

Transformaciones NS-NS no-abelianas

Airam Marcos Caballero

Resumen

El trabajo desarrollado en este documento tiene lugar dentro de la teoría de cuerdas. Más concretamente se centra en las teorías gauge que surgen en configuraciones de las D-branas. En las secciones 1, 2, 3 y 4 introduciremos los conceptos básicos de esta teoría, que se emplearán en el resto del texto. Las teorías gauge no-abelianas, necesarias para el estudio de las configuraciones de D-branas, son presentadas en 5. La introducción de la teoría no-abeliana dentro de la teoría de D-branas presenta ciertas dificultades y su generalización no es trivial. Se estudiará en la sección 6 una forma consistente de realizar la generalización no-abeliana, a la vez que se analizarán propiedades de los diferentes objetos no-abelianos.

En la sección 7 desarrollaremos una posible forma de realizar cambios de coordenadas dentro de la teoría no-abeliana. Calcularemos los cambios de coordenadas para diferentes objetos que aparecen en la teoría, confirmando la consistencia de las generalizaciones no-abelianas.

El objetivo fundamental de este documento es el estudio de las transformaciones NS-NS dentro del contexto no-abeliano (sección 8). Se obtendrá un resultado importante: Las transformaciones NS-NS están relacionadas con las transformaciones gauge de la teoría no-abeliana.

Índice

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción: Teoría de cuerdas | 2 |
| 2. Introducción a las D-branas | 5 |
| 3. Teorías gauge en D-branas | 7 |
| 4. Cuerdas cargadas eléctricamente | 9 |
| 5. Teoría gauge no-abeliana | 11 |
| 5.1. Representación adjunta | 11 |
| 5.2. Invariantes gauge | 13 |
| 5.3. Reducción dimensional de la teoría Yang-Mills | 13 |
| 6. Formalismo no-abeliano | 16 |
| 6.1. Funciones no-abelianas | 16 |
| 6.1.1. Estructura de álgebra de Lie de las funciones no-abelianas | 18 |
| 6.1.2. Derivadas de funciones no-abelianas | 19 |
| 6.1.3. Interpretación física | 21 |
| 6.2. <i>Pull-back</i> de formas | 21 |
| 6.3. Propiedades del <i>pull-back</i> | 22 |
| 6.4. Integración de formas no-abelianas | 22 |
| 7. Cambios de coordenadas no-abelianos | 23 |
| 7.1. Funciones no-abelianas | 23 |
| 7.2. <i>pull-back</i> de formas | 23 |
| 7.3. Conmutador | 24 |
| 7.4. Formalismo de matrices | 24 |
| 8. Transformación NS-NS no-abeliana | 26 |
| 8.1. Acción invariante bajo transformaciones NS-NS | 26 |
| 8.2. Transformación NS-NS de los escalares de <i>embedding</i> | 27 |
| 8.3. Transformación NS-NS de funciones no-abelianas | 28 |
| 8.4. Transformación NS-NS del conmutador | 29 |
| 8.5. Transformación NS-NS de la derivada covariante | 30 |
| 8.6. Relación entre NS-NS y $U(N)$ | 31 |
| 8.7. Álgebra de transformaciones NS-NS | 32 |
| 8.8. Álgebra de transformaciones NS-NS no covariantes | 34 |
| 9. Conclusiones | 36 |
| A. Integración de formas | 37 |
| Referencias | 38 |

1. Introducción: Teoría de cuerdas

Las grandes teorías de la física comparten una característica importante: todas ellas han sido acompañadas de unificaciones de diferentes conceptos físicos, en mayor o en menor medida. El electromagnetismo de Maxwell unificó la interacción eléctrica y magnética. Antes de la física cuántica el mundo se comprendía mediante partículas puntuales y ondas electromagnéticas. Cuando la teoría cuántica quedó establecida estos dos conceptos quedaron unificados. La relatividad especial de Einstein unió el electromagnetismo y la mecánica, además del espacio y el tiempo. La relatividad general se basa en que el espacio-tiempo es dinámico, al igual que la materia. Todas estas teorías son de gran importancia en física y todas ellas vienen acompañadas de unificaciones. La búsqueda de teorías de unificación, donde diferentes conceptos físicos compartan el mismo formalismo, se ha convertido en uno de los objetivos principales de la física teórica. La teoría de cuerdas es una de estas teorías.

Hasta el día de hoy, lo que conocemos de la física es que se compone de partículas fundamentales, algunas de ellas forman la materia y otras son responsables de las interacciones fundamentales entre la materia. La unificación de las partículas fundamentales es una de las características más importantes de la teoría de cuerdas. Se propone que todas las partículas están formadas por objetos unidimensionales (cuerdas), y que los diferentes estados de vibración se corresponden con las diferentes partículas fundamentales. Bajo este escenario es suficiente conocer la teoría que gobierna a las cuerdas para comprender la materia y sus interacciones. La teoría de cuerdas se basa en conocer como las cuerdas se propagan en el espacio-tiempo y como interactúan entre ellas.

Para que la teoría sea realista es necesario explicar porque las cuerdas no son observadas directamente en la naturaleza. Este problema se arregla suponiendo que las cuerdas son tan pequeñas que todavía no han sido detectadas por los actuales microscopios más potentes (aceleradores de partículas). Lo único que podemos observar de forma directa es el movimiento del centro de masas de la cuerda. Los movimientos vibracionales de la cuerda son imperceptibles, y su energía se manifiestan en forma de masa. Diferentes estados de vibración dan lugar a diferentes masas, salvo degeneración. En este sentido podemos hablar de la masa de un determinado estado de la cuerda. Existe otra cantidad física asociada a las cuerdas que representa el análogo de la masa ordinaria en la caso de las partículas. Las cuerdas al ser objetos unidimensionales podemos hablar de masa (o energía) por unidad de longitud. Esta cantidad tiene dimensiones de tensión y en el caso de cuerdas se le denomina tensión de la cuerda T . La tensión esta relacionada con la longitud de la cuerda $\ell_s = \sqrt{\alpha'}$ por la expresión

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} ,$$

donde hemos supuesto unidades naturales¹. La masa de los diferente estados va a depender de la tensión de la cuerdas y por tanto de su longitud. Existen cuerdas de dos tipos: cuerdas abiertas y cerradas. Las cerradas no tienen extremos, mientras que las cuerdas abiertas si. Los estados de estos dos tipos de cuerdas van a ser diferentes.

Se puede aplicar las técnicas de cuantización a las cuerdas de forma que obtenemos diferentes estados, cada uno de ellos con una determinada masa. Los estados obtenidos tras la cuantización de las teorías de cuerdas más simples son en general bosónicos. En la naturaleza también existen partículas fermiónicas lo que motiva la introducción de la supersimetría. Esta simetría relaciona bosones con fermiones, luego para que la teoría de cuerdas sea supersimétrica es necesario introducir estados fermiónicos. A las cuerdas pertenecientes a teorías supersimétricas se les denomina supercuerdas.

La consistencia de la teoría de supercuerdas exige que la dimensión del espacio-tiempo sea $D = 10$. El mundo que observamos tiene 4 dimensiones, lo que plantea la pregunta de que porque no vemos las 6 dimensiones restantes. Esto se puede resolver suponiendo que estas dimensiones están compactificadas de forma que con los instrumentos actuales son indetectables. El siguiente ejemplo ilustra en que consiste la compactificación. Si consideramos la superficie de un cilindro tenemos un espacio de dimensión 2. Ahora si suponemos que el radio del cilindro es muy pequeño

¹Las unidades naturales son aquellas en las que $\hbar = c = 1$.

puede parecer que se trata de una línea recta, que es un espacio unidimensional. Este mismo concepto se aplica a las 6 dimensiones compactificadas si suponemos que su radio es muy pequeño. El espacio-tiempo observado en este caso parece tener 4 dimensiones.

Dentro del espectro de las supercuerdas cerradas, existe un estado sin masa de spin 2 que se puede identificar con el gravitron, responsable de la interacción gravitatoria. Este es un resultado importante. La teoría de cuerdas, además de unificar las partículas elementales, se establece como candidata a fusionar la gravedad y la cuántica. Uno de los mayores problemas de la física es encontrar una teoría cuántica de la gravedad, y es posible que la teoría de cuerdas pueda resolverlo. En una teoría de la gravedad tenemos la constante de gravitación universal G . Además, en una teoría cuántica y relativista también tenemos la constante de Planck \hbar y la velocidad de la luz c como constantes fundamentales. Es lógico pensar que la longitud de las cuerdas ℓ_s sea función de estas tres constantes. La longitud de Planck, construida a partir de constantes fundamentales, es

$$\ell_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \sim 10^{-35} \text{ m} .$$

La longitud de las cuerdas será por tanto del orden de la longitud de Planck: $\ell_s \sim \ell_P$. Este hecho concuerda con nuestra suposición de que el tamaño de las cuerdas es considerablemente pequeño. La resolución del espacio-tiempo que tenemos hoy día es mucho mayor que la escala de la longitud de Planck. La relatividad general de Einstein, como teoría de la gravedad, dejará de ser válida a esta escala, dando lugar a una teoría de la gravedad cuántica.

La forma de describir cuerdas propagándose en el espacio-tiempo es similar a la que se utiliza para partículas puntuales. Las partículas en su movimiento describen una curva denominada *world-line*. Las cuerdas por su parte forman superficies en el espacio-tiempo. Dado un sistema de coordenadas, esta superficie viene determinada por las funciones $Y^\mu(\tau, \sigma)$, donde $\mu = 0, 1, \dots, d$, siendo $D = d + 1$ la dimensión del espacio-tiempo. La coordenada τ parametriza el tiempo propio, mientras que la coordenada σ parametriza la cuerda. La superficie que describe la cuerda en su propagación se denomina *world-sheet*. Fijada la coordenada temporal, el espacio unidimensional dado por las funciones $Y^\mu(\tau_0, \sigma)$, dependientes de σ , representan la cuerda en el tiempo τ_0 . Esto equivale a cortar el *world-sheet* mediante una hipersuperficie espacial de tiempo constante. La intersección será la cuerda en dicho instante de tiempo.

Los principios básicos de partículas moviéndose en un espacio-tiempo, en general con curvatura, establecen que las trayectorias van a ser geodésicas. Esto es cierto para partículas libres que no experimentan interacciones (aparte de la gravedad manifestada en la curvatura del espacio-tiempo). Por lo tanto las partículas describen curvas cuya longitud es mínima. Pues bien, este mismo principio se aplica a las cuerdas. La solución al movimiento de una cuerda va a ser el *world-sheet* que tenga superficie mínima. Esto se representa por la acción de Nambu-Goto:

$$\begin{aligned} S &= -T \int_W \sqrt{-\det[Y^*(g)(\tau, \sigma)]} \, d\tau \wedge d\sigma \\ &= -T \int d\tau \int d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial Y}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial Y}{\partial \sigma}\right)^2} , \end{aligned}$$

donde T es la tensión de la cuerda. La acción, salvo por la tensión, se puede interpretar geométricamente como la superficie del *world-sheet*. El principio de mínima acción nos dice que las soluciones clásicas del movimiento son aquellas que minimizan la acción, lo que equivale a obtener el *world-sheet* con superficie mínima.

Los dos extremos de una cuerda abierta se propagan en el espacio-tiempo como si fueran dos partículas puntuales. Al resolver la ecuación de movimiento de una cuerda abierta es necesario imponer condiciones de contorno en los extremos. Diferentes condiciones de contorno proporcionan diferentes tipos de soluciones. Existe un tipo de condición de contorno que restringe el movimiento de los extremos de la cuerda. El espacio en donde los extremos de una cuerda abierta están obligados a moverse conforma un nuevo tipo de objeto denominado D-brana. El estudio de este tipo de objetos será desarrollado en las secciones 2 y 3.

Las cuerdas, al igual que las partículas puntuales, pueden interacciones con diversos campos. Es posible acoplar las cuerdas a un campo análogo al campo electromagnético para las partículas. Mientras que el acoplamiento de las partículas viene dado por un campo vectorial A_μ , las cuerdas se acoplan a un tensor antisimétrico de rango 2, $B_{\mu\nu}$, denominado campo NS-NS². Existen transformaciones gauge del campo B , similares a las transformaciones gauge del campo A . El objetivo principal de este documento es el estudio de este tipo de transformaciones, denominadas transformaciones gauge NS-NS. Las cuerdas abiertas cargadas eléctricamente serán introducidas de forma más detallada en la sección 4. Se verá como las transformaciones NS-NS también afectan a otros campos, aparte del campo B , asociados a D-branas.

²Las siglas NS significan Neveu-Schwarz, Hacen referencia a condiciones de contorno que se imponen a las supercuerdas cerradas, que dan lugar al campo B . A veces a este campo se le denomina campo de Kalb-Ramond.

2. Introducción a las D-branas

En teoría de cuerdas las Dp -branas aparecen de forma natural al considerar cuerdas abiertas. Al resolver las ecuaciones de movimiento de una cuerda es necesario imponer condiciones de contorno. Estas condiciones nos predicen objetos, con una dimensión determinada, donde los extremos de la cuerdas abiertas están ligados. Cantidades como el momento o la corriente eléctrica pueden ser transmitidas de la cuerda abierta a la Dp -brana. Este hecho nos permite pensar en las Dp -branas como objetos con dinámica propia. Las interacciones entre las cuerdas abiertas y las Dp -branas es necesaria para que estas cantidades se conserven.

Las cuerdas vienen determinadas por D funciones de las coordenadas del *world-sheet*, $Y^\mu(\tau, \sigma)$. La coordenada τ representaría el tiempo propio de la cuerda y σ parametriza la cuerda en un instante de tiempo fijo. Para las cuerdas abiertas sus extremos serían los puntos de la cuerda con $\sigma = 0, \pi$. Las condiciones de contorno son restricciones que se imponen a las funciones $Y^\mu(\tau, \sigma)$ en sus extremos. Las más importantes son las condiciones de Dirichlet y las de Neumann. Las condiciones de contorno de Dirichlet son las siguientes:

$$\left. \frac{\partial Y^\mu}{\partial \tau} \right|_{\sigma=\sigma^*} = 0 \quad (\mu \neq 0) \quad (2.1)$$

donde σ^* toma los valores 0 ó π . La condición de Dirichlet no se aplica al caso $\mu = 0$, ya que en este caso tenemos que el vector $\frac{\partial Y^\mu}{\partial \tau}$ es temporal, lo que requiere que $\frac{\partial Y^0}{\partial \tau} \neq 0$. Esta ecuación implica que $\delta Y^\mu(\tau, \sigma^*) = 0$, es decir, el valor de $Y^\mu(\tau, \sigma^*)$ permanece fijo. Existen otras condiciones, como las de Neumann, que no fijan las coordenadas de los puntos. Las condiciones de contorno pueden ser distintas para diferentes coordenadas (diferentes valores de μ) y distintas en cada extremo de la cuerda abierta. Esto nos da la libertad de imponer las condiciones de Dirichlet o las de Neumann según la configuración que nosotros queramos. Si fijamos las condiciones de Dirichlet en $D - p - 1$ coordenadas, el extremo de la cuerda abierta que estemos considerando se podrá mover en un espacio de dimensión $p + 1$. Debido al hecho de que no podemos aplicar la condición de contorno a la coordenada temporal $\mu = 0$, este espacio tendrá una dirección temporal y p direcciones espaciales. A este espacio $p + 1$ -dimensional lo llamemos Dp -brana. Con la letra “D” hacemos referencia a las condiciones de contorno de Dirichlet que sirven para definir las Dp -branas.

El espectro de las Dp -branas se puede obtener a partir de la cuantización de la cuerdas abiertas que están unidas a ellas. Consideremos el caso más sencillo con una Dp -brana y una cuerda abierta con ambos extremos unidos a ella [5]. De la cuantización de esta cuerda se deduce un campo vectorial que vive en la Dp -brana cuyos grados de libertad son la dimensión de la brana menos dos, es decir, $(p + 1) - 2$. Por lo tanto este campo se comporta como un fotón, que viene asociado a un simetría gauge cuyo grupo estructural es $U(1)$. El espectro de los campos sin masa se completa con $D - p - 1$ campos escalares que viven en la brana. Estos campos tienen un significado físico, representan desplazamientos de la brana en una dirección normal a ella. Para escribir estos campos tomamos un sistema de coordenadas en el *world-volume* de la Dp -brana, $\sigma = \{\sigma^0, \sigma^1, \dots, \sigma^p\} = \{\sigma^a\}$ con $a = 0, 1, \dots, p$. La coordenada σ^0 representa de dirección temporal de la Dp -brana, que puede existir debido a que no podemos aplicar las condiciones de contorno de Dirichlet a esta dirección del espacio-tiempo.

$$\begin{aligned} V_a(\sigma) & \quad \text{Campo gauge } U(1) \\ X^i(\sigma) & \quad \text{Campos escalares } (i = 1, \dots, D - p - 1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

En general, la posición de la Dp -brana vendrá dada por las funciones $X^\mu(\sigma)$ donde $\mu = 0, \dots, d$ ($d = D - 1$), pero podemos elegir coordenadas en el espacio-tiempo tal se separen en dos tipos.

$$\begin{aligned} X^a(\sigma) & = \sigma^a \quad (\text{paralelas}) \\ X^i(\sigma) & \quad (\text{normales}) \end{aligned}$$

Las primeras se tratan de direcciones paralelas a la Dp -brana, moverse en la dirección x^a del espacio-tiempo equivale a moverse en la dirección σ^a de la brana, y las segundas son los campos escalares que determinan la posición de la brana en la direcciones normales.

