

LA CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL A PARTIR DE ACTIVIDADES DE ANÁLISIS DE DATOS

Liliana Tauber

Tesis Doctoral

Universidad de Sevilla

Directoras: Dra. Carmen Batanero

Dr. Victoria Sánchez

SEVILLA, 2001

INDICE

INTRODUCCIÓN	Pág. N°
	9
1. LA NATURALEZA DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	12
1.1. Introducción	12
1.2. El curso introductorio de estadística en la Universidad	13
1.3. El paso del análisis exploratorio de datos a la inferencia	14
1.4. La problemática del uso de ordenadores en la clase de estadística	15
1.5. La distribución normal y su enseñanza	16
1.6. Objetivos generales del estudio	17
2. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN	20
2.1. Introducción	20
2.2. Razonamiento estocástico en sujetos adultos. Heurísticas y sesgos	20
2.3. La distribución normal	22
2.3.1. Desarrollo de la idea de distribución y convergencia	23
- <i>La intuición del azar</i>	23
- <i>Distribuciones centradas</i>	24
2.3.2. Comprensión de propiedades de la distribución normal	25

<ul style="list-style-type: none"> - <i>Tipificación</i> - <i>La distribución normal como aproximación a distribuciones discretas</i> - <i>Distribución normal y teorema central del límite</i> - <i>Diversos niveles de concreción de un concepto en el estudio de la inferencia</i> 	25 26 26 27
<p>2.3.3. Factores que influyen en la compresión de la distribución normal</p> <ul style="list-style-type: none"> - <i>Ansiedad epistemológica</i> - <i>Diseño de cursos centrados en el estudio de otros factores que influyen en la competencia estadística</i> 	28 30
<p>2.3.4. Comprensión de las distribuciones muestrales</p> <ul style="list-style-type: none"> - <i>Comprensión del efecto del tamaño de la muestra sobre la variabilidad de la distribución muestral</i> - <i>El papel de las distribuciones muestrales en el contraste de hipótesis</i> 	31 32 32
<p>2.3.5. Diseño de cursos para estudiar el efecto de la enseñanza basada en ordenador en la compresión de distribuciones muestrales</p>	33
<p>2.4. Investigaciones sobre el papel del ordenador en la enseñanza y aprendizaje de conceptos estadísticos</p>	36
<p>2.4.1. Introducción</p>	36
<p>2.4.2. Análisis exploratorio de datos</p> <ul style="list-style-type: none"> - <i>Investigaciones en cursos de análisis exploratorio de datos con alumnos universitarios</i> - <i>Investigaciones en cursos de análisis exploratorio de datos con escolares</i> 	37 38 39
<p>2.4.3. Software utilizable en la enseñanza de la estadística</p>	41
<p>2.4.4. Investigación sobre la construcción del significado de la asociación mediante actividades de análisis de datos</p>	42
<p>2.4.5. Otras investigaciones sobre diferentes aspectos relacionados con el uso del ordenador en la enseñanza de la estadística</p> <ul style="list-style-type: none"> - <i>Conceptos básicos requeridos en un curso introductorio de estadística</i> - <i>Actitudes de los estudiantes</i> 	45 45 46
<p>2.5. Comprensión de gráficos</p>	46
<p>2.6. Conclusiones</p> <ul style="list-style-type: none"> - <i>Razonamiento estocástico en sujetos adultos</i> - <i>Investigaciones centradas en la distribución normal</i> - <i>Comprensión de las distribuciones muestrales</i> - <i>Investigaciones centradas en el papel del ordenador en la enseñanza y aprendizaje de conceptos estadísticos</i> - <i>Investigaciones centradas en la comprensión de gráficos</i> 	48 49 49 49 49 50
3. FUNDAMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN	
<p>3.1. Introducción</p>	53
<p>3.2. Marco teórico</p>	53
<p>3.2.1. Dimensión epistemológica: Significado institucional y personal de los objetos matemáticos</p>	53
<p>3.2.2. Elementos de significado</p>	55
<p>3.2.3. Tipos de funciones semióticas</p>	56
<p>3.2.4. Trayectorias didácticas</p>	57
<p>3.2.5. Evaluación de la comprensión</p>	58
<p>3.2.6. Agenda de investigación asociada al marco teórico</p>	59
<p>3.3. Objetivos específicos de la investigación</p>	60
<p style="padding-left: 20px;">Determinación del significado institucional de referencia</p>	60
<p style="padding-left: 20px;">Determinación del significado institucional local previsto y diseño de una secuencia didáctica</p>	61
<p style="padding-left: 20px;">Evaluación del significado institucional implementado en el curso</p>	62
<p style="padding-left: 20px;">Evaluación del significado personal construido por los alumnos del grupo a lo largo de la experiencia y al finalizar la misma</p>	62
<p>3.4. Metodología de la investigación</p>	63
<p>3.4.1. Enfoque general</p>	63
<p>3.4.2. Organización y fases de nuestra investigación</p>	63

3.4.3. Población y muestra	65
3.4.4. Instrumentos de recogida de datos	66
3.4.5. Técnicas de análisis de datos	67
4. DETERMINACIÓN DEL SIGNIFICADO DE REFERENCIA A PARTIR DE LIBROS DE TEXTO	69
4.1. Introducción	69
4.2. Metodología seguida en la determinación del significado de referencia	69
4.3. Elementos extensivos: Problemas y contextos de los que surge la distribución normal	70
4.3.1. Problemas	70
4.3.2. Contextos en que se presentan estos problemas	72
4.4. Elementos ostensivos: Representaciones usadas	73
4.5. Elementos actuativos: prácticas específicas en la resolución de los diversos tipos de problemas	75
4.6. Elementos intensivos: definición y propiedades de la distribución normal	78
4.6.1. Definición	78
4.6.2. Propiedades de la distribución normal	82
4.7. Elementos validativos	86
4.8. Conclusiones sobre los elementos del significado de referencia	88
5. ORGANIZACIÓN DE UN PROCESO DE ESTUDIO DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL	92
5.1. Introducción	92
5.2. Descripción general del curso	92
5.3. Significado institucional local de la distribución normal previsto en el curso	93
5.3.1. Elementos extensivos	93
- <i>Tipos de problemas</i>	93
- <i>Contextos empleados en las actividades teóricas</i>	94
- <i>Ficheros de datos</i>	94
5.3.2. Elementos ostensivos: Representaciones usadas	96
- <i>Representaciones gráficas</i>	96
- <i>Representaciones numéricas</i>	96
- <i>Representaciones simbólicas específicas de la distribución normal</i>	96
- <i>Representaciones simbólicas no específicas de la distribución normal</i>	96
- <i>Representaciones gráficas disponibles en Statgraphics</i>	97
5.3.3. Elementos actuativos: Prácticas específicas en la resolución de los diversos tipos de problemas	97
5.3.4. Elementos intensivos	99
5.3.5. Elementos validativos	100
5.4. Organización de una secuencia didáctica	101
5.4.1. Organización general de la enseñanza	101
5.4.2. Primera sesión teórica prevista	103
5.4.3. Primera sesión práctica prevista	107
5.4.4. Segunda sesión teórica prevista	110
5.4.5. Segunda sesión práctica prevista	114
5.4.6. Tercera sesión teórica prevista	117
5.4.7. Tercera sesión práctica prevista	119
5.5. Conclusiones sobre el significado institucional local previsto	123
6. ANÁLISIS DEL PROCESO DE ESTUDIO DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL	129
6.1. Introducción	129
- <i>Metodología de la observación</i>	129
- <i>Cambios efectuados en la enseñanza el segundo año</i>	130
6.2. Primera sesión desarrollada en el aula tradicional	131
- <i>Elementos de significado identificados en las respuestas a las tareas escritas</i>	137

6.3. Primera sesión desarrollada en el aula de informática - <i>Elementos de significado identificados en las respuestas a las tareas escritas</i>	139 140
6.4. Segunda sesión desarrollada en el aula tradicional - <i>Elementos de significado identificados en las respuestas a las tareas escritas</i>	146 149
6.5. Tercera sesión desarrollada en el aula tradicional	151
6.6. Segunda sesión desarrollada en el aula de informática - <i>Elementos de significado identificados en las respuestas a las tareas escritas</i>	153 155
6.7. Cuarta sesión desarrollada en el aula tradicional - <i>Elementos de significado identificados en las respuestas a las tareas escritas</i>	158 162
6.8. Tercera sesión desarrollada en el aula de informática - <i>Elementos de significado identificados en las respuestas a las tareas escritas</i>	164 165
6.9. Conclusiones 6.9.1. Conclusiones sobre el significado institucional observado - <i>Conclusiones relacionadas con las clases en el aula tradicional</i> - <i>Conclusiones sobre las clases en la sala de informática</i>	168 168 170
6.9.2. <i>Conclusiones sobre los elementos de significado puestos en juego por los alumnos en las actividades</i>	172
7. SIGNIFICADO PERSONAL PUESTO EN JUEGO POR LOS ALUMNOS EN LA RESOLUCIÓN DEL CUESTIONARIO	175
7.1. Introducción	175
7.2. Descripción del cuestionario	176
7.2.1. Objetivos y proceso de construcción	177
7.2.2. Estructura del cuestionario	178
7.2.3. Análisis a priori de los ítems	183
7.3. Análisis de los resultados sobre dificultad, discriminación y fiabilidad	189
7.3.1. Índices de dificultad y discriminación	189
7.3.2. Fiabilidad de la prueba	194
7.3.3. Diferencias entre cursos	195
7.3.4. Diferencias entre tipos de alumnos	198
7.3.5. Relación entre respuestas a diferentes preguntas	202
7.4. Conclusiones	205
7.4.1. Conclusiones respecto a las características generales en el significado personal de los alumnos del grupo - <i>Concordancia entre el significado institucional local previsto y las características en el significado personal de los alumnos del grupo</i> - <i>Diferencias entre el significado institucional local previsto y las características en el significado personal de los alumnos del grupo</i> - <i>Conclusiones respecto a las diferencias en el significado personal en los alumnos participantes de los dos cursos</i> - <i>Conclusiones respecto a las diferencias en el significado personal en alumnos con y sin instrucción previa</i> - <i>Conclusiones sobre las interrelaciones entre elementos de significado</i>	205 206 207 208 209 209
8. SIGNIFICADO PERSONAL PUESTO EN JUEGO POR LOS ALUMNOS EN LA RESOLUCIÓN DE LA PRUEBA CON ORDENADOR	210
8.1. Introducción	210
8.2. Análisis de la prueba de ensayo usando el ordenador	210
8.2.1. Objetivos y proceso de construcción de la prueba de ensayo con ordenador	210
8.2.2. Estructura del fichero de datos	212

