Capítulo 6

Análisis de la covarianza

INTRODUCCIÓN

- Es una combinación de dos técnicas: Análisis de la Varianza y Análisis de Regresión.

- En el Análisis de la Covarianza:

  - ★ La variable respuesta es **cuantitativa** y
  - ★ Las variables independientes son **cualitativas y cuantitativas**.

ANÁLISIS DE LA COVARIANZA UNIFACTORIAL

La variable respuesta (Y) está relacionada con una variable cualitativa (τ) y una o más variables cuantitativas (X).

- La variable cualitativa (τ) recibe el nombre de **factor**

- La variable cuantitativa (X) recibe el nombre de **covariable o variable concomitante**.

EJEMPLO

Una industria química prueba tres fórmulas diferentes de un pegamento industrial. Se sabe que la resistencia del pegamento (variable respuesta) está relacionada con el espesor de la capa adherente (covariable).

Fórmulas del pegamento					
1		2		3	
y	x	y	x	y	x
19	33	22	24	23	22
25	40	18	31	19	30

MODELO UNIFACTORIAL CON UNA COVARIABLE

$$\boxed{\mathrm{y}_{ij} = \mu + \tau_i + \beta(x_{ij} - \overline{x}_{..}) + u_{ij} \quad ; \quad i = 1, \cdots, I \quad ; \quad j = 1, \cdots, n_i}$$

- τ_i : El efecto producido por el tratamiento $i-$ésimo
- β : El coeficiente de regresión lineal
- x_{ij} : El valor de la covariable correspondiente a la observación y_{ij}
- $\bar{x}_{..}$: La media de la covariable

En un diseño completamente aleatorizado la suma total de cuadrados puede descomponerse en suma de cuadrados entre tratamientos y en suma de cuadrados residual.

NOTACIÓN

$$\boxed{T_{yy} = A_{yy} + E_{yy} \quad ; \quad T_{xx} = A_{xx} + E_{xx} \quad ; \quad T_{xy} = A_{xy} + E_{xy}}$$

Nota: Las expresiones de estas sumas de cuadrados y productos cruzados están dadas en el Apéndice.

AJUSTE DEL MODELO

- $T_{yy(aj)}$: Suma total de cuadrados de y ajustada por la covariable

$$\boxed{T_{yy(aj)} = T_{yy} - \frac{T_{xy}^2}{T_{xx}}}$$

Entonces:

$T_{yy(aj)}$: es la variación debida al efecto del factor más el efecto residual.

- $E_{yy(aj)}$: Suma de cuadrados de y dentro de los tratamientos ajustada por la covariable

$$\boxed{E_{yy(aj)} = E_{yy} - \frac{E_{xy}^2}{E_{xx}}}$$

Entonces:

$E_{yy(aj)}$: es la variación de y asociada al término del error.

- $A_{yy(aj)}$: Suma de cuadrados entre tratamientos ajustada

$$\boxed{A_{yy(aj)} = T_{yy(aj)} - E_{yy(aj)}}$$

Entonces:

$A_{yy(aj)}$: es la variación entre los valores de la variable dependiente debida sólo al efecto del nivel del factor.

CONTRASTES DE HIPÓTESIS

CONTRASTE DE LOS EFECTOS DEL FACTOR

$$\begin{cases} H_0: & \tau_i = 0 \quad \forall i \\ H_1: & \tau_i \neq 0 \text{ por lo menos para algún } i \end{cases}$$

Se contrasta mediante el valor experimental del estadístico

$$F = \frac{A_{yy(\mathrm{aj})}(I-1)}{E_{yy(\mathrm{aj})}(N-I-1)}$$

CONTRASTE DEL COEFICIENTE DE REGRESIÓN

$$\begin{cases} H_0: & \beta = 0 \\ H_1: & \beta \neq 0 \end{cases}$$

El estadístico de contraste de la hipótesis nula está dado por:

$$F = \frac{CMReg}{CME_{(\mathrm{aj})}} = \frac{E_{xy}^2 E_{xx}}{E_{yy(\mathrm{aj})}(N-I-1)}$$

Tabla ANOVA. Diseño unifactorial con una covariable

F.V.	S. C.	Grados	C.M.	F_{exp}
Regresión	$\frac{E_{xy}^2}{E_{xx}}$	1	$CMReg = \frac{E_{xy}^2}{E_{xx}}$	$\frac{CMReg}{CME_{(\mathrm{aj})}}$
Trat.(aj)	$A_{yy(\mathrm{aj})}$	$I-1$	$CMTr_{(\mathrm{aj})} = \frac{A_{yy(\mathrm{aj})}}{I-1}$	$\frac{CMTr_{(\mathrm{aj})}}{CME_{(\mathrm{aj})}}$
Error (aj)	$E_{yy(\mathrm{aj})}$	$N-I-1$	$CME_{(\mathrm{aj})} = \frac{E_{yy(\mathrm{aj})}}{N-I-1}$	
Total	T_{yy}	$N-1$		