Hemos considerado cuerdas abiertas que terminan y acaban en la misma Dp -brana. También es posible tener cuerdas abiertas que empiecen en una Dp -brana y acaben en otra. La teoría de cuerdas tiene en cuenta la orientación de la cuerdas. Esto quiere decir que a las cuerdas se les asigna una orientación que se corresponde con la dirección en que la coordenada σ de la cuerda aumenta. Tiene sentido hablar de cuerdas abiertas que empiezan en una Dp -brana y acaban en otra distinta, que son diferentes a cuerdas que unen ambas branas pero lo hacen en sentido contrario. Cuando disponemos de más de una Dp -brana se denominan como sectores a los diferentes tipos de cuerdas abiertas que existen. Los sectores se denotan por $[i, j]$ donde i, j son índices que identifican a las Dp -branas. El primer índice que aparece se corresponde con la brana donde la cuerda empieza (extremo $\sigma = 0$), y el segundo con la brana donde acaba ($\sigma = \pi$). Por ejemplo, el sector $[1, 2]$ contiene a las cuerdas que empiezan en la Dp -brana que identificamos en la etiqueta 1 y que acaban en la Dp -brana con etiqueta 2. Los índices que identifican a los sectores pueden ser iguales. Este tipo de sectores son aquellos en los que las cuerdas abiertas empiezan y acaban en la misma Dp -brana. En el caso anterior sólo teníamos una Dp -brana y el único sector que existía era el $[1, 1]$, por esta razón no era necesario hablar de sectores.

Para ver el contenido de campos que aparecen en las diferentes sectores vamos a considerar dos Dp -branas en las posiciones \bar{x}_1^i y \bar{x}_2^i respectivamente, donde el índice i recorre las coordenadas normales a la Dp -brana. Las cantidades que representan la posición de las branas son constantes y vienen de imponer las condiciones de contorno de Dirichlet, $\delta X^i(\tau, \sigma^*) = 0$, en los extremos de las cuerdas abiertas. Prestamos atención al sector $[1, 2]$ de esta configuración. Al obtener el espectro de las cuerdas abiertas que empiezan en la Dp -brana 1 y acaban en la 2, aparecen una serie de campos escalares y un campo vectorial, todos ellos con masa. Los campos que nos interesan a bajas energías son los que tienen una masa directamente proporcional a la distancia que separa a la Dp -branas.

$$M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^i - \bar{x}_1^i}{2\pi\alpha'} \right)^2 \quad (2.3)$$

El número de campos escalares que aparecen con esta masa son $D - p - 2$. También aparece un campo vectorial con masa de dimensión $p + 1$, que como todo campo vectorial con masa tiene p grados de libertad. Hay que notar que los campos vectoriales sin masa tienen un grado de libertad menos. Al tener un campo vectorial con masa existe un grado de libertad más que ha sido extraído del contenido en campos escalares. En la configuración sin masa había un campo escalar más que en la que tenemos actualmente.

Existe una cuestión no trivial a la hora de determinar donde viven estos campos. Al tener dos Dp -branas no podemos decir que sean campos que pertenezcan a una de las dos Dp -branas. En cierto sentido estos campos viven en las dos branas. Es cierto que tenemos un espacio de dimensión $p + 1$ que acoge a estos campos, pero no lo podemos identificar con alguna de las dos Dp -branas. Los campos pertenecientes a los sectores $[i, j]$ con $i \neq j$ representan interacciones no locales debido a que las Dp -branas i y j , en general, se encuentran separadas. Para que esta cuestión quede más clara parece necesario la aparición de la representación matricial, como marco donde escribir nuestra teoría.

En la configuración de dos Dp -branas, el sector $[2, 1]$ es análogo al sector $[1, 2]$. Los otros dos sectores $[1, 1]$ y $[2, 2]$ ya han sido estudiados en el caso de considerar una sola Dp -brana y cuerdas abiertas que empiezan y terminan en ella.

3. Teorías gauge en D-branas

Un hecho importante dentro de la teoría de D-branas es que surgen teorías gauge de forma natural. Su estudio viene motivado porque en el modelo estandar las interacciones entre partículas son descritas por este tipo de teorías. En la sección anterior hemos introducido las D-branas y los diferentes campos que surgen en el límite de bajas energías. Bajo ciertas circunstancias algunos de los campos se comportan como campos gauge. En particular podemos obtener teorías gauge no-abelianas suponiendo que D-branas coincidan en el espacio-tiempo. Este tipo de configuraciones serán estudiadas en esta sección.

Cuando consideramos N Dp-branas paralelas tenemos cuerdas que abarcan que unen cada una de ellas. Existen diferentes tipos de cuerdas abarcan, agrupadas en sectores, dependiendo cuales son las D-brana que unen. En general tendremos N^2 sectores $[i, j]$ con $i, j = 1, \dots, N$. Las cuerdas de los diferentes sectores pueden interactuar dando lugar a cuerdas que pertenecen a otro sector diferente. Una cuerda que pertenezca al sector $[i, j]$ puede interactuar con una cuerda del sector $[j, k]$ para formar una cuerda del sector $[i, k]$. Este proceso se produce cuando el extremo final de una cuerda abierta del sector $[i, j]$ se une con el extremo inicial de una cuerda del sector $[j, k]$, para formar una cuerda que empieza en la Dp-brana i y termina en la k . La cuerda abierta resultante pertenece al sector $[i, k]$. Podemos escribir esta interacción mediante una operación entre sectores.

$$[i, j] * [j, k] = [i, k]$$

Para que se pueda producir la interacción entre cuerdas es necesario que la Dp-brana j donde termina la primera cuerda, sea la misma donde empieza la segunda cuerda. Los campos que pertenecen a los diferentes sectores también van a interactuar como consecuencia de la interacción de las cuerdas abarcan. En el límite en el que la separación entre las N Dp-branas tiende a cero, los campos pertenecientes a los diferentes sectores tienen todos masa cero. Esto lo podemos ver en la expresión (2.3). Los campos vectoriales que tenían masa, al perder la masa también pierden un grado de libertad. Este grado de libertad se traduce en un nuevo campo escalar sin masa. El contenido en campos de cada uno de los sectores es de $D - p - 1$ campos escalares sin masa y de un campo vectorial también sin masa.

Como vimos en la sección 2, a bajas energías tenemos N^2 campos vectoriales $V_a^\alpha(\sigma)$, uno por cada sector ($\alpha = 1, \dots, N^2$). El caso de N^2 campos vectoriales sin masa, que interactúan entre sí, se traduce en una teoría gauge. Debido a consideraciones sobre la forma explícita de la interacción, que no detallaremos, el grupo gauge obtenido es el unitario de orden N . El grupo $U(N)$ es un grupo no abeliano que refleja en hecho que los distintos campos vectoriales gauge interactúan mutuamente. La dimensión del álgebra de $U(N)$ es N^2 que concuerda con el número de campos vectoriales que tenemos provenientes de los distintos sectores. Las teorías gauge vienen caracterizadas por un vector que toma valores en el álgebra del grupo. En nuestro caso el vector gauge $U(N)$ es:

$$V_a(\sigma) = V_a^\alpha(\sigma) T_\alpha ,$$

donde los T_i son una base del álgebra de $U(N)$. Los V_a^α son campos reales y representan las coordenadas del vector gauge V_a .

En los diferentes sectores, a bajas energías, también tenemos campos escalares. Los $N^2(D - p - 1)$ campos escalares $X^{i\alpha}$ se van a agrupar en $(D - p - 1)$ matrices de la misma forma que el vector gauge,

$$X^i = X^{i\alpha} T_\alpha .$$

Los X^i van a ser elementos del álgebra de $U(N)$ y por tanto la representación adjunta va a actuar sobre ellos. Como en el caso de una sola Dp-brana, los campos escalares van a representar la posición de las N Dp-branas en las direcciones normales a ella, pero esta vez van a tomar valores en el álgebra de $U(N)$ reflejando el hecho que ahora tenemos N Dp-branas coincidentes. La interpretación física de los escalares no-abelianos quedará más clara cuando estudiemos la teoría gauge $U(N)$ en la sección 5. Podemos hacer un cambio de coordenadas en el espacio-tiempo³ de

³La forma de realizar cambios de coordenadas en objetos que son no-abelianos no está bien definida. Este

manera que las coordenadas normales a la brana queden mezcladas con las coordenadas paralelas. En este caso la posición de las N Dp -branas viene determinada por los D campos escalares $X^\mu(\sigma)$. Estos campos escalares son $u(N)$ -valuados, es decir, matrices del álgebra de $U(N)$. Hay que notar que de los D campos escalares sólo $D-p-1$ representan campos físicos, ya que haciendo un cambio de coordenadas podemos prescindir de $p+1$ de estos campos.

Resumiendo, los campos que tenemos a bajas energías en el caso de N Dp -branas coincidentes se agrupan en dos tipos:

$$\begin{array}{ll} V_a(\sigma) & \text{Campo gauge } U(N) \\ X^i(\sigma) & \text{Campos escalares } u(N)\text{-valuados } (i = 1, \dots, D-p-1) \end{array}$$

Cuando consideramos una sola Dp -brana ($N = 1$) tenemos una teoría gauge abeliana. En este caso tenemos un campo gauge $U(1)$ y los campos escalares son $u(1)$ -valuados. El álgebra $u(1)$ es isomorfa a los números reales (\mathbb{R}), recuperando los campos escalares reales que teníamos con una sola Dp -brana. En la sección 4 estudiaremos como se comportan las cuerdas cargadas eléctricamente en la teoría gauge abeliana ($N = 1$). La generalización no-abeliana de cuerdas cargadas, para cualquier valor de N , será objeto de estudio en las secciones siguientes, conduciendo finalmente a la introducción de las transformaciones NS-NS no-abelianas.

problema esta relacionado con cambios de coordenadas en geometría no conmutativa. Este problema será analizado en la sección 7

4. Cuerdas cargadas eléctricamente

Al igual que las partículas puntuales las cuerdas pueden tener carga eléctrica. En el caso de las partículas con carga eléctrica el acoplamiento se realiza mediante un campo vectorial A_μ , que se acopla al *world-line* de la partícula. Podemos pensar en este campo vectorial como la 1-forma de conexión gauge del grupo $U(1)$. Las cuerdas también se van a acoplar de la misma forma a un campo $B_{\mu\nu}$ adquiriendo carga de dicho campo [5]. En este caso se trata de una 2-forma debido a que el *world-sheet* de la cuerda tiene dimensión 2, a diferencia de las partículas cuyo *world-line* tiene dimensión 1. Por ser una 2-forma va a ser un tensor antisimétrico en los índices μ, ν . En general podemos decir que cualquier *world-volume* de dimensión n se va a acoplar a formas de rango n . La forma de introducir los acoplamientos en la acción es mediante la integración de las n -formas. En el caso de partículas y cuerdas el acoplamiento es el siguiente.

$$\int_\gamma A = \int A_\mu(X(\tau)) \frac{dX^\mu(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{partícula})$$

$$\int_W B = \int B_{\mu\nu}(X(\tau, \sigma)) \frac{\partial X^\mu(\tau, \sigma)}{\partial \tau} \frac{\partial X^\nu(\tau, \sigma)}{\partial \sigma} d\tau d\sigma \quad (\text{cuerda}) \quad (4.1)$$

donde el *world-line* γ de la partícula viene dado por $X^\mu(\tau)$ y el *world-sheet* W de la cuerda por $X^\mu(\tau, \sigma)$. La antisimetría del campo $B_{\mu\nu}$ permite que la integral sea invariante bajo reparametrizaciones del *world-sheet*. Para la partícula acoplada al campo gauge A_μ existe la curvatura gauge o *field strenght* $F_{\mu\nu}$ que viene dada por la diferencial de A . Para la cuerdas de forma análoga tenemos el *field strenght* dado por la diferencial de B .

$$F = dA \quad ; \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$H = dB \quad ; \quad H_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\lambda\mu} + \partial_\lambda B_{\mu\nu}$$

El *field strenght* de B es la 3-forma H dada por la diferencial. Las transformaciones de A y B que dejan invariante F y H respectivamente son las transformaciones gauge.

En el caso de la partícula acoplada al campo vectorial A_μ la invarianza gauge se comprueba fácilmente teniendo en cuenta el teorema de Stokes. La transformación gauge de A_μ consiste en añadir una 1-forma exacta. De esta forma el *field strenght* F queda invariante al verificarse que $d^2 = 0$, es decir que toda forma exacta es también cerrada.

$$A \longrightarrow A' = A + d\theta \quad (4.2)$$

Aplicando el teorema de Stokes a la integral de la acción obtenemos lo siguiente.

$$\int_\gamma A' = \int_\gamma A + \int_\gamma d\theta = \int_\gamma A + \int_{\partial\gamma} \theta$$

Si suponemos que el *world-line* de la partícula es infinita, la contribución a la integral será el valor de $\theta(x)$ en $\pm\infty$. Podemos también suponer que todos los campos que aparecen, incluido $\theta(x)$, se anulan en el infinito. De esta forma la segunda integral del miembro de la derecha se anula y el acoplamiento de la 1-forma A es invariante gauge. En el caso de las cuerdas la invarianza gauge es más sutil. En analogía con la transformación gauge (4.2) definimos la siguiente transformación para B .

$$B \longrightarrow B' = B + d\Sigma$$

donde Σ es una 1-forma arbitraria que parametriza la transformación gauge. Se comprueba fácilmente que el *field strenght* H queda invariante bajo esta transformación. Aplicado el teorema de Stokes en este caso obtenemos lo siguiente.

$$\int_W B' = \int_W B + \int_W d\Sigma = \int_W B + \int_{\partial W} \Sigma$$

En el caso de la cuerdas, la integral en la frontera de W tiene más contribuciones que en el caso de las partículas. Suponemos, de forma análoga a las partículas, que la frontera de W se extiende hacia el infinito en los dos sentidos de la coordenada τ . Además suponemos que los campos se anulan en el infinito, luego la integral no va a tener contribución de esta parte de la frontera. Sin embargo, en general vamos a tener contribución de la parte de ∂W que tiene $\sigma = 0, \pi$, los extremos de la cuerda. Podemos sustituir la integral en ∂W por la integral en $\gamma_2 - \gamma_1$, donde γ_1, γ_2 se corresponden con los *world-lines* de los extremos de la cuerda $\sigma = 0, \pi$ respectivamente. La segunda integral del miembro de la derecha se puede escribir de la siguiente forma.

$$\int_{\partial W} \Sigma = \int_{\gamma_2 - \gamma_1} \Sigma = \int_{\gamma_2} \Sigma - \int_{\gamma_1} \Sigma \quad (4.3)$$

La diferencia de signo de ambas integrales es consecuencia de la diferente orientación de los *world-lines*. Vemos que en la acción aparecen los acoplamientos de dos partículas, con cargas de signos opuestos, a la 1-forma Σ . En el caso de cuerdas cerradas los dos extremos de la cuerda coinciden y se verifica que $\gamma_1 = \gamma_2$. Debido a que los acoplamientos tienen diferente signo esta contribución se cancela dando lugar a la invarianza gauge. En el caso de cuerdas abiertas estos nuevos acoplamientos no se cancelan y la invarianza gauge no se mantiene. Este problema lo podemos resolver introduciendo en la acción nuevos acoplamientos con los extremos de la cuerda. Los extremos de las cuerdas viven en las Dp -branas en cuyo *world-volume* existe un campo vectorial gauge V_a con grupo estructural $U(1)$. Acoplando los extremos de la cuerda de la siguiente forma al campo vectorial V_a podemos conseguir la invarianza gauge de la interacción las cuerdas abiertas.

$$S = \int_W B + \int_{\gamma_2} V - \int_{\gamma_1} V \quad (4.4)$$

Hemos supuesto que los extremos de la cuerda abierta están sujetos a la misma Dp -brana y por tanto el campo vectorial al que se acoplan es el mismo. En general si los extremos de la cuerda abierta están en diferentes Dp -branas los campos vectoriales V , a los que se acopla cada extremo, pueden ser diferentes. En cualquier caso añadimos un nuevo término a la variación gauge de V_a para el caso abeliano, obtenida a partir de la expresión (5.6).

$$V'_a = V_a + \partial_a \chi - \Sigma_\mu \partial_a X^\mu \quad (4.5)$$

donde $X^\mu(\sigma)$ son los escalares que determinan la posición de la Dp -brana. Hay que notar que el campo vectorial V_a vive en la Dp -brana, y que por lo tanto la forma de introducir el campo Σ_μ es mediante el *pull-back* $\partial_a X^\mu(\sigma)$. Aplicando esta transformación a los acoplamiento de V obtenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} V' - \int_{\gamma_1} V' &= \int_{\gamma_2} V - \int_{\gamma_1} V \\ &\quad - \int \Sigma_\mu(X(\sigma_2(\tau))) \partial_a X^\mu(\sigma_2^a(\tau)) \frac{d\sigma_2^a(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &\quad + \int \Sigma_\mu(X(\sigma_1(\tau))) \partial_a X^\mu(\sigma_1(\tau)) \frac{d\sigma_1(\tau)}{d\tau} d\tau = \\ &= \int_{\gamma_2} V - \int_{\gamma_1} V - \int \Sigma_\mu(X(\sigma_2(\tau))) \frac{dX^\mu(\sigma_2(\tau))}{d\tau} d\tau \\ &\quad + \int \Sigma_\mu(X(\sigma_1(\tau))) \frac{dX^\mu(\sigma_1(\tau))}{d\tau} d\tau = \int_{\gamma_2} V - \int_{\gamma_1} V - \left[\int_{\gamma_2} \Sigma - \int_{\gamma_1} \Sigma \right] \end{aligned}$$

donde $\sigma_1^a(\tau) = Y^a(\tau, 0)$ y $\sigma_2^a(\tau) = Y^a(\tau, \pi)$ son la parametrizaciones de las curvas γ_1 y γ_2 respectivamente, la cuales representan los *world-lines* de los extremos de la cuerda dada por $Y^\mu(\tau, \sigma)$. El término entre corchetes es justamente la variación del acoplamiento del campo B dada en la expresión (4.3). Estos dos términos se cancelan dando lugar a la invarianza gauge de la acción (4.4).

