Dualidad T y gravedad tipo Einstein-Gauss-Bonnet.

Javier Fuentes Martín*, bajo la dirección de Bert Janssen**

Departamento de Física Teórica y del Cosmos.
Universidad de Granada, 18071 Granada, España

30 de mayo de 2012

Resumen

El presente informe recoge la memoria del proyecto de investigación realizado por Javier Fuentes Martín a cargo de la beca de Iniciación a la Investigación en el departamento de Física Teórica y del Cosmos de la Universidad de Granada, bajo la tutela del doctor Bert Janssen. Este proyecto pretende determinar las correcciones a primer orden de la teoría de cuerdas a la acción de supergravedad relativas a los escalares y campos gauge. Para ello, se utilizará una simetría de la teoría de cuerdas: dualidad T. La memoria se estructurará como sigue: en primer lugar, se presentará una introducción y motivación acerca del problema concreto que ha sido tratado en el proyecto de investigación. Tras esto, se detallarán todos los conceptos físicos y matemáticos necesarios para la realización de la labor de investigación propiamente dicha. Posteriormente, se hará un esquema de la técnica utilizada en el proceso de determinación de las correcciones a la acción de supergravedad. Finalmente, se mostrarán los resultados obtenidos y se detallará el camino que se pretende seguir en el futuro cercano para la finalización del objetivo marcado inicialmente.

1. Introducción

En la física actual no existe ninguna teoría comúnmente aceptada capaz de tratar los aspectos cuánticos de la gravedad. La razón por la que es tan difícil construir una teoría cuántica de la gravedad es que ésta no es renormalizable. Por este motivo, se suele pensar en la Relatividad General como un límite de una teoría más fundamental capaz de completarla de alguna forma para poder cuantizarla. Un intento lógico en la cuantización de la gravedad sería escribir ésta como la teoría gauge de un nuevo tipo de simetría, llamada supergravedad. Se trata de una simetría que, de existir, debe ser una simetría rota a bajas energías que relaciona los estados bósonicos y fermiónicos y que asocia a cada partícula una del tipo opuesto. Bajo este paradigma, surgieron las llamadas teorías de supergravedad consistentes en teorías de campos con supersimetría local. Dado que la supersimetría local resultó ser insuficiente, fue necesario dar un paso más allá. Éste vino de la mano de la teoría de cuerdas en la que las partículas elementales no son elementos puntuales sino objetos monodimensionales, cuerdas de una cierta extensión espacial. En la actualidad, la teoría de cuerdas es una de las candidatas más populares para resolver el problema de la gravedad.

En el límite de bajas energías, la teoría de cuerdas da lugar a un cierto tipo de teorías de supergravedad 10-dimensional donde se recupera la Relatividad General acoplada a campos gauge y escalares. El sector común de estas teorías está descrito por la siguiente acción,

$$S = \frac{1}{2}\int d^{10}x\sqrt{|g|}e^{-2\phi}\left[-R + 4\left(\partial\phi\right)^2 - \frac{3}{4}H^2\right], \tag{1.1}$$

con $H^2 = H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}$ donde $H_{\mu\nu\rho} = \partial_{[\mu}B_{\nu\rho]}$ siendo $B_{\mu\nu}$ un campo tensorial antisimétrico que, además de bajo cambios generales de coordenadas, transforma bajo transformaciones de gauge.

*E-mail: chaos1@correo.ugr.es
**E-mail: bjanssen@ugr.es

Además, la teoría de cuerdas genera el término de Gauss-Bonnet como primera corrección gravitatoria a la acción supergravedad. El término de Gauss-Bonnet propuesto por primera vez por el físico húngaro Cornelius Lanczos (1893-1977), supone una corrección a la acción de Einstein-Hilbert por medio de la inclusión de términos cuadráticos en la curvatura que da lugar a ecuaciones diferenciales de segundo grado, pese a que la acción contenga derivadas de orden superior. No obstante, se sigue del teorema de Gauss-Bonnet que este término es sólo no trivial en 4+1 dimensiones o superiores. En particular, en 3+1 dimensiones, se reduce a un invariante topológico y, para dimensiones menores, es idénticamente nulo, por lo que no contribuye a las ecuaciones de la dinámica. Este término toma la forma

$$\mathcal{L}_{GB} = \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \gamma R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}, \;\; donde \;\; (\alpha, \beta, \gamma) = (1, -4, 1)\,. \tag{1.2}$$

Dado que la acción de supergravedad no sólo contiene a la gravedad sino también escalares y campos gauge, es lógico pensar que además del término de Gauss-Bonnet, haya también correcciones para los términos cinéticos de los escalares y los campos gauge. De esta manera, la acción efectiva que se deriva de la teoría de cuerdas a primer orden en el desarrollo perturbativo es de la forma

$$S = \frac{1}{2} \int d^{10}x \sqrt{|g|} e^{-2\phi} \left[-R + 4\,(\partial\phi)^2 - \frac{3}{4} H^2 + \alpha \left(R^2 - 4 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} + \mathcal{L}_{mat} \right) \right], \tag{1.3}$$

donde α es un parámetro perturbativo.

Ahora bien, el término $\mathcal{L}_{mat}$ que contiene todas las correcciones de primer orden a los términos cinéticos de los escalares y los campos gauge es muy difícil de calcular directamente de la teoría de cuerdas. Afortunadamente, es posible obtenerlo mediante un método indirecto de forma más sencilla. Este método consiste en el uso de una simetría de la teoría de cuerdas llamada dualidad T que relaciona la dinámica de distintas cuerdas moviéndose en espacio-tiempos distintos y se presenta como una simetría explícita de la acción de supergravedad. Las reglas de dualidad T se manifiestan como la acción de un grupo $\mathbb{Z}_2$ que mezclan componentes de la métrica con componentes del campo gauge de manera que la acción de supergravedad es invariante. Dado que la corrección conocida de la teoría de cuerdas es el termino de Gauss-Bonnet, que no incluye a los campos gauge ni escalares, y que la dualidad T mezcla las componentes de los campos con las de la métrica, debería ser posible obtener el término $\mathcal{L}_{mat}$, debido a las correcciones de orden superior en los campos gauge y escalar, sin más que exigir que las correcciones también sean invariantes bajo dualidad T. Es preciso notar, sin embargo, que, como veremos más adelante, las reglas de dualidad T adquieren una forma compleja. Por este motivo, aplicaremos el procedimiento de reducción dimensional mediante el cual las reglas de transformación de dualidad T presentan covarianza general y una forma sencilla. Señalar también que, como veremos, como consecuencia de aplicar este procedimiento sobre la métrica 10 dimensional aparecerán un campo gauge vectorial y un campo escalar adicionales.

