

Capítulo 10

Cadenas de Markov

PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Una sucesión de observaciones X_1, X_2, \dots se denomina **proceso estocástico**

- ◆ Si los valores de estas observaciones no se pueden predecir exactamente
- ◆ Pero se pueden especificar las probabilidades para los distintos valores posibles en cualquier instante de tiempo.

X_1 : v.a. que define el **estado inicial del proceso**

X_n : v.a. que define el **estado del proceso en el instante de tiempo n**

Para cada posible valor del estado inicial s_1 y para cada uno de los sucesivos valores s_n de los estados X_n , $n = 2, 3, \dots$, especificamos:

$$P(X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_1 = s_1, X_2 = s_2, \dots, X_n = s_n)$$

CADENAS DE MARKOV

Una cadena de Markov es un proceso estocástico en el que

Si el estado actual X_n y los estados previos X_1, \dots, X_{n-1} son conocidos



La probabilidad del estado futuro X_{n+1}

- ★ No depende de los estados anteriores X_1, \dots, X_{n-1} , y
- ★ Solamente depende del estado actual X_n .

Es decir,

- ♣ Para $n = 1, 2, \dots$ y
- ♣ Para cualquier sucesión de estados s_1, \dots, s_{n+1}

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_1 = s_1, X_2 = s_2, \dots, X_n = s_n) &= \\ &= P(X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_n = s_n) \end{aligned}$$

EJEMPLO

Consideremos que en un locutorio telefónico con 5 líneas de teléfono en un instante de tiempo dado puede haber un número cualquiera de líneas ocupadas. Durante un periodo de tiempo se observan las líneas telefónicas a intervalos de 2 minutos y se anota el número de líneas ocupadas en cada instante.

- Sea X_1 la v.a. que representa el número de líneas ocupadas al principio del periodo.
- Sea X_2 la v.a. que representa el número de líneas ocupadas cuando se observa en el segundo instante de tiempo, 2 minutos más tarde.
- En general, $n = 1, 2, \dots$ X_n es una v.a. que representa el número de líneas ocupadas cuando se observan en el instante de tiempo n -ésimo.
- ♣ El estado del proceso en cualquier instante de tiempo es el número de líneas que están siendo utilizadas en ese instante.
- ♣ Un proceso estocástico como el que acabamos de describir se llama **proceso de parámetro discreto**, ya que las líneas se observan en puntos discretos a lo largo del tiempo.

Para que el proceso estocástico del número de líneas ocupadas sea una cadena de Markov es necesario que la probabilidad de cada posible número de líneas ocupadas en cualquier instante de tiempo dependa solamente del número de líneas ocupadas 2 minutos antes.

CADENAS DE MARKOV FINITAS CON PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN ESTACIONARIAS

CADENA DE MARKOV FINITA

Es una cadena de Markov para la que existe sólo un número finito k de estados posibles s_1, \dots, s_k y en cualquier instante de tiempo la cadena está en uno de estos k estados.

PROBABILIDAD DE TRANSICIÓN

Es la probabilidad condicionada

$$P(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_i)$$

PROBABILIDAD DE TRANSICIÓN ESTACIONARIA

Una cadena de Markov tiene **probabilidades de transición estacionarias** si para cualquier par de estados s_i y s_j existe una probabilidad de transición p_{ij} tal que

$$P(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_i) = p_{ij} \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

MATRIZ DE TRANSICIÓN**MATRIZ ESTOCÁSTICA**

Es una matriz cuadrada cuyos elementos son no negativos y tal que la suma de los elementos de cada fila es igual a 1.

MATRIZ DE TRANSICIÓN EN UN SOLO PASO

Dada una cadena de Markov con k estados posibles s_1, \dots, s_k y probabilidades de transición estacionarias.

$$\boxed{\text{Si } p_{ij} = P(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i)} \Rightarrow \boxed{P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}}$$

La matriz de transición P de cualquier cadena de Markov finita con probabilidades de transición estacionarias es una matriz estocástica

EJEMPLO

Supongamos que el clima de una determinada región sólo puede ser soleado (s_1) o nublado (s_2) y que las condiciones del clima en mañanas sucesivas forman una cadena de Markov con probabilidades de transición estacionarias. La matriz de transición está dada por:

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}}$$

Si un día concreto está nublado, ¿cuál es la probabilidad de que esté nublado el día siguiente?