8.2.3. Análisis de las tareas propuestas en la prueba con ordenador	215
8.2.4. Validez de contenido del instrumento	221
8.3. Análisis de los resultados	223
8.3.1. Análisis de los resultados globales	224
8.3.2. Diferencias entre cursos	239
8.3.3. Diferencias entre tipos de alumnos	245
8.4. Conclusiones sobre el significado personal puesto en juego por los alumnos en la prueba con ordenador	254
 9. CONCLUSIONES	 210
9.1. Introducción	210
9.2. Conclusiones respecto a los objetivos de la investigación	210
9.3. Aportaciones del estudio	265
9.4. Alcances y limitaciones del estudio	266
9.5. Sugerencias sobre futuras investigaciones	267
9.6. Implicaciones para la enseñanza de la distribución normal en un curso de introducción a la estadística	268
 REFERENCIAS	 269
 ANEXOS	
I. Material sobre la distribución normal entregado al alumno el curso 1998-1999	I-1
II. Material sobre la distribución normal entregado al alumno el curso 1999- 2000	II-1
III. Material complementario sobre el paquete STATGRAPHICS entregado al alumno en el curso 1999-2000	III-1
IV. Ficheros de datos usados en las actividades teóricas y prácticas	IV-1
V. Ficheros de datos usados en la prueba con ordenador	V-1
VI. Cuestionario	VI-1
VII. Prueba de ensayo con ordenador	VII-1

INTRODUCCIÓN

Asistimos en la actualidad a una situación paradójica en la enseñanza de la Estadística. Por un lado, mientras que en los últimos decretos curriculares para la Educación Primaria y Secundaria se incluyen contenidos estadísticos en prácticamente todos los países desarrollados y en vías de desarrollo, en la realidad estos contenidos no se enseñan con la profundidad que merecen. La estadística se deja como último tema, se explica sólo de pasada y con frecuencia se suprime cuando el tiempo disponible exige recortar algunos contenidos. En el mejor de los casos, se convierte en una oportunidad de aplicar otros temas matemáticos y de ejercitarse la capacidad de cálculo o representación gráfica, olvidando la esencia de la estadística que es el trabajo con datos reales y los aspectos de razonamiento estadístico, así como las aplicaciones en resolución de problemas.

Como contraste, es rara la especialidad de estudios universitarios o de formación profesional en la que no se introduzca un curso de estadística aplicada y se desarrolle los temas relacionados con ella, como disciplina básica en la formación de los alumnos o bien como parte fundamental en otras asignaturas, tales como métodos de investigación, psicometría, biometría, econometría, etc. Ello es consecuencia de lo que Vere-Jones (1995) llama la *democratización de las matemáticas*, que se debe a una demanda creciente de la sociedad y, por tanto, de la formación universitaria.

En tales disciplinas no sólo se abarcan los contenidos básicos de estadística descriptiva, probabilidad o análisis exploratorio de datos, sino también una parte importante de inferencia estadística, llegando generalmente al contraste de hipótesis, estimación puntual y por intervalo y sus aplicaciones a temas tales como análisis de varianza o estadística no paramétrica.

Con la excepción de los alumnos que se preparan como ingenieros, matemáticos, científicos o médicos, la formación matemática previa de los alumnos generalmente no es suficiente para abordar un estudio formal de la inferencia, en particular de las distribuciones de probabilidad, que son la base de la misma. Este estudio requeriría unos fundamentos suficientes sobre funciones, derivación e integración, incluyendo la integración paramétrica, así como límites funcionales y otros temas avanzados del análisis matemático y del análisis numérico.

El profesor que se hace cargo de estos cursos trata de salvar esta falta de formación, suprimiendo en lo posible el aparato matemático (Moore, 1997). Pero, faltó de la posibilidad de demostrar a sus alumnos las propiedades y relaciones que les enseña, la estadística se convierte en un objeto misterioso, cuyos principios se aceptan sin comprenderlos y cuyas reglas y métodos de cálculo se memorizan y aplican mecánicamente. Puesto que el cálculo estadístico sobre conjuntos de datos reales, incluso con calculadora, es tedioso, los ejemplos que se presentan son artificiales y no motivan al alumno.

Ya que el alumno es un principiante en la universidad y no está familiarizado ni con la investigación ni con el ejercicio de su profesión, no comprende por qué tiene que estudiar estadística. Todas estas circunstancias contribuyen a que las actitudes hacia la estadística sean muy negativas y se convierta en una asignatura que hay que superar y olvidar lo antes posible. En el futuro, estos profesionales serán completamente incapaces de aplicar la estadística de una forma consistente, como se muestra en la abundante investigación que documenta el uso incorrecto e incluso el abuso de la estadística en la investigación y la vida profesional.

Mi experiencia docente en la Universidad Nacional del Litoral, como profesora de cursos de introducción a la estadística para alumnos de diversas especialidades me hizo consciente de este

problema y desde unos años antes de comenzar mi programa de doctorado entré a formar parte de un grupo de investigación en la ciudad de Santa Fe dedicado al estudio de las posibilidades didácticas de los ordenadores en el campo de la estadística. Puesto que, como indica Estepa (1993) los ordenadores suprimen la dificultad de cálculo, permiten trabajar con conjuntos de datos reales y proporcionan argumentaciones informales por medio de la simulación, se suprime algunas de las dificultades que hemos descrito en un curso de estadística.

Las consideraciones anteriores, en las que confluyen y se interrelacionan apreciaciones de muy distintos orígenes, me llevaron a plantear la necesidad del estudio de la inferencia bajo el prisma de la Didáctica de la Matemática analizando los programas que la incluyen, el proceso de aprendizaje de los alumnos, las tareas y tipos de problemas para los que se aplica y las dificultades que surgen del estudio y aplicación de los procedimientos estadísticos, con el fin de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, en un curso introductorio de estadística aplicada. Puesto que el tema era demasiado amplio, me concreté en el estudio de la distribución normal, que es fundamental en la inferencia, como comentaremos con detalle a lo largo de la Memoria.

La posibilidad que tuve de contactar con miembros del Grupo de Educación Estadística de la Universidad de Granada, quienes también estaban interesados en esta temática y tenían experiencia en la misma, así como la posibilidad brindada por una asignatura de libre configuración en esta Universidad de llevar a cabo experiencias innovadoras de enseñanza han sido las circunstancias que, finalmente, han llevado a la investigación que presentamos.

En ella nos planteamos un estudio global de la enseñanza y aprendizaje de la distribución normal en un curso introductorio universitario de estadística aplicada, fundamentado en el marco teórico sobre el significado y comprensión de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994; 1998), en el que se tiene en cuenta una doble perspectiva, institucional y personal sobre el mismo y que se describe con detalle en el Capítulo III. Las preguntas que nuestra investigación trata de contestar son las siguientes:

1. ¿Cuál es el significado típico que, sobre la distribución normal, se presenta en un curso introductorio de estadística universitaria? (significado institucional de referencia)
2. ¿Cómo organizar una experiencia de enseñanza de la distribución normal, apoyada en el uso del ordenador? ¿En qué se diferencia de una enseñanza tradicional? (significado institucional local pretendido).
3. ¿Cómo transcurre la experiencia al llevarla a cabo? ¿Qué dificultades surgen y cómo afectan éstas al desarrollo y al resultado de la experiencia? (significado institucional local observado).
4. ¿Cómo desarrollan las tareas los alumnos durante la enseñanza? ¿Cuáles son sus dificultades y errores? ¿Qué aprenden? (evolución del significado personal de los alumnos del grupo a lo largo del proceso de aprendizaje).
5. ¿Cuáles son los conocimientos finales de los alumnos del grupo? (significado personal construido por los alumnos de la muestra al finalizar la enseñanza).