El cálculo de $\mathcal{L}_{mat}$, objetivo fundamental de este proyecto de investigación, se divide de forma natural en tres partes, una para cada una de los tres términos del término de Gauss-Bonnet y, a su vez, cada una de estas partes se subdivide en otras dos: un cálculo previo donde se toman los campos gauge igual a cero[1] y el cálculo completo donde se ya sí se tienen en cuenta estos campos. En esta memoria se mostrarán los resultados obtenidos hasta el momento, es decir, la parte correspondiente a R^2 completa y las partes debidas a los otros dos términos sin considerar los campos gauge. En este cálculo, pondremos de manifiesto que para dos de los términos no será necesario considerar dualidad T a ordenes superiores mientras que sí que será preciso para el correspondiente al sector del tensor de Rienmann al cuadrado.

Finalmente, los resultados obtenidos una vez finalizado el cálculo de $\mathcal{L}_{mat}$ completo, en particular, la información acerca de las nuevas reglas de dualidad T permitirán calcular las correcciones a la solución de la cuerda fundamental a través de la aplicación de esta simetría sobre la onda gravitatoria. En efecto, dado que las reglas de dualidad T transforman las ondas gravitatorias en una cuerda fundamental, sería posible calcular las correcciones a la solución de la cuerda fundamental en Einstein-Gauss-Bonnet por medio de la solución exacta de la onda gravitatoria.

[1] Cuando nos estamos refiriendo a los campos gauge en general, ha de entenderse que nos referimos tanto al campo gauge vectorial que surge fruto del proceso de reducción dimensional sobre la métrica como al campo tensorial $B_{\mu\nu}$.

2. Conceptos previos

Gran parte del tiempo dedicado a la beca de investigación fue invertido en el aprendizaje de técnicas y conceptos necesarios para realizar la labor de investigación propiamente dicha, conceptos que no pueden encontrarse en ninguna asignatura de la carrera de Física. Son estas técnicas y conceptos las que pretendemos detallar en este apartado. El aprendizaje de estas ideas se ha llevado a cabo fundamentalmente por medio de [1],[2].

2.1. El formalismo del Vielbein

A la hora de tratar con una variedad diferenciable $\mathcal{M}^N$, es usual considerarla como un espacio que es localmente, pero no necesariamente globalmente, $\mathbb{R}^N$. Esto implica que en cada punto podemos aproximar la variedad por su plano tangente $T_p\left(\mathcal{M}^N\right)$, al menos localmente, y las coordenadas x^μ en $\mathcal{M}^N$ definen en cada punto p una base $\{|e_\mu\rangle\}$ en $T_p\left(\mathcal{M}^N\right)$. La base $\{|e_\mu\rangle\}$ construida de esta manera, se denomina *base de coordenadas.*

Existe, sin embargo, una descripción alternativa. En esta descripción, conocida como formalismo del Vielbein, se considera en el espacio tangente $T_p\left(\mathcal{M}^N\right)$ el cambio de coordenadas tal que de la base de coordenadas $\{|e_\mu\rangle\}$ se pasa a una base en la que la métrica es diagonal $\{|e_a\rangle\}$[2]. En general, si el espacio no es plano, ambas bases serán distintas. De esta manera, se puede establecer la siguiente relación entre las bases,

$$|e_\mu\rangle = e^a{}_\mu |e_a\rangle, \qquad\qquad |e_a\rangle = e^\mu{}_a |e_\mu\rangle, \tag{2.1}$$

donde la matriz $e^a{}_\mu$ que representa las componentes del vector de la base $|e_\mu\rangle$ en $|e_a\rangle$ recibe el nombre de Vielbein y $e^\mu{}_a$ es el Vielbein inverso. Con los Vielbein, podemos transformar las componentes de vectores y tensores entre las distintas bases,

$$\begin{aligned} V^a &= e^a{}_\mu V^\mu, & V^\mu &= e^\mu{}_a V^a, \\ \eta_{ab} &= e^\mu{}_a e^\nu{}_b g_{\mu\nu}, & g_{\mu\nu} &= e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Para cada punto p de la variedad, podemos relacionar dos bases ortonormales en $T_p\left(\mathcal{M}^N\right)$ por medio de una transformación de Lorentz pero, en general, dicha transformación será distinta para cada espacio tangente. Tendremos, por tanto, que los vectores contravariantes y covariantes transforman como uno cabría esperar por medio de transformaciones de Lorentz locales,

$$\begin{aligned} V'^a &= \Lambda^a{}_b V^b, \\ V'_a &= \left(\Lambda^{-1}\right)^b{}_a V_b. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Del mismo modo que resulta conveniente definir una derivada covariante, que transforme adecuadamente bajos cambios generales de coordenadas, podemos construir en este caso una derivada covariante bajo transformaciones de Lorentz locales. La conexión asociada a este tipo de derivada recibe el nombre de conexión de espín, $\omega_{\mu a}{}^b$. De esta manera, tendremos que

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &\equiv \partial_\mu \phi, \\ D_\mu V^b &\equiv \partial_\mu V^b + \omega_{\mu a}{}^b V^a, \\ D_\mu V_a &\equiv \partial_\mu V_a - \omega_{\mu a}{}^b V_b. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Como ocurre con las derivadas covariantes ∇_μ, las derivadas covariantes D_μ no conmutan. Igualmente, se puede tratar el tensor de curvatura desde el espacio tangente quedando éste definido en términos de la conexión de espín como sigue

$$R_{abc}{}^d = 2\partial_{[a}\omega_{b]c}{}^d - 2\omega_{[a|c}{}^f\omega_{b]f}{}^d - 2\omega_{[ab]}{}^f\omega_{fc}{}^d. \tag{2.5}$$

[2]Usaremos la notación en la que, para esta base, se usan índices latinos, a los que llamaremos "índices planos". En contraste con los índices griegos que reservamos para la formulación en términos de la base de coordenadas y a los que denotaremos como "índices curvos".

