Trabajo Fin de Máster en Física: Radiaciones, Nanotecnología, Partículas y Astrofísica

Dualidad Electromagnética

Belén Coronado Granados
Universidad de Granada

Septiembre de 2017

Tutor: Bert Janssen
Departamento de Física Teórica y del Cósmos
Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo se presenta la teoría de Maxwell a través del formalismo lagrangiano, dentro del marco de la relatividad general y expresada en lenguaje covariante. Se explica la dualidad electromagnética como una simetría que surge en las ecuaciones del vacío y se rompe al introducir la carga eléctrica. Como intento de restaurar la simetría se trata de entender lo que supondría incluir monopolos magnéticos, para lo cuál habría que tener en cuenta efectos de física cuántica como ocurre en otros efectos electromagnéticos. Especialmente podemos ver cómo la física cuantica toma relevancia en el efecto de Aharonov-Bohm.
Aprovechando la naturaleza antisimétrica del tensor electromagnético podemos entender los temas tratados desde una perspectiva más geométrica. Para ello se reformula la teoría en el lenguaje de las formas diferenciales, con las que se acentúan los aspectos topológicos gracias a su relación con la cohomología de De Rham.
Como ocurre con otros conceptos y estructuras matemáticas podremos ver otras aplicaciones de la geometría diferencial en física, concretamente en relatividad general procediendo a la dualización del tensor de curvatura.
Palabras clave: Dualidad Electromagnética, Efecto Aharonov-Bhom, Monopolo Magnético, Formas diferenciales, Topología

Dualidad Electromagnética

Belén Coronado Granados

Universidad de Granada

Tutor: Bert Janssen

Departamento de Física Teórica y del Cósmos.

Firma:

Índice

1. Introducción 4

1.1. Teoría de Maxwell 5

2. Dualidad electromagnética 11

2.1. Dualidad Electromagnética en el vacio 11

2.2. ¿Dualidad electromagnética con cargas? 14

2.3. Dualidad electromagnética en otras dimensiones 15

2.4. Monopolos de Dirac 16

2.4.1. Potenciales electromagnéticos en mecánica cuántica. 18

2.4.2. Cuantización de carga 21

3. Formas diferenciales 23

3.1. Derivada Exterior 24

3.2. Operador Estrella de Hodge 25

3.3. Teorema de Stoke 25

3.4. Producto escalar 26

3.5. Operador adjunto de la derivada exterior 26

3.6. Clasificación de formas y Cohomología de Rham 27

3.7. Topología 29

3.7.1. Homología y Cohomología 30

4. Electromagnetismo con formas diferenciales 32

4.1. Dualidad Electromagnética 33

4.2. Efecto de Aharonov-Bohm 35

4.3. El monopolo de Dirac 36

5. Otras aplicaciones 38

5.1. El tensor de curvatura 38

5.2. Tensor de curvatura desde el espacio tangente 39

5.3. Dualidad del tensor de curvatura 42

6. Conclusiones 44

7. Apendice : Símbolo de Levi-Civita 46

Referencias 48

1. Introducción

Las simetrías juegan un papel significativo en la física moderna. El concepto de simetría hace referencia a la invariancia de un sistema físico, de la realidad y las propiedades físicas, bajo ciertas transformaciones. Sobre las simetrías tiene mucho que decir la teoría del físico James Clerk Maxwell (1831-1879), de hecho esta se consolida como una teoría ejemplar en el ámbito de la simetrías, de la cuál se puede aprender ampliamente. Lo que Maxwell hizo fue unificar todo el conocimiento sobre los fenómenos eléctricos y magnéticos en una teoría donde la mayoría de las ecuaciones ya habían sido propuestas por otros científicos, con lo que su genialidad fue completar dichas ecuaciones dando lugar a una teoría de campos consistente en la que se hace notoria la idea del campo como entidad física. Posteriormente la teoría de Maxwell ha ido dejándose ver con mayor complejidad exhibiendo distintas características de las cuales difícilmente podríamos menospreciar su impacto en la ciencia.

