Capítulo 6

Diseños factoriales con tres factores

Supongamos que hay a niveles para el factor A, b niveles del factor B y c niveles para el factor C y que cada réplica del experimento contiene todas las posibles combinaciones de tratamientos, es decir contiene los abc tratamientos posibles.

6.1. El modelo sin replicación

El modelo estadístico para este diseño es:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + u_{ijk}$$

$$\text{con} \quad i = 1, 2, \cdots, a \quad ; \quad j = 1, 2, \cdots, b \quad ; \quad k = 1, 2, \cdots, c \quad \text{donde}$$

- τ_i, β_j y γ_k: Son los efectos producidos por el nivel i-ésimo del factor A, $(\sum_i \tau_i = 0)$, por el nivel j-ésimo del factor B, $\left(\sum_j \beta_j = 0\right)$ y por el nivel k-ésimo del factor C, $(\sum_k \gamma_k = 0)$, respectivamente.

- $(\tau\beta)_{ij}$, $(\tau\gamma)_{ik}$, $(\beta\gamma)_{jk}$ y $(\tau\beta\gamma)_{ijk}$: Son los efectos producidos por las interacciones entre $A \times B$, $A \times C$, $B \times C$ y $A \times B \times C$, respectivamente

$$\begin{aligned}\sum_i (\tau\beta)_{ij} &= \sum_j (\tau\beta)_{ij} = \sum_i (\tau\gamma)_{ik} = \sum_k (\tau\gamma)_{ik} = \sum_j (\beta\gamma)_{jk} = \sum_k (\beta\gamma)_{jk} = \\ &= \sum_i (\tau\beta\gamma)_{ijk} = \sum_j (\tau\beta\gamma)_{ijk} = \sum_k (\tau\beta\gamma)_{ijk} = 0\end{aligned}$$

Supondremos que se toma una observación por cada combinación de factores, por tanto, hay un total de $n = abc$ observaciones.

Parámetros a estimar:

Parámetros	Número
μ	1
τ_i	$a-1$
β_j	$b-1$
γ_k	$c-1$
$(\tau\beta)_{ij}$	$(a-1)(b-1)$
$(\tau\gamma)_{ik}$	$(a-1)(c-1)$
$(\beta\gamma)_{jk}$	$(b-1)(c-1)$
$(\tau\beta\gamma)_{ijk}$	$(a-1)(b-1)(c-1)$
σ^2	1
Total	$abc+1$

A pesar de las restricciones impuestas al modelo, el número de parámetros $(abc+1)$ supera al número de obsevaciones (abc). Por lo tanto, algún parámetro no será estimable.

6.1.1. Estimación de los parámetros del modelo

Los estimadores máximo verosímiles de los parámetros del modelo son

- El E.M.V. de μ es $\widehat{\mu} = \bar{y}_{...}$
- Los E.M.V. de los efectos principales son:
  $\widehat{\tau}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}$; $\widehat{\beta}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}$; $\widehat{\gamma}_k = \bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...}$
- Los E.M.V. de las interacciones de segundo orden son: $\left(\widehat{\tau\beta}\right)_{ij} = \overline{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}$

  $(\widehat{\tau\gamma})_{ik} = \overline{y}_{i.k} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...}$; $\left(\widehat{\beta\gamma}\right)_{jk} = \overline{y}_{.jk} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...}$
- El E.M.V. de la interacción de tercer orden
  $$\begin{aligned}\left(\widehat{\tau\beta\gamma}\right)_{ijk} &= y_{ijk} - \widehat{\mu} - \widehat{\tau}_i - \widehat{\beta}_j - \widehat{\gamma}_k - \left(\widehat{\tau\beta}\right)_{ij} - (\widehat{\tau\gamma})_{ik} - \left(\widehat{\beta\gamma}\right)_{jk} = \\ &= y_{ijk} - \overline{y}_{ij.} - \bar{y}_{i.k} - \bar{y}_{.jk} + \bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...}\end{aligned}$$

6.1.2. Descomposición de la variabilidad

En este modelo la variabilidad total se descompone en:

$$SCT = SCA + SCB + SCC + SC(AB) + SC(AC) + SC(BC) + SC(ABC) + SCR$$

Estas sumas de cuadrados se pueden expresar como:

- $SCT = \sum_{i,j,k} y_{ijk}^2 - \left(y_{\dots}^2\right)/(abc)$; $SCA = \left(\sum_i y_{i..}^2\right)/bc - \left(y_{\dots}^2\right)/(abc)$
- $SCB = \left(\sum_j y_{.j.}^2\right)/(ac) - \left(y_{\dots}^2\right)/(abc)$; $SCC = \left(\sum_k y_{..k}^2\right)/(ab) - \left(y_{\dots}^2\right)/(abc)$
- $SC(AB) = \left(\sum_{i,j} y_{ij.}^2\right)/c - \left(y_{\dots}^2\right)/(abc) - SCA - SCB$: *S. C. de la interacción* $A \times B$
- $SC(AC) = \left(\sum_{i,k} y_{i.k}^2\right)/b - \left(y_{\dots}^2\right)/(abc) - SCA - SCC$: *S. C. de la interacción* $A \times C$
- $SC(BC) = \left(\sum_{j,k} y_{.jk}^2\right)/a - \left(y_{\dots}^2\right)/(abc) - SCB - SCC$: *S. C. de la interacción* $B \times C$
- $SC(ABC) = \sum_{i,j,k} y_{ijk}^2 - \left(y_{\dots}^2\right)/(abc) - SCA - SCB - SCC - SC(AB) - SC(AC) -$
  $-SC(BC)$: *S. C. de la interacción* $A \times B \times C$

Al tratarse de un modelo sin replicación, los contrastes sólo se pueden realizar si se supone que la interacción de tercer orden es cero. En esta hipótesis, $CM(ABC) = CMR$ y los contrastes de cada uno de los factores e interacciones comparan su cuadrado medio correspondiente con la varianza residual para construir el estadístico de contraste.

El objetivo del análisis es realizar los contrastes de hipótesis nula que se muestran a continuación junto con el estadístico de contraste correspondiente:

i) $H_{0A} \equiv \tau_1 = \cdots = \tau_a = 0 : F_A = \dfrac{CMA}{CMR} \leadsto^{H_{0A}} F_{(a-1),(a-1)(b-1)(c-1)}$

ii) $H_{0B} \equiv \beta_1 = \cdots = \beta_b = 0 : F_B = \dfrac{CMB}{CMR} \leadsto^{H_{0B}} F_{(b-1),(a-1)(b-1)(c-1)}$

iii) $H_{0C} \equiv \gamma_1 = \cdots = \gamma_c = 0 : F_C = \dfrac{CMC}{CMR} \leadsto^{H_{0C}} F_{(c-1),(a-1)(b-1)(c-1)}$

iv) $H_{0(AB)} \equiv (\tau\beta)_{ij} = 0, \forall i,j : F_{(AB)} = \dfrac{CM(AB)}{CMR} \leadsto^{H_{0(AB)}} F_{(a-1)(b-1),(a-1)(b-1)(c-1)}$

v) $H_{0(AC)} \equiv (\tau\gamma)_{ik} = 0, \forall i,k : F_{(AC)} = \dfrac{CM(AC)}{CMR} \leadsto^{H_{0(AB)}} F_{(a-1)(c-1),(a-1)(b-1)(c-1)}$

vi) $H_{0(BC)} \equiv (\beta\gamma)_{jk} = 0, \forall\, j,k : F_{(BC)} = \dfrac{CM(BC)}{CMR} \leadsto^{H_{0(ACB)}} F_{(b-1)(c-1),(a-1)(b-1)(c-1)}$

Fijado un nivel de significación α, se rechaza la H_0 correspondiente, si $F_{\exp} > F_{\text{teórica}}$.

Tabla ANOVA: Modelo factorial con tres factores (sin replicación)

F. V.	S. C.	G. L.	C. M.	F_{exp}
Factor A	SCA	$a-1$	CMA	CMA/CMR
Factor B	SCB	$b-1$	CMB	CMB/CMR
Factor C	SCC	$c-1$	CMC	CMC/CMR
$A \times B$	$SC(AB)$	$(a-1)(b-1)$	$CM(AB)$	$CM(AB)/CMR$
$A \times C$	$SC(AC)$	$(a-1)(c-1)$	$CM(AC)$	$CM(AC)/CMR$
$B \times C$	$SC(BC)$	$(b-1)(c-1)$	$CM(BC)$	$CM(BC)/CMR$
$A \times B \times C$	$SC(ABC)$	$(a-1)(b-1)(c-1)$	CMR	$CM(ABC)/CMR$
TOTAL	SCT	$abc-1$	CMT	

Ejemplo 6.1

Se están investigando los efectos sobre la resistencia del papel que producen la concentración de fibra de madera (factor A), la presión del tanque (factor B) y el tiempo de cocción de la pulpa (factor C). Se seleccionan dos niveles de la concentración de madera (τ_1, τ_2), tres niveles de la presión ($\beta_1, \beta_2, \beta_3$) y dos niveles del tiempo de cocción (γ_1, γ_2). Pueden considerarse todos los factores fijos. Analizar los resultados y obtener las conclusiones apropiadas.