El tensor de Ricci y escalar de Ricci se definen por medio de las contracciones usuales del tensor de curvatura.

Como vemos, tenemos dos descripciones geométricas de la variedad $\mathcal{M}^N$. Una de ellas dependiente de la conexión afín $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho}$ y la otra dependiente de la conexión de espín $\omega_{ab}{}^{c}$. Ambas conexiones son completamente independientes y éstas, de la métrica. No obstante, del mismo modo que ocurre entre la conexión afín y la métrica con la conexión de Levi-Civita, es posible relacionar estas dos descripciones a través de los postulados de Vielbein.

El *primer postulado de Vielbein* impone una condición sobre la derivada covariante completa del Vielbein,

$$\mathcal{D}_\mu e^b{}_\nu = 0, \tag{2.6}$$

definida esta derivada como $\mathcal{D}_\mu T^b{}_\nu = \partial_\mu T^b{}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho} T^b{}_\rho + \omega_{\mu a}{}^{b} T^a{}_\nu$. Esta condición nos permite relacionar las dos conexiones $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho}$ y $\omega_{ab}{}^{c}$ que a su vez impone una relación entre las dos curvaturas.

$$R_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda} = R_{abc}{}^{d} e^a{}_\mu e^b{}_\nu e^c{}_\rho e^\lambda{}_d. \tag{2.7}$$

El *segundo postulado de Vielbein* es la condición de compatibilidad con la métrica,

$$\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0, \tag{2.8}$$

que, junto con el primer postulado de Vielbein implica,

$$D_\mu \eta_{ab} = 0. \tag{2.9}$$

Con estos postulados, los tensores de curvatura con índices planos presentan las mismas propiedades de simetría y antisimetría que sus homólogos en índices curvos con la conexión de Levi-Civita.

2.2. Reducción dimensional

La teoría de cuerdas es una teoría que vive en un espacio-tiempo 10-dimensional. Por tanto, si queremos que ésta describa de forma “realista” la naturaleza es preciso un procedimiento que nos permita obtener una teoría efectiva con un número de dimensiones que se corresponda con el mundo fenomenológicamente observable, que tiene cuatro. Esto puede realizarse por medio de la compactificación. En efecto, dada una teoría de campos formulada sobre un espacio-tiempo $\hat{\mathcal{M}}$, el cual presenta la estructura $\mathcal{M} \times \mathcal{C}$ siendo $\mathcal{C}$ una variedad compacta, es posible generar una teoría de campos efectiva sobre el espacio-tiempo $\mathcal{M}$, donde la forma precisa de la teoría dependerá de la geometría de la variedad compacta. En esta teoría efectiva aparecerán, además, una serie de campos gauge como consecuencia del proceso de compactificación. Las simetrías de la teoría en dimensión superior se rompen en las simetrías del espacio-tiempo en dimensión inferior más invarianza gauge, o lo que es lo mismo, las simetrías de las dimensiones compactas se transforman en simetrías internas de la teoría.

Existe un número infinito de variedades compactas sobre las que podemos compactificar la teoría, pero sólo un limitado número de ellas dan lugar a resultados físicamente aceptables para la teoría de cuerdas. En nuestro caso, nos bastará con realizar el proceso de compactificación sobre una circunferencia S^1 que se trata del caso más sencillo posible. Para facilitar la notación, denotaremos $\hat{\mu} = (\mu, x)$ donde $\hat{\mu}$ son los índices de la variedad de dimensión superior y x denota la variable sobre la variedad compactificada. Además, supondremos que ninguno de los campos de la teoría dependen explícitamente de la coordenada en la variedad compacta.

Supongamos una métrica 10-dimensional $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ independiente de una de las coordenadas. Una transformación general de coordenadas (t.g.c) de la métrica se traducirá en,

$$\delta \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{\xi}^{\hat{\lambda}} \partial_{\hat{\lambda}} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \partial_{\hat{\mu}} \hat{\xi}^{\hat{\lambda}} \hat{g}_{\hat{\lambda}\hat{\nu}} + \partial_{\hat{\nu}} \hat{\xi}^{\hat{\lambda}} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}, \tag{2.10}$$

que, si separamos en $\hat{\mu} = (\mu, x)$, y compactificamos sobre la coordenada x, queda

$$\begin{aligned} \delta \hat{g}_{xx} &= \hat{\xi}^{\lambda} \partial_\lambda \hat{g}_{xx}, \\ \delta \hat{g}_{\mu x} &= \hat{\xi}^{\lambda} \partial_\lambda \hat{g}_{\mu x} + \partial_\mu \hat{\xi}^{x} \hat{g}_{xx}, \\ \delta \hat{g}_{\mu\nu} &= \underbrace{\hat{\xi}^{\lambda} \partial_\lambda \hat{g}_{\mu\nu} + \partial_\mu \hat{\xi}^{\lambda} \hat{g}_{\lambda\nu} + \partial_\nu \hat{\xi}^{\lambda} \hat{g}_{\mu\lambda}}_{t.g.c\ en\ d} + \underbrace{\partial_\mu \hat{\xi}^{x} \hat{g}_{x\nu} + \partial_\nu \hat{\xi}^{x} \hat{g}_{\mu x},}_{\text{“}componente\ interna\text{''}} \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde se ha supuesto $\hat{\xi}$ independiente de la coordenada x. De este modo, vemos que la métrica de 10 dimensiones puede descomponerse en un conjunto de términos que transforman como un escalar, un vector y un tensor bajo una transformación general de coordenadas en 9 dimensiones junto con unos términos extra procedentes de la componente interna de $\hat{\xi}$.

Para deshacernos de estos términos indeseados, definimos las cantidades 9-dimensionales,

$$\begin{aligned} G &= \hat{g}_{xx}, \\ A_\mu &= \hat{g}^{xx}\hat{g}_{\mu x}, \\ g_{\mu\nu} &= \hat{g}_{\mu\nu} - \hat{g}^{xx}\hat{g}_{\mu x}\hat{g}_{\nu x}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

que ahora si transforman de forma adecuada bajo cambios generales de coordenadas en 9 dimensiones. Además, sobre el campo vectorial A_μ la componente interna induce una transformación de gauge $U(1)$, $\delta A_\mu = \partial_\mu \hat{\xi}^x$.