Un ejemplo de ello es que las ecuaciones de Maxwell transformen bajo el grupo de simetría de las transformaciones de Lorentz, conforme con la relatividad especial propuesta por el físico Albert Einstein (1879-1955) cuatro décadas después. Y llamando la atención lo bien que se adaptan las ecuaciones a la relatividad general.

Además la teoría de Maxwell se pronuncia como raíz de las teorías de campo gauge, las cuales poseen alguna simetría interna que deja invariante el lagrangiano que las describe. El concepto de teoría gauge que aparece en la teoría de Maxwell se generaliza dando lugar a estructuras física y matemáticamente más complejas por tanto abre camino a otras teorías ampliamente reconocidas. Como la generalización de Yang Mills de grupos gauges no-abelianos. Hoy en día el modelo estándar describe en lenguaje de campos gauge la interacción del electrodébil y la interacción fuerte. Hasta cierto punto la gravedad también exhibe este tipo de simetría. Con lo que queda subrayado su importancia en el panorama de la física actual.

En este trabajo vamos a enfocar la atención en otro aspecto remarcable de la teoría de Maxwell donde de nuevo salen a la luz la trascendencia de las simetrías. Oliver Heaviside (1850-1925) fue el primero en darse cuenta de que en el vacío existe una simetría entre los campos eléctricos y magnéticos, si los intercambiamos las ecuaciones de Maxwell permanecen invariantes, por tanto es puramente convenio a qué llamamos campo eléctrico y a qué llamamos campo magnético. A esta simetría se le llama dualidad electromagnética y es el eje central del trabajo. Al igual que ocurría con la noción de campo gauge, la dualidad se puede generalizar y ser aplicada en otros campos. Por ejemplo, algo análogo le ocurre a la gravedad, con la diferencia de que los campos gravitacionales tienen una estructura más sofisticada que el campo electromagnético. Por ello la dualidad electromagnética constituye un primer acercamiento para comprender la dualidad en otras áreas de la física más complejas, y resulta interesante un estudio para conocer las características físicas de esta simetría así como la estructura matemática subyacente. El objetivo del presente trabajo será realizar este estudio expresando la teoría de Maxwell mediante el formalismo lagrangiano y de acuerdo con la relatividad general.

Plan de trabajo

En primer lugar se muestra un marco teórico en el cual se presenta la teoría propuesta por Maxwell comentando la invariancia gauge y repasando algunos conceptos útiles sobre relatividad general como la derivada covariante y el concepto de espaciotiempo como variedad, a continuación se expresa la teoría de Maxwell en el formalísmo lagrangiano.

Resultará de gran utilidad dicho formalismo, puesto que se demuestra la dualidad en el vacío construyendo un lagrangiano equivalente al primero expresado en términos del llamado tensor electromagnético dual, el cual, intercambia los campos eléctricos y magnéticos respecto del tensor electromagnético, esto se expone en el apartado 2. Como la dualidad electromagnética ocurre en las ecuaciones de vacío se pretende estudiar la ruptura de la simetría al introducir cargas eléctricas y aprovechar para conocer las consecuencias de introducir monopolos magnéticos.

Una vez familiarizados con el concepto veremos como existen una matemáticas en las que se expresa la teoría de Maxwell y la noción de dualidad surge de forma muy natural. Se trata de aprovechar la antisimetría del tensor electromagnético para hacer uso de unos objetos matemáticos llamados formas diferenciales. En el apartado 3 se realizarán las aclaraciones matemáticas necesarias para hacer uso de la notación de formas diferenciales y sus operadores principales. Una de las principales ventajas de esta notación es cómo se relaciona con la topología de la variedad en la que se definen. Posteriormente en el apartado 4 veremos como, efectivamente, se trata de una notación con bastante éxito para expresar la teoría de Maxwell y estudiar la dualidad electromagnética.

Como se ha explicado antes, una de las motivaciones de estudiar la dualidad electromagnética es la posibilidad de generalizar la idea en otros ámbitos de la física. Por ello en el apartado 5 se darán algunas pinceladas sobre la dualización del tensor de curvatura, donde seguirá siendo útil la notación de formas diferenciales.

