 - 210m\Sigma(\partial\Sigma)^3\ ; \\ \Delta_m C_9 &= -945m\Sigma B^4 - 3780mB^3\Sigma\partial\Sigma - 7560mB^2\Sigma(\partial\Sigma)^2 - 7560mB\Sigma(\partial\Sigma)^3 - 3024m\Sigma(\partial\Sigma)^4 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Sustituyendo $\Sigma = \frac{1}{m}C_1$ se obtienen efectivamente las correspondientes transformaciones de Stückelberg (véase la sección 2.5.1):

$$\begin{aligned}
\Delta_S B &= \frac{2}{m}C_1 \ ; \\
\Delta_S C_3 &= -3C_1 B - \frac{3}{m}C_1\partial C_1 \ , \\
\Delta_S C_5 &= -15C_1B^2 - \frac{30}{m}C_1\partial C_1 B - \frac{20}{m^2}C_1(\partial C_1)^2 \ , \\
\Delta_S C_7 &= -105C_1B^3 - 315C_1\partial C_1 B^2 - \frac{420}{m^2}C_1(\partial C_1)^2 - \frac{210}{m^3}C_1(\partial C_1)^3 \ , \\
\Delta_S C_9 &= -945C_1B^4 - \frac{3780}{m}C_1\partial C_1 B^3 - \frac{7560}{m^2}C_1(\partial C_1)^2B^2 - \frac{7560}{m^2}C_1(\partial C_1)^3B - \frac{3024}{m^4}C_1(\partial C_1)^4
\end{aligned} \tag{3.4}$$

En el caso de los campos del worldvolume, $\mathcal{F}$ permanece invariante antes ambas transformaciones y al depender linealmente de $P[B]$ y del vector de Born-Infeld, en este último no aparecen correcciones al considerar la invariancia de la variación finita de $\mathcal{F}$, teniéndose directamente que:

$$\Delta_S V = -\frac{1}{m}C_1 = \Delta_m V = \delta_m V = -\Sigma \tag{3.5}$$

Por tanto, acabamos de probar que las transformaciones masivas finitas y las de Stückelberg son equivalentes, al serlo para todos los campos que se ven afectados por ellas. De hecho, con esta equivalencia, la invariancia de las acciones efectivas antes las transformaciones masivas finitas queda automáticamente probada, pues sabemos que las acciones son invariantes (salvo una derivada total) bajo las transformaciones de Stückelberg - véase (2.26). El ejemplo más sencillo:

$$\Delta_{St}\mathcal{L}_{D2} = \Delta_m\mathcal{L}_{D2} = -\frac{1}{3!}\partial(3VC_1)$$

Asimismo, puede observarse como los términos de corrección van todos con la masa m, es decir las correcciones a las transformaciones masivas son también masivas, tal y como es de esperar, anulándose así todas las $\Delta_m C_p$ en el caso $m = 0$ (en el que no se pueden definir las transformaciones de Stückelberg y las masivas se reducen a las NS-NS, por las cuales los C_p no se ven afectados).

3.2. Previsiones para el caso no abeliano

Aun siendo equivalentes las transformaciones de Stückelberg y las masivas finitas, su actuación en los campos de N D-branas coincidentes y del correspondiente background no es en absoluto una cuestión trivial, pues a día de hoy aún no se conoce la versión finita para las transformaciones masivas en el caso no abeliano, siendo éste un cálculo mucho más complicado de plantear y realizar que el que hemos efectuado en el caso abeliano.
Ahora los escalares de embedding transforman bajo las NS-NS en la forma $\delta X^\mu = i\Sigma_\rho[X^\rho, X^\mu]$, y por ende todos los campos que dependen de ellos, apareciendo términos extra en las transformaciones conocidas. En [3] se deducen las variaciones infinitesimales bajo transformaciones con Σ, entre otras las de los campos del worldvolume y B, que aparte de los términos habituales, contienen los derivados de sus dependencias en las coordenadas (excepto para V_a):

$$\begin{aligned}
\delta V_a &= -\Sigma_\mu D_a X^\mu \ , \\
\delta B_{\mu\nu} &= 2\partial_{[\mu}\Sigma_{\nu]} + i\Sigma_\rho[X^\rho, B_{\mu\nu}] \ , \\
\delta F_{ab} &= -2\partial_{[\sigma}\Sigma_{\rho]}D_{[a}X^\sigma D_{b]}X^\rho + i\Sigma_\rho[X^\rho, F_{ab}] \ ,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{F}_{ab} &= i\Sigma_\rho[X^\rho, \mathcal{F}_{ab}] \ , \\
\delta[X^\mu, X^\nu] &= i\Sigma_\rho[X^\rho, [X^\mu, X^\nu]] - 2i\partial_{[\sigma}\Sigma_{\rho]}[X^\sigma, X^\mu][X^\rho, X^\nu]
\end{aligned} \tag{3.7}$$

donde son $F = 2\partial V + [V, V]$ y $\mathcal{F} = F + P[B]$, y se ha empleado que, por dependencia en los escalares de embedding, un campo Φ transforma de por sí en la forma $\delta\Phi = i\Sigma_\rho[X^\rho, \Phi]$. Excepto las definiciones de F y $\mathcal{F}$, el resto de las expresiones dadas son sólo válidas dentro de la traza simetrizada de una acción.

