

TEMA 5. MODELOS DE PROBABILIDAD CONTINUOS

5.1 Distribución Normal

5.1.1 La media y la varianza

5.1.2 Representación gráfica

5.1.3 Distribución Normal tipificada

5.1.4 Uso de tablas

5.1.5 Aditividad

5.1.6 Aproximación de una Binomial a Normal

5.2 Otros modelos continuos

❖ 5.1 Distribución Normal

➤ Una variable aleatoria continua, X , sigue una distribución normal de parámetros λ y σ

$$X \rightarrow N(\mu; \sigma)$$

si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\text{donde } \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ -\infty < \mu < \infty \\ \sigma > 0 \end{cases}$$

■ Puede comprobarse que se verifica:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

◇ 5.1.1 La media y la varianza

❖ Media

$$E[X] = \mu$$

❖ Varianza

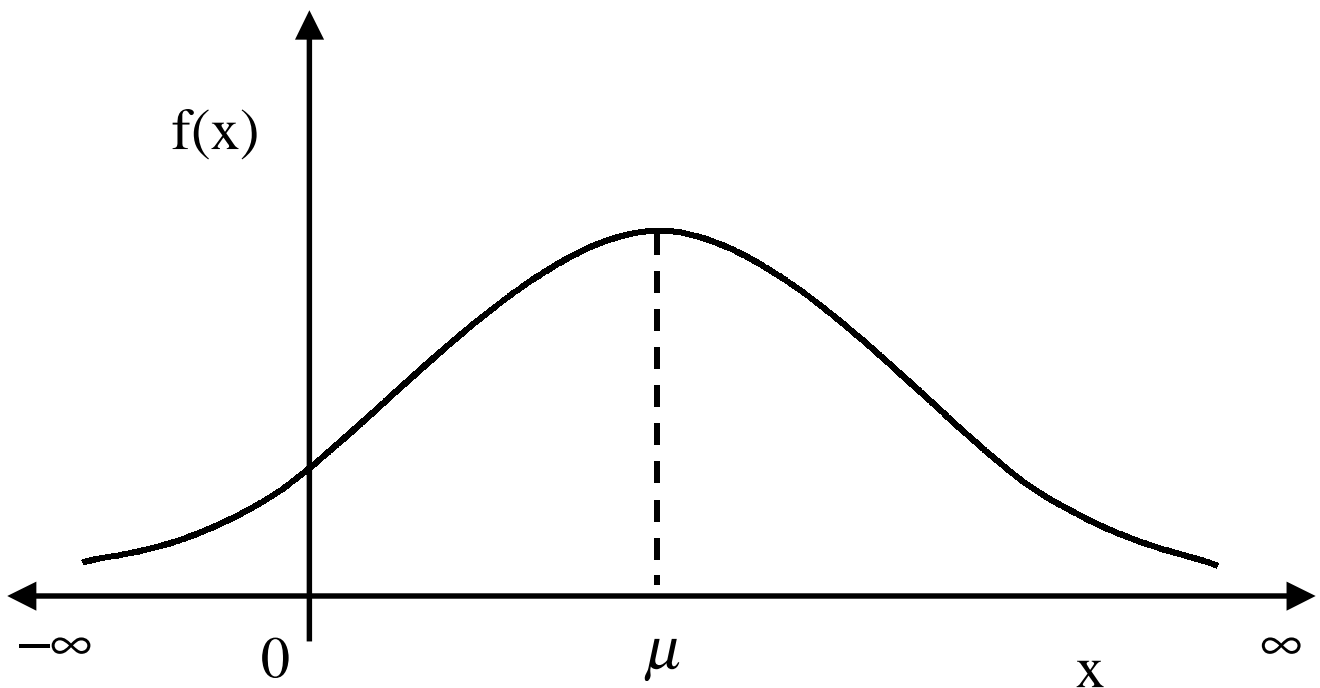
$$\text{Var}[X] = \sigma^2$$

❖ Desviación típica

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}$$

◇ 5.1.2 Representación gráfica

◇ Campana de Gauss