$$\boxed{p_{22} = 0.4}$$

MATRIZ DE TRANSICIÓN EN VARIOS PASOS

Dada una cadena de Markov con k posibles estados s_1, \dots, s_k
y matriz de transición P

Si notamos $p_{ij}^{(2)} = P(X_{n+2} = s_j | X_n = s_i)$



- $p_{ij}^{(2)}$: Elemento de la i -ésima fila y j -ésima columna de la matriz P^2
- P^m : Potencia m -ésima de P , con $(m = 2, 3, \dots)$ y
- ★ $p_{ij}^{(m)}$: Elemento de la fila i y de la columna j de la matriz P^m

GENERALIZANDO

P^m es la matriz de probabilidades $p_{ij}^{(m)}$ de que la cadena pase del estado s_i al estado s_j en m pasos; para cualquier valor de m , $(m = 2, 3, \dots)$.

P^m es la matriz de transición de m pasos de la cadena de Markov

EJEMPLO

En el ejemplo del clima con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Si un miércoles está nublado, ¿cuál es la probabilidad de que el viernes siguiente haga sol?

- Calculamos la matriz de transición en dos pasos,

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.67 & 0.33 \\ 0.66 & 0.34 \end{pmatrix} \implies \text{Probabilidad pedida es } 0.66$$

VECTOR DE PROBABILIDADES INICIALES

VECTOR DE PROBABILIDADES

$w = (w_1, \dots, w_k)$ se llama **vector de probabilidades** si

▲ $w_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, k$, y

▲ $\sum_{i=1}^k w_i = 1.$

Consideramos una cadena de Markov con:

1. s_1, \dots, s_k posibles estados en los que la cadena puede estar en el tiempo de observación inicial $n = 1$
2. Para $i = 1, \dots, k$; $P(X_1 = s_i) = v_i$, con $v_i \geq 0$ y $v_1 + \dots + v_k = 1$

VECTOR DE PROBABILIDADES INICIALES

El vector de probabilidades $v = (v_1, \dots, v_k)$ se llama **vector de probabilidades iniciales** de la cadena.

El vector de probabilidades iniciales y la matriz de transición determinan la probabilidad para el estado de la cadena en el segundo instante de tiempo, dicha probabilidad viene dada por el vector vP

- Además, si las probabilidades de los diversos estados en el instante n se especifican por el vector de probabilidades w , entonces

Las probabilidades en el instante $n + 1$ se especifican por el vector de probabilidades wP

EJEMPLO

En el ejemplo del clima con matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

- Suponemos que la probabilidad de que el miércoles haga sol es 0.2 y la probabilidad de que esté nublado es 0.8.

Calcular:

1. Probabilidad de que esté nublado el jueves.
2. Probabilidad de que esté nublado el viernes.
3. Probabilidad de que esté nublado el sábado.

Solución

1. Miércoles: $v = (0.2, 0.8) \implies w = vP = (0.62, 0.38)$

$$P[\text{esté nublado el jueves}] = 0.38$$

2. $w = vP = (0.62, 0.38) \implies vP^2 = vPP = wP = (0.662, 0.338)$

$$P[\text{esté nublado el viernes}] = 0.338$$

3. $vP^2 = (0.662, 0.338) \implies vP^3 = vP^2P = (0.6662, 0.3338)$

$$P[\text{esté nublado el sábado}] = 0.3338$$

EJEMPLO

Suponemos que en el ejemplo del locutorio telefónico los números de líneas que están siendo utilizadas en los instantes de tiempo $1, 2, \dots$ constituyen una cadena de Markov con probabilidades de transición estacionarias.

Sea b_i el estado en el que se están utilizando exactamente i líneas en un instante de tiempo determinado ($i = 0, 1, \dots, 5$)

Matriz de transición P

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

★ Si las cinco líneas están ocupadas en un instante de tiempo concreto.

$$\begin{aligned} P[\text{Exactamente 4 líneas ocupadas en el siguiente instante de tiempo}] &= \\ &= p_{65} = 0.4 \end{aligned}$$

★ Si en un instante de tiempo no hay ninguna línea ocupada.

$$\begin{aligned} P[\text{Al menos una línea ocupada en el siguiente instante de tiempo}] &= \\ &= 1 - p_{11} = 0.9 \end{aligned}$$