5. Teoría gauge no-abeliana

El objetivo de esta sección es desarrollar la teoría gauge no-abeliana con el fin de estudiar configuraciones de Dp -branas. En el caso de tener N Dp -branas coincidentes tenemos una teoría gauge no-abeliana cuyo grupo estructural es el unitario de orden N , denotado por $U(N)$. Este grupo lo forman las matrices cuadradas de orden N que son unitarias, es decir, su hermítica conjugada coincide con su inversa. El grupo de Lie $U(N)$ es simplemente conexo luego va a estar completamente determinado por el álgebra de Lie $u(N)$. Los elementos del grupo se obtienen exponenciando el álgebra. El espacio vectorial formado por las matrices cuadradas de orden N que además son hermíticas forman el álgebra $u(N)$. El álgebra de Lie se caracteriza por la existencia de una operación bilineal antisimétrica que satisface la identidad de Jacobi. En el caso de matrices viene dada por el conmutador usual de matrices $[\cdot, \cdot]$. En las teorías gauge originadas por Dp -branas disponemos de un campo vectorial sin masa $V_a(\sigma)$, que vive dentro de la Dp -brana, y que toma valores en el álgebra de Lie del grupo. Además sabemos que existen $D - p - 1$ escalares sin masa, $X^i(\sigma)$, que transforman en la representación adjunta de $U(N)$. Por ser elementos de la representación adjunta van a ser campos $u(N)$ -valuados. Por tanto, los campos escalares X^i y el campo vectorial V_a van venir representados por matrices hermiticas. En la teoría no-abeliana el campo V va a desempeñar el papel de la conexión gauge. A partir de ahora nos centraremos en una teoría gauge no-abeliana de elementos que transformen en la representación adjunta, como es el caso de los escalares X^i .

5.1. Representación adjunta

Dado un elemento $U(\sigma)$ perteneciente al grupo $U(N)$, que depende además del punto del espacio σ que estemos considerando, tenemos una transformación (local) de los elementos de la representación adjunta $X^i(\sigma)$ dada por

$$X'^i = UX^iU^{-1}, \quad (5.1)$$

o equivalentemente en su versión infinitesimal, obtenida desarrollando en serie: $X'^i = X^i + \delta_\chi X^i$.

$$\delta_\chi X^i = i[\chi, X^i]$$

donde χ es un elemento del álgebra $u(N)$ que nos parametriza la transformación: $U = \exp(i\chi)$. Para considerar transformaciones gauge tenemos que hacer transformaciones locales, es decir, que dependan del punto de la Dp -brana que estemos considerando. Para ello hacemos que χ dependa de las coordenadas σ de la Dp -brana. El parámetro $\chi(\sigma)$ se convierte en un campo escalar que toma valores en $u(N)$. Esta dependencia hace que las derivadas parciales del campo escalar X^i no transformen en la adjunta.

$$\partial_a(\delta_\chi X^i) = \partial_a(i[\chi, X^i]) = i[\chi, \partial_a X^i] + i[\partial_a \chi, X^i] = \quad (5.2)$$

$$= \delta_\chi(\partial_a X^i) + i[\partial_a \chi, X^i] \quad (5.3)$$

El primer término que aparece es justamente la transformación de la derivada que buscamos, luego tenemos que redefinir la derivada para que el segundo término no aparezca. Para ello definimos una derivada covariante mediante una conexión que en nuestra teoría gauge vendrá dada por una 1-forma con valores en el álgebra $u(N)$. En nuestra configuración de Dp -branas tenemos el campo vectorial $V_a(\sigma)$ que desempeña este papel. El término que tenemos que añadir es de la forma $-\delta_{V_a} X^i$, luego la derivada covariante se define de la siguiente forma.

$$D_a = \partial_a - \delta_{V_a}$$

$$D_a X^i = \partial_a X^i - i[V_a, X^i] \quad (5.4)$$

Al campo vectorial V_a se le denomina campo vectorial gauge. Para que la derivada covariante de un objeto que transforma en la representación adjunta también pertenezca a dicha representación,

es necesario que la variación del campo vectorial $\delta_\chi V_a$ tenga una expresión determinada. Hay que notar que la variación de V_a no puede pertenecer a la representación adjunta para que se cancelen la anomalías que presenta la derivada parcial ordinaria ∂_a . Si observamos la ecuación (5.3) vemos que tenemos que introducir un término de la forma $\partial_a \chi$.

$$\delta_\chi V_a = i[\chi, V_a] + \partial_a \chi = D_a \chi \quad (5.5)$$

Esta expresión es la versión infinitesimal de la transformación gauge siguiente.

$$V'_a = UV_a U^{-1} - i(\partial_a U)U^{-1} \quad (5.6)$$

Vemos que V_a no pertenece a la representación adjunta debido justamente al término que hemos introducido. Utilizando la identidad de Jacobi se puede demostrar que la derivada covariante de X^i transforma en la representación adjunta, y por tanto δ_χ va a conmutar con la derivada D_a .

$$D_a(\delta_\chi X^i) = i[\chi, D_a X^i] = \delta_\chi(D_a X^i) \quad (5.7)$$

En el caso de una transformación gauge finita tenemos que la derivada covariante verifica la siguiente expresión.

$$D_a(UX^iU^{-1}) = U(D_a X^i)U^{-1}$$

La derivada covariante es útil para derivar cantidades que están sometidas a variaciones locales, es decir variaciones tipo gauge. En física existe un principio de acoplo mínimo que consiste en sustituir las derivadas parciales por derivadas covariantes. Los términos que se añaden dependientes del campo vectorial V_a representan las interacciones, y consisten en un acoplo del campo vectorial gauge V_a con la campos que están sometidos a variaciones gauge.

De la misma forma que la derivada covariante podemos construir términos que también transformen en la representación adjunta. Uno de ellos y con gran importancia es la curvatura gauge, que consiste en una 2-forma que toma valores en el álgebra de Lie del grupo. La curvatura gauge viene determinada por la conexión gauge V_a , que se trata de una 1-forma valorada en el álgebra de Lie. Para construir una 2-forma a partir de una 1-forma podemos emplear la derivada exterior y el producto exterior. La curvatura gauge F viene dada en función de V mediante la siguiente expresión.

$$F = dV - iV \wedge V$$

Hay que notar que el producto de dos formas iguales no se anula debido a que toman valores en el álgebra de Lie, y en el caso no-abeliano estas cantidades no van a conmutar. Podemos escribir la curvatura gauge explícitamente en componentes.

$$F_{ab} = \partial_a V_b - \partial_b V_a - i[V_a, V_b]$$

Hemos escrito el producto exterior en función del conmutador que caracteriza al álgebra de Lie del grupo, ya que $(V \wedge V)_{ab} = V_a V_b - V_b V_a = [V_a, V_b]$. Debido a que en el caso no-abeliano el conmutador es distinto de cero, el producto de dos forma iguales en general no se va a anular. La variación gauge de F_{ab} se puede computar en a partir de la variación de V_a .

$$\delta_\chi F_{ab} = i[\chi, F_{ab}]$$

Como vemos la curvatura gauge F_{ab} pertenece a la representación adjunta. La 2-forma de curvatura también se puede definir en función de la derivada covariante. En general el producto de dos derivadas covariantes $D_a D_b$ no va a pertenecer a la representación adjunta, pero si su conmutador $[D_a, D_b]$.

$$[D_a, D_b]X^i = -i[F_{ab}, X^i]$$

$$[D_a, D_b] = -\delta F_{ab}$$

La segunda expresión es general para cualquier representación y se desprende del teorema de Ambrose-Singer. La primera de ellas nos dice que el conmutador de dos derivadas covariantes

actuando sobre un elemento de la adjunta X^i , es el conmutador del álgebra de la curvatura gauge con X^i . El conmutador de dos elementos de la representación adjunta va a pertenecer también a la adjunta debido a que se verifica la identidad de Jacobi. Se puede comprobar que la representación adjunta actúa como una derivación sobre el conmutador del álgebra.

$$\delta_\chi([X^i, X^j]) = [\delta_\chi X^i, X^j] + [X^i, \delta_\chi X^j]$$

5.2. Invariantes gauge

Si tomamos la traza del campo vectorial V vemos que transforma con una derivada bajo la transformación gauge (5.5).

$$\delta_\chi(\text{Tr}[V_a]) = \text{Tr}[\delta_\chi V_a] = \text{Tr}[D_a \chi] = \text{Tr}[\partial_a \chi] = \partial_a(\text{Tr}[\chi])$$

Al transformar con una derivada, al integrar la traza de V en curva que se extiende hacia el infinito en ambos sentidos del tiempo, obtenemos una cantidad invariante.

$$\delta_\chi \left(\int_\gamma \text{Tr}[V] \right) = \int_\gamma d(\text{Tr}[\chi]) = 0 \quad (5.8)$$

La última integral se anula debido a que suponemos que $\chi(\sigma)$ se anula en el infinito. También podemos emplear la curvatura F_{ab} para construir invariantes gauge. El término más común que se suele construir es el término cinético para el campo vectorial V_a . Para ello tenemos que disponer de una expresión que sea un escalar y de segundo orden en las derivadas de V_a . La única posibilidad es un término de la forma $F_{ab}F^{ab}$, donde hemos usado la métrica g_{ab} inducida en el volumen de la Dp -brana para subir y bajar índices. Al tratarse de un producto de objetos que transforman en la adjunta va a transformar en la adjunta, luego si tomamos la traza obtenemos un invariante gauge.

$$\text{Tr}(F'_{ab}F'^{ab}) = \text{Tr}(UF_{ab}U^{-1}UF^{ab}U^{-1}) = \text{Tr}(F_{ab}F^{ab})$$

donde hemos utilizado la propiedad cíclica de la traza. Al introducir esta expresión dentro de la acción obtenemos el término cinético para el campo escalar V_a . Este tipo de teorías no-abelianas donde se emplean las derivadas covariantes y la curvatura gauge para obtener invariantes gauge, se denominan teorías de Yang-Mills. La parte de la acción correspondiente a la teoría Yang-Mills es

$$S = \int_\gamma \text{Tr}(V) + \int_{\mathcal{M}} \text{Tr}(F_{ab}F^{ab}),$$

donde γ es el *world-line* de la partícula a la cuál se acopla el campo V y \mathcal{M} es el espacio-tiempo de fondo. El primer término se corresponde con el acoplamiento mientras que el segundo se trata del término cinético del campo V . Notar que la región de integración de ambos términos es diferente. Para obtener una teoría no-abeliana en N Dp -branas coincidentes es necesario recurrir a las técnicas de reducción dimensional desarrolladas en la siguiente sección.

5.3. Reducción dimensional de la teoría Yang-Mills

En la teoría Yang-Mills de una Dd -brana disponemos de un campo vectorial $\hat{V}_\mu(x)$, donde $\mu = 0, 1, \dots, d$. La teoría gauge en este caso es $(d+1)$ -dimensional. La Dd -brana llena todo el espacio-tiempo y por tanto no disponemos de campos escalares de *embedding*, lo que hace que su formulación sea más sencilla. La reducción dimensional consiste en obtener una teoría Yang-Mills d -dimensional a partir de la teoría original de dimensión $d+1$. Para ello suponemos que existe una dirección que es isométrica, es decir, ninguno de los campos depende de la coordenada que parametriza dicha dirección. Suponemos que esta coordenada se corresponde con $x = x^d$. El campo vectorial $V_\mu(x)$, con $\mu = 0, 1, \dots, d-1$, que caracteriza nuestra nueva teoría d -dimensional viene dado por

$$V_\mu(x^0, x^1, \dots, x^{d-1}) = \hat{V}_\mu(x^0, x^1, \dots, x^{d-1}).$$

Podemos ignorar la coordenada x^d ya que hemos supuesto que es isométrica. Este hecho nos garantiza que el vector $V_\mu(x)$ este bien definido. El nuevo campo vectorial nos va a determinar una teoría Yang-Mills d -dimensional. Al hacer la reducción dimensional hay una componente del vector $\hat{V}_{\hat{\mu}}$, correspondiente con la dirección isométrica, que hemos ignorado. Renombramos a esta componente por

$$X(x^0, x^1, \dots, x^{d-1}) = (2\pi\alpha')\hat{V}_x(x^0, x^1, \dots, x^{d-1}) .$$

El campo X es un campo escalar que vive en el mismo espacio d -dimensional que el vector V_μ . La constante α' se introduce por dimensiones: El campo vectorial $\hat{V}_{\hat{\mu}}$ tiene dimensión de masa 1 y la constante α' , relacionada con la longitud de las cuerdas, tiene dimensión de masa -2 , luego el campo escalar X va a tener dimensión -1 . Teniendo en cuenta la dirección isométrica podemos comprobar que este nuevo campo escalar va a transformarse en la representación adjunta.

$$\delta_\chi X = (2\pi\alpha')\delta_\chi \hat{V}_x = (2\pi\alpha')D_x \chi = (2\pi\alpha')(\partial_x \chi - i[\hat{V}_x, \chi]) = i[\chi, (2\pi\alpha')\hat{V}_x] = i[\chi, X] \quad (5.9)$$

El término de la derivada covariante $\partial_x \chi$ se anula debido a que hemos considerado que la dirección x es isométrica. El resultado final de la reducción dimensional de la teoría Yang-Mills en $d+1$ dimensiones es una nueva teoría d -dimensional, caracterizada por el vector V_μ y por el escalar X .

Aplicando este proceso de forma consecutiva podemos obtener una teoría Yang-Mills de dimensión $p+1$ con $p < d$. Para ello dividimos las coordenadas espacio-temporales x^μ en dos tipos: las coordenadas σ^a , con $a = 0, 1, \dots, p$, correspondientes al espacio donde vive la nueva teoría gauge y las coordenadas x^i que se corresponden con las direcciones isométricas del espacio-tiempo ($i = 1, \dots, d-p$). Para la reducción dimensional suponemos que los campos sólo dependen de las coordenadas σ^a . El campo vectorial gauge de la teoría Yang-Mills reducida es

$$V_a(\sigma) = \hat{V}_a(\sigma) .$$

Además tenemos los campos escalares

$$X^i(\sigma) = (2\pi\alpha')\hat{V}_i(\sigma) .$$

Estos campos escalares van a transformarse en la representación adjunta de la teoría gauge reducida, como vimos en (5.9).

$$\delta_\chi X^i = i[\chi, X^i] ,$$

donde $\chi(\sigma)$ es el parámetro de la transformación gauge. Para completar la reducción dimensional tenemos que ver como se modifica el tensor $\hat{F}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \partial_{\hat{\mu}}\hat{V}_{\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\nu}}\hat{V}_{\hat{\mu}} - i[\hat{V}_{\hat{\mu}}, \hat{V}_{\hat{\nu}}]$. Aplicando la reducción dimensional a la 2-forma de curvatura tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{F}_{ab} &= F_{ab} = \partial_a V_b - \partial_b V_a - i[V_a, V_b] \\ \hat{F}_{ai} &= \frac{1}{2\pi\alpha'}(\partial_a X^i - i[V_a, X^i]) = \frac{1}{2\pi\alpha'}D_a X^i \\ \hat{F}_{ij} &= \frac{-i}{(2\pi\alpha')^2}[X^i, X^j] . \end{aligned}$$

Vemos que la componente \hat{F}_{ai} de la curvatura se transforma en la derivada covariante del campo escalar X^i y que la componente \hat{F}_{ij} se transforma en el conmutador de dos campos escalares. Para las dimensiones a las que no aplicamos reducción dimensional obtenemos la expresión de la curvatura gauge sin modificar. El término cinético que teníamos antes de la reducción dimensional se transforma en los términos cinéticos de los campos escalares X^i y un término potencial.

$$\frac{1}{4}\text{Tr}(\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}) = \frac{1}{4}\text{Tr}(F_{ab}F^{ab}) + \frac{T^2}{2}\text{Tr}(D_a X^i D^a X^i) + \frac{T^4}{2}\text{Tr}([X^i, X^j]^2) \quad (5.10)$$

El primer término que aparece es la contribución cinética del campo vectorial gauge V_a una vez hecha la reducción dimensional. El segundo término se trata de la energía cinética de los

campos escalares X^i y el último es un término potencial para dichos escalares. La energía potencial que aparece es característica del caso no-abeliano. Si nos restringimos al caso abeliano todos los conmutadores desaparecen incluido el término potencial.

Cuando aplicamos la reducción dimensional a la teoría gauge de la Dp -branas obtenemos un hecho relevante. En el caso de N Dd -branas coincidentes tenemos una teoría gauge $U(N)$ de dimensión $(d+1)$, caracterizada por el vector \hat{V}_μ . Además en este caso no existen campos escalares que se modifiquen bajo transformaciones gauge. Aplicando las técnicas de reducción dimensional podemos obtener una teoría gauge de dimensión $p+1$, determinada por el vector V_a y $d-p$ campos escalares X^i . Ahora bien, podemos identificar la teoría gauge reducida con la teoría de N Dp -branas coincidentes. Los escalares de *embedding* que determinan la posición de las branas serán justamente los campos escalares $X^i(\sigma)$, y el vector $V_a(\sigma)$ será el vector gauge $U(N)$ de dimensión $p+1$ correspondiente con la teoría gauge resultante de dicha configuración de Dp -branas. La reducción dimensional aplicada de esta forma esta relacionada con T-dualidad en D-branas⁴.

Hay que destacar que el mínimo del potencial que aparece en (5.10) se alcanza cuando $[X^i, X^j] = 0$. En este caso todas las matrices X^i son simultáneamente diagonalizables. Cualquier matriz hermítica se puede diagonalizar mediante una matriz unitaria, luego existe una transformación (5.1) que diagonaliza todas las matrices a la vez. Los valores propios de las matrices X^i tienen significado físico, se corresponden con la posición de cada una de las N Dp -branas paralelas en la coordenada x^i [4].

$$X^i = \begin{pmatrix} a_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & a_N^i \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Los valores propios de las matrices X^i son reales debido a que son hermíticas. También por ser hermíticas queda garantizada su diagonalización por una matriz unitaria. Como los escalares X^i pertenecen a la representación adjunta de $U(N)$, podemos decir que existe una transformación gauge, dada por la expresión (5.1), que diagonaliza a cada una de las matrices X^i . El hecho que la misma transformación gauge diagonalice a dos matrices X^i, X^j a la vez se verifica si sólo si $[X^i, X^j] = 0$.