	γ_1			γ_2		
	β_1	β_2	β_3	β_1	β_2	β_3
τ_1	$y_{111} = 10$	$y_{121} = 20$	$y_{131} = 2$	$y_{112} = 6$	$y_{122} = 23$	$y_{132} = -2$
τ_2	$y_{211} = 26$	$y_{221} = 28$	$y_{231} = 30$	$y_{212} = 30$	$y_{222} = 34$	$y_{232} = 32$

Vamos a calcular los totales marginales y las sumas de cuadrados

$A \times B$	β_1	β_2	β_3	A
τ_1	$y_{11.} = 16$	$y_{12.} = 43$	$y_{13.} = 0$	$y_{1..} = 59$
τ_2	$y_{21.} = 56$	$y_{22.} = 62$	$y_{23.} = 62$	$y_{2..} = 180$
B	$y_{,1.} = 72$	$y_{,2.} = 105$	$y_{,3.} = 62$	$y_{...} = 239$

$A \times C$	γ_1	γ_2
τ_1	$y_{1,1} = 32$	$y_{1,2} = 27$
τ_2	$y_{2,1} = 84$	$y_{2,2} = 96$
C	$y_{.,1} = 116$	$y_{.,2} = 123$

$B \times C$	γ_1	γ_2
β_1	$y_{,11} = 36$	$y_{,12} = 36$
β_2	$y_{,21} = 48$	$y_{,22} = 57$
β_3	$y_{,31} = 32$	$y_{,22} = 30$

$$SCT = \sum_{i,j,k} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abc} = 6513 - \frac{(239)^2}{12} = 1752{,}9$$

$$SCA = \frac{\sum_i y_{i..}^2}{bc} - \frac{y_{...}^2}{abc} = \frac{(59)^2 + (180)^2}{6} - \frac{(239)^2}{12} = 1220{,}08$$

$$SCB = \frac{\sum_j y_{.j.}^2}{ac} - \frac{y_{...}^2}{abc} = \frac{(72)^2 + (105)^2 + (62)^2}{4} - \frac{(239)^2}{12} = 253{,}17$$

$$SCC = \frac{\sum_k y_{..k}^2}{ab} - \frac{y_{...}^2}{abc} = \frac{(116)^2 + (123)^2}{6} - \frac{(239)^2}{12} = 4{,}083$$

$$SC(AB) = \frac{\sum_{i,j} y_{ij.}^2}{c} - \frac{y_{...}^2}{abc} - SCA - SCB = \frac{(16)^2 + \cdots + (62)^2}{2} - \frac{(239)^2}{12} - \\ -SCA - SCB = 231{,}16$$

$$SC(BC) = \frac{\sum_{j,k} y_{.jk}^2}{a} - \frac{y_{...}^2}{abc} - SCB - SCC = \frac{(36)^2 + \cdots + (30)^2}{2} - \frac{(239)^2}{12} - \\ -SCB - SCC = 17{,}16$$

$$SC(AC) = \frac{\sum_{i,k} y_{i.k}^2}{b} - \frac{y_{...}^2}{abc} - SCA - SCC = \frac{(32)^2 + \cdots + (96)^2}{3} - \frac{(239)^2}{12} - \\ -SCB - SCC = 24{,}08$$

$$SCR = SCT - SCA - SCB - SCC - SC(AB) - SC(AC) - SC(BC) - \\ -SC(ABC) = 3{,}167.$$

La Tabla ANOVA resultante es:

F. V.	S.C.	G.L.	C.M.	F_{exp}
Factor A	1220,08	1	1220,08	770,579
Factor B	253,16	2	126,58	79,947
Factor C	4,083	1	4,083	2,579
$A \times B$	231,16	2	115,58	73,00
$A \times C$	24,083	1	24,083	15,211
$B \times C$	17,167	2	8,583	5,421
Residual	3,167	2	1,583	
TOTAL	1752,9	11		

Realizando los contrastes al nivel de significación del 5 %, se concluye que son significativos los efectos de los factores A ($F_{0,05,1,2} = 18{,}51$), B y $A \times B$ ($F_{0,05,2,2} = 19$).