Matriz de transición en dos pasos

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.14 & 0.23 & 0.2 & 0.15 & 0.16 & 0.12 \\ 0.13 & 0.24 & 0.2 & 0.15 & 0.16 & 0.12 \\ 0.12 & 0.2 & 0.21 & 0.18 & 0.17 & 0.12 \\ 0.11 & 0.17 & 0.19 & 0.2 & 0.2 & 0.13 \\ 0.11 & 0.16 & 0.16 & 0.18 & 0.24 & 0.15 \\ 0.11 & 0.16 & 0.15 & 0.17 & 0.25 & 0.16 \end{pmatrix}$$

- ★ Si dos líneas están ocupadas en un instante de tiempo concreto.

$$P [\text{Cuatro líneas ocupadas dos instantes después}] = 0.17$$

- ★ Si en un instante de tiempo concreto hay tres líneas ocupadas.

$$P [\text{Dos instantes después haya de nuevo tres líneas ocupadas}] = 0.2$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.123 & 0.208 & 0.192 & 0.166 & 0.183 & 0.128 \\ 0.124 & 0.207 & 0.192 & 0.166 & 0.183 & 0.128 \\ 0.120 & 0.197 & 0.192 & 0.174 & 0.188 & 0.129 \\ 0.117 & 0.186 & 0.186 & 0.179 & 0.199 & 0.133 \\ 0.116 & 0.181 & 0.177 & 0.176 & 0.211 & 0.139 \\ 0.116 & 0.180 & 0.174 & 0.174 & 0.215 & 0.141 \end{pmatrix}$$

- ★ Si las 5 líneas están ocupadas en un instante de tiempo concreto.

$$P [\text{No haya líneas ocupadas tres instantes después}] = 0.116$$

★ Si una línea está ocupada en un instante de tiempo.

$$P[\text{Tres instantes después haya de nuevo una línea ocupada}] = 0.207$$

★ Al inicio del proceso de observación (instante $n = 1$)

$$P[\text{No haya líneas ocupadas}] = 0.5$$

$$P[\text{Haya una línea ocupada}] = 0.3$$

$$P[\text{Haya dos líneas ocupadas}] = 0.2$$

$$\text{Vector de probabilidades iniciales: } v = (0.5, 0.3, 0.2, 0, 0, 0)$$

$$\clubsuit vP = (0.13, 0.33, 0.22, 0.12, 0.1, 0.1) \implies$$

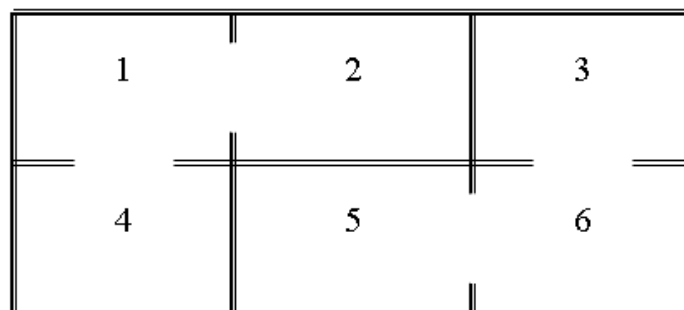
$$P[\text{No haya líneas ocupadas en el instante 2}] = 0.13$$

$$\clubsuit vP^2 = vPP = (0.1333, 0.227, 0.202, 0.156, 0.162, 0.12) \implies$$

$$P[\text{Haya 2 líneas ocupadas en el instante 3}] = 0.202$$

SUPUESTO PRÁCTICO DE CADENA DE MARKOV
--

- Consideremos el laberinto siguiente



- Supongamos que introducimos un ratón de forma aleatoria en una de las celdas de dicho laberinto.
 - ♣ Este ratón se traslada aleatoriamente de cada celda a una de las contiguas.