⁴Más información sobre T-dualidad se puede encontrar en cualquier texto básico de teoría de cuerdas, como por ejemplo en [5]

6. Formalismo no-abeliano

En el caso no-abeliano disponemos de los campos escalares $X^i(\sigma)$ que pertenecen a la representación adjunta de $U(N)$. Estas matrices en general no van a conmutar lo que plantea dificultades en la generalización de la teoría de Dp -branas a una teoría no-abeliana. Los campos escalares X^i se acoplan en la acción mediante el término potencial, deducido en la ecuación (5.10), y mediante el *pull-back* de las diferentes $(p+1)$ -formas a las que la Dp -brana se acopla. El primer problema surge a considerar el *pull-back* como en el caso abeliano. Como las derivadas parciales ordinarias no transforman en la representación adjunta, tampoco lo va a hacer el *pull-back* $\partial_a X^i$. La solución a este problema consiste en considerar, en vez de derivadas parciales, las derivadas covariantes. Las derivadas covariantes sabemos que transforman bien bajo transformaciones gauge (5.7). El *pull-back* más sencillo que podemos considerar es el de las funciones del espacio-tiempo. Esto nos lleva al estudio de las funciones no-abelianas desarrollado en la sección 6.1. Mientras que en la sección 6.2 introducimos el *pull-back* de formas mediante la derivada covariante. Estos dos puntos son esenciales ya que nos permiten obtener la acción de N Dp -branas coincidentes. Los extremos de las cuerdas abiertas unidas a dichas branas, por ser objetos que viven en el *world-volume*, sus acoplamientos también van a venir determinados por el *pull-back* no-abeliano. La integración de formas en la configuración de N Dp -branas coincidentes con el *pull-back* no-abeliano es resumida en 6.4. Este tipo de integrales son las que aparecen en las acciones no-abelianas.

6.1. Funciones no-abelianas

El *pull-back* de un campo escalar $\Phi(x)$ del espacio-tiempo viene dado por la composición.

$$X^*(\Phi)(\sigma) = (\Phi \circ X)(\sigma) = \Phi(X(\sigma)) \quad (6.1)$$

donde $X(\sigma)$ es el *embedding* de la Dp -brana que está determinado por los escalares $X^i(\sigma)$. Hay que notar que trabajamos con campos escalares que toman valores en el álgebra de Lie $u(N)$. La composición de $\Phi(x)$ con los escalares de *embedding* se realiza sustituyendo la dependencia funcional de Φ en x^i , por la matriz de la dirección ortogonal a la brana correspondiente. Una forma de ver esta operación es a través del desarrollo en serie de Taylor.

$$\Phi(X(\sigma)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_n} \Phi(x)|_{x=0} X^{\mu_1}(\sigma) \cdots X^{\mu_n}(\sigma) \quad (6.2)$$

donde $X^\mu(\sigma) = (\sigma^a, X^i(\sigma))$. Hemos introducido el producto simétrico “.” debido a la simetría de las derivadas parciales⁵. Los elementos del álgebra de Lie se pueden ver como operadores diferenciales de orden 1 que actúan sobre un determinado espacio a través de una representación dada. De la misma forma las funciones no-abelianas $\Phi(X)$ se pueden ver como operadores diferenciales de orden arbitrariamente alto. Esta interpretación los caracteriza como elementos del álgebra envolvente universal $U(u(N))$ del álgebra de Lie $u(N)$.

Dediquemos un momento al estudio del álgebra $U(u(N))$. El álgebra de Lie $u(N)$ es un espacio vectorial y como tal podemos considerar su álgebra de tensores $T(u(N))$. Los elementos de $T(u(N))$ se construyen mediante el producto tensorial⁶: XY . El álgebra envolvente universal consiste en el espacio cociente determinado por la relación de equivalencia

$$XY - YX \sim [X, Y] . \quad (6.4)$$

⁵El producto simétrico se define de la siguiente forma.

$$X^{\mu_1} \cdot X^{\mu_2} \cdots X^{\mu_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} X^{\sigma(\mu_1)} X^{\sigma(\mu_2)} \cdots X^{\sigma(\mu_n)} \quad (6.3)$$

donde S_n es el grupo de permutaciones de n elementos.

⁶Formalmente se utiliza la notación $X \otimes Y$ para el producto tensorial de dos vectores X, Y . La notación que emplearemos consiste en omitir el símbolo \otimes escribiendo simplemente XY

El álgebra $U(u(N))$, al igual que $T(u(N))$, es no-conmutativa. Sin embargo podemos establecer relaciones entre sus elementos mediante el conmutador. Una de las propiedades fundamentales del álgebra envolvente universal es que podemos desarrollar los conmutadores debido a la relación (6.4). Además el producto XY sólo tiene sentido dentro de $U(u(N))$. Las funciones no-abelianas expresadas mediante su desarrollo en serie (6.2) son elementos de $U(u(N))$ pero con sus elemento simetrizados mediante el producto simétrico. Es importante notar que la simetrización se realiza sobre $U(u(N))$, no sobre $T(u(N))$. Si la simetrización se realizara sobre $T(u(N))$ tendríamos el álgebra de tensores simétricos $S(u(N))$, luego cuando tomemos la relación de equivalencia (6.4) se verificaría que $[X, Y] = 0$, lo cuál no es cierto para el caso no-abeliano. Podemos ver que en el caso abeliano ($N = 1$), donde el conmutador se anula, se tiene que $XY \sim YX$. Luego el álgebra $U(u(N))$ sería isomorfa al álgebra de tensores simétricos $S(u(N))$.

Otra propiedad importante del álgebra envolvente universal es que las representaciones del álgebra de Lie $u(N)$ se traducen en representaciones de $U(u(N))$. A partir de ahora consideraremos la representación estandar en la cuál los elementos del álgebra $u(N)$ son vistos como matrices hermíticas ($X = X^\dagger$). De esta forma el producto tensorial de $U(u(N))$ se convierte en el producto usual de matrices. Hay que notar que en general los elementos de $U(u(N))$ no van a ser matrices hermíticas, ya que $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger = YX \neq XY$. Sin embargo, el caso de las funciones no-abelianas el producto simétrico hace que sean hermíticas.

$$[\Phi(X)]^\dagger = \Phi(X)$$

Este resultado no sólo es válido para la representación estandar, sino que se mantiene para cualquier representación unitaria.

La representación adjunta de $u(N)$ se puede extender de forma natural a una representación de $u(N)$ sobre el álgebra envolvente universal $U(u(N))$, denominada de la misma forma por abuso de lenguaje. La actuación se comporta como una derivación de $U(u(N))$. Aplicada a XY tenemos que

$$\delta_\chi(XY) = \delta_\chi(X)Y + X\delta_\chi(Y) = i[\chi, X]Y + Xi[\chi, Y] = i[\chi, XY].$$

La última igualdad se puede comprobar desarrollando el conmutador, lo cuál lo podemos hacer por trabajar en el álgebra envolvente universal. Se puede generalizar esta expresión para el caso del producto de n elementos.

$$\begin{aligned} \delta_\chi(X^{\mu_1} \dots X^{\mu_n}) &= \delta_\chi(X^{\mu_1})X^{\mu_2} \dots X^{\mu_n} + X^{\mu_1} \delta_\chi(X^{\mu_2}) \dots X^{\mu_n} + \dots + X^{\mu_1} X^{\mu_2} \dots \delta_\chi(X^{\mu_n}) = \\ &= \sum_{i=1}^n X^{\mu_1} \dots X^{\mu_{i-1}} \delta_\chi(X^{\mu_i}) X^{\mu_{i+1}} \dots X^{\mu_n} = \\ &= \sum_{i=1}^n X^{\mu_1} \dots X^{\mu_{i-1}} i[\chi, X^{\mu_i}] X^{\mu_{i+1}} \dots X^{\mu_n} = i[\chi, X^{\mu_1} \dots X^{\mu_n}] \end{aligned} \quad (6.5)$$

Cuando generalizamos una función $\Phi(x)$ del espacio-tiempo a una función no-abeliana $\Phi(X)$ mediante el desarrollo en serie de Taylor (6.2), tenemos la simetrización de los elementos de $U(u(N))$. Esta propiedad del desarrollo en serie se puede explotar para obtener una relación que nos permite derivar a la función $\Phi(X)$. A partir de la expresión (6.5) se puede deducir la actuación de la representación adjunta sobre $\Phi(X)$.

$$\begin{aligned} \delta_\chi(\Phi(X)) &= i[\chi, \Phi(X)] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \partial_\mu \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{n-1}} \Phi(x)|_{x=0} X^{\mu_1} \dots X^{\mu_{n-1}} \cdot i[\chi, X^\mu] = \\ &= i\partial_\mu \Phi(X) \cdot [\chi, X^\mu] \end{aligned}$$

donde $\partial_\mu \Phi(X)$ es la función no-abeliana obtenida a partir de la función abeliana $\partial_\mu \Phi(x)$, es decir su *pull-back*. Vemos que la transformación de $\Phi(X)$ depende de su derivada y de la transformación de X^μ de la siguiente forma.

$$\delta_\chi(\Phi(X)) = \partial_\mu \Phi(X) \cdot \delta_\chi X^\mu \quad (6.6)$$

Notar que el producto simétrico “ \cdot ” que aparece proveniente del desarrollo en serie de Taylor. De esta expresión deducimos que la transformación por la representación adjunta de $\Phi(X)$ es una transformación infinitesimal, que sólo depende de su derivada de orden 1. La transformación gauge finita de X^μ viene dada en (5.1), luego las funciones no-abelianas transformarán de la siguiente forma.

$$\Phi(X') = \Phi(UXU^{-1}) = U\Phi(X)U^{-1}$$

Este resultado se deduce directamente del desarrollo en serie de Φ (6.2). En general se puede ver que el conmutador de $\Phi(X)$ con un elemento A del álgebra de Lie, depende sólo del conmutador de A con X^μ y del *pull-back* de la derivada parcial de $\Phi(x)$.

$$i[A, \Phi(X)] = i[A, X^\mu] \cdot \partial_\mu \Phi(X) \quad (6.7)$$

6.1.1. Estructura de álgebra de Lie de las funciones no-abelianas

También podemos calcular el conmutador de dos funciones no-abelianas. Para ello definimos el conmutador de dos monomios de forma que actúen como una derivación en cada uno de sus argumentos.

$$\begin{aligned} [X^{\mu_1} \cdots X^{\mu_n}, X^{\nu_1} \cdots X^{\nu_m}] &= \\ &= \sum_{i=1}^n X^{\mu_1} \cdots X^{\mu_{i-1}} \cdot [X^{\mu_i}, X^{\nu_1} \cdots X^{\nu_m}] \cdot X^{\mu_{i+1}} \cdots X^{\mu_n} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X^{\mu_1} \cdots X^{\mu_{i-1}} \cdot X^{\nu_1} \cdots X^{\nu_{j-1}} \cdot [X^{\mu_i}, X^{\nu_j}] \cdot X^{\nu_{j+1}} \cdots X^{\nu_m} \cdot X^{\mu_{i+1}} \cdots X^{\mu_n} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Esta expresión sólo está bien definida en el caso de considerar el producto simétrico. El nuevo conmutador es antisimétrico si sólo si consideramos la simetrización de los monomios. Además si no tenemos en cuenta el producto simétrico, al desarrollar el primer argumento del conmutador y después el segundo obtenemos un resultado diferente si lo hacemos en orden contrario. El conmutador de dos funciones no-abelianas se puede escribir a partir del desarrollo en serie de Taylor (6.2) de $\Phi_1(X)$ y $\Phi_2(X)$, utilizando (6.8).

$$i[\Phi_1(X), \Phi_2(X)] = i[X^\mu, X^\nu] \cdot \partial_\mu \Phi_1(X) \cdot \partial_\nu \Phi_2(X) \quad (6.9)$$

Este conmutador satisface la identidad de Jacobi, aunque para ello es necesario considerar el producto simétrico. Calculamos primero los conmutadores de tres monomios a partir de (6.8).

$$\begin{aligned}
& [X^{\mu_1} \cdots X^{\mu_n}, [X^{\nu_1} \cdots X^{\nu_m}, X^{\lambda_1} \cdots X^{\lambda_r}]] = \\
& = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r [X^{\mu_1} \cdots X^{\mu_n}, X^{\nu_1} \cdots (j) \cdots X^{\nu_m}] \cdot X^{\lambda_1} \cdots (k) \cdots X^{\lambda_r} \cdot [X^{\nu_j}, X^{\lambda_k}] \\
& + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r X^{\nu_1} \cdots (j) \cdots X^{\nu_m} \cdot [X^{\mu_1} \cdots X^{\mu_n}, X^{\lambda_1} \cdots (k) \cdots X^{\lambda_r}] \cdot [X^{\nu_j}, X^{\lambda_k}] \\
& + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r X^{\nu_1} \cdots (j) \cdots X^{\nu_m} \cdot X^{\lambda_1} \cdots (k) \cdots X^{\lambda_r} \cdot [X^{\mu_1} \cdots X^{\mu_n}, [X^{\nu_j}, X^{\lambda_k}]] = \\
& = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^m X^{\mu_1} \cdots (i) \cdots X^{\mu_n} \cdot X^{\nu_1} \cdots (j)(l) \cdots X^{\nu_m} \cdot \\
& \quad \cdot X^{\lambda_1} \cdots (k) \cdots X^{\lambda_r} \cdot [X^{\mu_i}, X^{\nu_l}] \cdot [X^{\nu_j}, X^{\lambda_k}] + \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r X^{\mu_1} \cdots (i) \cdots X^{\mu_n} \cdot X^{\nu_1} \cdots (j) \cdots X^{\nu_m} \cdot \\
& \quad \cdot X^{\lambda_1} \cdots (k)(l) \cdots X^{\lambda_r} \cdot [X^{\mu_i}, X^{\lambda_l}] \cdot [X^{\nu_j}, X^{\lambda_k}] + \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r X^{\mu_1} \cdots (i) \cdots X^{\mu_n} \cdot X^{\nu_1} \cdots (j) \cdots X^{\nu_m} \cdot \\
& \quad \cdot X^{\lambda_1} \cdots (k) \cdots X^{\lambda_r} \cdot [X^{\mu_i}, [X^{\nu_j}, X^{\lambda_k}]]
\end{aligned}$$

donde los índices entre paréntesis significan están suprimidos de la cadena. Al considerar la suma de las permutaciones cíclicas de los monomios, el tercer término se anula debido a la identidad de Jacobi del álgebra de Lie. Los otros dos se anulan por la antisimetría del conmutador. A partir de esta expresión se demuestra la identidad de Jacobi para los monomios.

$$\begin{aligned}
& [X^{\mu_1} \cdots X^{\mu_n}, [X^{\nu_1} \cdots X^{\nu_m}, X^{\lambda_1} \cdots X^{\lambda_r}]] + \\
& \quad + [X^{\nu_1} \cdots X^{\nu_m}, [X^{\lambda_1} \cdots X^{\lambda_r}, X^{\mu_1} \cdots X^{\mu_n}]] + \\
& \quad + [X^{\lambda_1} \cdots X^{\lambda_r}, [X^{\mu_1} \cdots X^{\mu_n}, X^{\nu_1} \cdots X^{\nu_m}]] = 0
\end{aligned}$$

Las funciones no-abelianas se componen de combinaciones lineales de monómios simétrizados. Luego por linealidad del conmutador tenemos la identidad de Jacobi para funciones no-abelianas.

$$[\Phi_1, [\Phi_2, \Phi_3]] + [\Phi_2, [\Phi_3, \Phi_1]] + [\Phi_3, [\Phi_1, \Phi_2]] = 0$$

Concluimos que las funciones no-abelianas tienen estructura de álgebra de Lie dada por el conmutador (6.9). En general los elementos del álgebra universal envolvente $U(u(N))$ no van a tener estructura de álgebra de Lie, ya que para que el conmutador esté bien definido y se satisfaga la identidad de Jacobi es necesario que sus elementos estén simetrizados.