1.1. Teoría de Maxwell

Las cuatro *ecuaciones de la teoría de Maxwell* en su forma diferencial y en unidades de Lorentz-Heaviside toman la siguiente forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_e, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c}\vec{j}_e + \frac{1}{c}\partial_t \vec{E}, \tag{1.1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{c}\,\partial_t \vec{B}, \tag{1.2}$$

donde $\vec{E}$ es el vector de campo eléctrico, $\vec{B}$ es el vector de campo magnético, ρ_e es la densidad de cargas eléctricas, $\vec{j_e}$ es la densidad de corriente eléctrica y c es la velocidad de la luz.

Las dos últimas ecuaciones permiten escribir los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en función de los llamados *potenciales electromagnéticos* ϕ y $\vec{A}$[1]:

[1]Gracias a las propiedades del rotacional y la divergencia, teniendo en cuenta que para el espacio plano $\mathbb{R}^3$ se cumple $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0$ para un campo cualquiera $\vec{V}$. Más adelante se estudiará el caso en espacios con topologías no triviales.

6. Conclusiones

Hemos podido escribir la teoría de Maxwell en términos de unos objetos matemáticos llamados formas diferenciales definidos en (3.4), las cuales se pueden asociar con tensores covariantes antisimétricos de distintos rangos. El operador derivada exterior (3.9) ha permitido clasificar dichas formas diferenciales en cerradas o no cerradas (3.29) y exactas o no exactas (3.30). Perteneciendo al grupo de cohomología de De Rham aquellas que son cerradas pero no exactas (3.35). Este grupo cobra especial importancia puesto que está relacionado con la topología de la variedad en la que definimos las formas, más concretamente hemos visto como el número de "huecos" de una variedad determina la dimensión de los grupos de cohomología de de Rham a través de la expresión (3.50). Por ello usar la notación de formas diferenciales para describir la teoría de Maxwell ha permitido tener una interpretación de la misma desde un punto de vista más topológico. En algunos casos, el uso de dicha notación es muy intuitiva y facilita en gran medida los cálculos a realizar.

- Este es el caso de la dualidad electromagnética, que hace referencia a la simetría entre los campos eléctrico y magnético que tenemos en ausencia de cargas. Haciendo uso del método de los multiplicadores de Lagrange y tras varios cálculos se mostró que una formulación de la teoría de Maxwell donde los campos eléctricos y magnéticos son intercambiados en el tensor $\widetilde{F}_{\mu\nu}$ (2.17), es equivalente a la usada usualmente. Sin embargo, usando la notación de las formas diferenciales, encontrar la relación entre las dos formulaciones se simplifica al uso del operador Estrella de Hodge (3.11) y la equivalencia entre ellas en ausencia de cargas se deducen directamente de las propiedades que de dicho operador (ver apartado 3.6) como podemos ver en (4.15) y (4.16).

- Del mismo modo, al incluir fuentes de campo eléctrico hemos visto en (4.19) que la dos-forma $\star F_{(2)}$ no obedece las leyes de Maxwell, es decir, los campos eléctricos y magnéticos no son intercambiables, se rompe la simetría.

- Como curiosidad veíamos en el apartado 2.2 que dado el tensor electromagnético, el tensor dual solamente es del mismo rango que el anterior si formulamos la teoría de Maxwell en un espacio de tres dimensiones espaciales y una dimensión temporal. Con la formulación de las formas diferenciales este hecho se deriva directamente de las propiedades del operador $\star$, visto en el apartado 4.1 .

- Tras esto se ha estudiado el llamado efecto de Aharonov-Bhom. Se trata de simular un campo magnético que es cero en todo el espacio salvo en el eje z, para lo que suponemos que tenemos un solenoide suficientemente fino en dicho eje. Perpendicularmente al solenoide se lanzan electrones que van a finalizar su trayectoria en una pantalla. Aunque clásicamente los electrones no se desvían de su trayectoria, cuánticamente hay que tener en cuenta el fenómeno de interferencia en la función de onda del electrón, esto hace que obtengamos un patrón de interferencias en la pantalla. Debido a la fase de la función de ondas aparece un término de interferencia (4.23), expresar este término con formas diferenciales hemos deducido que la física que domina este fenómeno no está codificada en el potencial electromagnético como puede parecer en un principio. El parámetro físico sigue siendo el campo electromagnético y el efecto se explica por la topología no trivial del espacio en el cuál tenemos campo magnético nulo. Es más, tratar el tema desde una perspectiva más geométrica hace que gracias al teorema de De Rham relacionemos el número de vueltas que puede dar un electrón alrededor del solenoide (infinito numerable) con la libertad gauge del potencial que viene dada en (4.26).