El campo tensorial antisimétrico $\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ cambia bajo transformaciones generales de coordenadas y también bajo transformaciones de gauge $\partial_{[\hat{\mu}}\hat{\Sigma}_{\hat{\nu}]}$. Es fácil ver que si variamos este tensor nos queda,

$$\begin{aligned} \partial\hat{B}_{x\mu} &= \delta_L\hat{B}_{x\mu} + \partial_\mu\hat{\xi}^x\hat{B}_{xx} - \partial_\mu\hat{\Sigma}_x, \\ \partial\hat{B}_{\mu\nu} &= \delta_L\hat{B}_{\mu\nu} + \partial_{[\mu}\hat{\xi}^x\hat{B}_{x\nu]} + \partial_{[\mu}\hat{\Sigma}_{\nu]}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

donde δ_L denota variaciones bajo cambios generales de coordenadas en 9 dimensiones. De manera similar a como ocurría con la métrica, en 9 dimensiones tenemos un vector B_μ y un tensor antisimétrico $B_{\mu\nu}$ que además transforman adecuadamente bajo transformaciones de gauge y que se definen como,

$$\begin{aligned} B_\mu &= \hat{B}_{x\mu}, \\ B_{\mu\nu} &= \hat{B}_{\mu\nu} + \hat{g}^{xx}\hat{g}_{x[\mu}\hat{B}_{\nu]x}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Para los cálculos posteriores, resulta oportuno escribir la métrica como

$$\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{a}}\hat{e}_{\hat{\nu}}{}^{\hat{b}}\hat{\eta}_{\hat{a}\hat{b}}, \tag{2.15}$$

donde $\hat{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{a}}$ es el Vielbein 10-dimensional. El Vielbein transforma bajo transformaciones de Lorentz por lo que siempre es posible escoger un gauge para el que

$$\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{a}} = \begin{pmatrix} e_\mu{}^a & kA_\mu \\ 0 & k \end{pmatrix}, \qquad \hat{e}_{\hat{a}}{}^{\hat{\mu}} = \begin{pmatrix} e_a{}^\mu & -A_a \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

Esta elección de gauge se corresponde con las reglas de reducción,

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - k^2A_\mu A_\nu, & \hat{B}_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} + A_{[\mu}B_{\nu]}, \\ \hat{g}_{x\mu} &= -k^2A_\mu, & \hat{B}_{x\mu} &= B_\mu, \\ \hat{g}_{xx} &= -k^2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

de donde se tiene que

$$\sqrt{|\hat{g}|} = det\left(\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{a}}\right) = k\; det\left(e_\mu{}^a\right) = k\sqrt{|g|}, \tag{2.18}$$

lo que nos hace definir la reducción del dilatón[3]

$$\hat{\phi} = \phi + \frac{1}{2}ln\; k, \tag{2.19}$$

de manera que $\sqrt{|\hat{g}|}e^{-2\hat{\phi}} = \sqrt{|g|}e^{-2\phi}$.

[3]Dado que el dilatón es un escalar, no existe ningún argumento de preservación de la simetría que nos permitan distinguir entre una reducción u otra. Se utiliza pues esta regla a fin de facilitar la reducción del lagrangiano de supergravedad.

Finalmente, podemos definir la 3-forma $\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} = \partial_{[\hat{\mu}} B_{\hat{\nu}\hat{\rho}]}$, de manera que $\hat{H}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} = \hat{e}_{\hat{a}}{}^{\hat{\mu}} \hat{e}_{\hat{b}}{}^{\hat{\nu}} \hat{e}_{\hat{c}}{}^{\hat{\rho}} \hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}$ y que, por tanto, se descompone como

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_{abx} &= \frac{1}{3k} e_a{}^{\mu} e_b{}^{\nu} F_{\mu\nu}(B), \\
\hat{H}_{abc} &= e_a{}^{\mu} e_b{}^{\nu} e_c{}^{\rho} \left[\partial_{[\mu} B_{\nu\rho]} + \frac{1}{2} A_{[\mu} F_{\nu\rho]}(B) + \frac{1}{2} B_{[\mu} F_{\nu\rho]}(A) \right], \\
&= e_a{}^{\mu} e_b{}^{\nu} e_c{}^{\rho} H_{\mu\nu\rho} = H_{abc}.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

donde se ha tomado la definición usual de F, i.e, $F_{\mu\nu}(A) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. De este resultado se sigue de forma directa que $\hat{H}^2 = \hat{H}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \hat{H}^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} = H^2 - \frac{1}{3k^2} F^2(B)$, expresión que resulta muy útil.

2.3. Reducción del término de Gauss-Bonnet

El término de Gauss-Bonnet (1.2) es un término cuadrático en la curvatura. Como vemos, para tener dicho término completamente reducido es necesario reducir los escalares $\hat{R}^2$, $\hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \hat{R}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ y $\hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} \hat{R}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}$ y, para ello, es preciso reducir el escalar de Ricci, el tensor de Ricci y el tensor de curvatura o de Rienmann. Para reducir el tensor de Rienmann, necesitamos su expresión términos del formalismo del Vielbein que ya mostramos en (2.5). Sin más que aplicar está expresión, usar la reducción dimensional sobre la conexión de espín y contraer índices para obtener el escalar de Ricci y el tensor de Ricci se llega a

$$
\begin{aligned}
\hat{R} &= R + 2D^2\, ln\, k - \frac{1}{4} k^2 F^2(A) + 2\left(\partial\, ln\, k\right)^2, \\
\hat{R}_{ab} &= R_{ab} + D_a D_b\, ln\, k + \frac{1}{2} k^2 F_a{}^{c}(A) F_{cb}(A) + \partial_a ln\, k\, \partial_b ln\, k, \\
\hat{R}_{ax} &= \frac{1}{2} D_c \left(k F_a{}^{c}(A)\right) + k F_{ac}(A)\, \partial^c ln\, k, \\
\hat{R}_{xx} &= -D^2 ln\, k - \frac{1}{4} k^2 F^2(A) - \left(\partial ln\, k\right)^2, \\
\hat{R}_{abcd} &= R_{abcd} + \frac{1}{2} F_{[b|c}(A) F_{a]d}(A) - \frac{1}{2} F_{ab}(A) F_{cd}(A), \\
\hat{R}_{abcx} &= -D_{[a}\left(k F_{b]c}(A)\right) + k F_{ab}(A)\, \partial_c ln\, k, \\
\hat{R}_{axbx} &= \frac{1}{4} k^2 F_a{}^{c}(A) F_{cb}(A) - D_a ln\, k D_b ln\, k - D_a D_b ln\, k.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