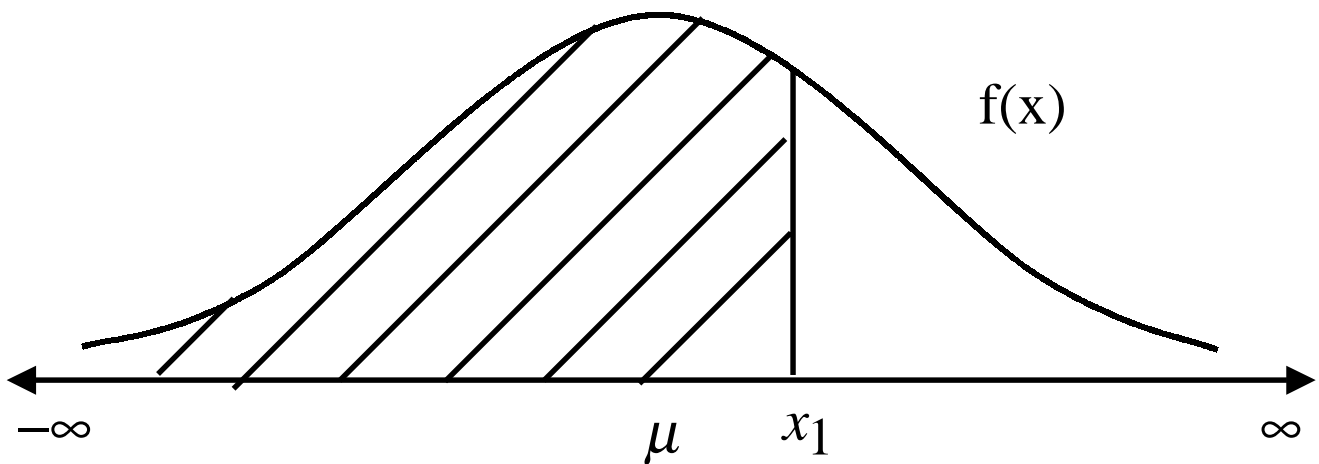
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

➤ **Se verifica:**

- ◇ **La curva es simétrica respecto a μ**
- ◇ **La media, la moda y la mediana coinciden**

❖ Función de distribución

$$F(x_1) = P(X \leq x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$



Área a la izquierda del punto x_1

◆ 5.1.3 Distribución Normal tipificada

➤ Una variable aleatoria continua, X , sigue una distribución normal de parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$

$$X \rightarrow N(0; 1)$$

si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$E[X] = \mu = 0$$

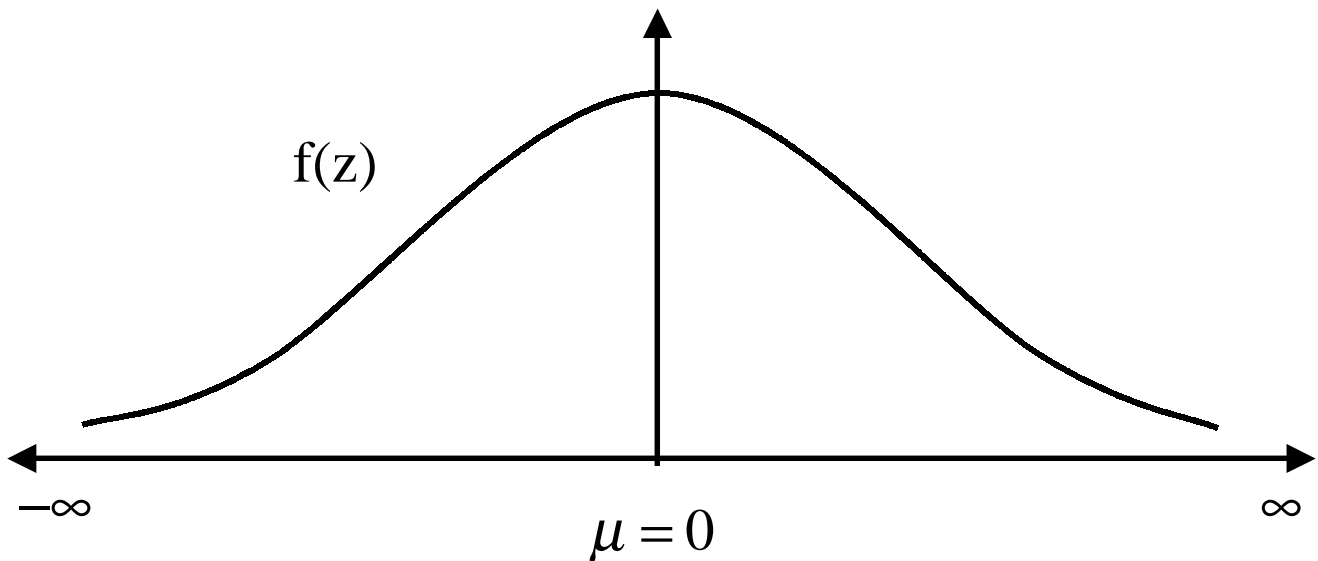
$$D. T.[X] = \sigma = 1$$

$$Var[X] = \sigma^2 = 1$$

☞ Si $X \rightarrow N(\mu ; \sigma)$, entonces la variable aleatoria

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \rightarrow N(0; 1)$$

❖ **Representación gráfica de la función de densidad de la distribución Normal tipificada**