Es claro que estas preguntas son muy ambiciosas y dar una respuesta completa a las mismas requeriría todo un programa de investigación. En nuestro trabajo, sin embargo, tratamos de aportar información, siquiera limitada, a cada una de ellas, con el objetivo de iniciar un trabajo que pueda ser completado por otros investigadores. Llevamos a cabo un estudio epistémico, semiótico y didáctico sobre la distribución normal, que se organiza en partes bien diferenciadas. La Memoria se ha estructurado en la forma siguiente:

En el Capítulo I realizamos la contextualización de nuestro objeto de estudio, analizando las características específicas de un curso básico de estadística, el paso del análisis exploratorio de datos a la inferencia y la problemática de la utilización de ordenadores en la enseñanza. Basándonos en esta problemática, se enuncian los objetivos generales de nuestra investigación.

El Capítulo II se dedica a presentar una revisión y síntesis de la investigación previa sobre la distribución normal, uso de ordenadores en la enseñanza de la estadística y otros puntos que se conectan con nuestro trabajo y nos permiten fundamentarlo.

En el Capítulo III se describe el marco teórico que ha servido de base para el desarrollo de esta investigación. En función de dicho marco teórico y de los objetivos generales planteados en el primer capítulo, se enuncian los objetivos específicos, así como las fases de la investigación y la metodología correspondiente a cada una de ellas.

En el Capítulo IV presentamos un estudio epistémico de la distribución normal, basado en el análisis de libros de texto universitarios. A partir de este análisis se define el significado institucional de referencia que se considera adecuado en los cursos introductorios de estadística.

En el Capítulo V analizamos la secuencia de enseñanza diseñada sobre la distribución normal (significado institucional local pretendido) que se experimentó en dos cursos sucesivos (1998-99 y 1999-2000), participando en la misma un total de 117 alumnos. Para diseñar la secuencia se seleccionan determinados elementos del significado descrito en el Capítulo IV y se introducen otros que provienen específicamente de la utilización del ordenador. Como complemento a la organización de dicha secuencia, se realiza un análisis didáctico y semiótico de las tareas planteadas, determinando las posibles dificultades y categorizando los elementos que se aplican en ella.

En el Capítulo VI se realiza el análisis de la observación de la secuencia didáctica efectivamente observada, (significado institucional local observado) así como el trabajo de los alumnos durante el proceso de aprendizaje, detallando el significado puesto en juego por ellos, que se determina a través de sus respuestas escritas a las actividades propuestas en el aula tradicional y en el aula de informática que son realizadas en parejas (evolución del significado personal de los alumnos de la muestra a lo largo del proceso de aprendizaje).

Los Capítulos VII y VIII describen la evaluación final de los alumnos con un doble instrumento de evaluación. Mediante un cuestionario escrito, completado por un total de 99 alumnos, se recoge información superficial de un gran número de elementos de significado incluidos en la enseñanza. Mediante una prueba de ensayo abierta, que se realiza con ayuda del ordenador y es completada por 117 alumnos, obtenemos una información mucho más rica y compleja de los elementos de significado puestos en juego correcta o incorrectamente por los alumnos en la resolución de un problema real de análisis de datos y las relaciones que entre ellos se establecen. En ambos instrumentos comparamos los alumnos de los dos cursos sucesivos, así como los alumnos con y sin instrucción previa en estadística.

Los resultados obtenidos a partir de los instrumentos que se describen en los Capítulos VI, VII y VIII contemplan los aspectos cognitivos y semióticos del tema, y proporcionan información exhaustiva sobre las dificultades y errores, así como las características generales del significado construido por los alumnos participantes que son interpretados dentro del marco teórico que hemos utilizado.

La Memoria finaliza con unas conclusiones generales sobre los objetivos generales y específicos planteados e implicaciones para futuras investigaciones y para la enseñanza del tema. Varios anexos incluyen el material elaborado para la enseñanza, la descripción de los ficheros de datos utilizados en las tareas prácticas y en la prueba con ordenador, las tareas planteadas en las sesiones prácticas y los instrumentos de evaluación.

Pensamos que este trabajo es innovador, tanto por la temática, como por el enfoque global adoptado y que la información que se proporciona es valiosa, tanto desde el punto de vista de la investigación, como para los profesores de estadística. Esperamos que contribuya a una mejora de los cursos introductorios de estadística y que motive a otros investigadores a continuar esta línea de investigación.

CAPÍTULO I

LA NATURALEZA DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1. 1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo está dedicado a la contextualización de nuestro objeto de estudio, que es *la enseñanza y aprendizaje de la distribución normal*. Más particularmente, nos interesamos por la problemática específica que presenta este tema a los alumnos que realizan un curso de nivel introductorio a la estadística con un enfoque basado en el uso de ordenadores.

El interés por este tema proviene de nuestra propia experiencia como docentes de cursos introductorios de estadística en la universidad, tanto por las numerosas dificultades de aprendizaje que hemos encontrado por parte de los alumnos en relación con los temas estadísticos, y en particular con las distribuciones de probabilidad, como por la constante búsqueda de elementos que puedan mejorar nuestra enseñanza, y en consecuencia el aprendizaje de nuestros alumnos.

Asimismo, la investigación continúa otras realizadas en el Grupo de Educación Estadística de la Universidad de Granada. Se encuentra por tanto, inscrita en una línea de investigación sobre la enseñanza de la estadística, dentro del cual se han realizado otras tesis doctorales sobre la enseñanza a nivel universitario (Estepa, 1993; Vallecillos, 1994; Sánchez-Cobo, 1999). En concreto, la investigación de Vallecillos (1994) sobre la comprensión de conceptos relacionados con el contraste de hipótesis, en la que se describieron algunos errores de comprensión de las distribuciones en el muestreo, apunta a la dificultad previa de comprensión de las distribuciones de probabilidad, entre ellas la distribución normal.

Antes de desarrollar los fundamentos de nuestra investigación, creemos importante mostrar un contexto más general para ubicar el estudio que queremos abordar en relación con la distribución normal. El nuestro no es un trabajo aislado, sino que estamos inmersos dentro de una sociedad, y más específicamente, pertenecemos a grupos de educadores matemáticos y de investigadores. Por lo tanto, nuestro trabajo tiene conexiones con otros realizados en el pasado y en el presente, que nos permiten fundamentarlo y situarlo dentro de un marco adecuado.

Comenzaremos analizando las características específicas de un curso introductorio de estadística en la Universidad, que es esencial para la mayor parte de los alumnos de diversas especialidades.

Resaltaremos seguidamente, la dificultad que implica, tanto para el alumno como para el profesor que debe organizar el conocimiento, realizar el paso del estudio del análisis exploratorio de datos a la inferencia, puesto que en esta última se precisan conocimientos de cálculo de probabilidades y, en general, de análisis matemático que los alumnos no siempre poseen.

Luego, hacemos referencia a lo que implica la introducción del ordenador en la enseñanza de estadística. Este instrumento ha contribuido al actual florecimiento y desarrollo de esta disciplina, y al mismo tiempo produce un cambio en los contenidos y metodología de enseñanza. Al decidir trabajar con el ordenador en el aula, se debe plantear una problemática distinta a la que de un curso tradicional de estadística, que por lo tanto, debemos tener presente, analizando sus virtudes y defectos.

Por último, y como nexo que une las tres problemáticas planteadas en los párrafos anteriores, se presenta un análisis de la importancia de la distribución normal en estadística. Desde el punto de vista didáctico, este es un concepto estadístico muy específico y característico, debido a que se le puede dar diversos enfoques y tratamientos en un curso de estadística y a que, para lograr una buena comprensión de dicho concepto, es preciso que se manejen y comprendan una serie de conceptos previos que están implícitos en ella.

Para poder dar un marco general de referencia que nos ayude a enunciar, de un modo global, los propósitos de nuestra investigación, su diseño metodológico y el marco teórico adoptado, pasamos a desarrollar cada uno de los puntos anteriormente mencionados.

1.2. EL CURSO INTRODUCTORIO DE ESTADÍSTICA EN LA UNIVERSIDAD

El curso en que se lleva a cabo la investigación es una asignatura de libre configuración de 9 créditos (90 horas lectivas) desarrollado en la Facultad de Educación de la Universidad de Granada, que se imparte desde hace unos años con un enfoque similar al que utilizaremos en nuestro trabajo. Cualquier alumno de la universidad podría, teóricamente cursarlo, ya que los actuales planes de estudio permiten al alumno elegir libremente entre las materias ofertadas por la universidad un número dado de créditos de asignaturas de libre configuración.

La realidad es que la mayoría de los alumnos que asisten al curso provienen de la Facultad de Educación y de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, aunque ocasionalmente asisten alumnos de otras especialidades. Los alumnos que optan por este curso tienen una formación previa muy variada, aunque son muy pocos los que han cursado un Bachillerato técnico o científico. Es más frecuente el caso de alumnos que han seguido un Bachillerato en Humanidades, Ciencias Sociales o Artístico.

En cualquier caso, el alumno no suele haber estudiado anteriormente estadística, o en el mejor de los casos, tiene sólo unos conocimientos rudimentarios de los conceptos básicos de estadística descriptiva. Aunque en los currículos de primaria y secundaria se incluyen contenidos estadísticos, la realidad es que estos contenidos no suelen impartirse, debido a falta de tiempo, o bien de conocimientos de los profesores. El hecho de que en el examen de selectividad no se suelan incluir preguntas de contenido estadístico contribuye a que la estadística no llegue a ser impartida en secundaria.