PLANTEAMIENTO DE LA CADENA DE MARKOV Y ESTUDIO

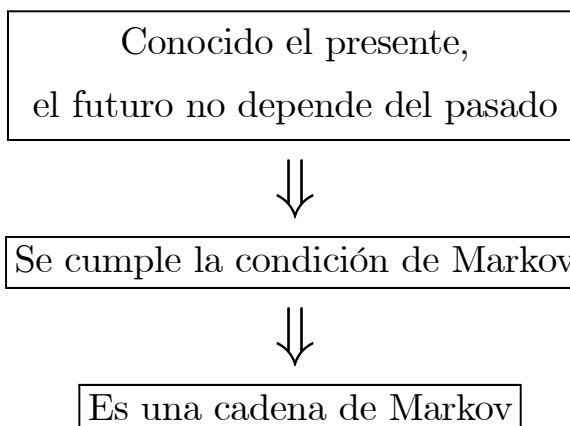
- Definición de las variables aleatorias

$$X_n \equiv \text{celda ocupada en el instante } n$$

■ Estados

Los posibles estados son: 1, 2, 3, 4, 5 y 6

■ Comprobar que se trata de una cadena de Markov (comprobar la condición de Markov)



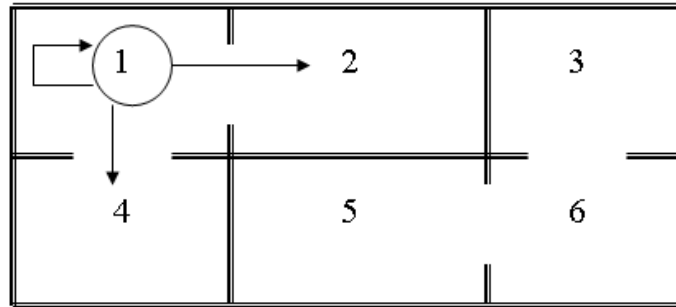
■ Probabilidades de transición

$$p_{ij} = P[X_{n+1} = j | X_n = i]$$

Matriz de transición

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} & p_{56} \\ p_{61} & p_{62} & p_{63} & p_{64} & p_{65} & p_{66} \end{pmatrix}$$

Desde el estado 1



$$p_{11} = P[X_{n+1} = 1 | X_n = 1]$$

$$p_{12} = P[X_{n+1} = 2 | X_n = 1]$$

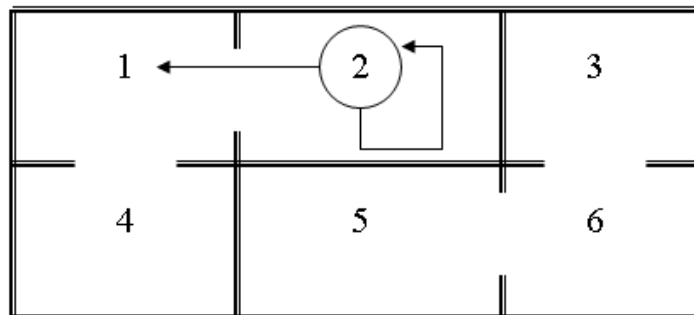
$$p_{13} = P[X_{n+1} = 3 | X_n = 1] = 0$$

$$p_{14} = P[X_{n+1} = 4 | X_n = 1]$$

$$p_{15} = P[X_{n+1} = 5 | X_n = 1] = 0$$

$$p_{16} = P[X_{n+1} = 6 | X_n = 1] = 0$$

Desde el estado 2



$$p_{21} = P[X_{n+1} = 1 | X_n = 2]$$

$$p_{22} = P[X_{n+1} = 2 | X_n = 2]$$

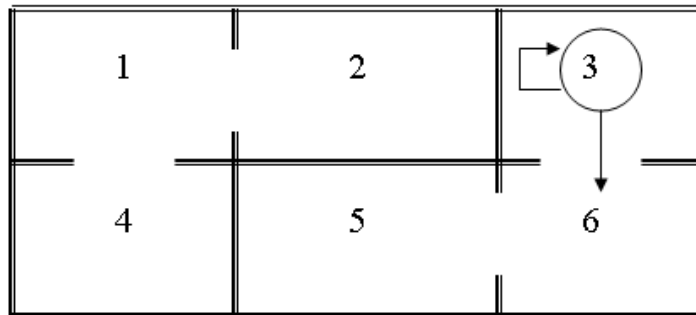
$$p_{23} = P[X_{n+1} = 3 | X_n = 2] = 0$$