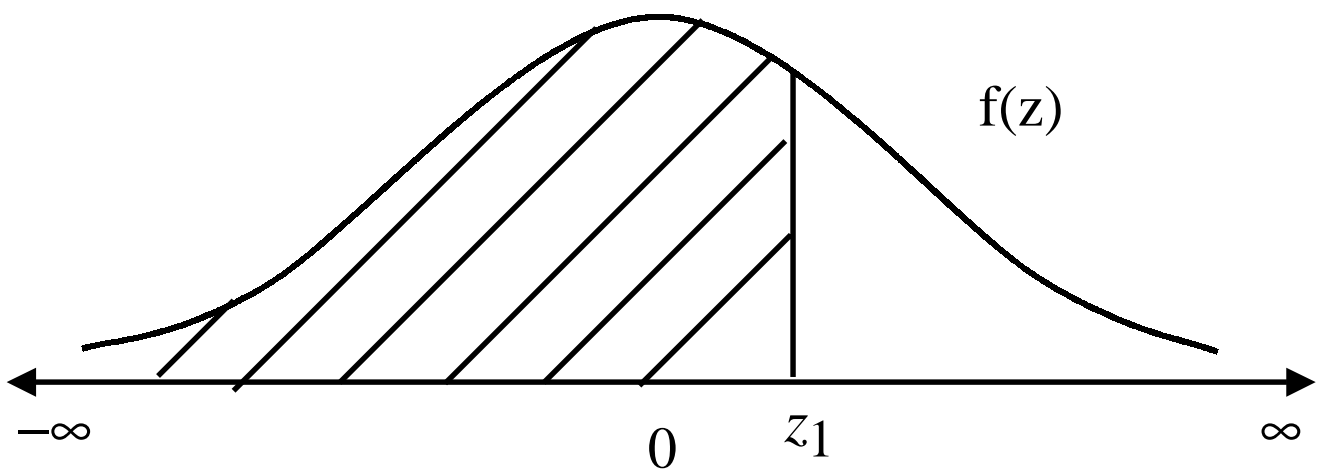
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = 1$$

➤ **Se verifica:**

- ◆ **La curva es simétrica respecto a 0**
- ◆ **La media, la moda y la mediana coinciden**

❖ **Función de distribución de la Normal tipificada**

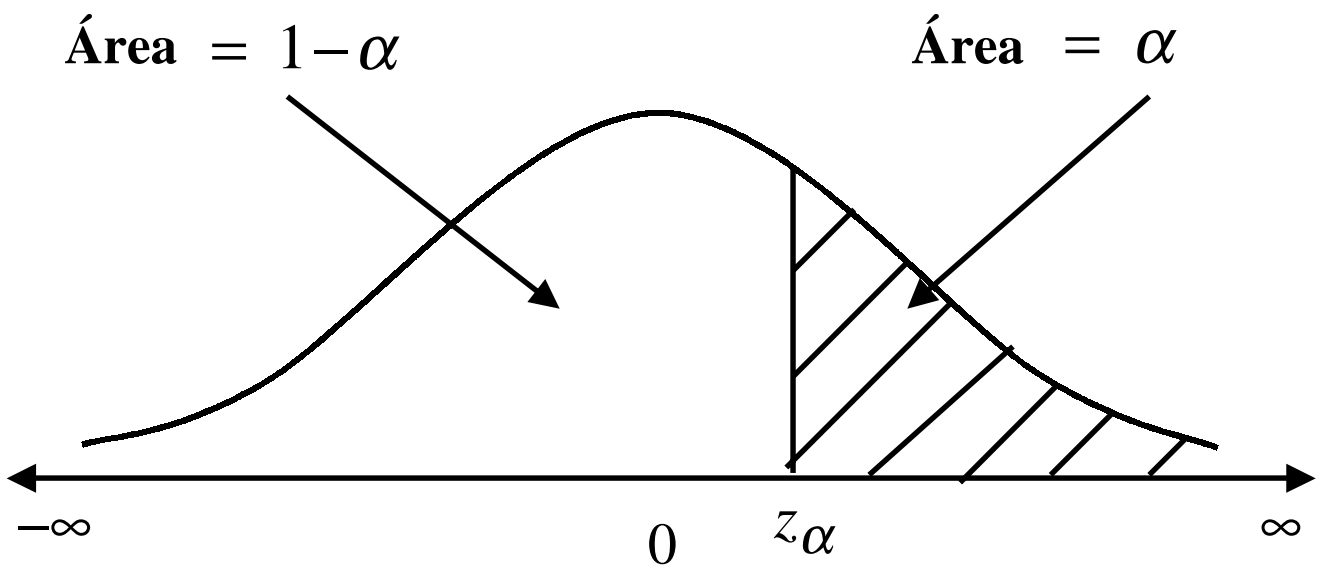
$$F(z_1) = P(Z \leq z_1) = \int_{-\infty}^{z_1} f(z) dz =$$
$$= \int_{-\infty}^{z_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