Es posible que estos campos transformen bajo Stückelberg con las expresiones anteriores sustituyendo $\Sigma = C_1/m$, no obstante, al hallarse Σ multiplicando con otros factores, es muy probable que sean necesarios términos de corrección para obtener la transformación masiva finita que es equivalente a la de Stückelberg. Cosidérese que, p. ej., las variaciones con conmutadores requieren correciones de finitud, pues el último término de

$$\Delta[A, B] = [\Delta A, B] + [A, \Delta B] + [\Delta A, \Delta B]$$

se desprecia en la variación infinitesimal. El cálculo de estos términos no abelianos de corrección por finitud tampoco parece ser trivial, sobre todo por las presencia de los conmutadores en las todas las variaciones (incluidos field strengths).

Concluyendo, se puede decir que hemos encontrado una estrategia para intentar definir las transformaciones de Stückelberg en el caso no abeliano; de forma que se podría abordar en un futuro proyecto tanto la comprobación de la validez de las transformaciones así definidas, así como su aplicación a las acciones efectivas de N branas coincidentes, a fin de probar la invariancia de éstas (posiblemente sólo sería necesario probarla para los términos de corrección por finitud de las transformaciones masivas, pues la invariancia de las acciones no abelianas ya se conoce para las infinitesimales - véase [1] y [2]).

Apéndice A

Notación para índices antisimetrizados

La antisimetrización de índices de tensores de denota como:

$$T_{[\mu_1 \ldots \mu_N]} = \frac{1}{N!} \left(T_{\mu_1 \ldots \mu_N} + \text{pemutaciones pares} - \text{permutaciones impares} \right) \tag{A.1}$$

Si el tensor es antisimétrico en todos sus índices la definición anterior puede reescribirse como:

$$T_{[\mu_1 \ldots \mu_N]} = \frac{1}{N} \left(T_{\mu_1 \ldots \mu_N} + \text{pemutaciones cíclicas(con signos alternados si N es par)} \right) \tag{A.2}$$

A modo de ejemplo:

$$\begin{aligned} \partial_{[\mu} A_{\nu]} &= \frac{1}{2} \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \right) \;, \\ \partial_{[\mu} B_{\nu\rho]} &= \frac{1}{6} \left(\partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\rho B_{\mu\nu} + \partial_\nu B_{\rho\mu} - \partial_\mu B_{\rho\nu} - \partial_\rho B_{\nu\mu} - \partial_\nu B_{\mu\rho} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\rho B_{\mu\nu} + \partial_\nu B_{\rho\mu} \right) \end{aligned} \tag{A.3}$$

donde para la última igualdad se ha tenido en cuenta que $B_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico.

Si se está tratando con tensores antisimétricos exclusivamente, cabe la posibilidad de utilizar una notación más compacta, suprimiendo los índices, pero recordando la antisimetría.
Por ejemplo, $H_{[\mu\nu\rho} C_{\lambda]} = 3\partial_{[\mu} B_{\nu\rho} C_{\lambda]}$ se puede reescribir como $HC_1 = \partial BC_1$. Al intercambiar dos tensores con índices antisimetrizados se deberá cambiar el signo del factor sólo si ambos tensores son de rango impar; p.ej. $BC_1 = C_1 B$ pero $HC_1 = -C_1 H$.

Bibliografía

[1] J. Adam, J. Gheerardyn, B. Janssen y Y. Lozano, *The gauge invariance of the non-Abelian Chern-simons action for D-branes revisited.* Phys. Lett. B589 (2004) 59-69.

[2] J. Adam, *Comparing two definitions for gauge variations of dielectric D-branes.* JHEP 0604 (2006) 007.

[3] J. Adam, I.A Illán, B. Janssen, *On the gauge invariance and coordinate transformations of the non-Abelian D-branes actions.* Phys. Lett. B589 (2004) 59-69.

Agradecimientos:

Quisera agradecerle a Bert Janssen el haber dirigido este proyecto con tanto interés, dedicación y sobre todo, paciencia; así como al Departamento de Física Teórica y del Cosmos por su apoyo durante la realización del mismo, y a Airam Marcos Caballero por discusiones que han sido de ayuda.