Capítulo 8

Diseños en cuadrados greco-latinos

8.1. Introducción

El modelo en cuadrado greco-latino se puede considerar como una extensión del cuadrado latino en el que se incluye una tercera variable de control o variable de bloque. En este modelo, como en el diseño en cuadrado latino, todos los factores deben tener el mismo número de niveles K y el número de observaciones necesarias sigue siendo K^2. Este diseño es, por tanto, una fracción del diseño completo en bloques aleatorizados con un factor principal y 3 factores secundarios que requeriría K^4 observaciones.

Los cuadrados greco-latinos se obtienen por superposición de dos cuadrados latinos del mismo orden y ortogonales entre sí, uno de los cuadrados con letras latinas el otro con letras griegas. Dos cuadrados reciben el nombre de ortogonales si, al superponerlos, cada letra latina y griega aparecen juntas una sola vez en el cuadrado resultante.

En el Apéndice C se muestra una tabla de cuadrados latinos que dan lugar, por superposición de dos de ellos, a cuadrados greco-latinos. Notamos que no es posible formar cuadrados greco-latinos de orden 6.

La Tabla 5-8 ilustra un cuadrado greco-latino para $K = 4$

Tabla 5-8.
Cuadrado greco-latino

A α	B β	C γ	D δ
D γ	C δ	B α	A β
B δ	A γ	D β	C α
C β	D α	A δ	B γ

8.2. Planteamiento del modelo

En un diseño en cuadrado greco-latino la variable respuesta $y_{ij(hp)}$ viene descrita por la siguiente ecuación

$$y_{ij(hp)} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_h + \delta_p + \epsilon_{ij(hp)} \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2 \ldots, K \\ j = 1, 2 \ldots, K \\ h = 1, 2 \ldots, K \\ p = 1, 2 \ldots, K \end{array} \right. , \tag{8.1}$$

donde

- μ es un efecto constante, común a todas las unidades.
- τ_i es el efecto producido por el i-ésimo nivel del factor fila. Dichos efectos están sujetos a la restricción $\sum_i \tau_i = 0$.
- β_j es el efecto producido por el j-ésimo nivel del factor columna. Dichos efectos están sujetos a la restricción $\sum_j \beta_j = 0$.
- γ_h es el efecto producido por el h-ésimo nivel del factor letra latina. Dichos efectos están sujetos a la restricción $\sum_h \gamma_h = 0$.
- δ_p es el efecto producido por el p-ésimo nivel del factor letra griega. Dichos efectos están sujetos a la restricción $\sum_p \delta_p = 0$.
- $\epsilon_{ij(hp)}$ son variables aleatorias independientes con distribución $N(0, \sigma)$.

La notación $y_{ij(hp)}$ indica que los niveles i y j determinan los niveles h y p para un cuadrado greco-latino especificado. Es decir, los subíndices h y p toman valores que dependen de la celdilla (i, j).

Se utiliza la siguiente notación:

- $N = K^2$ es el número total de observaciones.
- El total y el promedio de todas las observaciones

$$y_{....} = \sum_i \sum_j y_{ij(..)} \qquad \bar{y}_{....} = \frac{y_{....}}{K^2}$$

- El total y el promedio para cada fila

$$y_{i...} = \sum_{j=1}^{K} y_{ij(..)} \qquad \bar{y}_{i...} = \frac{y_{i...}}{K} \tag{8.2}$$

- El total y el promedio para cada columna

$$y_{.j..} = \sum_{i=1}^{K} y_{ij(..)} \qquad \bar{y}_{.j..} = \frac{y_{.j..}}{K} \tag{8.3}$$

- El total y el promedio para cada letra latina

$$y_{..h.} = \sum_{i,j} y_{ij(h.)} \qquad \bar{y}_{..h.} = \frac{y_{..h.}}{K} \tag{8.4}$$

- El total y el promedio para cada letra griega

$$y_{...p} = \sum_{i,j} y_{ij(.p)} \qquad \bar{y}_{...p} = \frac{y_{...p}}{K} \tag{8.5}$$

- $y_{..h.}$ se obtiene sumando las K observaciones en las que la letra latina se ha fijado al nivel h.
- $y_{...p}$ se obtiene sumando las K observaciones en las que la letra griega se ha fijado al nivel p.