Área a la izquierda del punto z_1

◇ 5.1.4 Uso de tablas

$$\alpha = P(Z > z_\alpha) = \int_{z_\alpha}^{\infty} f(z) dz$$



Área a la derecha del punto z_α

◆ Ejemplo

□ Se sabe que la longitud de las alas extendidas de un tipo de ave rapaz es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal, de media 120 cm. y desviación típica 8 cm.

1. Calcúlese la probabilidad de que la longitud de un ave elegida al azar sea:

a.- Mayor de 130 cm

b.- Menor de 100 cm

c.- Está comprendido entre 110 y 130 cm

2. Obtener la longitud tal que solo el 10 % de las aves tienen una longitud superior.

Solución:

$$X \rightarrow N(120; 8)$$

1.

$$\begin{aligned} a. \quad P(X > 130) &= P\left(\frac{X - 120}{8} > \frac{130 - 120}{8}\right) = \\ &= P(Z > 1.25) = 0.1056 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b. \quad P(X < 100) &= P\left(Z < \frac{100-120}{8}\right) = P(Z < -2.5) \\ &= P(Z > 2.5) = 0.00621 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c. \quad P(110 < X < 130) &= P\left(\frac{110-120}{8} < Z < \frac{130-120}{8}\right) = \\ &= P(-1.25 < Z < 1.25) = 1 - 2P(Z > 1.25) = \\ &= 1 - 2 \times 0.1056 = 0.7888 \end{aligned}$$

$$2. \quad P(X > a) = 0.1$$

$$P\left(\frac{X-120}{8} > \frac{a-120}{8}\right) = P(Z > z_1) = 0.1 \Rightarrow$$

$$z_1 = 1.28 \Rightarrow \frac{a-120}{8} = 1.28 \Rightarrow$$

$$a = 1.28 \times 8 + 120 = 130.24$$

◆ Ejemplos

- Una de las mayores contribuciones a la contaminación atmosférica es la provocada por los hidrocarburos procedentes de los tubos de escape de los automóviles. Sea X : “gramos de hidrocarburos emitidos por un automóvil por cada milla recorrida”. Supongamos que X es una variable distribuida normalmente y que tiene una media de 1 gr. y una desviación típica de 0.25 gr.
- El plomo, como muchos otros elementos, está presente en el medio natural. La revolución industrial y la llegada del automóvil han incrementado la cantidad de plomo en el medio hasta el punto de que su concentración puede alcanzar niveles peligrosos. Sea X : “concentración de plomo en partes por millón en la corriente sanguínea de un individuo”. Supongamos que X es una variable normal con media 0.25 y desviación típica 0.11. Una concentración superior o igual a 0.6 partes por millón se considera extremadamente alta. ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo seleccionado aleatoriamente esté incluido en esta categoría?

◇ 5.1.5 Aditividad

➤ Sean k variables aleatorias, X_1, X_2, \dots, X_k , que verifican:

- Independientes entre sí
- $X_i \rightarrow N(\mu_i; \sigma_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$

➤ Sean k números reales, a_1, a_2, \dots, a_k

➤ Definimos la variable aleatoria X como:

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_k X_k$$



✓ En estas condiciones se verifica que la variable aleatoria X sigue una distribución Normal:

$$N \left(a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \dots + a_k \mu_k; \sqrt{a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_k^2 \sigma_k^2} \right)$$