La paradoja es que el curso introductorio de estadística a nivel universitario tiene un carácter introductorio (es la primera vez que el alumno estudia seriamente la estadística) y al mismo tiempo terminal, puesto que se espera que el alumno finalice la asignatura con unos conocimientos suficientes que le capaciten para usar la estadística en su futura vida profesional. El problema se agrava con el hecho de que los conceptos estadísticos no son precisamente sencillos (Batanero y cols, 1994) y que el contenido del curso introductorio suele ser bastante amplio: estadística descriptiva o análisis exploratorio de datos, probabilidad, distribuciones de probabilidad e inferencia. Es frecuente incluso llegar al estudio de la correlación y regresión, prueba T para medias y proporciones y análisis de varianza. Si a esto añadimos el aprendizaje por parte del alumno de algún programa de cálculo estadístico, como SPSS, Statgraphics o de la hoja Excel, se puede comprender la dificultad que encuentran los profesores de estadística para conseguir que una proporción suficiente de alumnos alcancen los objetivos mínimos de comprensión en el curso introductorio de estadística.

Este fenómeno no es exclusivo de este país. Numerosos autores han discutido los problemas señalados que se originan en parte, porque, como señala Vere-Jones (1995) la proporción de ciudadanos que ingresa en la universidad después de los estudios secundarios está creciendo a ritmo espectacular. Por tanto, enseñamos estadística a una población de estudiantes más numerosa y menos especializada que en el pasado. La democratización cambia la matemática hacia la utilidad inmediata, porque la mayoría de estudiantes se preparan para un trabajo profesional y no meramente académico. Nuestra propia formación como matemáticos, sin embargo nos lleva a valorar preferentemente la abstracción sobre las aplicaciones concretas, el rigor frente a la facilidad de uso, la precisión excesiva en la presentación de los temas frente a la claridad en la presentación.

La racionalidad de incluir un curso de estadística en estas carreras parece responder a la cuantificación creciente en la sociedad. Pero, como indica Moore (1997), no está claro cuáles son las capacidades concretas que el alumno requiere para su futuro trabajo profesional. Aunque nos empeñamos en incluir en el curso introductorio el análisis de varianza, pocos ciudadanos tendrán que interpretar los resultados de un análisis de este tipo, menos aún realizar los cálculos correspondientes y casi ninguno entender los detalles técnicos de cálculos y teoremas matemáticos que hay detrás de este procedimiento. Es preciso replantearse los contenidos y la metodología de estos cursos, así como la forma en que podemos usar la tecnología para alcanzar los fines educativos.

Moore (1997) recomienda enfatizar el proceso de razonamiento estadístico, que incluye la producción e importancia de los datos, omnipresencia de la variabilidad, su medición y modelización. Para este autor, los estudiantes deben aprender a través de sus propias actividades, el trabajo en grupos, la comunicación y discusión de las soluciones, el trabajo con datos reales, las presentaciones orales o escritas y los proyectos individuales o colectivos. El profesor debe animar y guiar el aprendizaje, enfatizando los conceptos estadísticos y apoyándose en el uso de ordenadores, dando una importancia secundaria a las demostraciones formales.

1.3. EL PASO DEL ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS A LA INFERENCIA

Uno de los problemas más frecuentes con el que se encuentran los profesores de estadística, en los primeros cursos universitarios o en los últimos cursos de secundaria, es encontrar el modo de realizar el paso del análisis exploratorio de datos a la inferencia en forma comprensible para sus alumnos.

En estadística descriptiva o análisis exploratorio de datos no se requieren unos conocimientos matemáticos avanzados. Generalmente las operaciones aritméticas básicas, proporcionalidad y funciones sencillas son suficientes para el trabajo en este nivel, que se restringe al estudio de colectivos completos o bien a muestras, pero donde no hay intención de extender los resultados a otros casos diferentes de los observados (Batanero, Estepa y Godino, 1991 b).

Por el contrario, la inferencia estadística requiere de unos conocimientos mucho más profundos, tanto de análisis matemático, como de cálculo de probabilidades, ya que tratamos de generalizar los resultados de una muestra a toda una población. Elementos importantes de inferencia son la estimación (puntual o por intervalos) y los contrastes de hipótesis. La inferencia estadística está fundamentada sobre el estudio de las distribuciones de probabilidad, donde aparecen conceptos tan abstractos como los de función de densidad y de distribución. Un estudio formal del tema requeriría el dominio de la integración y derivación de funciones de una y varias variables, límite funcional e incluso integrales paramétricas. Es claro que estos contenidos ofrecen dificultades a la mayoría de los estudiantes, como lo muestran, por ejemplo, las investigaciones de Vallecillos (1994). La distribución normal juega un papel muy particular en el estudio de la inferencia, porque el teorema central del límite permite la aplicación de los métodos de inferencia, sin preocuparse por la forma concreta de la distribución en la población, siempre que el tamaño de la muestra sea suficientemente elevado.

Puesto que los alumnos no se interesan por la estadística en sí misma, sino por su carácter de herramienta para sus respectivas disciplinas, una posible solución al problema de introducir las distribuciones de probabilidad sería, analizar de qué manera se puede iniciar el tema para que se resalten las ideas básicas, tratando de aislar los aspectos esenciales de las distribuciones de probabilidad, pasando por encima del formalismo matemático si no es estrictamente requerido. Estos fundamentos deberían ser suficientes para permitirles realizar el paso del estudio de muestras (estadística descriptiva) a la generalización de los resultados obtenidos a una población, bien para realizar estimaciones o contrastes de hipótesis (estadística inferencial). Claro que esto implicará que no todos los teoremas serán demostrados en una forma rigurosa, aunque será suficiente para permitir a los alumnos una aplicación correcta en la solución de sus problemas profesionales.

1.4. LA PROBLEMÁTICA DEL USO DE ORDENADORES EN LA CLASE DE ESTADÍSTICA

La estadística es una de las ramas de las matemáticas en la que las nuevas tecnologías han tenido un mayor impacto, no sólo en su evolución y desarrollo, sino también en la enseñanza. En los últimos veinte años hemos pasado de un cálculo estadístico reservado a expertos, debido a su dificultad, a una gran disponibilidad de paquetes estadísticos de cálculo y representación gráfica al alcance de un gran número de personas.

Un problema tradicional en la enseñanza de la Estadística ha sido la existencia de un desfase entre la comprensión de los conceptos y los medios técnicos de cálculo para poder aplicarlos (Biehler, 1991; 1994). La solución de los problemas dependía en gran medida de la habilidad de cálculo de los usuarios, que con frecuencia no tenían una formación específica en matemáticas. Hoy día la existencia de programas fácilmente manejables permite salvar este desfase. Como indica Godino (1995) esto ha hecho aumentar la demanda de formación estadística en un número creciente de especialidades universitarias. El análisis multivariante, por ejemplo, se ha hecho posible gracias a los ordenadores.

A partir de Tukey (1977), se produce un cambio de filosofía en los estudios estadísticos, tanto en la estadística elemental como en los métodos de análisis de datos multivariantes, dando lugar a lo que hoy se conoce como *análisis exploratorio de datos*, (que se describe con más detalle en la sección 2.4.2) en el que se da más importancia al trabajo con proyectos y la representación gráfica.

En la actualidad, en los currículos universitarios e incluso en la escuela, se recomienda que se enseñe análisis exploratorio de datos, en lugar de estadística descriptiva clásica. Por un lado, se quiere introducir a los alumnos en la corriente moderna de la estadística. Por otro, el análisis exploratorio de datos implica el uso de ordenador y con ello se consigue también el objetivo de que los alumnos aprendan a manejar un paquete estadístico.

Dado el volumen actual de las colecciones de datos que hay que analizar en cualquier aplicación estadística real, se hace inviable la aplicación de la estadística a mano e incluso con calculadoras. Uno de los objetivos que debiera incluirse en un curso de estadística es capacitar al alumno para recoger, organizar, depurar, almacenar, representar y analizar sistemas de datos de complejidad accesible para él. Este objetivo comienza por la comprensión de la idea básica de fichero de datos, con sus campos, unidades estadísticas y códigos, así como las técnicas de codificación, grabación y depuración de los datos.

El punto de comienzo de la estadística debería ser el encuentro de los alumnos con sistemas de datos reales e incluso construir un sistema de datos propio y analizarlo, que no es lo mismo que resolver un problema de cálculo rutinario tomado de un libro de texto. Por esto consideramos que la perspectiva del análisis exploratorio de datos, y el aprendizaje de un paquete estadístico, son dos puntos muy importantes en la enseñanza de la estadística, tanto en la enseñanza secundaria como en un curso introductorio de estadística a nivel universitario.

Finalmente, destacamos que el ordenador es también un potente instrumento didáctico, que refuerza la motivación del alumno y le permite explorar los conceptos estadísticos y probabilísticos. La facilidad de simulación de experimentos aleatorios hace posible la experimentación, observación y exploración de procesos estocásticos. También existe la posibilidad de variar los parámetros de los que dependen el comportamiento estocástico de tales procesos, de una forma interactiva, y de observar el efecto producido, mediante las representaciones gráficas. De este modo los nuevos "objetos" pierden su carácter abstracto, proporcionando una experiencia estocástica que no es fácil alcanzar en la vida real.