Comentario 8.1

Uno de los inconvenientes del cuadrado greco-latino, al igual que el cuadrado latino, es que requiere el mismo número de niveles para los cuatro factores que intervienen. Además no hay cuadrados greco-latinos de dimensión 6.

8.3. Estimación de los parámetros del modelo

Siguiendo el mismo proceso que en los diseños anteriores se obtienen los siguientes estimadores máximos verosímiles de los parámetros del modelo

$$\widehat{\mu} = \frac{\sum_i \sum_j y_{ij(..)}}{K^2} = \bar{y}_{....} \quad , \tag{8.6}$$

$$\widehat{\tau}_i = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{K} y_{ij(..)} - \widehat{\mu} = \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{....} \quad , \tag{8.7}$$

$$\widehat{\beta}_j = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} y_{ij(..)} - \widehat{\mu} = \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{....} \quad , \tag{8.8}$$

$$\widehat{\gamma}_h = \frac{1}{K}\sum_{i,j} y_{ij(h.)} - \widehat{\mu} = \bar{y}_{..h.} - \bar{y}_{....} \quad , \tag{8.9}$$

$$\widehat{\delta}_p = \frac{1}{K}\sum_{i,j} y_{ij(.p)} - \widehat{\mu} = \bar{y}_{...p} - \bar{y}_{....} \quad , \tag{8.10}$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i,j}\left[y_{ij..} - \widehat{\mu} - \widehat{\tau}_i - \widehat{\beta}_j - \widehat{\gamma}_h - \widehat{\delta}_p\right]^2 \quad . \tag{8.11}$$

8.3.1. Residuos

Los residuos en este modelo adoptan la expresión

$$\begin{aligned} e_{ij(hp)} = \; & y_{ij(hp)} - \widehat{y}_{ij(hp)} = y_{ij(hp)} - \widehat{\mu} - \widehat{\tau}_i - \widehat{\beta}_j - \widehat{\gamma}_h - \widehat{\delta}_p = \\ & y_{ij(hp)} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{..h.} - \bar{y}_{...p} + 3\bar{y}_{....} \quad . \end{aligned} \tag{8.12}$$

Como en el diseño en cuadrado latino los residuos suman cero por filas, por columnas, para cada letra latina y además también deben sumar cero para cada letra griega. Por lo tanto, el número de grados de libertad de los residuos es $(K-1)(K-3)$. En efecto

$$K^2 - (K + 3(K-1)) = (K-1)(K-3)$$

Se verifican las mismas propiedades para los estimadores máximo-verosímiles que en los modelos anteriores. En este modelo la expresión de la varianza residual tiene la siguiente forma

$$\widetilde{\sigma}^2 = \widehat{S}_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\left[y_{ij(hp)} - \widehat{y}_{ij(hp)}\right]^2}{(K-1)(K-3)} = \frac{\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} e_{ij(hp)}^2}{(K-1)(K-3)} \quad . \tag{8.13}$$

8.4. Descomposición de la variabilidad

Siguiendo el mismo procedimiento que en los modelos anteriores se comprueba que la ecuación básica del análisis de la varianza es

$$\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}(y_{ij(hp)} - \bar{y}_{....})^2 = K\sum_{i=1}^{K}(\bar{y}_{i...} - \bar{y}_{....})^2 + K\sum_{j=1}^{K}(\bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{....})^2 +$$

$$K\sum_{h=1}^{K}(\bar{y}_{..h.} - \bar{y}_{....})^2 + K\sum_{p=1}^{K}(\bar{y}_{...p} - \bar{y}_{....})^2 + \tag{8.14}$$

$$\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}(y_{ij(hp)} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{..h.} - \bar{y}_{...p} + 3\bar{y}_{....})^2$$

que simbólicamente se puede escribir

$$SCT = SCF + SCC + SCL + SCG + SCR \quad ,$$

denominando por esas siglas los términos en el orden en que figuran en la ecuación 8.14 y que reciben los siguientes nombres

1) SCT *suma total de cuadrados.*

2) SCF *suma de cuadrados debida al efecto fila.*

3) SCC *suma de cuadrados debida al efecto columna.*

4) SCL *suma de cuadrados debida a las letras latinas.*

5) SCG *suma de cuadrados debida a las letras griegas.*

6) SCR *suma de cuadrados del error.*

Basándonos en estas sumas de cuadrados se construyen los correspondientes cuadrados medios que denotamos por $\widehat{S}_T^2$, $\widehat{S}_F^2$, $\widehat{S}_C^2$, $\widehat{S}_L^2$, $\widehat{S}_G^2$, y $\widehat{S}_R^2$ o bien por CMT, CMF, CMC, CML, CMG y CMR o CME.