◆ 5.1.6 Aproximación de una binomial a una Normal

➤ Sea X una v.a. con distribución Binomial

$$X \rightarrow B(n; p)$$

➤ Si se verifica que n es grande y p ni muy grande ni muy pequeño :

$$n > 30 \text{ y } 0.1 < p < 0.9 \quad \Rightarrow$$

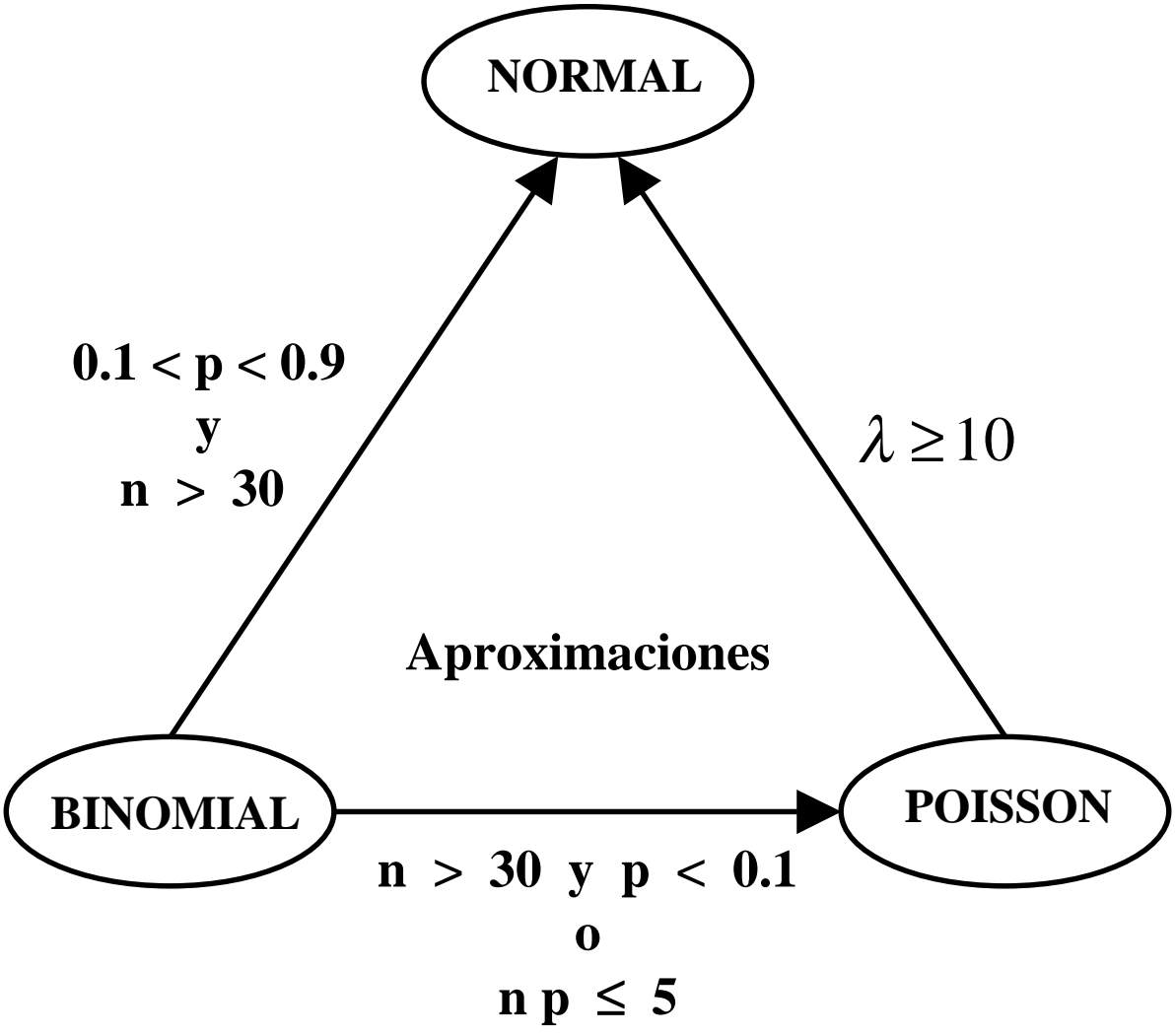
✓ La Distribución Binomial se aproxima a una distribución Normal de parámetros np y npq , respectivamente

$$X \rightarrow N(np; \sqrt{npq})$$



$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \rightarrow N(0; 1)$$

◇ Aproximaciones



❖ 5.2 Otros modelos continuos

Existen otros modelos de probabilidad continuos:

- **Uniforme**
- **Weibull**
- etc**