6.2. El modelo con replicación

El modelo estadístico para este diseño es:

$$
\begin{array}{rcl}
y_{ijkl} & = & \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + u_{ijkl} \\
i & = & 1, 2, \cdots, a \;\; ; \;\; j = 1, 2, \cdots, b \;\; ; \;\; k = 1, 2, \cdots, c \;\; ; \;\; l = 1, 2, \cdots, r
\end{array}
$$

donde r es el número de replicaciones y $n = abcr$ es el número de observaciones.

El número de parámetros de este modelo es, como en el modelo de tres factores sin replicación, $abc + 1$ pero en este caso el número de observaciones es $abcr$.

Las sumas de cuadrados tienen las siguientes expresiones:

- $SCT = \sum_{i,j,k,l} y_{ijkl}^2 - \left(y_{....}^2\right)/(abcr)$; $SCA = \left(\sum_i y_{i...}^2\right)/(bcr) - \left(y_{....}^2\right)/(abcr)$
- $SCB = \left(\sum_j y_{.j..}^2\right)/(acr) - \left(y_{....}^2\right)/(abcr)$; $SCC = \left(\sum_k y_{..k.}^2\right)/(abr) - \left(y_{....}^2\right)/(abcr)$
- $SC(AB) = \left(\sum_{i,j} y_{ij..}^2\right)/(cr) - \left(y_{....}^2\right)/(abcr) - SCA - SCB$
- $SC(BC) = \left(\sum_{j,k} y_{.jk.}^2\right)/(ar) - \left(y_{....}^2\right)/(abcr) - SCB - SCC$
- $SC(AC) = \left(\sum_{i,k} y_{i.k.}^2\right)/(br) - \left(y_{....}^2\right)/(abcr) - SCA - SCC$
- $SC(ABC) = \left(\sum_{i,j,k} y_{ijk.}^2\right)/r - \left(y_{....}^2\right)/(abcr) - SCA - SCB - SCC - SC(AB) -$
  $- SC(AC) - SC(BC)$
- $SCR = SCT - SCA - SCB - SCC - SC(AB) - SC(AC) - SC(BC) - SC(ABC)$.

En este modelo, el objetivo del análisis es realizar los contrastes de hipótesis nula que, junto al estadístico de contraste, se muestran a continuación:

i) $H_{0A} \equiv \tau_1 = \cdots = \tau_a = 0 : F_A = \dfrac{CMA}{CMR} \rightsquigarrow^{H_{0A}} F_{(a-1),abc(r-1)}$

ii) $H_{0B} \equiv \beta_1 = \cdots = \beta_b = 0 : F_B = \dfrac{CMB}{CMR} \rightsquigarrow^{H_{0B}} F_{(b-1),abc(r-1)}$

iii) $H_{0C} \equiv \gamma_1 = \cdots = \gamma_c = 0 : F_C = \dfrac{CMC}{CMR} \rightsquigarrow^{H_{0C}} F_{(c-1),abc(r-1)}$

iv) $H_{0(AB)} \equiv (\tau\beta)_{ij} = 0, \forall i, j : F_{(AB)} = \dfrac{CM(AB)}{CMR} \rightsquigarrow^{H_{0(AB)}} F_{(a-1)(b-1),abc(r-1)}$

v) $H_{0(AC)} \equiv (\tau\gamma)_{ik} = 0, \forall i,k : F_{(AC)} = \dfrac{CM(AC)}{CMR} \rightsquigarrow^{H_{0(Ac)}} F_{(a-1)(c-1),abc(r-1))}$

vi) $H_{0(BC)} \equiv (\beta\gamma)_{jk} = 0, \forall j,k : F_{(BC)} = \dfrac{CM(BC)}{CMR} \rightsquigarrow^{H_{0(BC)}} F_{(b-1)(c-1),abc(r-1)}$

vii) $H_{0(ABC)} \equiv (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0, \forall i,j,k : F_{(ABC)} = \dfrac{CM(ABC)}{CMR} \rightsquigarrow^{H_{0(ABC)}} F_{(a-1)(b-1)(c-1),abc(r-1)}$