Siguiendo el mismo razonamiento que en la subsección **??** del Capítulo 1, se demuestra que los valores esperados de los cuadrados medios correspondientes a las filas, columnas, letras latinas, letras griegas y residual, son, respectivamente:

$$E(CMF) = E(\widehat{S}_F^2) = \sigma^2 + \frac{K\sum_{i=1}^{K}\tau_i^2}{K-1} \tag{8.15}$$

$$E(CMC) = \quad E(\widehat{S}^2_C) = \quad \sigma^2 + \frac{K\sum_{j=1}^{K}\beta_j^2}{K-1} \tag{8.16}$$

$$E(CML) = \quad E(\widehat{S}^2_L) = \quad \sigma^2 + \frac{K\sum_{h=1}^{K}\gamma_h^2}{K-1} \tag{8.17}$$

$$E(CMG) = \quad E(\widehat{S}^2_G) = \quad \sigma^2 + \frac{K\sum_{p=1}^{K}\delta_p^2}{K-1} \tag{8.18}$$

$$E(CMR) = \quad E(\widehat{S}^2_R) = \quad \sigma^2 \tag{8.19}$$

Como en el modelo anterior, este diseño tiene la propiedad de que todos los contrastes

$$\begin{array}{lcl} H_{0\tau}: \quad \tau_i = 0, \quad \forall i & & H_{0\gamma}: \quad \gamma_h = 0, \quad \forall h \\ & ; & \\ H_{0\beta}: \quad \beta_j = 0, \quad \forall j & & H_{0\delta}: \quad \delta_p = 0, \quad \forall p \end{array} \tag{8.20}$$

son ortogonales. Y los estadísticos de contraste para verificar dichas hipótesis son, respectivamente

$$\begin{array}{lcl} F_\tau = \dfrac{\dfrac{SCF/\sigma^2}{K-1}}{\dfrac{SCR/\sigma^2}{(K-1)(K-3)}} = \dfrac{\widehat{S}^2_F}{\widehat{S}^2_R} & ; & F_\gamma = \dfrac{\dfrac{SCL/\sigma^2}{K-1}}{\dfrac{SCR/\sigma^2}{(K-1)(K-3)}} = \dfrac{\widehat{S}^2_L}{\widehat{S}^2_R} \\ F_\beta = \dfrac{\dfrac{SCC/\sigma^2}{K-1}}{\dfrac{SCR/\sigma^2}{(K-1)(K-3)}} = \dfrac{\widehat{S}^2_C}{\widehat{S}^2_R} & ; & F_\delta = \dfrac{\dfrac{SCG/\sigma^2}{K-1}}{\dfrac{SCR/\sigma^2}{(K-1)(K-3)}} = \dfrac{\widehat{S}^2_G}{\widehat{S}^2_R} \quad . \end{array} \tag{8.21}$$

Bajo las hipótesis nulas (8.20) cada uno de los estadíticos de contraste sigue una distribución F de Snedecor con $K-1$ y $(K-1)(K-3)$ grados de libertad. Por tanto, se rechazará la hipótesis nula correspondiente cuando el valor experimental del estadístico

sea mayor que el encontrado en las tablas de la distribución F con $K-1$ y $(K-1)(K-3)$ grados de libertad al nivel de significación α.
La tabla ANOVA para este diseño es