6.1.2. Derivadas de funciones no-abelianas

Una forma de derivar la función $\Phi(X)$ es extender el álgebra introduciendo los nuevos elementos $\hat{\partial}_\mu$ que satisfacen las siguientes reglas de conmutación.

$$[\hat{\partial}_\mu, X^\nu] = \delta_\mu^\nu \tag{6.10}$$

$$[\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu] = 0 \tag{6.11}$$

La extensión del álgebra de esta forma esta motivada por la técnicas empleadas en la teoría cuántica de campos en espacios no-conmutativos [3]. La derivada parcial de la función no-abeliana $\Phi(X)$ se puede calcular a través de su conmutador con $\hat{\partial}_\mu$ utilizando la relación de conmutación (6.10).

$$[\hat{\partial}_\mu, \Phi(X)] = \partial_\nu \Phi(X) \cdot [\hat{\partial}_\mu, X^\nu] = \partial_\mu \Phi(X) \quad (6.12)$$

Para deducir esta ecuación hemos utilizado también la expresión (6.7). Notar que las derivadas parciales $\hat{\partial}_\mu$ son elementos del álgebra, mientras que las derivadas ∂_μ son las derivadas ordinarias de funciones. En este caso $\partial_\mu \Phi(X)$, en una notación más precisa, representa el *pull-back* de la derivada del campo escalar $\Phi(x)$, es decir, $X^*(\partial_\mu \Phi(x))$. La ecuación anterior establece una relación directa entre los elementos del álgebra $\hat{\partial}_\mu$ y las derivadas parciales ordinarias ∂_μ . El hecho de que dos derivadas parciales conmuten está reflejado en la regla de conmutación (6.11). Esto lo podemos ver escribiendo la siguiente identidad de Jacobi.

$$[\hat{\partial}_\mu, [\hat{\partial}_\nu, X^\lambda]] + [\hat{\partial}_\nu, [X^\lambda, \hat{\partial}_\mu]] + [X^\lambda, [\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu]] = 0$$

Se puede verificar esta expresión a partir de las reglas de conmutación (6.10) y (6.11). Utilizando la definición del conmutador de un elemento del álgebra universal envolvente (6.5), se puede verificar la misma identidad para $\Phi(X)$.

$$[\hat{\partial}_\mu, [\hat{\partial}_\nu, \Phi(X)]] + [\hat{\partial}_\nu, [\Phi(X), \hat{\partial}_\mu]] + [\Phi(X), [\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu]] = 0$$

El último término que aparece se anula debido a la regla de conmutación (6.11). De aquí se deduce que las derivadas parciales conmutan.

$$[\hat{\partial}_\mu, [\hat{\partial}_\nu, \Phi(X)]] = [\hat{\partial}_\nu, [\hat{\partial}_\mu, \Phi(X)]]$$

o equivalentemente utilizando la expresión (6.12).

$$\partial_\mu \partial_\nu \Phi(X) = \partial_\nu \partial_\mu \Phi(X)$$

Vemos que la forma de derivar funciones no-abelianas que hemos introducido es compatible con la simetría de las derivadas parciales de las funciones abelianas. Hay que notar que la expresión (6.12) sólo se aplica a funciones no-abelianas de la forma (6.2), donde sus elementos están simetrizados. Otra propiedad de la derivada $\hat{\partial}_\mu$ es que satisface la regla de *Leibniz* para el conmutador de dos funciones no-abelianas. Empleando una de la identidades de Jacobi obtenemos lo siguiente.

$$[\hat{\partial}_\lambda, [X^\mu, X^\nu]] + [X^\mu, [X^\nu, \hat{\partial}_\lambda]] + [X^\nu, [\hat{\partial}_\lambda, X^\mu]] = 0$$

Utilizando la regla de conmutación (6.10) vemos que los dos últimos términos del primer miembro se anulan.

$$[\hat{\partial}_\lambda, [X^\mu, X^\nu]] = 0 \quad (6.13)$$

Ahora calculamos el conmutador de $\hat{\partial}_\mu$ con el conmutador de dos funciones no-abelianas dado por la ecuación (6.9).

$$\begin{aligned} [\hat{\partial}_\mu, [\Phi_1(X), \Phi_2(X)]] &= [\hat{\partial}_\mu, [X^\nu, X^\lambda]] \cdot \partial_\nu \Phi_1(X) \cdot \partial_\lambda \Phi_2(X) \\ &\quad + [X^\nu, X^\lambda] \cdot \partial_\mu \partial_\nu \Phi_1(X) \cdot \partial_\lambda \Phi_2(X) + [X^\nu, X^\lambda] \cdot \partial_\nu \Phi_1(X) \cdot \partial_\mu \partial_\lambda \Phi_2(X) \end{aligned}$$

donde hemos empleado la expresión (6.12). El primer término del segundo miembro se anula debido a (6.13) con lo que obtenemos lo siguiente.

$$[\hat{\partial}_\mu, [\Phi_1(X), \Phi_2(X)]] = [[\hat{\partial}_\mu, \Phi_1(X)], \Phi_2(X)] + [\Phi_1(X), [\hat{\partial}_\mu, \Phi_2(X)]]$$

Obtenemos una expresión que representa la regla de *Leibniz* para el conmutador de dos funciones no-abelianas.

Tambien podemos calcular la derivada covariante de una función no-abeliana. La derivada parcial de las coordenadas del *world-volume* ∂_a satisface la regla de composición de funciones de la siguiente forma.

$$\partial_a \Phi(X(\sigma)) = \partial_\mu \Phi(X(\sigma)) \cdot \partial_a X^\mu(\sigma)$$

Esta ecuación se puede verificar a partir del desarrollo en serie de $\Phi(X)$ (6.2). Al considerar derivadas parciales esta expresión no va a transformar en la representación adjunta. Empleando la expresión (6.7) se comprueba que una expresión análoga se satisface en el caso de la derivada covariante.

$$D_a \Phi(X(\sigma)) = \partial_\mu \Phi(X(\sigma)) \cdot D_a X^\mu(\sigma) \quad (6.14)$$

La derivada covariante de una función no-abeliana $\Phi(X)$ si va a transformar en la representación adjunta.

6.1.3. Interpretación física

Una de las propiedades de las matrices hermíticas es que son diagonalizables mediante transformaciones unitarias. Este hecho nos lleva a concluir que para toda función no-abeliana existe una transformación gauge $U(N)$ que la diagonaliza. Además por ser hermíticas los valores propios van a ser números reales. La interpretación física de los valores propios es análoga a la que dabamos para los escalares $X^\mu(\sigma)$ en (5.11). Cada valor propio se correspondería con el valor de la función abeliana $\Phi(x)$ en cada una de las Dp -branas. Para ver este hecho con más detalle podemos suponer que todos los escalares X^μ conmutan, es decir, $[X^\mu, X^\nu] = 0$ para todo índice μ, ν . Bajo estas circunstancias podemos diagonalizar todos ellos a la vez. Si denotamos por X_1^μ, \dots, X_N^μ cada uno de los valores propios se puede comprobar que la función $\Phi(X)$ se puede escribir de la siguiente forma.

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} \Phi(x_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \Phi(x_N) \end{pmatrix}$$

Como cada valor propio se corresponde con la posición de cada una de las Dp -branas coincidentes, tenemos que los valores propios de $\Phi(X)$ son la función abeliana $\Phi(x)$ evaluada en cada una de las Dp -branas. Una interpretación análoga la podemos dar en el caso de que los escalares no conmuten, pero en este caso cada valor propio de $\Phi(X)$ va a depender, en general, de los valores propios de todos los escalares.

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1, \dots, x_N) & & \\ & \ddots & \\ & & \Phi_N(x_1, \dots, x_N) \end{pmatrix}$$

En este caso el valor de la función abeliana $\Phi(x)$ en una Dp -brana depende, como es normal, de la posición de la brana, pero además obtenemos que depende de la posición del resto de las Dp -branas.

6.2. Pull-back de formas

En el caso abeliano el *pull-back* de una forma viene dado, además de por los escalares de *embedding* $X^\mu(\sigma)$, por las derivadas $\partial_a X^\mu(\sigma)$. Si consideramos el caso no-abeliano las derivadas parciales ordinarias no transforman en la representación adjunta, y por tanto no son útiles para construir cantidades invariantes. En su lugar se emplean las derivadas covariantes definidas en (5.4). Estas nuevas derivadas transforman en la representación adjunta. El *pull-back* de una 1-forma A en el caso no-abeliano viene dado por la siguiente expresión.

$$X^*(A)(\sigma) = A_\mu(X(\sigma)) \cdot D_a X^\mu(\sigma) d\sigma^a \quad (6.15)$$

Las D funciones $A_\mu(x)$ que representan a la 1-forma al hacer el *pull-back* se convierten en funciones no-abelianas. Como vimos en la ecuación (6.6) las funciones no-abelianas transforman en la representación adjunta. Al considerar su producto (simétrico) con la derivada covariante el resultado va a ser una cantidad que transforma en la adjunta.

$$\begin{aligned} (UXU^{-1})^*(A) &= A_\mu(UXU^{-1}) \cdot D_a(UX^\mu U^{-1}) d\sigma^a = \\ &= UA_\mu(X)U^{-1} \cdot UD_aX^\mu U^{-1} d\sigma^a = \\ &= U[A_\mu(X) \cdot D_aX^\mu d\sigma^a]U^{-1} = U[X^*(A)]U^{-1} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Cuando consideramos una $(p+1)$ -forma A_p el *pull-back* es una generalización de la expresión (6.15).

$$X^*(A_p)(\sigma) = A_{\mu_0 \dots \mu_p}(X(\sigma)) \cdot D_{a_0}X^{\mu_0}(\sigma) \cdot \dots \cdot D_{a_p}X^{\mu_p}(\sigma) d\sigma^{a_0} \wedge \dots \wedge d\sigma^{a_p} \quad (6.17)$$

Es sencillo ver que el *pull-back* de la forma A_p va a transformar en la representación adjunta mediante un cálculo similar al de la ecuación (6.16).

$$(UXU^{-1})^*(A_p) = U(X^*(A_p))U^{-1} \quad (6.18)$$

Esta expresión es válida para formas de cualquier rango, es decir, para $p = 0, \dots, d$.

6.3. Propiedades del *pull-back*

Las propiedades del *pull-back*, tanto de funciones como de formas se resumen a continuación.

- (1) Linealidad: $X^*(A_p + B_q) = X^*(A_p) + X^*(B_q)$; $X^*(\lambda A_p) = \lambda X^*(A_p)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)
- (2) Compatibilidad con el producto exterior: $X^*(A_p \wedge B_q) = X^*(A_p) \wedge X^*(B_q)$
- (3) Compatibilidad con el producto de funciones: $X^*(\Phi_1 \Phi_2) = X^*(\Phi_1) \cdot X^*(\Phi_2)$

donde A_p es una p -forma, B_q es una q -forma y $\Phi_1(x), \Phi_2(x)$ son funciones abelianas. Todas estas propiedades se pueden comprobar directamente de las definiciones (6.17), (6.1) y (6.2). Hay que notar la necesidad del producto simétrico de las definiciones para que se verifiquen las propiedades.

6.4. Integración de formas no-abelianas

A la hora de integrar formas no-abelianas necesitamos incluir nuevos elementos que no aparecen en la integración de forma abelianas. El principal problema reside en que los escalares de *embedding* toman valores en un álgebra de Lie.

$$\begin{aligned} X &: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{M} \\ \sigma &\longmapsto X(\sigma) \end{aligned}$$

donde \mathcal{B} representa la Dp -brana con coordenadas σ^a y \mathcal{M} es el espacio-tiempo. La integración de $(p+1)$ -formas no-abelianas consiste en una generalización de la expresión (A.1) que aparece en el apéndice A.

$$\int_{X(\mathcal{B})} A = \int_{\mathcal{B}} \text{Tr}[X^*(A)] \quad (6.19)$$

donde Tr es la traza en la representación estándar, es decir, la traza usual de las matrices de $u(N)$. Notar que al ser el *pull-back* no-abeliano, el segundo miembro de esta ecuación se convierte en un escalar sólo si tomamos la traza, mientras que el integrando del primer miembro tiene un carácter abeliano. La parte no-abeliana de la primera integral está en la región de integración $X(\mathcal{B})$. Tomamos esta expresión como la definición de la integración de una $(p+1)$ -forma en la región determinada por N Dp -branas coincidentes. La invarianza gauge de la integral se demuestra fácilmente a partir de la expresión (6.18).

7. Cambios de coordenadas no-abelianos

Una posible forma de realizar cambios de coordenadas en espacios cuyos escalares de *embedding* son no-abelianos es desarrollada en esta sección. En particular analizamos los cambios de coordenadas de las funciones no-abelianas y de la derivada covariante, y por tanto del *pull-back* no-abeliano. Un resultado importante es que el conmutador de dos escalares $[X^\mu, X^\nu]$, un objeto puramente no-abeliano, va a transformar de forma covariante bajo cambios de coordenadas.

7.1. Funciones no-abelianas

El caracter no-abeliano solamente reside en la configuración de las Dp -branas coincidentes, mientras que el espacio-tiempo de fondo es abeliano, luego podemos aplicar los cambios de coordenadas usuales al espacio-tiempo. Los cambios de coordenados vienen dados por una aplicación diferenciable y con inversa diferenciable (difeomorfismo) $x'(x)$. Los campos escalares transforman simplemente mediante la composición $\Phi(x) = \Phi' \circ x' = \Phi'(x'(x))$. Definimos los nuevos escalares de *embedding* después de realizar el cambio de coordenadas mediante el *pull-back*.

$$X'^\mu(\sigma) = X^*(x'^\mu)(\sigma) = (x'^\mu \circ X)(\sigma) = x'^\mu(X(\sigma)) \quad (7.1)$$

Esta definición nos permite ver que el *pull-back* aplicado a un campo escalar transforma de forma covariante.

$$X^*(\Phi) = \Phi \circ X = \Phi' \circ x' \circ X = \Phi' \circ X' = X'^*(\Phi')$$

donde hemos utilizado la propiedad asociativa de la composición de funciones. Obtenemos que el *pull-back* de un campo escalar es invariante bajo cambios de coordenadas. Este resultado se aplica tanto al *pull-back* abeliano como el no-abeliano. El hecho de que el *pull-back* sea invariante esta relacionado con que los cambios de coordenadas en el espacio-tiempo de fondo no afectan al *world-volume*. Esta propiedad se tiene que mantener también para el *pull-back* de formas de cualquier rango.

7.2. *pull-back* de formas

Las formas transforman mediante la transformación inducida en el espacio cotangente. Si consideramos un sistema de coordenadas la transformación de una 1-forma es la siguiente.

$$A_\mu(x) = A'_\alpha(x'(x)) \frac{\partial x'^\alpha(x)}{\partial x^\mu} \quad (7.2)$$

Este es el cambio de coordenadas usual en el espacio-tiempo de fondo. Para obtener las transformaciones en el caso no-abeliano tomamos el *pull-back* no-abeliano de esta expresión, teniendo en cuenta la definición (7.1).

$$A_\mu(X(\sigma)) \cdot D_a X^\mu = A'_\alpha(X'(\sigma)) \cdot \partial_\mu X'^\alpha(X(\sigma)) \cdot D_a X^\mu$$

Si omitimos las derivadas covariantes es posible escribir la transformación de un 1-forma no-abeliana bajo cambios de coordenadas.

$$A_\mu(X) = A'_\alpha(X'(X)) \cdot \partial_\mu X'^\alpha(X) \quad (7.3)$$

Esta es la generalización no-abeliana de la ecuación (7.2). Teniendo en cuenta la ecuación (6.14) comprobamos que el *pull-back* de una 1-forma es un objeto invariante bajo cambios de coordenadas.

$$X^*(A) = A_\mu(X(\sigma)) \cdot D_a X^\mu = A'_\alpha(X'(\sigma)) \cdot D_a X'^\alpha(\sigma) = X'^*(A')$$

De forma análoga se puede comprobar que el *pull-back* de una forma de rango arbitrario también es invariante bajo cambios de coordenadas. En el caso de una $(p+1)$ -forma A_p tenemos que

$$\begin{aligned} X^*(A_p) &= A_{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_p}(X) \cdot D_{a_0} X^{\mu_0} \cdot D_{a_1} X^{\mu_1} \cdot \dots \cdot D_{a_p} X^{\mu_p} = \\ &= A'_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p}(X') \cdot \partial_{\mu_0} X'^{\alpha_0} \cdot \partial_{\mu_1} X'^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \partial_{\mu_p} X'^{\alpha_p} \cdot D_{a_0} X^{\mu_0} \cdot D_{a_1} X^{\mu_1} \cdot \dots \cdot D_{a_p} X^{\mu_p} = \\ &= A'_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p}(X') \cdot D_{a_0} X'^{\alpha_0} \cdot D_{a_1} X'^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot D_{a_p} X'^{\alpha_p} = X'^*(A'_p). \end{aligned}$$

Luego la transformación del *pull-back* no-abeliano es covariante bajo cambios de coordenadas independientemente de si la aplicamos a funciones no-abelianas a formas de cualquier rango.

7.3. Conmutador

Los cambios de coordenadas también se pueden aplicar al conmutador de dos escalares. Se puede ver que $\theta^{\mu\nu} = i[X^\mu, X^\nu]$ transforma como un tensor antisimétrico 2-contravariante. Por la ecuación (6.9) se verifica que

$$\theta'^{\alpha\beta} = \theta^{\mu\nu} \cdot \partial_\mu X'^\alpha \cdot \partial_\nu X'^\beta . \quad (7.4)$$

Por esta regla de transformación concluimos que θ es un tensor. Si tenemos dos 1-formas A y B la cantidad $\theta(A, B)$ es un escalar.

$$\theta'(A', B') = \theta'^{\alpha\beta} \cdot A'_\alpha \cdot B'_\beta = \theta^{\mu\nu} \cdot \partial_\mu X'^\alpha \cdot \partial_\nu X'^\beta \cdot A'_\alpha \cdot B'_\beta = \theta^{\mu\nu} \cdot A_\mu \cdot B_\nu = \theta(A, B)$$

Vemos que es invariante bajo cambios de coordenadas utilizando (7.3) y (7.4). El tensor θ sólo aparece cuando consideramos el formalismo no-abeliano, no hay un objeto abeliano que sea análogo.

7.4. Formalismo de matrices

Vamos a desarrollar el formalismo de matrices que nos permitirá hacer cálculos más fácilmente. Los cambios de coordenadas (7.3) y (7.4) se pueden traducir al lenguaje de matrices.

$$A = \Lambda^T \cdot A' \quad (7.5)$$

$$\theta' = \Lambda \cdot \theta \cdot \Lambda^T$$

donde A y A' son los vectores columna dados por las componentes A_μ y A'_α respectivamente. θ es la matriz dada por las componentes $\theta^{\mu\nu}$ y Λ es la matrices cuyas componentes son

$$\Lambda^\alpha{}_\mu = \partial_\mu X'^\alpha .$$

Esta matriz viene determinada por el cambio de coordenadas. En el caso no-abeliano las componentes de la matrices definidas son elementos del álgebra envolvente universal, más concretamente funciones no abelianas definidas en (6.2). En la práctica emplearemos representaciones (lineales y finito-dimensionales) de dicho álgebra, con lo que las componentes de las matrices se convierten a su vez en matrices pertenecientes a la representación. Debido a que consideramos las funciones no-abelianas como elementos simétricos del álgebra envolvente universal, tenemos que las entradas de las matrices así definidas pertenecen a un anillo conmutativo. De forma que los elementos del álgebra representados van a tener la estructura de un anillo conmutativo R . Denotamos por $\mathbb{M}_n(R)$ a las matrices cuadradas de orden n con entradas en el anillo R . Una aplicación directa de este formalismo es el cálculo de la matriz inversa. Por la teoría de matrices sabemos que la inversa de una matriz existe si sólo si el determinante es un elemento invertible dentro de dicho anillo. Por otra parte, en el caso de representaciones, un elemento es invertible si su determinante es distinto de cero. Podemos entonces establecer que las matrices $\mathbb{M}_n(R)$ son invertibles si satisfacen la siguiente condición.

$$|\det(\Lambda)| \neq 0 \quad (7.6)$$

donde $\Lambda \in \mathbb{M}_n(R)$. El determinante de dicha matriz lo denotamos por \det , mientras que el determinante en la representación la denotamos por $|\cdot|$. La inversa de las matrices $\mathbb{M}_n(R)$ se calcula de la forma usual.

$$\Lambda^{-1} = (\det(\Lambda))^{-1} \text{adj}(\Lambda)^T \quad (7.7)$$

La ecuación (7.6) se tiene que verificar para que exista el elemento $(\det(\Lambda))^{-1}$. Ahora podemos aplicar estos criterios al cálculo del cambio de coordenadas inverso.