Este carácter didáctico se resalta en la mesa redonda de investigación sobre el impacto de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la estadística, organizada por el IASE y que tuvo lugar en Granada en el año 1996, (Garfield y Burrill, 1997). Las conclusiones fueron las siguientes:

- Las nuevas tecnologías incluyen los ordenadores, calculadoras gráficas y la red de comunicaciones Internet y es previsible que contribuyan a una revolución en los métodos de enseñanza. En particular, hay un gran número de recursos disponibles en Internet para la

enseñanza de la materia. Además, es posible tomar datos disponibles en Internet y usarlos en la enseñanza.

- Hay una serie de mitos sobre el papel del ordenador en el aprendizaje. Es cierto que la comprensión de algunos conceptos puede ser facilitada con la ayuda de la simulación, pero también los ordenadores introducen nuevos objetivos de aprendizaje y existe el peligro de que, en vez de enseñar estadística, nos desviemos hacia el estudio exclusivo del software, debido a la sofisticación de éste y al tiempo requerido en su aprendizaje.
- Aunque los paquetes estadísticos con los que se puede realizar el análisis de datos tienen actualmente un gran desarrollo, los paquetes didácticos para la enseñanza son aún muy escasos y deficientes. Las características deseables para un software estadístico de uso general no tienen por qué coincidir con las que serían necesarias desde un punto de vista educativo, teniendo en cuenta también el desarrollo de los alumnos.
- La disponibilidad de nuevas tecnologías puede ser un nuevo factor que contribuya a aumentar la diferencia entre países, clases sociales o centros educativos. Es importante obtener una difusión real de estos medios entre una comunidad lo más amplia posible.

A estas conclusiones se deberían agregar algunas otras, relacionadas con el profesorado. Actualmente muchos países invierten en el equipamiento de sus institutos y universidades en material informático. Sin embargo, el presupuesto destinado a la capacitación de los profesores en el uso del ordenador y de los diversos paquetes es mucho menor, por lo cual se produce una situación contradictoria: se tiene el material, pero no se lo sabe utilizar o no se conoce en qué situaciones se lo puede aplicar. En el Capítulo II incluimos un apartado donde discutimos con más detalle esta problemática y describimos las principales investigaciones relacionadas con el uso del ordenador en la enseñanza de la estadística relacionadas con nuestro trabajo.

1.5. LA DISTRIBUCIÓN NORMAL Y SU ENSEÑANZA

La distribución normal es un punto central en estadística como puede verse si se investiga en la historia del desarrollo de este concepto (Hacking, 1990) no sólo por su misma utilidad, como modelo que aproxima una serie de distribuciones en teoría de errores, antropometría y biometría, sino por el papel destacado que jugó en el desarrollo de la teoría de la inferencia con pequeñas muestras y el estudio de las distribuciones asintóticas en el muestreo. Esta aplicabilidad quedará clara a lo largo de la memoria cuando describamos los campos de problemas en que se aplica la distribución normal.

Esta importancia es destacada por algunos educadores estadísticos como Hawkins, Joliffe y Glickman (1992) y Wilensky (1995 b, 1997) que enumeran las siguientes razones que justifican el estudio de este tema:

- Muchos fenómenos físicos, biológicos, psicológicos o sociológicos, pueden ser adecuadamente modelizados mediante la distribución normal: Medidas antropométricas, puntuaciones en tests y cuestionarios, errores de medición, etc.
- La distribución normal es un modelo adecuado para aquellas distribuciones de datos continuos, que se distribuyen en forma aproximadamente simétrica. Una propiedad de las distribuciones normales es su reproductividad, por lo que la suma de variables normales es igualmente normal. Por otro lado, la suma de un número grande de variables aleatorias idénticamente distribuidas tiene una distribución normal. Estos dos teoremas explican la omnipresencia de la distribución normal en diversas áreas de aplicación.
- La distribución normal es una buena aproximación de otras distribuciones, como la distribución binomial, de Poisson o T de Student, para ciertos valores de sus parámetros.

El cálculo de los valores exactos de estas distribuciones es muy difícil y, al llevar implicados un número grande de operaciones es preciso recurrir a métodos numéricos aproximados, bien por insuficiencia de la capacidad de cálculo, bien por el error que se acumularía en tantas operaciones. Sin embargo, puesto que estas distribuciones se pueden considerar como deducidas de la suma de variables aleatorias independientes (por ejemplo, la distribución binomial es suma

de distribuciones de Bernoulli), podemos aproximarla mediante la distribución normal.

- Los teoremas límites aseguran que la media y otros resúmenes estadísticos de las muestras aleatorias tienen una distribución aproximadamente normal, incluso en poblaciones no normales, para muestras de suficiente tamaño.

Esto es también un resultado deducido de la distribución de la suma de variables aleatorias independientes, ya que la media, momentos, coeficiente de correlación, etc, se definen por medio de una suma. Puesto que las distribuciones exactas en el muestreo son muy difíciles de calcular, y no se conoce la distribución exacta en el muestreo sino para el caso de que la población de partida sea normal, la aproximación normal se usa con generalidad en inferencia.

- Muchos métodos estadísticos requieren la condición de normalidad para su correcta aplicación.

Cuando nos encontramos con un problema inferencial tratamos de estimar ciertos valores de los parámetros de la población. Usamos para ello un estadístico, al que exigimos condiciones de insesgadez (falta de sesgo), consistencia (mejore con el tamaño de muestra), eficiencia (aproveche toda la información de la muestra), convergencia asintótica (al verdadero valor del parámetro), etc. Para ciertos métodos de estimación estas condiciones se cumplen sólo en caso de que la población de partida sea normal.

Por ejemplo en el análisis de varianza, si la población de partida no es normal, pueden presentarse sesgos en las estimaciones en los modelos de efectos aleatorios, aunque el método es robusto en los modelos de efectos fijos. Será importante para los investigadores que usen estos métodos para comprender bien la distribución normal y sus implicaciones sobre el uso de la estadística.

Por otro lado, es preciso que nos refiramos brevemente a la problemática didáctica de la distribución normal, ya que éste es un concepto que puede introducirse en la enseñanza desde la estadística o desde la probabilidad. Si comenzamos el estudio del tema a partir de la probabilidad, la distribución normal se presentará a los alumnos como parte de un conjunto mayor, formado por las distribuciones de probabilidad. Estas se introducirán previamente, incluyendo las distribuciones binomial y Poisson y dando un mayor peso al estudio de las relaciones entre las mismas. Si introducimos el tema desde la estadística, es posible comenzar directamente introduciendo la distribución normal desde un enfoque intuitivo, lo cual, nos lleva a una problemática particular que es la que hemos decidido abordar en nuestro trabajo.

En cualquiera de las dos aproximaciones, se le puede dar diversos enfoques más o menos formales, dependiendo a quien va dirigida la enseñanza. En el caso de nuestro estudio, deberemos trabajar con alumnos con conocimientos matemáticos y estadísticos muy diversos, por lo que pretendemos proporcionarles conocimientos básicos que puedan servirles en sus respectivas profesiones. En consecuencia, partimos del análisis exploratorio de datos y no abordaremos en el tratamiento de la distribución normal un enfoque matemático formal.

Esta opción nos lleva a tomar decisiones en relación a la elaboración de materiales que serán presentados en nuestra secuencia de enseñanza, y por supuesto en la selección de conceptos estadísticos que serán presentados a nuestros alumnos, de tal manera que sirvan como base para la introducción de la distribución normal.

Esta decisión también nos lleva a planificar el desarrollo del tema de una manera no excesivamente formal, con lo que se dará prioridad a la visualización y simulación de fenómenos estadísticos, que nos servirán de apoyo para introducir el concepto de distribución normal sin necesidad de utilizar teoremas o formalismos matemáticos.

1.6. OBJETIVOS GENERALES DEL ESTUDIO

Las secciones anteriores nos proporcionan un marco de referencia para situar nuestra investigación, que como hemos indicado, se ubica en el estudio de la distribución normal como objeto de enseñanza y aprendizaje, dentro de un curso introductorio de estadística a nivel universitario y respetando una serie de condicionantes.

Particularmente, consideraremos las limitaciones en relación con el tiempo disponible para la enseñanza, la estructura global y contenidos del curso, los conocimientos previos de los

alumnos y el hecho de haber introducido el aprendizaje de un paquete de cálculo estadístico dentro de los contenidos, así como su uso como recurso didáctico.

En esta sección describimos los objetivos generales de nuestra investigación (más adelante enunciaremos los objetivos específicos) que podemos dividir en cuatro grandes bloques:

1. *Fijar el significado institucional de referencia que daremos a la distribución normal en nuestra investigación, realizando para ello, un análisis epistémico del tema en textos universitarios (Determinación del significado institucional de referencia).*

Nuestro trabajo continúa otros trabajos previos sobre didáctica de la estadística que han sido llevados a cabo dentro del Grupo de Investigación en Educación Estadística de la Universidad de Granada. En este sentido comparte el marco teórico utilizado en dichos trabajos, el cual se describe en el Capítulo III y que se refiere al significado de los objetos matemáticos y su comprensión. En este marco teórico el significado de un objeto matemático puede variar en diferentes instituciones educativas, ya que se concibe desde una perspectiva pragmática.

Nos centraremos en una institución particular: *el curso introductorio de estadística*. Para lograr mayor objetividad al fijar el significado institucional que adoptaremos como referencia en nuestro trabajo, hemos tomado la decisión de analizar libros de texto universitarios dirigidos a estudiantes de ciencias sociales. En el Capítulo III ampliaremos la justificación de esta decisión.