$$p_{24} = P[X_{n+1} = 4 | X_n = 2] = 0$$

$$p_{25} = P[X_{n+1} = 5 | X_n = 2] = 0$$

$$p_{26} = P[X_{n+1} = 6 | X_n = 2] = 0$$

Desde el estado 3



$$p_{31} = P[X_{n+1} = 1 | X_n = 3] = 0$$

$$p_{32} = P[X_{n+1} = 2 | X_n = 3] = 0$$

$$p_{33} = P[X_{n+1} = 3 | X_n = 3]$$

$$p_{34} = P[X_{n+1} = 4 | X_n = 3] = 0$$

$$p_{35} = P[X_{n+1} = 5 | X_n = 3] = 0$$

$$p_{36} = P[X_{n+1} = 6 | X_n = 3]$$

Desde el estado 4



$$p_{41} = P[X_{n+1} = 1 | X_n = 4]$$

$$p_{42} = P[X_{n+1} = 2 | X_n = 4] = 0$$

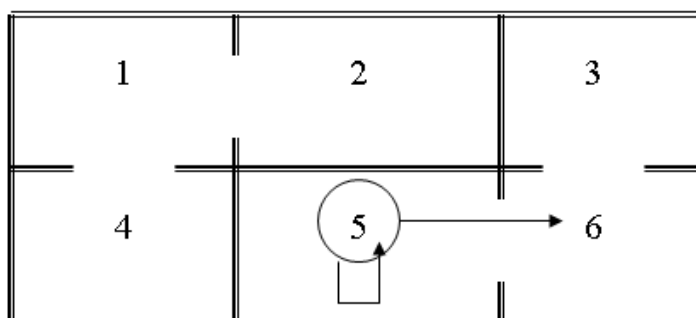
$$p_{43} = P[X_{n+1} = 3 | X_n = 4] = 0$$

$$p_{44} = P[X_{n+1} = 4 | X_n = 4]$$

$$p_{45} = P[X_{n+1} = 5 | X_n = 4] = 0$$

$$p_{46} = P[X_{n+1} = 6 | X_n = 4] = 0$$

Desde el estado 5



$$p_{51} = P[X_{n+1} = 1 | X_n = 5] = 0$$

$$p_{52} = P[X_{n+1} = 2 | X_n = 5] = 0$$

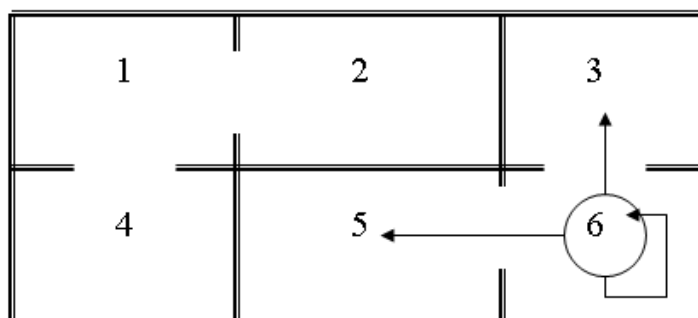
$$p_{53} = P[X_{n+1} = 3 | X_n = 5] = 0$$

$$p_{54} = P[X_{n+1} = 4 | X_n = 5] = 0$$

$$p_{55} = P[X_{n+1} = 5 | X_n = 5]$$

$$p_{56} = P[X_{n+1} = 6 | X_n = 5]$$

Desde el estado 6



$$p_{61} = P[X_{n+1} = 1 | X_n = 6] = 0$$

$$p_{62} = P[X_{n+1} = 2 | X_n = 6] = 0$$

$$p_{63} = P[X_{n+1} = 3 | X_n = 6]$$

$$p_{64} = P[X_{n+1} = 4 | X_n = 6] = 0$$

$$p_{65} = P[X_{n+1} = 5 | X_n = 6]$$

$$p_{66} = P[X_{n+1} = 6 | X_n = 6]$$

- ¿Son estacionarias las probabilidades de transición?