Debido a que el cambio de coordenadas $x'(x)$ es un difeomorfismo existe el inverso $x(x')$. La propiedad que tiene es que al componer ambos difeomorfismos tenemos la identidad: $x'(x(x')) = x'$ y $x(x'(x)) = x$. Podemos aplicar el *pull-back* X'^* al cambio de coordenadas inverso $x(x')$.

$$X'^*(x^\mu) = (x^\mu \circ X')(\sigma) = x^\mu(X'(\sigma))$$

Los escalares X^μ que obtenemos son los mismos que los escalares originales de los que partíamos para hacer el cambio de coordenadas. Esto garantiza que el cambio de coordenadas inverso este realmente bien definido.

$$X = x \circ X' = x \circ x' \circ X = \text{id} \circ X = X$$

donde hemos utilizado la definición de los escalares X'^μ dada en (7.1) y que $x \circ x' = \text{id}$. En caso de las formas empleábamos también las derivadas de funciones no-abelianas $\Lambda^\alpha{}_\mu = \partial_\mu X'^\alpha$. Ahora consideremos las mismas derivadas para el caso del cambio de coordenadas inverso $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha = \partial'_\alpha X^\mu$. Lo que se esperaría es que al aplicar ambos cambios de coordenadas obtuviéramos la identidad. Esto se puede comprobar teniendo en cuenta las propiedades de las derivadas parciales desarrolladas en la sección 6.1.

$$(\Lambda^{-1})^\nu{}_\alpha \cdot \Lambda^\alpha{}_\mu = \partial'_\alpha X^\nu \cdot \partial_\mu X'^\alpha = \partial'_\alpha X^\nu \cdot [\hat{\partial}_\mu, X'^\alpha] = [\hat{\partial}_\mu, X^\nu] = \delta_\mu^\nu \quad (7.8)$$

donde δ_μ^ν es la delta de *Kronecker*. Las ecuaciones utilizadas para este desarrollo son (6.12), (6.7) y (6.10). Esta ecuación se puede trasladar al lenguaje de matrices.

$$\Lambda^{-1} \cdot \Lambda = \text{Id}$$

donde Id es formalmente la matriz identidad, aunque tenemos que tener en cuenta una sutileza. El miembro de la derecha de (7.8) es un elemento del centro del álgebra envolvente universal, es decir, conmuta con todos los elementos del álgebra. Por el Lemma de *Schur*, si consideramos representaciones irreducibles, es un elemento proporcional a la identidad. Sin pérdida de generalidad podemos considerar que es la identidad. En este caso tenemos que el miembro de la derecha es la identidad vista como la matriz cuyas componentes vienen dadas por los índices μ, ν . La identidad Id en el caso de representaciones irreducibles tiene la siguiente forma.

$$\text{Id} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

donde $\mathbb{1}$ denota la identidad de la representación irreducible que estemos considerando. Esta expresión para la identidad es solamente válida para representaciones irreducibles. En este caso podemos concluir que la matriz inversa que aparece en la ecuación (7.8) está bien definida, y que su cálculo se puede realizar mediante la ecuación (7.7). La representación que utilizamos en la teoría de Dp -branas es la representación estandar del álgebra de Lie $u(N)$, donde sus elementos vienen dados por las matrices cuadradas de orden N que son además hermiticas. Podemos aplicar el formalismo de la matriz inversa desarrollado en esta sección ya que se trata de una representación irreducible. A partir de la matriz inversa podemos invertir la transformación de una 1-forma A (7.5) y escribirla de una forma más apropiada para realizar cálculos.

$$A' = (\Lambda^{-1})^T A$$

8. Transformación NS-NS no-abeliana

La generalización no-abeliana de las transformaciones gauge NS-NS de los campos del *world-volume* se estudiará en esta sección. Estas transformaciones son características del campo B , que aparece acoplado a las cuerdas. El campo B vive en el espacio-tiempo de fondo y no dentro del *world-volume* de las D-branas. Sin embargo, los campos del *world-volume* van a transformarse bajo transformaciones NS-NS al exigir la invarianza gauge de la acción de las cuerdas abiertas con extremos en la D-brana.

8.1. Acción invariante bajo transformaciones NS-NS

En esta sección construiremos la acción de las cuerdas abiertas invariante bajo transformaciones gauge no-abelianas. Como consecuencia obtendremos la generalización no-abeliana de la transformación del vector gauge V bajo transformaciones NS-NS. La invarianza gauge en el caso abeliano de cuerdas cargadas bajo el campo B queda demostrada en la sección 4. La generalización no-abeliana requiere la introducción de nuevos elementos. La modificación más importante es la de la integración de formas en el caso no-abeliano (6.19). Primero consideramos el acoplamiento de una cuerda abierta a la 2-forma B .

$$S = \int_W B \quad (8.1)$$

La transformación gauge consiste en modificar el campo B mediante la diferencial de una 1-forma Σ .

$$B \longrightarrow B' = B + d\Sigma \quad (8.2)$$

La variación gauge de la acción (8.1) se puede calcular utilizando el teorema de *Stokes*.

$$S' = \int_W B' = \int_W B + \int_W d\Sigma = \int_W B + \int_{\partial W} \Sigma$$

La última integral se realiza en la frontera del *world-sheet* ∂W . En el caso de N Dp-branas coincidentes esta región reside en el *world-volume* no-abeliano determinado por los escalares de *embedding* $X^\mu(\sigma)$. Si consideramos cuerdas que se extienden hacia el infinito en ambos sentidos de la dirección temporal, podemos sustituir la región de integración ∂W por $\gamma_2 - \gamma_1$, donde γ_1 y γ_2 son las trayectorias que describen los extremos de la cuerda abierta. La variación gauge del acoplamiento de la cuerda abierta con el campo B se puede escribir de la siguiente forma.

$$\delta S = \int_{\partial W} \Sigma = \int_{\gamma_2 - \gamma_1} \text{Tr}[X^*(\Sigma)]$$

Tomamos la traza ya que consideramos un *pull-back* no-abeliano. Las trayectorias γ_1 y γ_2 son curvas que viven en las N Dp-branas coincidentes, por esa razón empleamos el *pull-back* no-abeliano de la brana. Las curvas las podemos parametrizar por las funciones $\sigma_1^a(\tau)$ y $\sigma_2^a(\tau)$ respectivamente y escribir explícitamente la integral.

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\gamma_2 - \gamma_1} \text{Tr}[\Sigma_\mu(X(\sigma)) \cdot D_a X^\mu(\sigma)] d\sigma^a = \\ &= \int \text{Tr}[\Sigma_\mu(X(\sigma(\tau))) \cdot D_a X^\mu(\sigma(\tau))] \left(\frac{d\sigma_2^a(\tau)}{d\tau} - \frac{d\sigma_1^a(\tau)}{d\tau} \right) d\tau \quad (8.3) \end{aligned}$$

Para cuerdas cerradas esta integral se anula debido a que $\sigma_1(\tau) = \sigma_2(\tau)$. Sin embargo para cuerdas abiertas esta integral puede ser distinta de cero, luego la acción no va a ser invariante. Hay que destacar que la variación de la acción es un acoplamiento de una 1-forma, que vive en el *world-volume* de las Dp-branas, con las trayectorias de los extremos de la cuerda abierta γ_1, γ_2 . En nuestra configuración de Dp-branas ya tenemos un acoplamiento de este tipo dado por el campo vectorial V .

$$\int_\gamma \text{Tr}[V]$$

Para construir una acción invariante al acoplamiento del campo B con la cuerda abierta le añadimos los acoplamiento en el vector V con sus extremos.

$$S = \int_W B + \int_{\gamma_2-\gamma_1} \text{Tr}[V] \quad (8.4)$$

Observando la ecuación (8.3) vemos que esta acción es invariante si consideramos la siguiente variación de V .

$$V \longrightarrow V' = V - X^*(\Sigma) \quad (8.5)$$

Bajo las transformaciones (8.2) y (8.5) la acción (8.4) transforma de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} S' &= \int_W B + \int_{\gamma_2-\gamma_1} \text{Tr}[V] + \int_{\gamma_2-\gamma_1} \text{Tr}[X^*(\Sigma)] - \int_{\gamma_2-\gamma_1} \text{Tr}[X^*(\Sigma)] = \\ &= \int_W B + \int_{\gamma_2-\gamma_1} \text{Tr}[V] = S \end{aligned}$$

Luego concluimos que la acción (8.4) es invariante bajo la transformación gauge de B . Para conseguir la invarianza hemos tenido que asumir que V transforma según la expresión (8.5). Añadiendo además la transformación gauge $U(N)$ (5.5) tenemos la transformación más general de V .

$$\delta V_a = D_a \chi - \Sigma_\mu \cdot D_a X^\mu \quad (8.6)$$

donde hemos escrito explícitamente el *pull-back* de Σ . El primer término corresponde a la variación gauge $U(N)$ de V . Esta transformación deja invariante la acción (8.4) como se ve en la expresión (5.8).

8.2. Transformación NS-NS de los escalares de *embedding*

La transformación gauge del campo B induce una transformación en el campo V para conseguir la invarianza de la acción no-abeliana de las cuerdas abiertas (8.4). Esto es cierto en el caso abeliano y no-abeliano. Sin embargo, en el caso no-abeliano se induce también una transformación de los escalares de *embedding* $X^\mu(\sigma)$. La deducción de esta nueva transformación se realiza mediante reducción dimensional de la teoría gauge no-abeliana, técnica desarrollada en la sección 5.3. La reducción dimensional aplicada a las Dp -branas transforma una componente de del vector V_a en un nuevo escalar X^i . Si aplicamos la reducción dimensional en la dirección x tenemos la siguiente transformación de los campos del *world-volume* de la Dp -brana.

$$V_x \longleftrightarrow X^x \quad (8.7)$$

Esta misma transformación aplicada a la variación de V_a , dada en (8.6), nos induce una nueva transformación de X^μ [1].

$$\hat{\delta}_\Sigma X^\mu = -i \Sigma_\nu(X) \cdot [X^\nu, X^\mu] \quad (8.8)$$

Esta transformación proviene de aplicar la transformación (8.7) al *pull-back* de Σ que aparece en la variación de V , en particular al conmutador de la derivada covariante. Esto explica porque en el caso abeliano no aparece esta transformación de X^μ . Podemos interpretar que el campo vectorial V también transforma de la misma forma que X^μ si desarrollamos las derivadas covariantes del *pull-back* en (8.6).

$$\delta V_a = i[\chi, V_a] - i \Sigma_\mu \cdot [X^\mu, V_a] + \partial_a \chi - \Sigma_a$$

donde $\Sigma_a = \Sigma_\mu \cdot \partial_a X^\mu$ es el *pull-back* (no-abeliano) de la transformación abeliana (4.5). El primer término que aparece es la transformación gauge $U(N)$ en la representación adjunta de V . El segundo término que aparece es la transformación gauge NS-NS de V , análoga a la de los escalares. De hecho este es el término al que se aplica la reducción dimensional para obtener (8.8). Los otros dos términos que aparecen son los que impiden que V transforme de forma covariante bajo $U(N)$ y NS-NS. El tercer término permite que la derivada covariante transforme en la representación

adjunta con respecto a las transformaciones gauge $U(N)$. El cuarto término hace que la acción (8.4) sea invariante bajo la transformación gauge del campo B . Vemos que los dos campos del *world-volumen*, los escalares X^μ y el campo vectorial V , transforman bajo esta nueva transformación. Podemos generalizar esta nueva transformación a para un elemento del álgebra $u(N)$.

$$\hat{\delta}_\Sigma A = -i\Sigma_\nu(X) \cdot [X^\nu, A], \quad (8.9)$$

donde A es un elemento del álgebra de Lie $u(N)$ que transforma de forma covariante bajo transformaciones gauge NS-NS. Como veremos más adelante existen elementos del álgebra, como la derivada covariante y el conmutador, que no transforman de forma covariante. Ejemplos de transformaciones NS-NS para elementos generales del álgebra se verán en la sección 8.7.

El objetivo de esta sección es el estudio de la transformación NS-NS (8.9) de un elemento del álgebra A que transforma de forma covariante. En el caso particular cuando $A = X^\mu$, deducimos la transformación de las funciones no-abelianas, de la derivada covariante de X^μ y del conmutador $[X^\mu, X^\nu]$. Veremos que la derivada covariante y el conmutador no transformarán de forma covariante bajo transformaciones gauge NS-NS. También observaremos una relación importante entre las transformaciones NS-NS y las transformaciones gauge $U(N)$. Esta relación se manifiesta de forma notoria cuando calculamos el álgebra de transformaciones NS-NS. Por último, discutiremos los aspectos generales este álgebra verificando que se satisface la identidad de Jacobi. Para realizar todos estos cálculos vamos a establecer una serie de propiedades básicas que satisface la transformación NS-NS.

Las propiedades fundamentales de la transformación NS-NS (8.9) son las siguientes:

- (1) Linealidad en Σ : $\hat{\delta}_{\Sigma^1 + \Sigma^2} = \hat{\delta}_{\Sigma^1} + \hat{\delta}_{\Sigma^2}$; $\hat{\delta}_{\lambda\Sigma} = \lambda\hat{\delta}_\Sigma$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)
- (2) $\hat{\delta}_0 = 0$
- (3) Linealidad en A : $\hat{\delta}_\Sigma(A + B) = \hat{\delta}_\Sigma A + \hat{\delta}_\Sigma B$; $\hat{\delta}_\Sigma(\lambda A) = \lambda\hat{\delta}_\Sigma A$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)
- (4) *Leibniz*: $\hat{\delta}_\Sigma(AB) = \hat{\delta}_\Sigma(A)B + A\hat{\delta}_\Sigma(B)$

Las propiedades (1), (2) y (3) se pueden deducir fácilmente de (8.9). La regla de *Leibniz* (propiedad (4)) se puede deducir considerando que la transformación NS-NS es de primer orden. Suponemos la transformación de A de la forma $A' = A + \hat{\delta}_\Sigma A$ y la de B de forma análoga.

$$A'B' = AB + \hat{\delta}_\Sigma(A)B + A\hat{\delta}_\Sigma(B)$$

donde hemos despreciado los términos de segundo orden. Identificando los dos últimos términos como la variación NS-NS del producto, obtenemos que se verifica la regla de *Leibniz*.

8.3. Transformación NS-NS de funciones no-abelianas

Una de las propiedades del producto simétrico es que transforma covariantemente con respecto a las transformaciones NS-NS. Si consideramos dos elementos del álgebra de Lie A y B podemos construir un elemento simétrico del álgebra envolvente universal a través del producto simétrico. La transformación NS-NS del producto de A y B se puede escribir de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_\Sigma(A \cdot B) &= \hat{\delta}_\Sigma(A) \cdot B + A \cdot \hat{\delta}_\Sigma(B) = -i\Sigma_\mu \cdot [X^\mu, A] \cdot B - iA \cdot \Sigma_\mu \cdot [X^\mu, B] = \\ &= -i\Sigma_\mu \cdot [X^\mu, A] \cdot B - i\Sigma_\mu \cdot A \cdot [X^\mu, B] = -i\Sigma_\mu \cdot [X^\mu, A \cdot B] \end{aligned} \quad (8.10)$$

Luego el producto simétrico de A y B transforma de forma covariante. Se puede realizar la misma operación con el producto simétrico de n elementos del álgebra de Lie A_1, \dots, A_n .

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}_\Sigma(A_1 \cdots A_n) &= \sum_{i=1}^n A_1 \cdots A_{i-1} \cdot \hat{\delta}_\Sigma(A_i) \cdot A_{i+1} \cdots A_n = \\
&= \hat{\delta}_\Sigma(A_1) \cdots A_n + \dots + A_1 \cdots \hat{\delta}_\Sigma(A_n) = \\
&= -i\Sigma_\mu \cdot [X^\mu, A_1] \cdot A_2 \cdots A_n + \dots + A_1 \cdots \Sigma_\mu \cdot [X^\mu, A_n] = \\
&= -i\Sigma_\mu \cdot [X^\mu, A_1] \cdot A_2 \cdots A_n + \dots + \Sigma_\mu \cdot A_1 \cdots [X^\mu, A_n] = \\
&= -i\Sigma_\mu \cdot [X^\mu, A_1 \cdots A_n]
\end{aligned}$$

Vemos que el producto simétrico de n elementos también va a ser covariante bajo transformaciones NS-NS. Como las funciones no-abelianas son combinaciones lineales de monomios de este tipo van a transformar de forma covariante.

$$\hat{\delta}_\Sigma \Phi(X) = -i\Sigma_\mu \cdot [X^\mu, \Phi(X)]$$

También se puede calcular la transformación NS-NS de una función no-abeliana $\Phi(X)$ a partir de su desarrollo en serie (6.2).

$$\hat{\delta}_\Sigma \Phi(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \partial_\mu \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_{n-1}} \Phi(x) \Big|_{x=0} X^{\mu_1} \cdots X^{\mu_n} \cdot \hat{\delta}_\Sigma(X^\mu)$$

Podemos poner esta expresión en función del *pull-back* de la derivada de $\Phi(x)$.

$$\hat{\delta}_\Sigma \Phi(X) = \partial_\mu \Phi(X) \cdot \hat{\delta}_\Sigma X^\mu$$

Esta expresión nos dice que la transformación NS-NS, actuando sobre funciones no-abelianas, es una transformación infinitesimal que sólo depende de su derivada. Notar que estas expresiones son válidas al considerar el producto simétrico.

8.4. Transformación NS-NS del conmutador

La transformación NS-NS del conmutador de dos elementos del álgebra de Lie es más sutil. Desde el punto de vista del álgebra envolvente universal podemos desarrollar el conmutador.

$$[A, B] = AB - BA$$

El producto entre los elementos del álgebra de A y B tiene sentido sólo dentro del álgebra envolvente universal. En esta ocasión el producto que aparece no es simétrico. Esta es la razón por la que el conmutador no va a transformar covariantemente.