2. *Elaborar una secuencia didáctica sobre la distribución normal de acuerdo con nuestro marco teórico, incorporando el ordenador como herramienta didáctica, el significado de referencia determinado en el objetivo anterior, las características del curso, las experiencias previas de los profesores en el mismo, y las características de los alumnos. (Fijación del significado institucional local previsto).*

En esta propuesta se trata de seleccionar los elementos del significado de referencia que se consideran más convenientes a nuestro objetivo. Asimismo se organiza una secuencia didáctica que incluye estos diversos elementos, añadiendo otros que se precisan por la introducción del ordenador, y los contextualiza mediante una serie de actividades para ser desarrollados en el aula tradicional y en el aula de informática que serán impartidas en el citado curso. Esta organización incluye la elaboración del material didáctico, la elaboración de una secuencia didáctica específica para la distribución normal y la definición de los roles de profesor y alumnos para el tema específico de la distribución normal.

Todo lo anterior servirá de apoyo para la selección de elementos de significado a evaluar e implicará el análisis de los contenidos que se evaluarán y el diseño de instrumentos adecuados para llevar a cabo dicha evaluación, así como el análisis de los resultados de la misma. Será importante tener de nuevo en cuenta el papel específico del ordenador en el proceso de instrucción.

3. *Describir los elementos de significado efectivamente observados en la secuencia de enseñanza (Determinación del significado institucional observado).*

Una vez puesta en práctica la secuencia didáctica diseñada para el desarrollo del concepto “*distribución normal*”, se deben observar las diferencias entre la planificación de la secuencia de enseñanza y la puesta en práctica de ésta para describir los desajustes producidos y en qué elementos se ha puesto más énfasis a lo largo de la experiencia de enseñanza.

Estos datos nos servirán para interpretar debidamente los resultados de la evaluación y explicar las diferencias que se produzcan entre el significado institucional local pretendido y las características generales del significado personal construido por los alumnos participantes.

4. *Describir los elementos de significado aplicados por los alumnos participantes en las actividades planificadas y evaluar su conocimiento al finalizar la enseñanza. (Evaluación de las características en el proceso de aprendizaje y en el significado personal efectivamente construido por los alumnos participantes).*

Esta evaluación servirá para describir los conocimientos alcanzados, errores y dificultades, así como para poner de manifiesto en qué elementos se han producido mayor grado de acuerdo y desacuerdo con el significado institucional pretendido.

Cada uno de estos objetivos generales dará origen a un número de posibles temas a investigar, entre los que, como veremos posteriormente, hemos elegido unos objetivos específicos que se describen en el Capítulo III, en torno a los cuales se centrará nuestra investigación.

Una vez delimitados nuestros objetivos generales pasamos, en el capítulo II a analizar las investigaciones previas relacionadas con la nuestra, lo cual nos servirá para fundamentar y describir en el Capítulo III el marco teórico y los objetivos específicos de nuestro trabajo.

CAPÍTULO II

ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo describiremos las investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la distribución normal y algunos estudios que se han ocupado del tema y que usamos como marco de referencia en el cual basar nuestro trabajo.

Como veremos en las secciones siguientes, son muy escasos los estudios sobre la distribución normal, y además, han sido enfocados desde diversas teorías y con metodologías muy diferentes, por lo que podríamos concluir que aún no se le ha prestado todo el interés que el concepto requiere. Si comparamos con otros conceptos matemáticos, tales como la probabilidad o las funciones, los estudios realizados sobre la comprensión de la distribución normal son prácticamente inexistentes.

Comenzamos el capítulo con un resumen de las investigaciones sobre heurísticas y sesgos que, aunque no son específicos de la distribución normal, nos muestran que el razonamiento probabilístico resulta difícil, incluso para las personas con preparación estadística previa y además estas heurísticas son resistentes a la instrucción. En el apartado 2.3 nos referimos a investigaciones dirigidas al estudio de errores o concepciones erróneas en la comprensión de la distribución normal, que es un elemento transversal en el estudio de conceptos estadísticos. En la sección 2.4 revisamos brevemente algunas investigaciones sobre el uso del ordenador en la enseñanza de la estadística, de las cuales hemos tomado para la nuestra algunos elementos metodológicos. Finalmente, analizamos brevemente algunas investigaciones sobre la comprensión de gráficos, puesto que en nuestra experiencia de enseñanza los alumnos usarán una variedad importante de estos elementos en su trabajo con el ordenador.

2.2. RAZONAMIENTO ESTOCÁSTICO EN SUJETOS ADULTOS. HEURÍSTICAS Y SESGOS

Dentro de las investigaciones psicológicas, una de las más implicaciones ha tenido en el campo de la investigación educativa es la referida al empleo de heurísticas. Pérez Echeverría (1990), indica que los trabajos recientes sobre la toma de decisiones se han basado en las teorías cognitivas y del procesamiento de la información. La utilización de heurísticas es característica de estos investigadores y se describen éstas como "*mecanismos por los que reducimos la incertidumbre que produce nuestra limitación para enfrentarnos con la complejidad de estímulos ambientales*" (pág. 51). Es decir, son principios generales que reducen tareas complejas a simples juicios. En el análisis del razonamiento probabilístico, un juicio de este tipo (heurística) sería un procedimiento que nos llevaría en forma inmediata a la solución del problema. Se diferencian de los algoritmos en que son generalmente automáticas y se aplican de forma no reflexiva, sin considerar su adecuación al juicio a realizar, contrariamente al algoritmo, que propone criterios concretos para su uso.

En relación con las heurísticas empleadas en el campo de la estocástica, el más importante ha sido el trabajo de Kahneman, Slovic y Tversky (1982), debido a sus implicaciones en el estudio del razonamiento humano. Estos autores documentan los errores persistentes y las heurísticas erróneas de las personas al realizar juicios en situaciones de incertidumbre probabilística. Los errores están relacionados, en particular, con la probabilidad de intersección de sucesos, probabilidades a posteriori, correlación, muestreo y percepción de patrones inexistentes en

resultados aleatorios. Estos errores sistemáticos se repiten y no parecen corregirse, aún en personas que han tenido un entrenamiento significativo en probabilidad, lo que plantea serias dudas sobre la posibilidad de que los seres humanos tengan unas intuiciones correctas sobre las probabilidades.

Estos autores especulan sobre el origen de estas creencias sistemáticas en la evaluación de probabilidades, sugiriendo que nuestros recursos mentales están muy limitados y generalmente no somos capaces de generar juicios probabilísticos acertados. En consecuencia, nos vemos forzados a recurrir a "heurísticas" o estrategias mentales inconscientes que reducen la complejidad del problema suprimiendo una parte de los datos. Una de las heurísticas que se presenta más comúnmente en el campo de la inferencia, es la heurística de la representatividad.

Como indica Moses (1992), la idea central de la inferencia es que una muestra proporciona "alguna" información sobre la población y de este modo aumenta nuestro conocimiento sobre la misma. Se puede pensar en la inferencia estadística como una colección de métodos para aprender de la experiencia. La comprensión de esta idea básica implica el equilibrio adecuado entre dos ideas aparentemente antagónicas: *la representatividad muestral y la variabilidad muestral*. La primera de estas ideas nos sugiere que la muestra tendrá a menudo características similares a las de la población, si ha sido elegida con las precauciones adecuadas. La segunda, nos muestra el hecho de que no todas las muestras son iguales entre sí.

En la heurística de la representatividad, descrita por Kahneman, Slovic y Tversky (1982) se enfatiza sólo uno de estos dos componentes, y se calcula la probabilidad de un suceso sobre la base de la representatividad del mismo respecto a la población de la que proviene. Se prescinde del tamaño de la muestra, y de la variabilidad del muestreo, produciéndose una confianza indebida en las pequeñas muestras. Estos autores hablan de la existencia de una "ley de los pequeños números", en la que pequeñas muestras serían representativas en todas sus características estadísticas de las poblaciones de donde proceden. Este error puede tener importantes consecuencias de cara a la investigación experimental, ya que los científicos que creen en la "ley de los pequeños números" sobreestiman la potencia de sus métodos estadísticos, subestiman la amplitud de sus intervalos de confianza y tienen unas expectativas injustificadas en la replicabilidad de experimentos realizados con pequeñas muestras.

Son muchos los trabajos sobre la heurística de la representatividad y la estabilidad de la misma como consecuencia de la instrucción, preferentemente desde el campo de la psicología. Remitimos al lector a Scholz (1991) y Shaughnessy (1992), quienes han realizado un estudio comprensivo sobre las mismas. Como indica este último autor, en psicología, lo fundamental es analizar el razonamiento humano en situaciones de incertidumbre y la preocupación por la enseñanza es secundaria.

Dentro de la Educación Matemática, algunos autores se han centrado en estudiar la estabilidad de las heurísticas como consecuencia de la instrucción. Uno de ellos es Serrano (1993), quien ha estudiado la influencia de la heurística de la representatividad en experimentos clínicos de enseñanza, basados en la simulación de experimentos aleatorios. En su investigación trabaja con un grupo de 10 estudiantes de magisterio y otros diez alumnos de bachillerato (14 años), planteándoles cuestiones encaminadas a hacer que los alumnos expliciten la heurística de la representatividad.