Tabla 5-9. Tabla ANOVA para el modelo de cuadrado greco-latino

Fuentes de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados medios	F_{exp}
E. fila	$K\sum_{i=1}^{K}(\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{....})^2$	$K-1$	$\widehat{S}_F^2$	$\widehat{S}_F^2/\widehat{S}_R^2$
E. col.	$K\sum_{j=1}^{K}(\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{....})^2$	$K-1$	$\widehat{S}_C^2$	$\widehat{S}_C^2/\widehat{S}_R^2$
E. l. l.	$K\sum_{h=1}^{K}(\bar{y}_{..h.}-\bar{y}_{....})^2$	$K-1$	$\widehat{S}_L^2$	$\widehat{S}_L^2/\widehat{S}_R^2$
E. l. g.	$K\sum_{p=1}^{K}(\bar{y}_{...p}-\bar{y}_{....})^2$	$K-1$	$\widehat{S}_G^2$	$\widehat{S}_G^2/\widehat{S}_R^2$
Residual	$SCT-SCF$ $SCC-SCL-SCG$	$(K-1)(K-3)$	$\widehat{S}_R^2$	
TOTAL	$\sum_{i}^{K}\sum_{j}^{K}\left(y_{ij(hp)}-\bar{y}_{....}\right)^2$	K^2-1	$\widehat{S}_T^2$	

Las expresiones abreviadas de SCT, SCF, SCC, SCL, SCG y SCR, son

$$
\begin{aligned}
SCT &= \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} y_{ij..}^2 - \frac{y_{....}^2}{K^2} \\
SCF &= \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} y_{i...}^2 - \frac{y_{....}^2}{K^2} \qquad ; \qquad SCC = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} y_{.j..}^2 - \frac{y_{....}^2}{K^2} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; SCL = \frac{1}{K}\sum_{h=1}^{K} y_{..h.}^2 - \frac{y_{....}^2}{K^2} \\
SCG &= \frac{1}{K}\sum_{p=1}^{K} y_{...p}^2 - \frac{y_{....}^2}{K^2}
\end{aligned}
\tag{8.22}
$$

La suma de cuadrados del error se obtiene por diferencia

$$SCR = \quad SCT - SCF - SCC - SCL - SCG \quad . \tag{8.23}$$

Y utilizando las expresiones abreviadas de SCT, SCF, SCC, SCL, SCG y SCR, dadas en (8.22), se construye la siguiente tabla ANOVA.

Tabla 5-10. Forma práctica de la tabla ANOVA para el modelo de cuadrado greco-latino

Fuentes de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados medios	F_{exp}
E. fila	$\frac{1}{K}\sum_{i}^{K} y_{i...}^2 - \frac{y_{....}^2}{K^2}$	$K-1$	$\widehat{S}_F^2$	$\widehat{S}_F^2/\widehat{S}_R^2$
E. col.	$\frac{1}{K}\sum_{j}^{K} y_{.j..}^2 - \frac{y_{....}^2}{K^2}$	$K-1$	$\widehat{S}_C^2$	$\widehat{S}_C^2/\widehat{S}_R^2$
E. l. l.	$\frac{1}{K}\sum_{h}^{K} y_{..h.}^2 - \frac{y_{....}^2}{K^2}$	$K-1$	$\widehat{S}_L^2$	$\widehat{S}_L^2/\widehat{S}_R^2$
E. l. g.	$\frac{1}{K}\sum_{p}^{K} y_{...p}^2 - \frac{y_{....}^2}{K^2}$	$K-1$	$\widehat{S}_G^2$	$\widehat{S}_G^2/\widehat{S}_R^2$
Residual	$SCT - SCF - SCC - SCL - SCG$	$(K-1)(K-3)$	$\widehat{S}_R^2$	
TOTAL	$\sum_{i}^{K}\sum_{j}^{K} y_{ij(hp)}^2 - \frac{y_{....}^2}{K^2}$	K^2-1	$\widehat{S}_T^2$	

Coeficiente de determinación

A continuación se define el coeficiente de determinación como

$$R^2 = \frac{SCF + SCC + SCL + SCG}{SCT} = R_\tau^2 + R_\beta^2 + R_\gamma^2 + R_\delta^2 \quad ,$$

donde R_τ^2, R_β^2, R_γ^2 y R_δ^2 son los cocientes entre la variación explicada por cada uno de los efectos y la total y se denominan *coeficientes de determinación parciales.*

8.5. Ejemplo numérico

A fin de ilustrar el análisis de la varianza de los diseños en cuadrado greco-latino, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 8.2

En la obtención de un determinado producto químico se está interesado en comparar 4 procedimientos. Se supone que en dicha obtención también puede influir la temperatura, presión y tipo de catalizador empleado, decidiéndose realizar un experimento en cuadrado greco-latino. Para ello, se consideran 4 niveles de cada uno de estos factores. La tabla adjunta muestra el cuadrado greco-latino que resulta elegido y las cantidades de producto obtenidas. En dicha tabla:

- *Las filas representan el factor principal, procedimientos.*
- *Las columnas representan el factor temperatura.*
- *Las letras latinas representan el factor presión.*
- *Las letras griegas representan el factor tipo de catalizador.*

Tabla 5-11 Datos para el Ejemplo 5-2

	Temperaturas					
Procedimientos	T1	T2	T3	T4	$y_{i...}$	$y^2_{i...}$
P1	C β 5	B α 12	A δ 13	D γ 13	43	1849
P2	B γ 6	C δ 10	D α 15	A β 11	42	1764
P3	D δ 7	A γ 5	B β 5	C α 7	24	576
P4	A α 11	D β 10	C γ 8	B δ 9	38	1444
$y_{.j..}$	29	37	41	40	147	5633
$y^2_{.j..}$	841	1369	1681	1600	5491	
$\sum y^2_{ij(hp)}$	231	369	483	420	1503	

Por otra parte, los totales y sus cuadrados para las letras latinas y griegas se muestran en las tablas 5-12 y 5-13

Tabla 5-12.

letra latina	Observaciones				$y_{..h.}$	$y^2_{..h.}$
A	11	5	13	11	40	1600
B	6	12	5	9	32	1024
C	5	10	8	7	30	900
D	7	10	15	13	45	2025
					147	5549

Tabla 5-13.

letra griega	Observaciones				$y_{...p}$	$y^2_{...p}$
α	11	12	15	7	45	2025
β	5	10	5	11	31	961
γ	6	5	8	13	32	1024
δ	7	10	13	9	39	1521
					147	5531

Seguidamente calculamos las sumas de cuadrados

$$SCT = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} y^2_{ij..} - \frac{y^2_{....}}{K^2} = 1503 - \frac{147^2}{4^2} = 152{,}4375$$

$$SCF = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{4} y^2_{i...} - \frac{y^2_{....}}{K^2} = \frac{5633}{4} - \frac{147^2}{4^2} = 57{,}6875$$

$$SCC = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{4} y^2_{.j..} - \frac{y^2_{....}}{K^2} = \frac{5491}{4} - \frac{147^2}{4^2} = 22{,}1875$$

$$SCL = \frac{1}{K}\sum_{h=1}^{4} y^2_{..h.} - \frac{y^2_{....}}{K^2} = \frac{5549}{4} - \frac{147^2}{4^2} = 36{,}6875$$

$$SCG = \frac{1}{K}\sum_{p=1}^{4} y^2_{...p} - \frac{y^2_{....}}{K^2} = \frac{5531}{4} - \frac{147^2}{4^2} = 32{,}1875 \quad ,$$

y la suma de cuadrados del error

$$SCR = SCT - SCF - SCC - SCL - SCG = 3{,}6875.$$

La tabla ANOVA para este diseño es la siguiente

Tabla 5-14. Análisis de la varianza para los datos del Ejemplo 5-2

Fuentes de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados medios	F_{exp}
E. fila	57.6875	3	19.2291	15.644
E. columna	22.1875	3	7.3958	6.017
E. letra latina	36.6875	3	12.2291	9.949
E. letra griega	32.1875	3	10.7291	8.729
Residual	3.6875	3	1.2291	
TOTAL	152.4375	15		

Si realizamos el contraste al 5 % y comparamos los valores de las F_{exp} con el valor de la F teórica ($F_{0{,}05;3{,}3} = 9{,}28$), se concluye que se aceptan las hipótesis de igualdad de efectos de columnas y de letra griega y se rechazan las hipótesis de igualdad de efecto de filas y de letra latina. Es decir, son significativos los efectos de los procedimientos y presión, pero no lo son los efectos de la temperatura y catalizador.

Bibliografía utilizada

∗ **García Leal, J. & Lara Porras, A.M.** (1998). *"Diseño Estadístico de Experimentos. Análisis de la Varianza."* Grupo Editorial Universitario.

∗ **Lara Porras, A.M.** (2000). *"Diseño Estadístico de Experimentos, Análisis de la Varianza y Temas Relacionados: Tratamiento Informático mediante SPSS."* Proyecto Sur de Ediciones.