p_{ij} no depende del instante en que se encuentre el proceso



las probabilidades de transición son estacionarias

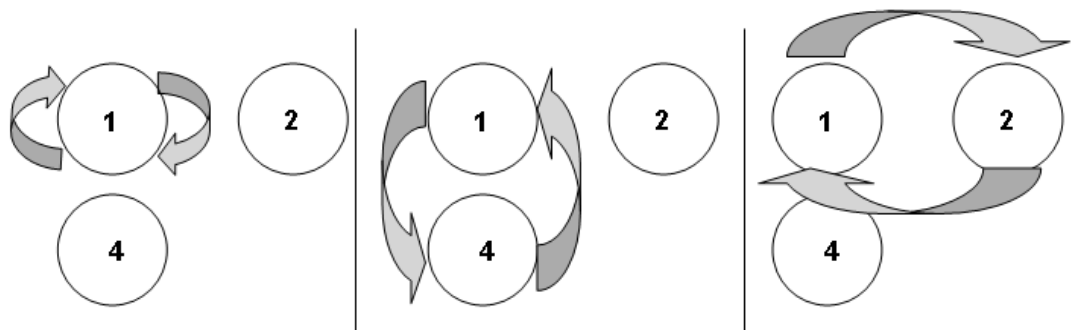
- Matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & p_{14} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & 0 & 0 & p_{36} \\ p_{41} & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} & p_{56} \\ 0 & 0 & p_{63} & 0 & p_{65} & p_{66} \end{pmatrix}$$

- Matriz de transición en dos pasos

P^2

Desde el estado 1



Matriz de transición en dos pasos

$$p_{11}^{(2)} = p_{11}^2 + p_{14}p_{41} + p_{12}p_{21}$$

$$p_{12}^{(2)} = p_{12}p_{22} + p_{11}p_{12}$$

$$p_{14}^{(2)} = p_{14}p_{44} + p_{11}p_{14}$$

$$p_{21}^{(2)} = p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21}$$

$$p_{22}^{(2)} = p_{22}^2 + p_{21}p_{12}$$

$$p_{24}^{(2)} = p_{21}p_{14}$$

$$p_{33}^{(2)} = p_{33}^2 + p_{36}p_{63}$$

$$p_{35}^{(2)} = p_{36}p_{65}$$

$$p_{36}^{(2)} = p_{36}p_{66} + p_{33}p_{36}$$

$$p_{41}^{(2)} = p_{41}p_{11} + p_{44}p_{41}$$

$$p_{42}^{(2)} = p_{41}p_{12}$$

$$p_{44}^{(2)} = p_{44}^2 + p_{41}p_{14}$$

$$p_{53}^{(2)} = p_{56}p_{63}$$

$$p_{55}^{(2)} = p_{55}^2 + p_{56}p_{65}$$

$$p_{56}^{(2)} = p_{55}p_{56} + p_{56}p_{66}$$

$$p_{63}^{(2)} = p_{63}p_{33} + p_{66}p_{63}$$

$$p_{65}^{(2)} = p_{65}p_{55} + p_{66}p_{65}$$

$$p_{66}^{(2)} = p_{66}^2 + p_{63}p_{36} + p_{65}p_{56}$$

■ Vector de probabilidades iniciales

$$v = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$$

$$P[\text{estar en la celda 1 en el instante 1}] = p_1$$

$$P[\text{estar en la celda 2 en el instante 1}] = p_2$$

$$P[\text{estar en la celda 3 en el instante 1}] = p_3$$

$$P[\text{estar en la celda 4 en el instante 1}] = p_4$$

$$P[\text{estar en la celda 5 en el instante 1}] = p_5$$

$$P[\text{estar en la celda 6 en el instante 1}] = p_6$$

- Probabilidad de estar en cierta celda en el instante de tiempo 2

$$vP = ([p_1p_{11} + p_2p_{21} + p_4p_{41}], [p_1p_{12} + p_2p_{22}], [p_3p_{33} + p_6p_{63}], \\ [p_1p_{14} + p_4p_{44}], [p_5p_{55} + p_6p_{65}], [p_3p_{36} + p_5p_{56} + p_6p_{66}])$$

$$P[\text{estar en la celda 1 en el instante 2}] = p_1p_{11} + p_2p_{21} + p_4p_{41}$$

$$P[\text{estar en la celda 2 en el instante 2}] = p_1p_{12} + p_2p_{22}$$

$$P[\text{estar en la celda 3 en el instante 2}] = p_3p_{33} + p_6p_{63}$$

$$P[\text{estar en la celda 4 en el instante 2}] = p_1p_{14} + p_4p_{44}$$

$$P[\text{estar en la celda 5 en el instante 2}] = p_5p_{55} + p_6p_{65}$$

$$P[\text{estar en la celda 6 en el instante 2}] = p_3p_{36} + p_5p_{56} + p_6p_{66}$$

CASO A

Consideremos que la probabilidad de introducir el ratón en cada una de las celdas del laberinto para comenzar el experimento es la misma. Una vez dentro del laberinto el ratón se va a cualquier celda contigua o se queda en la celda en la que está con la misma probabilidad.