La motivación de su estudio es analizar si el enfoque frecuencial propuesto en los nuevos diseños curriculares es realmente tan sencillo como se pretende para los alumnos de secundaria. Para llevar a cabo este análisis, en primer lugar, realiza un estudio matemático del experimento estocástico más simple posible: el lanzamiento de una moneda correcta que es un caso particular del proceso de Bernoulli. El autor estudia los diferentes modelos probabilísticos implícitos en dicho proceso y construye varias secuencias de actividades didácticas dirigidas a introducir el enfoque frecuencial de la probabilidad.

Una de estas situaciones didácticas está basada en el problema clásico del hospital, planteado por Kahneman, Slovic y Tversky (1982) y consiste en el planteamiento de dicho problema y otros asociados, y el uso de la simulación como medio de resolución de los mismos, utilizando monedas. En el curso de entrevistas individuales a los sujetos, les plantea la realización de una simulación de la situación para observar un posible cambio en el uso de la heurística de la representatividad. Se requiere a los alumnos efectuar sus predicciones, preguntando si están seguros de sus respuestas y luego se les pide simular el experimento. Al finalizar la simulación, si ésta no coincide con lo esperado se le pregunta a los alumnos si quieren cambiar su predicción inicial y también que expliquen los resultados del experimento.

Los resultados muestran que no existen grandes diferencias entre los alumnos de bachillerato y los futuros profesores, en cuanto a las concepciones probabilísticas incorrectas. También indican que el alumno se guía por los resultados concretos de las simulaciones efectuadas y modifica sus concepciones iniciales en función de las mismas. Esto plantea al autor serias dudas sobre la efectividad de la simulación como dispositivo didáctico, especialmente en el caso de que la convergencia no se produzca en el sentido esperado por el profesor.

En Serrano (1996) se compara el empleo de diversas heurísticas, incluida la representatividad, en alumnos de 14 y 17 años, los primeros sin enseñanza previa de la probabilidad y los segundos, al finalizar la secundaria y con dos cursos en los cuales habían estudiado probabilidad en uno de los temas. La muestra estuvo compuesta por unos 140 sujetos en cada grupo y varios centros participantes. El trabajo es parte de otro más amplio en que se estudian una batería de concepciones de los alumnos en relación al enfoque frecuencial de la probabilidad, que pretende introducirse en la enseñanza secundaria.

Por medio de cuestionarios y análisis de argumentos de los alumnos, así como del análisis de contenido y el análisis multivariante de estos datos encuentra que la heurística de la representatividad no es tan frecuentemente usada como otros autores sugieren, sino que las respuestas se deben más bien al "enfoque en el resultado" descrito en las investigaciones de Konold (1989). Se observa también una mejora con la edad, en cuanto al uso de la representatividad (Batanero, Serrano y Garfield, 1996; Serrano y cols., 1998).

También delMas (1988) desarrolla una actividad de enseñanza de conceptos probabilísticos con estudiantes de secundaria, basada en la experimentación y simulación. Evalúa el aprendizaje de una muestra de 78 alumnos mediante un cuestionario usado como pretest y otro como postest, interesándose por la estabilidad de la heurística de la representatividad como consecuencia de la instrucción. Nuevas experiencias y el análisis de las mismas son descritas en Garfield y delMas (1989, 1990). En todas estas investigaciones, la conclusión es que los alumnos que empleaban, al menos parcialmente, una estrategia frecuencial correcta en el pretest parecen mejorar con la instrucción y un mayor número de alumnos usan esta estrategia en el postest, por lo que la instrucción parece ser efectiva.

Sin embargo, algunos estudiantes que usaron una estrategia correcta en el pretest cambiaron a otra incorrecta en el postest y otros estudiantes que tenían estrategias incorrectas parecen no mejorar con la instrucción. En consecuencia, consideran la necesidad de realizar nuevas investigaciones sobre la enseñanza de conceptos de inferencia destinadas a mejorar el conocimiento probabilístico de los alumnos.

En relación con aquellas investigaciones que se han ocupado de estudiar los errores cometidos en tareas probabilísticas donde interviene la idea de muestreo, Pollatsek y cols. (1987) comparan las concepciones sobre el muestreo de estudiantes y estadísticos expertos y sugieren que éstos emplean un modelo de muestreo que se puede concretizar en la extracción al azar de bolas de una urna y que la comprensión de este modelo implica también la del concepto de independencia.

Los alumnos y sujetos con pocos conocimientos estadísticos podrían no tener un modelo adecuado del proceso de muestreo y ello provocaría la heurística de la representatividad, incluso con muestras muy pequeñas, posiblemente ligado a errores en la percepción de la independencia de ensayos.

En resumen, las investigaciones analizadas en esta sección se han interesado por la evolución en el uso de las heurísticas, determinando que están ampliamente extendidas, incluso en personas con instrucción en probabilidad. Los resultados sobre el efecto de la instrucción son contradictorios. Mientras que en las experiencias de Garfield y delMas y en Serrano (1996) se observa una ligera mejora con la instrucción, Serrano (1993) señala que la enseñanza no es siempre efectiva e incluso algunos alumnos obtienen peores resultados. Pensamos que las diferencias obtenidas se deben al método de evaluación empleado, ya que Serrano (1993) es el único que usa entrevistas que permiten un acceso más completo a los razonamientos de los alumnos. En todo caso estas investigaciones nos confirman la necesidad de plantear nuevas investigaciones sobre la enseñanza de la estadística, como la abordada en nuestro trabajo.

2.3. LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Aunque no hemos encontrado estudios sistemáticos sobre la enseñanza y aprendizaje de la distribución normal, existen algunas investigaciones o experiencias de enseñanza aisladas

realizadas con diversas metodologías, tipos de sujetos y propósitos. En algunos casos, la distribución normal no es el principal objeto de estudio, sino un componente más en una investigación que se dirige a evaluar el rendimiento general o las actitudes en los cursos introductorios de estadística.

Otros trabajos se centran en el estudio del teorema de límite (la convergencia de la distribución muestral de medias hacia la distribución normal) o la comprensión de conceptos de inferencia estadística (como el mismo concepto de distribución muestral). Aunque la distribución normal, en sí misma, no es el foco de interés, se presenta en estos temas, por lo que indirectamente estos autores realizan estudios cuyos resultados pueden ser útiles a nuestro propósito. Dentro de dichos trabajos sobre la distribución normal o sobre conceptos relacionados con ella (teoremas de límite y distribuciones muestrales), hemos encontrado dos tipos, según se use o no el ordenador como recurso didáctico.

En lo que sigue describimos y clasificamos los estudios analizados, tratando, en primer lugar, el trabajo pionero de Piaget sobre la formación de la idea de distribución en los niños. A continuación, describimos las investigaciones con estudiantes universitarios, separando en último lugar las que han empleado el ordenador como recurso didáctico.

2.3.1. DESARROLLO DE LA IDEA DE DISTRIBUCIÓN Y CONVERGENCIA

Los principales precursores de los estudios sobre el razonamiento probabilístico han sido Piaget e Inhelder (1951), quienes se interesaron por la evolución de dicho razonamiento desde la infancia a la adolescencia. Su trabajo es uno de los más completos en este campo, ya que incluye el estudio de la forma en que el niño percibe el azar y la probabilidad simple y compuesta, su capacidad combinatoria y de comparación de probabilidades, así como la idea de distribución y convergencia.

Aunque nuestro trabajo se centra en alumnos adultos, creemos de interés describir una parte del estudio de estos autores relacionada con la idea de distribución normal porque proporciona fundamentos para el análisis de la comprensión de las distribuciones de probabilidad que han sido retomados en otros trabajos.

Un concepto central de su teoría es la idea de operación. Piaget e Inhelder consideran que el desarrollo cognitivo del niño tiene lugar en tres etapas: preoperacional (4 -7), operaciones concretas (7 -11) y operaciones formales. El orden de ocurrencia de las etapas no varía, pero la edad en que se alcanza cada una puede variar considerablemente de niño a niño, y, en un mismo niño, respecto a diferentes contenidos. Las transiciones entre etapas ocurren a través de los procesos de asimilación y acomodación.

En el estadio preoperacional faltan las operaciones (reversibles). En el de las operaciones concretas se realizan operaciones sobre lo actual, presente u observable. En el de las operaciones formales, las operaciones sobre lo posible o potencial permiten el pensamiento hipotético-deductivo. Las operaciones lógicas y formales constituyen sistemas de acciones interrelacionadas de forma rigurosa y siempre reversible, siendo este aspecto de reversibilidad lo que hace posible la deducción. Por contraste, el azar se descubre gradualmente y es, por referencia constante a la estructura de las operaciones, que se comprende finalmente y se llega a un sistema de probabilidades.

La intuición del azar

Piaget e Inhelder (1951) defienden que la comprensión del azar por parte del niño es complementaria a la de la relación causa-efecto. Para los niños, el azar se produciría al interferir y combinarse entre sí una serie de causas actuando independientemente, lo que llevaría a un resultado inesperado. Las operaciones lógicas y aritméticas se pueden componer entre sí de modo riguroso y siempre reversible, es decir, se puede volver al estado primitivo mediante una operación inversa, como la resta para el caso de la suma. Las transformaciones aleatorias, sin embargo, no pueden componerse en forma rigurosa y son esencialmente irreversibles. Habría que concebir entonces el azar como complementario a la composición lógica de operaciones reversibles, por lo que el azar no puede ser comprendido hasta que se adquiere un dominio de las operaciones reversibles, y se compare con ellas.