A partir de estas expresiones, es directo, aunque no por ello poco engorroso, obtener la reducción del término de Gauss-Bonnet sin más que tener en cuenta que,

$$
\begin{aligned}
\hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \hat{R}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= \hat{R}_{\hat{a}\hat{b}} \hat{R}^{\hat{a}\hat{b}} = \hat{R}_{ab} \hat{R}^{ab} + 2\hat{R}_{ax} \hat{R}^{ax} + \hat{R}_{xx} \hat{R}^{xx}, \\
\hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} \hat{R}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} &= \hat{R}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} \hat{R}^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = \hat{R}_{abcd} \hat{R}^{abcd} + 4\hat{R}_{abcx} \hat{R}^{abcx} + 4\hat{R}_{axbx} \hat{R}^{axbx}.
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

2.4. Dualidad T

La dualidad T es una transformación de simetría de la teoría de cuerdas que relaciona dos espacio-tiempos geométricamente diferentes pero que son dinámicamente equivalentes, i.e, aunque la geometría del espacio-tiempo se vea alterada, las propiedades físicas de la teoría no se ven modificadas bajo una transformación de dualidad T. No obstante, en nuestro contexto nos basta con saber que se trata de una simetría de la acción de supergravedad. Las reglas de transformación de dualidad T se encuentran descritas por las llamadas transformaciones de Buscher[4],

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - \left(g_{x\mu}g_{x\nu} - B_{x\mu}B_{x\nu}\right)/g_{xx}, \\
\tilde{B}_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} - \left(g_{x\mu}B_{x\nu} - g_{x\nu}B_{x\mu}\right)/g_{xx}, \\
\tilde{g}_{x\mu} &= B_{x\mu}/g_{xx}, \\
\tilde{B}_{x\mu} &= g_{x\mu}/g_{xx}, \\
\tilde{g}_{xx} &= 1/g_{xx}, \\
\tilde{\phi} &= \phi - \frac{1}{2} ln\ |g_{xx}|.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Como vemos, estas reglas de transformación no son sencillas de aplicar pues mezclan componentes de la métrica con componentes de los campos. No obstante, y como ya anticipamos, si aplicamos reducción dimensional sobre el conjunto de reglas de transformación, éstas se simplifican considerablemente dando lugar al siguiente conjunto de reglas para 9 dimensiones,

$$\tilde{A}_\mu = B_\mu, \qquad \tilde{B}_\mu = A_\mu, \qquad \tilde{k} = k^{-1}, \qquad \tilde{\phi} = \phi, \qquad \tilde{B}_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}. \tag{2.24}$$

Ahora bien, en sentido estricto estas son las reglas de transformación bajo dualidad T a orden más bajo en un desarrollo perturbativo,

$$T = T_0 + \alpha T_1 + \alpha^2 T_2 + \dots \tag{2.25}$$

y, dado que nuestra acción de supergravedad presenta correcciones de primer orden, debemos tener en cuenta los términos debidos a la actuación de T_1 sobre la acción. La forma de T_1 no es conocida por lo que parte del trabajo de investigación consiste en encontrar su estructura mediante la imposición de que la acción de supergravedad sea invariante bajo las transformaciones de dualidad T truncadas a primer orden[5].

2.5. Acción de supergravedad

Como vimos en el apartado 1, el sector común de las teorías de supergravedad en 10 dimensiones obtenidas como límite a bajas energías de la teoría de cuerdas viene dado por

$$S = \frac{1}{2}\int d^{10}x\sqrt{|\hat{g}|}e^{-2\hat{\phi}}\left[-\hat{R} + 4\left(\hat{\partial}\hat{\phi}\right)^2 - \frac{3}{4}\hat{H}^2\right]. \tag{2.26}$$

Con lo que hemos descrito hasta ahora, podemos realizar reducción dimensional para obtener la teoría de supergravedad efectiva en 9 dimensiones sin más que tomar los resultados del apartado 2.2 y 2.3,

$$\begin{aligned}
S =& \frac{1}{2}\int d^9x\sqrt{|g|}e^{-2\phi}\left[-R - 2D^2 ln\ k + \frac{1}{4}k^2F^2(A) - 2\left(\partial ln\ k\right)^2 + 4\left(\partial\phi\right)^2 + 4\partial_a\phi\partial^a ln\ k + \right. \\
&\left. + \left(\partial ln\ k\right)^2 - \frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{4k^2}F^2(B)\right], \\
S =& \frac{1}{2}\int d^9x\sqrt{|g|}e^{-2\phi}\left[-R + 4\left(\partial\phi\right)^2 - \left(\partial ln\ k\right)^2 - \frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{4}k^2F^2(A) + \frac{1}{4k^2}F^2(B)\right] + \\
& + \int d^9x\sqrt{|g|}e^{-2\phi}\left[2\partial_a\phi\partial^a ln\ k - D^2 ln\ k\right].
\end{aligned} \tag{2.27}$$

donde el último término se corresponde con un término de frontera y, por tanto, para campos que se comportan adecuadamente en el infinito, se anula. En efecto, aplicando integración por partes

$$\int d^9x\sqrt{|g|}e^{-2\phi}\left[2\partial_a\phi\partial^a ln\ k - D^2 ln\ k\right] = -\int d^9x\sqrt{|g|}D_a\left(e^{-2\phi}\partial^a ln\ k\right) = 0. \tag{2.28}$$

[4]Las transformaciones de Buscher pueden obtenerse en el marco de la teoría de cuerdas a través de la acción de una cuerda moviéndose en un espacio-tiempo fijo, pero no necesariamente plano, con métrica $g_{\mu\nu}$.

[5]Para más detalle ver apartado 3.

Con lo que finalmente llegamos a la acción de supergravedad en 9 dimensiones,

$$S = \frac{1}{2}\int d^9x\sqrt{|g|}e^{-2\phi}\left[-R+4\left(\partial\phi\right)^2-\left(\partial ln\ k\right)^2-\frac{3}{4}H^2+\frac{1}{4}k^2F^2\left(A\right)+\frac{1}{4k^2}F^2\left(B\right)\right]. \qquad (2.29)$$

Por otro lado, si aplicamos las reglas de dualidad T en 9 dimensiones (2.24), vemos que la acción de supergravedad encontrada queda invariante, tal y como esperábamos.