- Probabilidades de transición

Desde el estado 1

$$p_{11} = P[X_{n+1} = 1 | X_n = 1] = 1/3$$

$$p_{12} = P[X_{n+1} = 2 | X_n = 1] = 1/3$$

$$p_{13} = P[X_{n+1} = 3 | X_n = 1] = 0$$

$$p_{14} = P[X_{n+1} = 4 | X_n = 1] = 1/3$$

$$p_{15} = P[X_{n+1} = 5 | X_n = 1] = 0$$

$$p_{16} = P[X_{n+1} = 6 | X_n = 1] = 0$$

Desde el estado 2

$$p_{21} = P[X_{n+1} = 1 | X_n = 2] = 1/3$$

$$p_{22} = P[X_{n+1} = 2 | X_n = 2] = 1/3$$

$$p_{23} = P[X_{n+1} = 3 | X_n = 2] = 0$$

$$p_{24} = P[X_{n+1} = 4 | X_n = 2] = 1/3$$

$$p_{25} = P[X_{n+1} = 5 | X_n = 2] = 0$$

$$p_{26} = P[X_{n+1} = 6 | X_n = 2] = 0$$

Desde el estado 3

$$p_{31} = P[X_{n+1} = 1 | X_n = 3] = 0$$

$$p_{32} = P[X_{n+1} = 2 | X_n = 3] = 0$$

$$p_{33} = P[X_{n+1} = 3 | X_n = 3] = 1/2$$

$$p_{34} = P[X_{n+1} = 4 | X_n = 3] = 0$$

$$p_{35} = P[X_{n+1} = 5 | X_n = 3] = 0$$

$$p_{36} = P[X_{n+1} = 6 | X_n = 3] = 1/2$$

Desde el estado 4

$$p_{41} = P[X_{n+1} = 1 | X_n = 4] = 1/2$$

$$p_{42} = P[X_{n+1} = 2 | X_n = 4] = 0$$

$$p_{43} = P[X_{n+1} = 3 | X_n = 4] = 0$$

$$p_{44} = P[X_{n+1} = 4 | X_n = 4] = 1/2$$

$$p_{45} = P[X_{n+1} = 5 | X_n = 4] = 0$$

$$p_{46} = P[X_{n+1} = 6 | X_n = 4] = 0$$

Desde el estado 5

$$p_{51} = P[X_{n+1} = 1 | X_n = 5] = 0$$

$$p_{52} = P[X_{n+1} = 2 | X_n = 5] = 0$$

$$p_{53} = P[X_{n+1} = 3 | X_n = 5] = 0$$

$$p_{54} = P[X_{n+1} = 4 | X_n = 5] = 0$$

$$p_{55} = P[X_{n+1} = 5 | X_n = 5] = 1/2$$

$$p_{56} = P[X_{n+1} = 6 | X_n = 5] = 1/2$$

Desde el estado 6

$p_{61} = P[X_{n+1} = 1 | X_n = 6] = 0$

$p_{62} = P[X_{n+1} = 2 | X_n = 6] = 0$

$p_{63} = P[X_{n+1} = 3 | X_n = 6] = 1/3$

$p_{64} = P[X_{n+1} = 4 | X_n = 6] = 0$

$p_{65} = P[X_{n+1} = 5 | X_n = 6] = 1/3$

$p_{66} = P[X_{n+1} = 6 | X_n = 6] = 1/3$

■ Matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

■ Vector de probabilidades iniciales

$$v = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right)$$

★ $P[\text{estar en la celda 1 en el instante 1}] = \frac{1}{6}$

★ $P[\text{estar en la celda 2 en el instante 1}] = \frac{1}{6}$

★ $P[\text{estar en la celda 3 en el instante 1}] = \frac{1}{6}$

★ $P[\text{estar en la celda 4 en el instante 1}] = \frac{1}{6}$

$$\star P[\text{estar en la celda 5 en el instante 1}] = \frac{1}{6}$$

$$\star P[\text{estar en la celda 6 en el instante 1}] = \frac{1}{6}$$

■ Probabilidad de estar en cierta celda en el instante de tiempo 2

$$vP = \left(\frac{2}{9}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}, \frac{5}{36}, \frac{2}{9} \right)$$