Tabla ANOVA: Modelo factorial con tres factores (con replicación)

F. V.	S. C.	G. L.	C. M.	F_{exp}
Factor A	SCA	$a-1$	CMA	CMA/CMR
Factor B	SCB	$b-1$	CMB	CMB/CMR
Factor C	SCC	$c-1$	CMC	CMC/CMR
AxB	$SC(AB)$	$(a-1)(b-1)$	$CM(AB)$	$CM(AB)/CMR$
AxC	$SC(AC)$	$(a-1)(c-1)$	$CM(AC)$	$CM(AC)/CMR$
BxC	$SC(BC)$	$(b-1)(c-1)$	$CM(BC)$	$CM(BC)/CMR$
AxBxC	$SC(ABC)$	$(a-1)(b-1)(c-1)$	$CM(ABC)$	$CM(ABC)/CMR$
Residual	SCR	$abc(r-1)$	CMR	
TOTAL	SCT	$abcr-1$	CMT	

La diagnosis y validación del modelo se realiza igual que en los modelos anteriores.

Ejemplo 6.2

Supongamos de nuevo la situación del Ejemplo 6.2 en la que, en este caso, se seleccionan tres niveles de la concentración de madera $(\tau_1, \tau_2, \tau_{3)}$ *y dos niveles de la presión* (β_1, β_2) *y del tiempo de cocción* (γ_1, γ_2)*. Pueden considerarse todos los factores fijos. Se realiza un experimento factorial con dos réplicas y se recopìlan los siguientes datos. Analizar los resultados y obtener las conclusiones apropiadas.*

	γ_1		γ_2	
Operario	β_1	β_2	β_1	β_2
τ_1	$y_{1111} = -3$ $y_{1112} = -1$	$y_{1211} = -1$ $y_{1212} = 0$	$y_{1121} = -1$ $y_{1122} = 0$	$y_{1221} = 1$ $y_{1222} = 1$
τ_2	$y_{2111} = 0$ $y_{2112} = 1$	$y_{2211} = 2$ $y_{2212} = 1$	$y_{2121} = 2$ $y_{2122} = 3$	$y_{2221} = 6$ $y_{2222} = 5$
τ_3	$y_{2111} = 5$ $y_{3112} = 4$	$y_{3211} = 7$ $y_{3212} = 6$	$y_{3121} = 7$ $y_{3122} = 9$	$y_{3221} = 10$ $y_{3222} = 11$

Vamos a calcular los totales marginales y las sumas de cuadrados

$A\times B\times C$	γ_1		γ_2		
	β_1	β_2	β_1	β_2	A
τ_1	$y_{111.}=-4$	$y_{121.}=-1$	$y_{112.}=-1$	$y_{122.}=2$	-4
τ_2	$y_{211.}=1$	$y_{221.}=3$	$y_{212.}=5$	$y_{222.}=11$	20
τ_3	$y_{311.}=9$	$y_{321.}=13$	$y_{312.}=16$	$y_{322.}=21$	59

$A\times B$	β_1	β_2
τ_1	$y_{11..}=-5$	$y_{12..}=1$
τ_2	$y_{21..}=6$	$y_{22..}=14$
τ_3	$y_{31..}=25$	$y_{32..}=34$
B	$y_{,1..}=26$	$y_{,2..}=49$

$A\times C$	γ_1	γ_2
τ_1	$y_{1,1.}=-5$	$y_{1,2.}=1$
τ_2	$y_{2,1.}=4$	$y_{2,2.}=16$
τ_3	$y_{3,1.}=22$	$y_{3,2.}=37$
C	$y_{.,1.}=21$	$y_{.,2.}=54$