3. Cálculo de las correcciones a los términos cinéticos de campos gauge y escalares y dualidad T a primer orden

Antes de mostrar los resultados obtenidos para la correcciones a los términos de campos gauge y escalares, es conveniente detallar el esquema básico del proceso llevado a cabo para la determinación de estos. Como ya mencionamos, el objetivo es construir una teoría de supergravedad con correcciones a primer orden procedente de un desarrollo perturbativo a bajas energías en teoría de cuerdas. Ya se ha comentado que las correcciones puramente gravitatorias dan lugar al término de Gauss-Bonnet mientras que las correcciones a los términos de los campos gauge y escalares, así como a la interacciones de estos con la gravedad son tremendamente difíciles de obtener de forma directa. Sabemos, sin embargo, que la acción total ha de ser invariante bajo dualidad T orden a orden. Nuestro método consistirá, pues, en aplicar dualidad T sobre los términos conocidos, i.e, supergravedad a orden cero y el término de Gauss-Bonnet e ir añadiendo términos 10-dimensionales que procederían de S_{mat} hasta que consigamos que la acción total quede invariante bajo ésta transformación. Este proceso queda descrito por la siguiente expresión,

$$T\left[S_{SUG}+\alpha\left(S_{GB}+S_{mat}\right)\right] = S_{SUG}+\alpha\left(S_{GB}+S_{mat}\right), \qquad (3.1)$$

que, quedándonos a primer orden en el desarrollo perturbativo da lugar a

$$\begin{aligned} &T_0\left(S_{SUG}\right)+\alpha\left[T_1\left(S_{SUG}\right)+T_0\left(S_{GB}+S_{mat}\right)\right] = S_{SUG}+\alpha\left(S_{GB}+S_{mat}\right), \\ &T_1\left(S_{SUG}\right)+T_0\left(S_{GB}+S_{mat}\right) = S_{GB}+S_{mat}, \end{aligned} \qquad (3.2)$$

donde ya se ha tenido en cuenta que S_{SUG} es T_0-dual. Nos queda, por tanto, determinar el contenido de S_{mat}. Para ello, como ya se dijo en la introducción, podemos considerar cada uno de los tres términos del término de Gauss-Bonnet de manera aislada y, dentro del cálculo de cada uno de ellos, tomar primero el caso en que los campos gauge no intervienen y, tras esto, añadir los términos procedentes de los campos gauge al cálculo.

Una dificultad adicional surge del hecho de que las reglas de dualidad T adquieren una forma muy complicada en 10 dimensiones por lo que resulta necesario hacer el cálculo en 9 dimensiones gracias a la reducción dimensional y después volver a una acción 10-dimensional reagrupando los nuevos elementos introducidos en S_{mat} para que todo encaje. Este hecho resulta clave y dificulta considerablemente las cosas pues no basta añadir términos 9-dimensionales a S_{mat} sin más sino que todos los términos añadidos han de proceder de la reducción dimensional de términos 10-dimensionales.

A la problemática mencionada hay que añadir el que sea necesario conocer la actuación de dualidad T a primer orden sobre la acción de supergravedad sin perturbar. Como se dijo en el apartado 2.4, estas reglas de transformación no se conocen y hay que encontrarlas para poder avanzar en el cálculo. La forma de hacer esto es buscar, de entre todas las transformaciones que pudieran ser consistentes, aquellas que nos generen los términos que necesitamos para cerrar la ecuación (3.2) y que no podamos obtener por medio de la reducción de términos 10-dimensionales.

Una vez presentado el esquema de actuación, podemos pasar a mostrar los resultados obtenidos. La labor realizada hasta el momento ha traído consigo dos resultados. En primer lugar, se ha conseguido obtener la acción completa, teniendo en cuenta los campos gauge, para el sector del escalar de Ricci donde además se ha demostrado que no es necesaria la adición de ningún tipo de regla de dualidad T a primer orden. En segundo lugar, se ha obtenido también las correcciones para los tres sectores del término de Gauss-Bonnet para el caso en que no se consideran los campos gauge.

3.1. Cálculos de los términos debidos a $\hat{R}^2$

Aplicando la expresión obtenida en (2.21) para la reducción dimensional de $\hat{R}$, tenemos que

$$\hat{R}^2 =\underline{R}^2 + 4RD^2 ln\, k - \frac{1}{2}k^2 RF(A)^2 + \underline{4R(\partial ln\, k)^2} + \underline{4\left(D^2 ln\, k\right)^2} - k^2 F(A)^2 D^2 ln\, k + \tag{3.3}$$
$$+ 8D^2 ln\, k\,(\partial ln\, k)^2 + \frac{1}{16}k^4 F(A)^4 - k^2 F(A)^2 (\partial ln\, k)^2 + \underline{4(\partial ln\, k)^4}.$$

Vemos claramente que, mientras los términos subrayados son invariantes bajo T_0-dualidad, los otros no lo son. Nuestro objetivo consiste pues en encontrar aquellos términos 10-dimensionales que, una vez reducidos, presenten términos no T_0-duales que compensen los anteriores. Para ello, dado que el número de términos útiles que podemos construir en 10 dimensiones no son demasiados[6], la técnica más eficiente consiste en escribirlos todos y reducirlos. De esta manera, es mucho más sencillo "ajustar" todos los términos para obtener un resultado "cerrado" ya que conocemos todas las piezas del rompecabezas.