- Finalmente, se estudia la posibilidad de incluir fuentes de campo magnético en la teoría (4.31) . Desde el punto de vista topológico incluir una carga magnética implica que el espacio donde puedo describir el campo magnético a partir del potencial es no trivial. Además, la singularidad del potencial, llamada cuerda de Dirac, puede moverse haciendo usos de transformaciones gauge del potencial. El flujo magnético que atraviesa una superficie cerrada es nulo en el caso sin monopolos, si incluimos un monopolo lo que permite que no se anule es justamente la topología del espacio como hemos comprobado en (4.34), (4.35) y (4.36). A nivel cuántico incluir monopolos tiene además la consecuencia de que las cargas eléctricas quedan cuantizadas, siendo la carga mínima la del electrón. Lo cual resulta bastante interesante ya que no se han explorado modelos físicos que expliquen la posible cuantización de carga sin hacer uso de los monopolos magnéticos.

- La notación de formas diferenciales también se utiliza en otras áreas de la física. Hemos visto parcialmente como se aplica a la relatividad general a través de la dualización del tensor de curvatura. También se dejan ver algunas propiedades interesantes como puede ser el hecho de que cuando en una métrica el tensor de curvatura coincide con su dual se tiene que la ecuación de Einstein en el vacío se cumple.

Referencias

[1] Acharya B.; Alexandre J.; Baines S. et al.
Search for magnetic monopoles with the MoEDAL forwrd trapping detector in 13 TeV proton-proton collisions at the LHC,
Physical Review Letters, 2017, vol. 118, no 6, p. 061801.

[2] Aharonov, Y. and Bohm, D.
Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory,
Physical Review, 1959, vol. 115, no 3, p. 485.

[3] Aharonov, Y. and Bohm, D.
Further Considerations on Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory,
Physical Review, 1961, vol. 123, no 4, p. 1511.

[4] Albert A.; André M.; Anghinolfi M. et al.
for relativistic magnetic monopoles with five years of the ANTARES detector data ,
arXiv preprint arXiv:1703.00424, 2017.

[5] Bert Janssen
Teoría de la relatividad General,
http://www.ugr.es/∼bjanssen/text/BertJanssenRelatividadGeneral.pdf

[6] Blas Cabrera
First results from a superconductive detector for moving magnetic monopoles. ,
Physical Review Letters, 1982, vol. 48, no 20, p. 1378.

[7] Douglas, S. and Elias, V.C.
The covariant, time-dependent AharonovBohm Effect,
Physics Letters B, 2013, vol. 723, no 1, p. 241-244.

[8] Figueroa-O'Farrill, J. M.
Electromagnetic Duality for Children,
University of Edinburgh, 1998.,
http://www.maths.ed.ac.uk/∼jmf/Teaching/Lectures/EDC.pdf

[9] John David J. and Lev O. B.
Historical roots of gauge invariance,
Reviews of Modern Physics, 2001, vol. 73, no 3, p. 663

[10] Matthew B. R.; Tibra Ali and Gerald B. C.
A Simple Introduction to Particle Physic Part II - Geometric Foundations and Relativity,
Department of Physics, Baylor University, 2009.

[11] Thron J. L.; Allison W. W.; Alner G. J.; et al..
Search for the magnetic monopole with the Soudan 2 detector,
Physical Review D, 1992, vol. 46, no 11, p. 4846.

[12] Tohru E.; Peter B. G. and Andrew J. H.
Gravitation, Gauge theories and Diferential Geometry,
Physics reports, 1980, vol. 66, no 6, p. 213-393.

[13] Tomás Ortín
Gravity and Strings,
Cambridge University Press, 2004.