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}_\Sigma([A, B]) &= [\hat{\delta}_\Sigma A, B] + [A, \hat{\delta}_\Sigma B] = -i[\Sigma_\lambda \cdot [X^\lambda, A], B] - i[A, \Sigma_\lambda \cdot [X^\lambda, B]] = \\
&= -i\Sigma_\lambda \cdot [[X^\lambda, A], B] - i\Sigma_\lambda [A, [X^\lambda, B]] - i[\Sigma_\lambda, B] \cdot [X^\lambda, A] - i[A, \Sigma_\lambda] \cdot [X^\lambda, B] = \\
&= -i\Sigma_\lambda \cdot [X^\lambda, [A, B]] - i([A, \Sigma_\lambda] \cdot [X^\lambda, B] - [B, \Sigma_\lambda] \cdot [X^\lambda, A]) \quad (8.11)
\end{aligned}$$

El primer término del último miembro se corresponde con lo que se esperaría si el conmutador del álgebra de Lie transformara de forma covariante. Los otros dos términos se pueden reescribir de la siguiente forma utilizando la expresión (6.7).

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}_\Sigma([A, B]) &= -i\Sigma_\lambda \cdot [X^\lambda, [A, B]] - i[A, X^\rho] \cdot \partial_\rho \Sigma_\lambda \cdot [X^\lambda, B] + i[B, X^\rho] \cdot \partial_\rho \Sigma_\lambda \cdot [X^\lambda, A] = \\
&= -i\Sigma_\lambda \cdot [X^\lambda, [A, B]] - 2i[A, X^\rho] \cdot \partial_{[\rho} \Sigma_{\lambda]} \cdot [X^\lambda, B]
\end{aligned}$$

Vemos que en la transformación del conmutador aparece un término que depende de $d\Sigma$, que es la variación gauge NS-NS del campo B . Como la transformación del campo B es: $\hat{\delta}_\Sigma B_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}\Sigma_{\nu]}$ ($\hat{\delta}_\Sigma B = d\Sigma$), Obtenemos la expresión final para la transformación NS-NS del conmutador.

$$\hat{\delta}_\Sigma([A, B]) = -i\Sigma_\lambda \cdot [X^\lambda, [A, B]] - i[A, X^\rho] \cdot \hat{\delta}_\Sigma B_{\rho\lambda} \cdot [X^\lambda, B] \quad (8.12)$$

El último término, el que es proporcional a la variación de B , es el que rompe la covarianza de la transformación. El producto AB en general tampoco va a transformar covariantemente bajo la transformación NS-NS. Para calcular su transformación escribimos el producto como suma del producto simétrico y del conmutador.

$$AB = A \cdot B + \frac{1}{2}[A, B]$$

Esta expresión se puede demostrar desarrollando cada una de los sumandos. Sabemos como transforma cada una de los términos del segundo miembro a partir de (8.10) y de (8.11), luego podemos calcular la transformación del producto.

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_\Sigma(AB) &= \\ &= -i\Sigma_\mu \cdot [X^\mu, A \cdot B] \frac{1}{2}(-i\Sigma_\lambda \cdot [X^\lambda, [A, B]] - i[A, \Sigma_\lambda] \cdot [X^\lambda, B] + i[B, \Sigma_\lambda] \cdot [X^\lambda, A]) = \\ &= -i\Sigma_\mu \cdot [X^\mu, A \cdot B + \frac{1}{2}[A, B]] - \frac{i}{2}([A, \Sigma_\lambda] \cdot [X^\lambda, B] - i[B, \Sigma_\lambda] \cdot [X^\lambda, A]) \end{aligned}$$

Aparece una término que impide que el producto AB transforme covariantemente bajo las transformaciones NS-NS.

8.5. Transformación NS-NS de la derivada covariante

La derivada covariante también va a transformar bajo las transformaciones gauge NS-NS. Al igual que el conmutador no va a transformar de forma covariante. Para ver como varia la derivada covariante hay que utilizar la transformación de los escalares (8.8) y del campo vectorial V dada en la ecuación (8.5).

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_\Sigma(D_a X^\mu) &= \partial_a(\hat{\delta}_\Sigma X^\mu) - i[V_a, \hat{\delta}_\Sigma X^\mu] - i[\hat{\delta}_\Sigma V_a, X^\mu] = \\ &= -i\partial_a \Sigma_\nu \cdot [X^\nu, X^\mu] - i\Sigma_\nu \cdot [\partial_a X^\nu, X^\mu] - i\Sigma_\nu \cdot [X^\nu, \partial_a X^\mu] - [V_a, \Sigma_\nu \cdot [X^\nu, X^\mu]] + i[\Sigma_\nu \cdot D_a X^\nu, X^\mu] \end{aligned}$$

Podemos simplificar esta expresión si desarrollamos los productos dentro de los conmutadores y la derivada covariante del último término.

$$\hat{\delta}_\Sigma(D_a X^\mu) = -i\Sigma_\nu \cdot [X^\nu, D_a X^\mu] - iD_a \Sigma_\nu \cdot [X^\nu, X^\mu] + i[\Sigma_\nu, X^\mu] \cdot D_a X^\nu$$

donde hemos utilizado la identidad de Jacobi y agrupado términos para formar las derivadas covariantes. Utilizando la expresión (6.7) y (6.14) reescribimos los dos últimos términos que aparecen.

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_\Sigma(D_a X^\mu) &= -i\Sigma_\nu \cdot [X^\nu, D_a X^\mu] - i\partial_\lambda \Sigma_\nu \cdot D_a X^\lambda \cdot [X^\nu, X^\mu] + i\partial_\lambda \Sigma_\nu \cdot [X^\lambda, X^\mu] \cdot D_a X^\nu = \\ &= -i\Sigma_\nu \cdot [X^\nu, D_a X^\mu] - 2i[X^\mu, X^\lambda] \cdot \partial_{[\lambda} \Sigma_{\nu]} \cdot D_a X^\nu \end{aligned}$$

En el último término aparece la transformación gauge del campo B , luego obtenemos la siguiente expresión.

$$\hat{\delta}_\Sigma(D_a X^\mu) = -i\Sigma_\nu \cdot [X^\nu, D_a X^\mu] - i[X^\mu, X^\lambda] \cdot \hat{\delta}_\Sigma B_{\lambda\nu} \cdot D_a X^\nu \quad (8.13)$$

El primer término es lo que se esperaría en el caso de que la derivada covariante transformara de forma covariante. Vemos que aparece un término que es proporcional a la variación de B que rompe la covarianza.

8.6. Relación entre NS-NS y $U(N)$

La transformación gauge NS-NS no sólo afecta al campo B , sino que también se inducen transformaciones en los campos del *world-volume*. En el caso abeliano sólo transforma el campo vectorial V , pero en el caso no-abeliano también se inducen transformaciones de los escalares X^μ .

$$\hat{\delta}_\Sigma B_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}\Sigma_{\nu]}$$

$$\hat{\delta}_\Sigma V_a = -\Sigma_\mu \cdot D_a X^\mu$$

$$\hat{\delta}_\Sigma X^\mu = -i\Sigma_\nu \cdot [X^\nu, X^\mu]$$

Las transformaciones NS-NS vienen parametrizadas por la 1-forma Σ . Existen valores de este parámetro para los cuales el campo B transforma trivialmente. En el caso de que $\Sigma = -d\hat{\chi}$ tenemos que $\delta B = 0$. En general una transformación trivial para B no va a ser trivial para los campos del *world-volume*.

$$\hat{\delta}_{(-d\hat{\chi})} B = 0$$

$$\hat{\delta}_{(-d\hat{\chi})} V_a = D_a \hat{\chi}$$

$$\hat{\delta}_{(-d\hat{\chi})} X^\mu = i[\hat{\chi}, X^\mu]$$

donde hemos utilizado las ecuaciones (6.7) y (6.14). Estas transformaciones son justamente las transformaciones gauge $U(N)$ (en el caso de representaciones unitarias). Podemos concluir que las transformaciones NS-NS triviales para el campo B son transformaciones gauge $U(N)$ para los campos del *world-volume*. Esta afirmación también se verifica en el caso abeliano. Sin embargo para que se verifique en el caso no-abeliano es importante la introducción de la transformación NS-NS de los campos escalares (8.8).

En el caso de las transformaciones NS-NS, el conmutador y la derivada covariante (con respecto a $U(N)$) no transformaban covariante ((8.12) y (8.13)). Los términos que lo impiden son justamente proporcionales a $\hat{\delta}_\Sigma B$, luego en el caso de transformaciones triviales para B recuperamos la covarianza. Por lo tanto, las transformaciones NS-NS el conmutador y la derivada covariante también se convierten en transformaciones gauge $U(N)$ para $\Sigma = -d\hat{\chi}$.

$$\hat{\delta}_{-d\hat{\chi}}([A, B]) = i[\hat{\chi}, [A, B]] = \delta_{\hat{\chi}}([A, B])$$

$$\hat{\delta}_{-d\hat{\chi}}(D_a X^\mu) = i[\hat{\chi}, D_a X^\mu] = \delta_{\hat{\chi}}(D_a X^\mu)$$

Podemos concluir de forma general que las transformaciones NS-NS triviales para el campo B , es decir, cuando $\Sigma = d\hat{\chi}$ son una transformación gauge $U(N)$,

$$\hat{\delta}_{d\hat{\chi}} = -\delta_{\hat{\chi}},$$

para representaciones unitarias de $\hat{\chi}(X)$. A partir de ahora supondremos siempre representaciones unitarias del álgebra de Lie $u(N)$. Hay que notar que no toda transformación $U(N)$ se puede escribir como una transformación NS-NS. Esto es así porque $\hat{\chi}(X)$ es un elemento del álgebra envolvente universal generado por los elementos del álgebra X^μ , y en general estos no van a formar una base de $u(N)$.

8.7. Álgebra de transformaciones NS-NS

Vamos a comprobar si el conmutador de dos transformaciones (8.8) es una operación cerrada, es decir, si recuperamos una transformación del mismo tipo.

$$\begin{aligned}
(\hat{\delta}_{\Sigma^1} \hat{\delta}_{\Sigma^2} - \hat{\delta}_{\Sigma^2} \hat{\delta}_{\Sigma^1})A &= -\Sigma_\mu^1 \cdot [X^\mu, \Sigma_\nu^2] \cdot [X^\nu, A] - \Sigma_\mu^1 \cdot \Sigma_\nu^2 \cdot [X^\mu, [X^\nu, A]] \\
&\quad - \Sigma_\nu^2 \cdot [X^\nu, \Sigma_\mu^1] \cdot [X^\mu, A] + \Sigma_\nu^2 \cdot [A, \Sigma_\mu^1] \cdot [X^\mu, X^\nu] \\
&\quad + \Sigma_\nu^2 \cdot [X^\nu, \Sigma_\mu^1] \cdot [X^\mu, A] + \Sigma_\mu^1 \cdot \Sigma_\nu^2 \cdot [X^\nu, [X^\mu, A]] \\
&\quad + \Sigma_\mu^1 \cdot [X^\mu, \Sigma_\nu^2] \cdot [X^\nu, A] - \Sigma_\mu^1 \cdot [A, \Sigma_\nu^2] \cdot [X^\nu, X^\mu] = \\
&= -\Sigma_\mu^1 \cdot \Sigma_\nu^2 \cdot [X^\mu, [X^\nu, A]] + \Sigma_\nu^2 \cdot [A, \Sigma_\mu^1] \cdot [X^\mu, X^\nu] \\
&\quad + \Sigma_\mu^1 \cdot \Sigma_\nu^2 \cdot [X^\nu, [X^\mu, A]] - \Sigma_\mu^1 \cdot [A, \Sigma_\nu^2] \cdot [X^\nu, X^\mu]
\end{aligned}$$

donde hemos empleado la transformación NS-NS del conmutador (8.11). Podemos agrupar dos de los términos que obtenemos mediante la identidad de Jacobi, y los otros dos sabiendo como actúa el conmutador sobre el producto simétrico.

$$(\hat{\delta}_{\Sigma^1} \hat{\delta}_{\Sigma^2} - \hat{\delta}_{\Sigma^2} \hat{\delta}_{\Sigma^1})A = -\Sigma_\mu^1 \cdot \Sigma_\nu^2 \cdot [[X^\mu, X^\nu], A] - [\Sigma_\mu^1 \cdot \Sigma_\nu^2, A] \cdot [X^\mu, X^\nu]$$

Agrupando estos dos términos finalmente obtenemos la expresión para el conmutador de dos transformaciones NS-NS.

$$(\hat{\delta}_{\Sigma^1} \hat{\delta}_{\Sigma^2} - \hat{\delta}_{\Sigma^2} \hat{\delta}_{\Sigma^1})A = i[\theta(\Sigma^1, \Sigma^2), A]$$

donde

$$\theta(\Sigma^1, \Sigma^2) = \theta^{\mu\nu} \cdot \Sigma_\mu^1 \cdot \Sigma_\nu^2 = i[X^\mu, X^\nu] \cdot \Sigma_\mu^1 \cdot \Sigma_\nu^2$$

El conmutador de dos transformaciones NS-NS es una transformación tipo $U(N)$. Formalmente $\theta(\Sigma^1, \Sigma^2)$ es un elemento del álgebra envolvente universal, no del álgebra de Lie de $U(N)$. Pero en el caso de representaciones unitarias tenemos que $\theta(\Sigma^1, \Sigma^2)$ es un elemento del álgebra de Lie $u(N)$.

$$[\hat{\delta}_{\Sigma^1}, \hat{\delta}_{\Sigma^2}] = \delta_{\theta(\Sigma^1, \Sigma^2)} \quad (8.14)$$

Otro conmutador que podemos calcular es el de una transformación NS-NS y una transformación gauge $U(N)$.

$$\begin{aligned}
(\hat{\delta}_\Sigma \delta_\chi - \delta_\chi \hat{\delta}_\Sigma)A &= \Sigma_\mu \cdot [X^\mu, [\chi, A]] + [\chi, \Sigma_\mu] \cdot [X^\mu, A] - [A, \Sigma_\mu] \cdot [X^\mu, \chi] \\
&\quad - [\chi, \Sigma_\mu] \cdot [X^\mu, A] - \Sigma_\mu \cdot [\chi, [X^\mu, A]] = \\
&= \Sigma_\mu \cdot [[X^\mu, \chi], A] + [\Sigma_\mu, A] \cdot [X^\mu, \chi]
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la transformación NS-NS del conmutador (8.11) y la identidad de Jacobi. Agrupando estos dos términos obtenemos el siguiente resultado:

$$(\hat{\delta}_\Sigma \delta_\chi - \delta_\chi \hat{\delta}_\Sigma)A = i[\hat{\delta}_\Sigma \chi, A]$$

donde en este caso

$$\hat{\delta}_\Sigma \chi = -i\Sigma_\mu \cdot [X^\mu, \chi]$$

Volvemos a recuperar una transformación gauge $U(N)$ parametrizada por $\hat{\delta}_\Sigma \chi$.

$$[\hat{\delta}_\Sigma, \delta_\chi] = \delta_{\hat{\delta}_\Sigma \chi} \quad (8.15)$$

Para completar el análisis de la estructura algebraica de las transformaciones NS-NS vamos a estudiar la identidad de Jacobi.

Identidad de Jacobi

Para que el álgebra este bien definida tenemos que comprobar que se satisface la identidad de Jacobi. Como consideramos dos tipos de transformaciones tenemos que calcular tres tipos diferentes de identidades. Empezamos calculando la identidad de Jacobi para tres transformaciones NS-NS. Se puede ver que esta identidad de Jacobi se puede poner como una transformación gauge $U(N)$:

$$[\hat{\delta}_{\Sigma^1}, [\hat{\delta}_{\Sigma^2}, \hat{\delta}_{\Sigma^3}]] + [\hat{\delta}_{\Sigma^2}, [\hat{\delta}_{\Sigma^3}, \hat{\delta}_{\Sigma^1}]] + [\hat{\delta}_{\Sigma^3}, [\hat{\delta}_{\Sigma^1}, \hat{\delta}_{\Sigma^2}]] = \delta_{\hat{\chi}}$$

cuyo parámetro de la transformación es

$$\hat{\chi} = \hat{\delta}_{\Sigma^1}\theta(\Sigma^2, \Sigma^3) + \hat{\delta}_{\Sigma^2}\theta(\Sigma^3, \Sigma^1) + \hat{\delta}_{\Sigma^3}\theta(\Sigma^1, \Sigma^2) .$$

Esta expresión se puede deducir a partir de las ecuaciones (8.14) y (8.15). Calculamos uno de los tres términos del parámetro $\hat{\chi}$.