En este caso, se ha demostrado que es posible obtener un resultado cerrado considerando únicamente estos términos en 10 dimensiones, i.e, se ha probado que no es necesario recurrir a dualidad T a primer orden para conseguir una acción invariante bajo dualidad T (ver ecuación (3.2)). El resultado obtenido finalmente, donde se han tenido en cuenta las contribuciones debidas a los campos gauge queda detallado en la siguiente acción invariante[7],

$$S =\frac{1}{2}\int d^{10}x\sqrt{|\hat{g}|}e^{-2\hat{\phi}}\left[-\hat{R} + 4\left(\hat{\partial}\hat{\phi}\right)^2 - \frac{3}{4}\hat{H}^2 + \alpha\left(\hat{R}^2 - 8\hat{R}\hat{D}^2\hat{\phi} + 8\hat{R}\left(\hat{D}\hat{\phi}\right)^2 + 16\left(\hat{D}^2\hat{\phi}\right)^2 - \right.\right.$$
$$\left.\left. -32\hat{D}^2\hat{\phi}\left(\hat{D}\hat{\phi}\right)^2 + 16\left(\hat{D}\hat{\phi}\right)^4 + \frac{3}{2}\hat{H}^2\hat{R} + \frac{9}{16}\hat{H}^4 - 6\hat{H}^2\hat{D}^2\hat{\phi} + 6\hat{H}^2\left(\hat{D}\hat{\phi}\right)^2\right)\right], \tag{3.5}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\hat{H}^2 = \hat{H}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}\hat{H}^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}$ y $\hat{H}^4 = \left(\hat{H}^2\right)^2$.

3.2. Cálculos de los términos debidos a $\hat{R}_{\hat{a}\hat{b}}\hat{R}^{\hat{a}\hat{b}}$

Las correcciones debidas a este término presentan muchas analogías con el caso anterior. La única salvedad relevante radica en el hecho de que los términos 10-dimensionales que deben ser usados para "ajustar" la parte debida a los campos gauge son algo más complejos de reducir. Por este motivo, aún sólo se ha encontrado una acción invariante bajo dualidad T para el caso en que no se considera la contribución de los campos gauge. Para este caso, se ha demostrado que tampoco es necesaria la adición de términos debidos a la actuación de dualidad T a primer orden sobre $\mathcal{L}_{SUG}$. Sin más dilación, procedemos a mostrar la acción invariante obtenida,

$$S =\frac{1}{2}\int d^{10}x\sqrt{|\hat{g}|}e^{-2\hat{\phi}}\left[-\hat{R} + 4\left(\hat{\partial}\hat{\phi}\right)^2 + \alpha\left(\hat{R}_{\hat{a}\hat{b}}\hat{R}^{\hat{a}\hat{b}} - 4\hat{R}_{\hat{a}\hat{b}}\hat{D}^{\hat{a}}\hat{D}^{\hat{b}}\hat{\phi} + 4\hat{D}_{\hat{a}}\hat{D}_{\hat{b}}\hat{\phi}\hat{D}^{\hat{a}}\hat{D}^{\hat{b}}\hat{\phi}\right)\right]. \tag{3.6}$$

3.3. Cálculos de los términos debidos a $\hat{R}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}}\hat{R}^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}}$

Como ya ocurría en el caso anterior, las correcciones debidas a los campos gauge son algo más difíciles de obtener por lo que todavía no se han conseguido. Este sector supone una diferencia fundamental con respecto a los anteriores. Como vimos, para los dos sectores anteriores no fue necesario

[6]En efecto, estos términos han de contener un total de cuatro derivadas y se trata de términos que sólo pueden construirse por medio de productos de derivadas primeras y segundas de los dilatones y de tensores y escalares de curvatura entre sí.

[7]Hay que tener especial cuidado con los términos que contienen derivadas segundas ya que su reducción a 9 dimensiones contiene más términos de los que uno cabría esperar a priori. Por ejemplo,

$$\hat{D}^2\hat{\phi} = \hat{D}_{\hat{a}}\hat{D}^{\hat{a}}\hat{\phi} = D^2\hat{\phi} + \hat{\omega}_{xa}{}^{x}\partial^{a}\hat{\phi}. \tag{3.4}$$

Este hecho no fue tenido en cuenta por el alumno que inició este proyecto, Mikael Rodriguez Chala, lo que le llevó a resultados erróneos en sus cálculos. En la presente memoria se muestran los resultados correctos amén de algunos resultados nuevos.

introducir ninguna regla de dualidad T a primer orden. En este caso veremos, sin embargo, que es la única forma de obtener una acción "cerrada" y obtendremos la regla de dualidad T a primer orden necesaria para conseguirlo. En efecto, de (2.21) se sigue inmediatamente que para $A = 0$,

$$\hat{R}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}}\hat{R}^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = \underline{R_{abcd}R^{abcd}} + \underline{4\left(\partial ln\ k\right)^4} + \underline{4D_aD_bln\ kD^aD^bln\ k} + 8D_aD_bln\ kD^aln\ kD^bln\ k. \tag{3.7}$$

Se puede comprobar con facilidad que no es posible cancelar el término no T_0-dual de la expresión anterior por medio de términos 10-dimensionales reducidos. Necesitamos una regla de dualidad T a primer orden que de cuenta de este término. Esto es lo que estudiamos en el apartado siguiente.

3.4. Dualidad T hasta primer orden

Como hemos visto en apartados anteriores, es necesario inferir las reglas de dualidad T a primer orden en el desarrollo perturbativo por medio de su actuación sobre la acción de supergravedad a orden cero y de los términos que "no cuadran" provenientes de las correcciones de primer orden y la actuación de dualidad T a orden cero sobre ellas. Mediante un análisis exhaustivo acerca de las posibles reglas que se pueden aplicar en el sector en que no se consideran los campos se sigue que sólo es posible una transformación del tipo,

$$\begin{aligned} Tk &= k^{-1}\left(1+\alpha\Delta\right), \\ T\phi &= \phi, \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde $T = T_0 + \alpha T_1$ y Δ es un término escalar que ha de contener dos derivadas. O lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} T_1k &= k^{-1}\Delta, \\ T_1\phi &= 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

A priori, uno podría pensar en dar una corrección de primer orden a la actuación de dualidad T sobre el dilatón. No obstante, del análisis de los términos que esta regla de transformación genera se puede comprobar que los elementos no T-duales generados por dicha regla de transformación pueden ser reducidos completamente a términos en 10 dimensiones y, por tanto, no da lugar a una transformación relevante para nuestro objetivo.