DISEÑO EN BLOQUES COMPLETOS ALEATORIZADOS CON UNA COVARIABLE

$$\boxed{y_{ij} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \beta(x_{ij} - \bar{x}_{..}) + u_{ij} \quad ; \quad i = 1, \ldots, I \quad ; \quad j = 1, \ldots, J}$$

- τ_i : Efecto producido por el nivel $i-$ésimo del factor principal
- γ_j : Efecto producido por el nivel $j-$ésimo bloque

Tabla ANOVA. Diseño en bloques aleatorizados con una covariable

F.V.	S. C.	Grados	C.M.	$F_{\exp}$
Bloque	$-$	$-$	$-$	
Tratamientos	$-$	$-$	$-$	
Error	SCE	$IJ - I - J$	$CME = \dfrac{SCE}{IJ - I - J}$	
Total		$IJ - 2$	$-$	
Trat. mas error	SCE'	$J(I-1) - 1$		
Trat. ajustados	SC_{aj}	$I - 1$	$CM_{(aj)} = \dfrac{SC_{(aj)}}{I-1}$	$\dfrac{CM_{(aj)}}{CME}$

$$\boxed{S'_{xx} = T_{xx} + E_{xx}} \quad ; \quad \boxed{S'_{xy} = T_{xy} + E_{xy}} \quad ; \quad \boxed{S'_{yy} = T_{yy} + E_{yy}}$$

$$\boxed{SCE = E_{yy} - \frac{E_{xy}^2}{E_{xx}}} \quad ; \quad \boxed{SCE' = S'_{yy} - \frac{\left(S'_{xy}\right)^2}{S'_{xx}}} \quad ; \quad \boxed{SC_{(aj)} = SCE' - SCE}$$

Nota: Las expresiones de estas sumas de cuadrados y productos cruzados están dadas en el Apéndice .

APÉNDICE

MODELO UNIFACTORIAL CON UNA COVARIABLE

$$\boxed{T_{xx} = \sum_{ij} x_{ij}^2 - \frac{x_{..}^2}{N}}$$

$$\boxed{T_{yy} = \sum_{ij} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}}$$

$$\boxed{T_{xy} = \sum_{ij} x_{ij}y_{ij} - \frac{x_{..}y_{..}}{N}}$$

$$\boxed{A_{xx} = \sum_{i=1}^{I} \frac{x_{i.}^2}{n_i} - \frac{x_{..}^2}{N}}$$

$$\boxed{A_{yy} = \sum_{i=1}^{I} \frac{y_{i.}^2}{n_i} - \frac{y_{..}^2}{N}}$$

$$\boxed{A_{xy} = \sum_{i=1}^{I} \frac{x_{i.}y_{i.}}{n_i} - \frac{x_{..}y_{..}}{N}}$$

$$\boxed{E_{xx} = \sum_{ij} x_{ij}^2 - \sum_{i} \frac{x_{i.}^2}{n_i}}$$

$$\boxed{E_{yy} = \sum_{ij} y_{ij}^2 - \sum_{i} \frac{y_{i.}^2}{n_i}}$$

$$\boxed{E_{xy} = \sum_{ij} x_{ij}y_{ij} - \sum_{i} \frac{x_{i.}y_{i.}}{n_i}}$$

MODELO EN BLOQUES COMPLETOS ALEATORIZADOS CON UNA COVARIABLE

$$\boxed{T_{xx} = \sum_{ij} x_{ij}^2 - \frac{x_{..}^2}{IJ}} \quad \boxed{T_{yy} = \sum_{ij} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{IJ}} \quad \boxed{T_{xy} = \sum_{ij} x_{ij} y_{ij} - \frac{x_{..} y_{..}}{IJ}}$$

$$\boxed{A_{xx} = \sum_{i=1}^{I} \frac{x_{i.}^2}{J} - \frac{x_{..}^2}{IJ}} \quad \boxed{A_{yy} = \sum_{i=1}^{I} \frac{y_{i.}^2}{J} - \frac{y_{..}^2}{IJ}} \quad \boxed{A_{xy} = \sum_{i=1}^{I} \frac{x_{i.} y_{i.}}{J} - \frac{x_{..} y_{..}}{IJ}}$$

$$\boxed{R_{xx} = \sum_{i=1}^{I} \frac{\overline{x}_{.j}^2}{I} - \frac{x_{..}^2}{IJ}} \quad \boxed{R_{yy} = \sum_{i=1}^{I} \frac{\overline{y}_{.j}^2}{I} - \frac{y_{..}^2}{IJ}} \quad \boxed{R_{xy} = \sum_{i=1}^{I} \frac{x_{i.} y_{i.}}{I} - \frac{x_{..} y_{..}}{IJ}}$$

$$\boxed{E_{xx} = T_{xx} - A_{xx} - R_{xx}} \quad \boxed{E_{yy} = T_{yy} - A_{yy} - R_{yy}} \quad \boxed{E_{xy} = T_{xy} - A_{xy} - R_{xy}}$$

Bibliografía utilizada:

★ **Lara Porras A.M. (2000).** *"Diseño estadístico de experimentos, análisis de la varianza y temas relacionados: tratamiento informático mediante SPSS". Ed.: Proyecto Sur.*

⧫ **Temporalización:** Una hora