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{\Sigma^1}\theta(\Sigma^2, \Sigma^3) &= \Sigma_{\mu}^1 \cdot \Sigma_{\lambda}^3 \cdot [X^{\mu}, \Sigma_{\nu}^2] \cdot [X^{\nu}, X^{\lambda}] + \Sigma_{\mu}^1 \cdot \Sigma_{\nu}^2 \cdot [X^{\mu}, \Sigma_{\lambda}^3] \cdot [X^{\nu}, X^{\lambda}] \\ &+ \Sigma_{\mu}^1 \cdot \Sigma_{\nu}^2 \cdot \Sigma_{\lambda}^3 \cdot [X^{\mu}, [X^{\nu}, X^{\lambda}]] + \Sigma_{\nu}^2 \cdot \Sigma_{\lambda}^3 \cdot [X^{\nu}, \Sigma_{\mu}^1] \cdot [X^{\mu}, X^{\lambda}] - \Sigma_{\nu}^2 \cdot \Sigma_{\lambda}^3 \cdot [X^{\lambda}, \Sigma_{\mu}^1] \cdot [X^{\mu}, X^{\nu}] \end{aligned}$$

Hemos utilizado en esta expresión la variación NS-NS del conmutador dada en (8.11). Utilizando la identidad de Jacobi de $u(N)$ se puede comprobar que la suma de las permutaciones cíclicas de $\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3$ en esta expresión se anulan, luego

$$\hat{\chi} = 0 .$$

Al anularse el parámetro de la transformación gauge $U(N)$ tenemos que se satisface la identidad de Jacobi

$$[\hat{\delta}_{\Sigma^1}, [\hat{\delta}_{\Sigma^2}, \hat{\delta}_{\Sigma^3}]] + [\hat{\delta}_{\Sigma^2}, [\hat{\delta}_{\Sigma^3}, \hat{\delta}_{\Sigma^1}]] + [\hat{\delta}_{\Sigma^3}, [\hat{\delta}_{\Sigma^1}, \hat{\delta}_{\Sigma^2}]] = 0 .$$

El cálculo de las otras dos identidades es más sencillo. La siguiente identidad de Jacobi es la que involucra dos transformaciones NS-NS y una transformación $U(N)$. De nuevo la identidad se puede escribir, a partir de (8.14) y (8.15), como una transformación gauge $U(N)$.

$$[\hat{\delta}_{\Sigma^1}, [\hat{\delta}_{\Sigma^2}, \delta_{\chi}]] + [\hat{\delta}_{\Sigma^2}, [\delta_{\chi}, \hat{\delta}_{\Sigma^1}]] + [\delta_{\chi}, [\hat{\delta}_{\Sigma^1}, \hat{\delta}_{\Sigma^2}]] = \delta_{\hat{\chi}}$$

En este caso el parámetro $\hat{\chi}$ también se anula.

$$\begin{aligned} \hat{\chi} &= (\hat{\delta}_{\Sigma^1}\hat{\delta}_{\Sigma^2} - \hat{\delta}_{\Sigma^2}\hat{\delta}_{\Sigma^1})\chi + i[\chi, \theta(\Sigma^1, \Sigma^2)] = \\ &= \delta_{\theta(\Sigma^1, \Sigma^2)}\chi + i[\chi, \theta(\Sigma^1, \Sigma^2)] = i[\theta(\Sigma^1, \Sigma^2), \chi] + i[\chi, \theta(\Sigma^1, \Sigma^2)] = 0 \end{aligned}$$

El último miembro de esta ecuación se anula debido a la antisimetría del conmutador, luego tenemos otra de las identidades de Jacobi.

$$[\hat{\delta}_{\Sigma^1}, [\hat{\delta}_{\Sigma^2}, \delta_{\chi}]] + [\hat{\delta}_{\Sigma^2}, [\delta_{\chi}, \hat{\delta}_{\Sigma^1}]] + [\delta_{\chi}, [\hat{\delta}_{\Sigma^1}, \hat{\delta}_{\Sigma^2}]] = 0$$

La última de las identidades de Jacobi que nos falta por confirmar es la que involucra una transformación NS-NS y dos transformaciones gauge $U(N)$.

$$[\hat{\delta}_{\Sigma}, [\delta_{\chi^1}, \delta_{\chi^2}]] + [\delta_{\chi^1}, [\delta_{\chi^2}, \hat{\delta}_{\Sigma}]] + [\delta_{\chi^2}, [\hat{\delta}_{\Sigma}, \delta_{\chi^1}]] = \delta_{\hat{\chi}}$$

donde en este caso el parámetro de la transformación $U(N)$ viene dado por

$$\hat{\chi} = \hat{\delta}_{\Sigma}(i[\chi^1, \chi^2]) - i[\hat{\delta}_{\Sigma}\chi^1, \chi^2] - i[\chi^1, \hat{\delta}_{\Sigma}\chi^2] = 0 .$$

El parámetro se anula nuevamente y por tanto obtenemos la última de las identidades de Jacobi.

$$[\hat{\delta}_{\Sigma}, [\delta_{\chi^1}, \delta_{\chi^2}]] + [\delta_{\chi^1}, [\delta_{\chi^2}, \hat{\delta}_{\Sigma}]] + [\delta_{\chi^2}, [\hat{\delta}_{\Sigma}, \delta_{\chi^1}]] = 0$$

Se satisfacen todas las identidades de Jacobi que involucran transformaciones NS-NS y transformaciones gauge $U(N)$. Luego podemos concluir que álgebra el formada por estos dos tipos de transformaciones esta bien definida.

8.8. Álgebra de transformaciones NS-NS no covariantes

El álgebra de transformaciones NS-NS que hemos calculado en la sección anterior se aplica sobre elementos del álgebra $u(N)$ que transforman de forma covariante, es decir, según la ecuación (8.9). Sin embargo la derivada covariante y el conmutador no transforman covariantemente. El objetivo de esta sección es verificar que el álgebra cierra cuando se aplica a estos dos objetos. De forma genérica denotaremos por A' a un elemento del álgebra $u(N)$ que no transforma de forma covariante. En la práctica A' será el conmutador o la derivada covariante. Descomponemos la transformación en una parte covariante y otra no covariante:

$$\hat{\delta}_\Sigma A' = \hat{\delta}_\Sigma^c A' + \hat{\delta}_\Sigma^{nc} A' \quad (8.16)$$

La transformación covariante $\hat{\delta}_\Sigma^c$ tiene la forma usual de las transformaciones NS-NS,

$$\hat{\delta}_\Sigma^c A' = -i\Sigma_\mu \cdot [X^\mu, A'] ,$$

mientras que la no covariante $\hat{\delta}_\Sigma^{nc}$ agrupa los términos que rompen la covarianza. Un resultado importante, obtenido cuando calculamos las transformaciones de la derivada covariante y del conmutador, es que el término no covariante es proporcional a la transformación del campo B . Concretamente $\hat{\delta}_\Sigma^{nc}$ tiene las siguientes expresiones para el caso del conmutador y de la derivada covariante:

$$\hat{\delta}_\Sigma^{nc}([A, B]) = -2i[A, X^\mu] \cdot \partial_{[\mu}\Sigma_{\nu]} \cdot [X^\nu, B] , \quad (8.17)$$

$$\hat{\delta}_\Sigma^{nc}(D_a X^\mu) = -2i[X^\mu, X^\lambda] \cdot \partial_{[\lambda}\Sigma_{\nu]} \cdot D_a X^\nu , \quad (8.18)$$

deducidas de las transformaciones (8.12) y (8.13). Notar que en estas expresiones hemos supuesto que los elementos del álgebra $u(N)$ que aparecen en el conmutador transforman de forma covariante. El término $2\partial_{[\mu}\Sigma_{\nu]}$ es justamente la transformación NS-NS del campo B . La transformación no covariante aplicada a elementos covariantes del álgebra $u(N)$, como los escalares de *embedding* o las funciones no-abelianas es cero.

$$\hat{\delta}_\Sigma^{nc} X^\mu = 0$$

$$\hat{\delta}_\Sigma^{nc} \Phi(X) = 0$$

Sobre estas bases procedemos al cálculo del álgebra de transformaciones NS-NS. Las transformaciones NS-NS covariantes van a conservar todas las propiedades desarrolladas en la sección 8.7 para elementos covariantes. En particular, el conmutador de dos transformaciones covariantes, aplicada a objetos covariantes o no, es una transformación gauge $U(N)$.

$$[\hat{\delta}_{\Sigma^1}^c, \hat{\delta}_{\Sigma^1}^c] = \delta_{\theta(\Sigma^1, \Sigma^2)}$$

Los detalles de este cálculo son iguales a los que conducen a la ecuación (8.14). Ahora calcularemos el resto de los conmutadores. Teniendo en cuenta que la transformación $\hat{\delta}_\Sigma^{nc}$ se anula cuando consideramos elementos covariantes del álgebra, aplicamos una transformación covariante seguida de una no covariante, con parámetros Σ^1 y Σ^2 respectivamente.

$$\hat{\delta}_{\Sigma^2}^{nc}(\hat{\delta}_{\Sigma^1}^c A') = -i\Sigma_\mu^1 \cdot [X^\mu, \hat{\delta}_{\Sigma^2}^{nc} A'] = \hat{\delta}_{\Sigma^1}^c(\hat{\delta}_{\Sigma^2}^{nc} A') ,$$

donde hemos utilizado la covarianza de Σ_μ^1 y de X^μ . Concluimos de esta forma que la transformación covariante y la no covariante conmutan.

$$[\hat{\delta}_{\Sigma^1}^c, \hat{\delta}_{\Sigma^2}^{nc}] = 0$$

El siguiente conmutador que nos interesa es el de dos transformaciones NS-NS no covariantes. Calcularemos particularizando para el conmutador y la derivada covariante, que son los únicos elementos que sabemos que transforman de forma no covariante. Para el conmutador tenemos que

$$\begin{aligned} & (\hat{\delta}_{\Sigma^1}^{nc} \hat{\delta}_{\Sigma^2}^{nc} - \hat{\delta}_{\Sigma^2}^{nc} \hat{\delta}_{\Sigma^1}^{nc})([A, B]) = \\ & = -4[A, X^\mu] \cdot \partial_{[\mu}\Sigma_{\nu]}^1 \cdot [X^\nu, X^\lambda] \cdot \partial_{[\lambda}\Sigma_{\rho]}^2 \cdot [X^\rho, B] - 4[A, X^\mu] \cdot \partial_{[\mu}\Sigma_{\nu]}^2 \cdot [X^\nu, X^\lambda] \cdot \partial_{[\lambda}\Sigma_{\rho]}^1 \cdot [X^\rho, B] \\ & + 4[A, X^\mu] \cdot \partial_{[\mu}\Sigma_{\nu]}^1 \cdot [X^\nu, X^\lambda] \cdot \partial_{[\lambda}\Sigma_{\rho]}^1 \cdot [X^\rho, B] + 4[A, X^\mu] \cdot \partial_{[\mu}\Sigma_{\nu]}^1 \cdot [X^\nu, X^\lambda] \cdot \partial_{[\lambda}\Sigma_{\rho]}^2 \cdot [X^\rho, B] = 0 , \end{aligned}$$

igualmente para la derivada covariante

$$\begin{aligned}
& (\hat{\delta}_{\Sigma^1}^{nc} \hat{\delta}_{\Sigma^2}^{nc} - \hat{\delta}_{\Sigma^2}^{nc} \hat{\delta}_{\Sigma^1}^{nc})(D_a X^\mu) = \\
& = -4[X^\mu, X^\nu] \cdot \partial_{[\nu} \Sigma_{\lambda]}^1 \cdot [X^\lambda, X^\rho] \cdot \partial_{[\rho} \Sigma_{\sigma]}^2 \cdot D_a X^\sigma - 4[X^\mu, X^\nu] \cdot \partial_{[\nu} \Sigma_{\lambda]}^2 \cdot [X^\lambda, X^\rho] \cdot \partial_{[\rho} \Sigma_{\sigma]}^1 \cdot D_a X^\sigma \\
& + 4[X^\mu, X^\nu] \cdot \partial_{[\nu} \Sigma_{\lambda]}^2 \cdot [X^\lambda, X^\rho] \cdot \partial_{[\rho} \Sigma_{\sigma]}^1 \cdot D_a X^\sigma + 4[X^\mu, X^\nu] \cdot \partial_{[\nu} \Sigma_{\lambda]}^1 \cdot [X^\lambda, X^\rho] \cdot \partial_{[\rho} \Sigma_{\sigma]}^2 \cdot D_a X^\sigma = 0 .
\end{aligned}$$

Para realizar ambos cálculos empleamos las ecuaciones (8.17) y (8.18), además de tener en cuenta que los elementos covariantes verifican que $\hat{\delta}_{\Sigma}^{nc} = 0$. La conclusión a la que llegamos es que el conmutador de dos transformaciones NS-NS no covariantes se anula.

$$[\hat{\delta}_{\Sigma^1}^{nc}, \hat{\delta}_{\Sigma^2}^{nc}] = 0$$

Ahora estamos en condiciones de calcular el conmutador de las transformaciones NS-NS generales. Todos los conmutadores se anulan salvo los de la transformación covariante, luego a partir de la ecuación(8.16) tenemos que

$$[\hat{\delta}_{\Sigma^1}^c, \hat{\delta}_{\Sigma^2}^c] = [\hat{\delta}_{\Sigma^1}^c, \hat{\delta}_{\Sigma^2}^c] = \delta_{\theta(\Sigma^1, \Sigma^2)} ,$$

aplicado tanto a objetos covariantes como no covariantes. Recuperamos por tanto la ecuación (8.14).

9. Conclusiones

A lo largo de este documento hemos tratado la teoría gauge $U(N)$ resultante de la configuración de N Dp -branas coincidentes. Esta teoría no-abeliana presenta diferencias notables con respecto al caso de una sola Dp -brana, cuyo grupo gauge es abeliano ($U(1)$). La primera dificultad que nos encontramos es la generalización del *pull-back* para la configuración no-abeliana. La preinscripción es sencilla: sustituir derivadas parciales por derivadas covariantes y considerar la generalización de funciones no-abelianas simétricas en los índices Yang-Mills. Esta prescripción viene ratificada en [2] y es ampliamente aceptada. Los cambios de coordenadas del *pull-back* y de las funciones no-abelianas, introducidos en la sección 7, nos dan otro motivo importante para confirmar que la preinscripción es correcta. Los cambios de coordenadas de la derivada covariante y de las funciones no-abelianas son covariantes, lo que indica que la preinscripción empleada para el *pull-back* no-abeliano está bien definida. Por otro lado, tenemos un formalismo que nos proporciona una posible manera de realizar cambios de coordenadas en objetos no-conmutativos, como por ejemplo el conmutador de dos escalares de *embedding*. Además a lo largo de la sección 6 se hace uso de la simetrización de los índices Yang-Mills. Todos los resultados importantes obtenidos en dicha sección se cumplen únicamente bajo la prescripción de simetrización. Esto manifiesta la importancia de esta prescripción para las generalizaciones no-abelianas. El formalismo desarrollado en este documento para la simetrización de los índices Yang-Mills es equivalente a la prescripción de traza simetrizada, que aparece en las generalizaciones de las acciones no-abelianas y ampliamente utilizada en la teoría de matrices (*Matrix theory*).

En la sección 8 analizamos la transformación gauge NS-NS de los escalares de *embedding* introducida en [1], y característica únicamente del caso no-abeliano. Deducimos la transformación NS-NS inducida sobre funciones no-abelianas, derivadas covariantes y conmutadores. Los resultados son que las funciones no-abelianas transforman de forma covariante bajo este tipo de transformaciones, pero para ello vuelve a ser importante la preinscripción de simetrización de los índices Yang-Mills. Sin embargo, la derivada covariante y el conmutador no transforman de forma covariante bajo transformaciones gauge NS-NS, aunque en ambos casos el término que rompe la covarianza es proporcional a la variación gauge del campo B . Luego la derivada covariante y el conmutador transforman de forma covariante para transformaciones gauge NS-NS triviales para el campo B ($\hat{\delta}_\Sigma B = 0$). Existe un resultado todavía más importante: transformaciones triviales para B se corresponden con transformaciones gauge $U(N)$ para el resto de los campos. Por último, para analizar la consistencia de la transformación NS-NS de los escalares de *embedding* calculamos el conmutador de dos transformaciones gauge NS-NS, y de una transformación NS-NS con una transformación gauge $U(N)$. En ambos casos recuperamos transformaciones gauge $U(N)$. De forma esquemática tenemos el siguiente álgebra:

$$\begin{aligned} [\Sigma, \Sigma] &= U(N) , \\ [\Sigma, U(N)] &= U(N) , \\ [U(N), U(N)] &= U(N) , \end{aligned}$$

donde Σ representa una transformación gauge NS-NS y $U(N)$ una transformación gauge de dicho grupo. De esta forma obtenemos una extensión del álgebra de $U(N)$ con transformaciones gauge NS-NS. Para comprobar que este álgebra está bien definida verificamos que se satisface las identidades de Jacobi para las diferentes combinaciones de transformaciones gauge NS-NS y $U(N)$.

A. Integración de formas

Los acoplamientos de las cuerdas o de las Dp -branas vienen determinados por la integración de formas en el *world-volume*. Para integrar las formas es útil introducir el *pull-back* de una forma. Por ejemplo las Dp -branas se acoplan a $(p + 1)$ -formas que denotaremos de forma general por A . las Dp -branas vienen determinadas por una aplicación epimorfista, denominada *embedding*, que va del *world-volume* de la brana \mathcal{B} al espacio-tiempo \mathcal{M} .

$$\begin{aligned} X &: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{M} \\ \sigma &\longmapsto X(\sigma) \end{aligned}$$

donde en coordenadas la denotamos por $X^\mu(\sigma)$. La integración de la $(p + 1)$ -forma se realiza en el *world-volume* “embebido” en el espacio tiempo, es decir en $X(\mathcal{B})$. Para la integración de formas existe una fórmula de cambio de variable que nos dice la siguiente.

$$\int_{X(\mathcal{B})} A = \int_{\mathcal{B}} X^*(A) \tag{A.1}$$

donde $X^*(A)$ es el *pull-back* de la forma A . El *pull-back* viene completamente determinado por el *embedding* $X(\sigma)$. En el caso de una función en el espacio-tiempo $f(x)$ el *pull-back* consiste simplemente en la composición.

$$X^*(f)(\sigma) = (f \circ X)(\sigma) = f(X(\sigma))$$

En el caso de formas el *pull-back* es más complejo. Si fijamos coordenadas en \mathcal{B} y en \mathcal{M} tenemos la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} X^*(A)(\sigma) &= \\ &= A_{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_p}(X(\sigma)) \partial_{\sigma^0} X^{\mu_0}(\sigma) \partial_{\sigma^1} X^{\mu_1}(\sigma) \dots \partial_{\sigma^p} X^{\mu_p}(\sigma) d\sigma^{a_0} \wedge d\sigma^{a_1} \wedge \dots \wedge d\sigma^{a_p} \end{aligned}$$

Referencias

- [1] Joke Adam, Ignacio A. Illan, and Bert Janssen. On the gauge invariance and coordinate transformations of non-Abelian D-brane actions. *JHEP*, 10:022, 2005.
- [2] Mohammad R. Garousi and Robert C. Myers. World-volume interactions on D-branes. *Nucl. Phys.*, B542:73–88, 1999.
- [3] Richard J. Szabo. Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces. *Phys. Rept.*, 378:207–299, 2003.
- [4] Edward Witten. Bound states of strings and p-branes. *Nucl. Phys.*, B460:335–350, 1996.
- [5] B. Zwiebach. A first course in string theory. Cambridge, UK: Univ. Pr. (2004) 558 p.