Puede demostrarse de forma sencilla que el escalar Δ presenta otra restricción aparte de contener dos derivadas. En efecto, si obligamos a que las reglas de transformación respondan a una simetría del tipo $\mathbb{Z}_2$ hasta primer orden en el parámetro perturbativo tenemos que,

$$\begin{aligned} T^2k &= T\left[k^{-1}\left(1+\alpha\Delta\right)\right], \\ &= Tk^{-1}\left(1+\alpha T_0\Delta\right) + O\left(\alpha^2\right), \\ &= \frac{k}{1+\alpha\Delta}\left(1+\alpha T_0\Delta\right) + O\left(\alpha^2\right), \\ &= k\left(1-\alpha\Delta\right)\left(1+\alpha T_0\Delta\right) + O\left(\alpha^2\right), \\ &= k\left[1+\alpha\left(T_0\Delta-\Delta\right)\right] + O\left(\alpha^2\right), \\ &= k + O\left(\alpha^2\right), \end{aligned} \tag{3.10}$$

ecuación que sólo es cierta para $T_0\Delta = \Delta$, o lo que es lo mismo, Δ T_0-dual.

Una vez conocemos las propiedades de Δ podemos preguntarnos por los términos que se generan fruto de la actuación de dualidad T a primer orden sobre la acción de supergravedad sin corregir.

Tomando la expresión de la acción de supergravedad en 9-dimensiones que obtuvimos en (2.29) y aplicando sobre ésta la regla de dualidad T a primer orden[8], llegamos a

$$\begin{aligned} TS_{SUG} &= S_{SUG} - \frac{1}{2}\int d^9x\sqrt{|g|}e^{-2\phi}\left[\left(\partial ln\ \left(k^{-1}\left(1+\alpha\Delta\right)\right)\right)^2 - \left(\partial ln\ k\right)^2\right], \\ &= S_{SUG} - \frac{1}{2}\int d^9x\sqrt{|g|}e^{-2\phi}\left[\left(\partial\left(-ln\ k + ln\ \left(1+\alpha\Delta\right)\right)\right)^2 - \left(\partial ln\ k\right)^2\right], \\ &= S_{SUG} - \frac{1}{2}\int d^9x\sqrt{|g|}e^{-2\phi}\left[\left(\partial\left(-ln\ k + \alpha\Delta + O\left(\alpha^2\right)\right)\right)^2 - \left(\partial ln\ k\right)^2\right], \\ &= S_{SUG} + \frac{1}{2}\int d^9x\sqrt{|g|}e^{-2\phi}\left[2\alpha\partial_a ln\ k\partial^a\Delta + O\left(\alpha^2\right)\right], \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde los campos gauge no han sido considerados pues no nos interesan para la discusión que estamos realizando. En particular, nos centraremos en el caso en que $\Delta = 4\left(\partial ln\ k\right)^2$ ya que es el único que nos interesa. De este modo,

$$TS_{SUG} = S_{SUG} + \frac{1}{2}\int d^9x\sqrt{|g|}e^{-2\phi}\left[16\alpha D_a ln\ kD_b ln\ kD^aD^b ln\ k + O\left(\alpha^2\right)\right], \tag{3.12}$$

que es el resultado que estábamos buscando.

Con lo visto en el apartado anterior, es trivial percatarse de que no es necesario añadir ningún término 10-dimensional para "cerrar" la acción. En consecuencia, la corrección debida a este sector sobre los campos escalares es nula. Nos basta con la corrección debida a la acción de dualidad T a primer orden sobre $\mathcal{L}_{SUG}$.

Uniendo todos los resultados mostrados tenemos finalmente que la acción de supergravedad corregida para los campos gauge tomados nulos es,

$$\begin{aligned} S =& \frac{1}{2}\int d^{10}x\sqrt{|\hat{g}|}e^{-2\hat{\phi}}\left[-\hat{R} + 4\left(\hat{\partial}\hat{\phi}\right)^2 + \alpha\left(\hat{R}^2 - 4\hat{R}_{\hat{a}\hat{b}}\hat{R}^{\hat{a}\hat{b}} + \hat{R}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}}\hat{R}^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} - 8\hat{R}\hat{D}^2\hat{\phi} + 8\hat{R}\left(\hat{D}\hat{\phi}\right)^2 + \right.\right. \\ & \left.\left. +16\left(\hat{D}^2\hat{\phi}\right)^2 - 32\hat{D}^2\hat{\phi}\left(\hat{D}\hat{\phi}\right)^2 + 16\left(\hat{D}\hat{\phi}\right)^4 + 16\hat{R}_{\hat{a}\hat{b}}\hat{D}^{\hat{a}}\hat{D}^{\hat{b}}\hat{\phi} - 16\hat{D}_{\hat{a}}\hat{D}_{\hat{b}}\hat{\phi}\hat{D}^{\hat{a}}\hat{D}^{\hat{b}}\hat{\phi}\right)\right], \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde es necesario añadir, además, que las reglas de dualidad T a primer orden son las mostradas en (3.8) con $\Delta = 4\left(\partial ln\ k\right)^2$.

Finalmente, es relevante mencionar que con ésta regla de transformación también aparecen términos no T-duales no reducibles a elementos 10-dimensionales para los campos gauge distintos de cero; confiamos en que estos elementos extra se cancelen cuando se realice el cálculo correspondiente considerando los campos gauge no nulos. Señalar también que, a falta de una prueba rigurosa, existen ciertos indicios de que no puede haber correcciones a dualidad T en los campos gauge que genere términos relevantes para nuestro cálculo por lo que confiamos en que no será necesario encontrar ninguna otra corrección a dualidad T a primer orden. Esto es lo que ocurre en el sector de $\hat{R}^2$ pero los sectores de $\hat{R}_{\hat{a}\hat{b}}\hat{R}^{\hat{a}\hat{b}}$ y $\hat{R}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}}\hat{R}^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}}$ para campos no nulos están aún inexplorados.

En último lugar, indicar que para cerrar definitivamente el proyecto es preciso encontrar la parte correspondiente a los campos gauge para los sectores del tensor de Ricci y de Rienmann. Actualmente, estamos trabajando en dicha tarea y se piensa que es posible obtenerlos en un futuro cercano.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a la Universidad de Granada y al Departamento de Física Teórica y del Cosmos de Granada el ofrecerme esta oportunidad. También quisiera agradecer al director de este proyecto, Bert Janssen, por proponerme este trabajo y por su apoyo y ayuda, así como por las fructíferas conversaciones en su despacho.

[8]Nótese que ya demostramos que la acción de supergravedad es invariante bajo transformaciones de dualidad T a orden cero

Referencias

[1] Bert Janssen. Apuntes de relatividad general: geometría diferencial desde el espacio tangente.

[2] Bert Janssen. Duality of strings and branes.