$$P[\text{Celda 1 en el instante 2}] = \frac{2}{9}$$

$$P[\text{Celda 2 en el instante 2}] = \frac{5}{36}$$

$$P[\text{Celda 3 en el instante 2}] = \frac{5}{36}$$

$$P[\text{Celda 4 en el instante 2}] = \frac{5}{36}$$

$$P[\text{Celda 5 en el instante 2}] = \frac{5}{36}$$

$$P[\text{Celda 6 en el instante 2}] = \frac{2}{9}$$

CASO B

Supongamos que en el laberinto el ratón se traslada a celdas contiguas con igual probabilidad y que la probabilidad de introducir el ratón en cada una de las celdas del laberinto para comenzar el experimento es

$$P[X_1 = 1] = 0.2$$

$$P[X_1 = 2] = 0.2$$

$$P[X_1 = 3] = 0.1$$

$$P[X_1 = 4] = 0.05$$

$$P[X_1 = 5] = 0.05$$

$$P[X_1 = 6] = 0.4$$

■ Matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

■ Vector de probabilidades iniciales

$$v = \left(\frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}, \frac{5}{100}, \frac{5}{100}, \frac{4}{10} \right)$$

$$P[\text{Celda 1 en el instante 1}] = 0.2$$

$$P[\text{Celda 2 en el instante 1}] = 0.2$$

$$P[\text{Celda 3 en el instante 1}] = 0.1$$

$$P[\text{Celda 4 en el instante 1}] = 0.05$$

$$P[\text{Celda 5 en el instante 1}] = 0.05$$

$$P[\text{Celda 6 en el instante 1}] = 0.4$$

■ En el instante 2: Calculamos vP

$$vP = (0.191666, 0.1666, 0.18333, 0.091666, 0.158333, 0.208333)$$

$$P[\text{Celda 1, instante 2}] = 0.191666$$

$$P[\text{Celda 2, instante 2}] = 0.1666$$

$$P[\text{Celda 3, instante 2}] = 0.1666$$

$$P[\text{Celda 4, instante 2}] = 0.091666$$

$$P[\text{Celda 5, instante 2}] = 0.158333$$

$$P[\text{Celda 6, instante 2}] = 0.208333$$

CASO C

Supongamos ahora que, en el laberinto el ratón irá a una celda contigua con probabilidad proporcional al número de la celda y que la probabilidad de introducir el ratón en cada una de las celdas del laberinto para comenzar el experimento es la misma.

■ Matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 & 0 & 4/7 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/9 & 0 & 0 & 6/9 \\ 1/5 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/11 & 6/11 \\ 0 & 0 & 3/14 & 0 & 5/14 & 6/14 \end{pmatrix}$$

■ Vector de probabilidades iniciales

$$v = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right)$$

$$P[\text{Celda 1 en el instante 1}] = \frac{1}{6}$$

$$P[\text{Celda 2 en el instante 1}] = \frac{1}{6}$$

$$P[\text{Celda 3 en el instante 1}] = \frac{1}{6}$$

$$P[\text{Celda 4 en el instante 1}] = \frac{1}{6}$$

$$P[\text{Celda 5 en el instante 1}] = \frac{1}{6}$$

$$P[\text{Celda 6 en el instante 1}] = \frac{1}{6}$$

- En el instante 2: Calculamos vP

$$vP = \left(\frac{71}{630}, \frac{10}{63}, \frac{23}{252}, \frac{8}{35}, \frac{125}{924}, \frac{379}{1386} \right)$$

$$P[\text{Celda 1 en el instante 2}] = \frac{71}{630}$$

$$P[\text{Celda 2 en el instante 2}] = \frac{10}{63}$$

$$P[\text{Celda 3 en el instante 2}] = \frac{23}{252}$$

$$P[\text{Celda 4 en el instante 2}] = \frac{8}{35}$$

$$P[\text{Celda 5 en el instante 2}] = \frac{125}{924}$$

$$P[\text{Celda 6 en el instante 2}] = \frac{379}{1386}$$

Bibliografía utilizada:

- ★ D.R. Cox, H.D. Miller (1970). *“The Theory Stochastic Processes”*. Methuen.
- ★ A.T. Bharucha-Reid (1960). *“Elements Of The Theory of Markov Processes And Their Applications”*. McGraw Hill Series in Probability and Statistics.

- ◆ **Temporalización:** Cuatro horas