$B\times C$	γ_1	γ_2
β_1	$y_{,11.}=6$	$y_{,12.}=20$
β_2	$y_{,21.}=15$	$y_{,22.}=34$

$$SCT=\sum\nolimits_{i,j,k,l} y_{ijkl}^2-\frac{y_{....}^2}{abcr}=571-\frac{75^2}{24}=336{,}62$$

$$SCA=\frac{\sum_i y_{i...}^2}{bcr}-\frac{y_{....}^2}{abcr}=\frac{(-4)^2+(20)^2+(59)^2}{8}-\frac{75^2}{24}=252{,}75$$

$$SCB=\frac{\sum_j y_{.j..}^2}{acr}-\frac{y_{....}^2}{abcr}=\frac{(26)^2+(49)^2}{12}-\frac{75^2}{24}=22{,}042$$

$$SCC=\frac{\sum_k y_{..k.}^2}{abr}-\frac{y_{....}^2}{abcr}=\frac{(21)^2+(54)^2}{12}-\frac{75^2}{24}=45{,}37$$

$$SC(AB)=\frac{\sum_{i,j} y_{ij..}^2}{cr}-\frac{y_{....}^2}{abcr}-SCA-SCB=\frac{(-5)^2+\cdots+(34)^2}{4}-\frac{75^2}{24}-$$
$$-252{,}75-22{,}042=0{,}583$$

$$SC(BC)=\frac{\sum_{j,k} y_{.jk.}^2}{ar}-\frac{y_{....}^2}{abcr}-SCB-SCC=\frac{(6)^2+\cdots+(34)^2}{6}-\frac{75^2}{24}-$$
$$-22{,}042-45{,}37=1{,}042$$

$$SC(AC)=\frac{\sum_{i,k} y_{i.k.}^2}{br}-\frac{y_{....}^2}{abcr}-SCA-SCC=\frac{(-5)^2+\cdots+(37)^2}{4}-\frac{75^2}{24}-$$

$$-252{,}75 - 45{,}37 = 5{,}25$$

$$SC(ABC) = \frac{\sum_{i,j,k} y_{i.jk.}^2}{r} - \frac{y_{....}^2}{abcr} - SCA - SCB - SCC - SC(AB) -$$
$$-SC(AC) - SC(BC) = \frac{(-4)^2 + (-1)^2 + \cdots + (21)^2}{4} - \frac{75^2}{24} -$$
$$-252{,}75 - 22{,}042 - 45{,}37 - 0{,}583 - 5{,}25 - 1{,}042 = 1{,}083$$

$$SCR = SCT - SCA - SCB - SCC - SC(AB) - SC(AC) - SC(BC) - SC(ABC) = 8{,}5.$$

La Tabla ANOVA resultante es:

F. V.	S. C.	G. L.	C. M.	F_{exp}
Factor A	252,75	2	1265,375	178,412
Factor B	22,042	1	22,042	31,118
Factor C	45,375	1	45,375	64,059
$A \times B$	0,583	2	0,292	0,412
$A \times C$	5,25	2	2,625	3,706
$B \times C$	1,042	1	1,042	1,471
$A \times B \times C$	1,083	2	0,542	0,765
Residual	8,5	12	0,708	
TOTAL	336,625	23		

Realizando los contrastes al nivel de significación del 5 %, se concluye que son significativos los efectos de los factores A ($F_{0,05,2,12} = 3{,}89$), B y C ($F_{0,05,1,12} = 4{,}75$) pero no son significativos los efectos de todas las interacciones.

6.3. Diseños factoriales con más de tres factores

Las ideas anteriores se extienden inmediatamente para modelos factoriales con cualquier número de factores[1]. Para más de tres factores, las interacciones superiores a tres suelen suponerse nulas, lo que permite obtener una estimación del error experimental.

Consideremos un diseño con cuatro factores a niveles N_1, N_2, N_3, N_4. Las $N_1 \times N_2 \times N_3 \times N_4$ observaciones permiten estimar:

- La media general μ
- $\sum_{i=1}^{4} (N_i - 1) = \sum_{i=1}^{4} N_i - 4$ efectos principales

[1] Véase Peña (1989) página 116.

- $(N_i - 1)(N_j - 1)$ interacciones de segundo orden para cada una de las $\binom{4}{2}$ parejas de interacciones de segundo orden
- $(N_i - 1)(N_j - 1)(N_k - 1)$ interacciones de tercer orden para cada una de las $\binom{4}{3}$ interacciones de tercer orden
- Si suponemos que las interacciones de cuarto orden son cero, tendremos:
  $(N_1 - 1)(N_2 - 1)(N_3 - 1)(N_4 - 1)$
  grados de libertad para calcular los residuos y efectuar los contrastes.

Bibliografía utilizada

∗ **Lara Porras, A.M.** (2000). *"Diseño Estadístico de Experimentos, Análisis de la Varianza y Temas Relacionados: Tratamiento Informático mediante SPSS."* Proyecto Sur de Ediciones.