Estos autores concluyen de sus experimentos que no hay una intuición del azar innata en el niño, como no existía tampoco en el hombre primitivo. Para Piaget la comprensión del azar

presupone la comprensión del carácter irreversible de una composición de operaciones causales independientes, y por tanto, la posesión de un esquema combinatorio, para poder concebir las distintas posibilidades existentes en estas situaciones. Puesto que, en el período preoperacional, el niño tiene un pensamiento reversible, según Piaget no puede extender la aleatoriedad, ya que no puede diferenciar entre acontecimientos reversibles y los aleatorios, originados por mezclas de causas irreversibles. Además el niño no comprende bien la relación entre causa y efecto.

En consecuencia, hasta la etapa de las operaciones concretas en la que hay cierta apreciación de los factores que caracterizan los fenómenos causados, el niño no puede adquirir la idea de aleatoriedad. En esta etapa, a través de la adquisición de esquemas operacionales espacio-temporales y lógico-matemáticos, el niño adquiere la capacidad de distinguir entre el azar y lo deducible, incluso al nivel conceptual. Claramente, este proceso no se completa durante este período, puesto que el pensamiento está todavía muy ligado al nivel concreto. No obstante, la representación del azar, que no es sino una intuición primaria en el niño de preescolar, se convierte en una estructura conceptual distinta y organizada después de la edad de los 7 años.

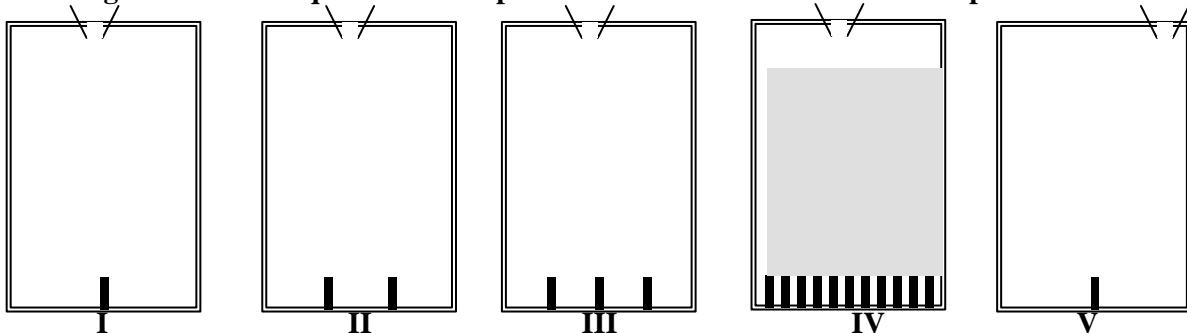
El niño comienza a comprender la interacción de cadenas causales que conducen a sucesos impredecibles, y la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios. Pero, bien porque comprende la interferencia de las causas, sin reconocer su independencia, bien porque comprende la independencia y no la interferencia, no llega a construir la idea de azar. Por tanto, la idea de azar, para Piaget, lo mismo que la de probabilidad, no puede ser totalmente adquirida hasta que se desarrolle el razonamiento combinatorio, en la etapa de las operaciones formales.

Según Piaget e Inhelder, el adolescente es capaz de relacionar los resultados posibles de los fenómenos aleatorios según esquemas operacionales. Una vez que se presenta una situación aleatoria, por medio del uso de estos esquemas se hace inteligible, y la síntesis entre el azar y lo operacional conduce al adolescente al concepto de probabilidad. Los casos aislados son indeterminados o imprevisibles (Piaget e Inhelder, 1951, pp 212) pero el conjunto de posibilidades puede determinarse mediante un razonamiento de tipo combinatorio, con lo que se vuelve previsible. Esta es la vía por la que aparece la idea de probabilidad expresada por la razón entre las posibilidades de un caso y del conjunto de posibilidades.

Distribuciones centradas

El problema de la mezcla conduce al de la forma de la distribución, ya que las posiciones finales de elementos mezclados y sus trayectorias revisten necesariamente ciertas formas de distribución en su conjunto, por ejemplo el de una serie de granos de arena que caen a través de un pequeño orificio (en un aparato de Galton o en un reloj de arena). Para Piaget, para comprender el mecanismo de la distribución que él llama centrada y que para nosotros sería la distribución normal, es preciso captar la simetría de las trayectorias posibles de los granos al caer por el orificio. Esta simetría aparece porque hay las mismas posibilidades para cada grano de orientarse a derecha o izquierda, hacia adelante o atrás, por lo que la distribución toma una forma regular.

Piaget indica que la representación matemática de dicha distribución corresponde a la curva de Gauss. Se emplea a menudo para hacer comprender su significado el aparato construido por Galton, el Quincux, que tiene forma de plano inclinado de madera donde se han colocado unos clavos regularmente espaciados. Al dejar caer algunas bolas por el orificio superior, se dispersan al azar, recogiéndose en unas casillas colocadas al final del plano inclinado. Las casillas centrales reciben más bolas que las extremas y la disposición es simétrica. Piaget utiliza un dispositivo semejante, pero simplificado en sus experimentos. Utiliza 5 aparatos, de los cuales cuatro tienen la abertura superior en la parte central y uno la tiene en el extremo superior derecho. Los aparatos se diferencian por el número de bifurcaciones (con 2, 3, 4 y un gran número de casillas finales en los aparatos I a IV y 2 casillas finales en el aparato V). (Ver figura 2.3.1.1)

Figura 2.3.1.1. Esquema de los aparatos de Galton utilizados en la experiencia

En cada una de las cajas se comienza introduciendo una bola, después una segunda y tercera, preguntando al niño dónde cree que va a caer y por qué. Una vez comprendida la experiencia se pide al niño que explique la forma que tomaría la distribución cuando se dejasen caer un gran número de bolas (unas 60). Finalmente se dejan caer las bolas y se pide al niño que interprete la distribución obtenida.

El primer estadio (hasta 7 años) se caracteriza por la ausencia de la idea de distribución. En la caja I generalmente los niños hacen apuestas simples a favor de uno de los dos casilleros, pero sin la idea de igualación al aumentar el número de bolas. En la caja II el sujeto prevé una distribución igual en los tres casilleros o bien que todas las bolas irán a parar a uno de los casilleros. Con la caja III el niño apuesta por uno de los casilleros centrales o por una distribución irregular. En la caja IV se espera en general una distribución irregular.

El segundo estadio (7 a 11 años) se caracteriza por un principio de distribución de conjunto generalizable, reconocible. En particular el sujeto prevé la desigualdad entre las frecuencias laterales y centrales. Pero esta distribución permanece insuficientemente cuantificada, por la falta de comprensión de la ley de los grandes números. Por ello, aunque hay una simetría global, no hay aún equivalencia entre los sectores correspondientes. En la caja I el sujeto prevé una igualdad aproximada entre los dos casilleros, pero sin que esta igualdad se consiga progresivamente con el número de bolas. En la caja II se prevé un máximo central, pero sin igualdad en los casilleros laterales. La caja III da lugar a la previsión correcta de la ventaja de las casillas centrales, pero sin equivalencia entre ellas ni entre las laterales. La caja IV no provoca la previsión de una distribución simétrica regular, pero comienza a haber una generalización de las experiencias anteriores sobre la configuración de conjunto.

El tercer estadio (a partir de 12 años) está marcado por la cuantificación de la distribución de conjunto, es decir, por la previsión de una equivalencia entre las partes simétricas correspondientes de la dispersión. Esto es claro para las cajas I y II; la caja IV da lugar a ensayos de graduación, hasta descubrir la distribución en forma de campana. El progreso más notable es la comprensión del papel de los grandes números en la regularidad de la distribución.

De este estudio podemos concluir que, el concepto de distribución es complejo en el que no sólo intervienen un conjunto de conceptos, sino que requiere de una determinada madurez conceptual por parte del sujeto. A continuación, pasamos a ocuparnos de la comprensión de la distribución normal en sujetos adultos.

2.3.2. COMPRENSIÓN DE PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Tipificación

Dentro de los estudios relacionados con la comprensión de la distribución normal o de sus elementos, muchos se han ocupado de distinguir algunos errores que se producen comúnmente. Así, en relación con la tipificación, Huck y cols. (1986) han señalado dos concepciones erróneas ampliamente extendidas entre los estudiantes, referentes al rango de variación de las puntuaciones Z, cuando se calculan a partir de una muestra finita o de una distribución uniforme.

El primer error se debe a que algunos alumnos creen que todas las puntuaciones Z han de tomar un valor comprendido entre -3 y +3, lo que podría estar relacionado con que el 99,7 % de las observaciones se encuentran entre la media ± 3 desviaciones típicas. Otros estudiantes piensan que no hay límite para los valores máximo y mínimo de las puntuaciones Z.

Cada una de estas creencias, relacionadas con la tipificación, está ligada a una concepción errónea sobre la distribución normal. Los alumnos que piensan que las puntuaciones Z siempre varían de -3 a +3, han usado frecuentemente una tabla o gráfico de la curva normal N (0,1) con este

rango de variación. De igual modo, los estudiantes que creen que las puntuaciones Z no tienen límite superior ni inferior, han aprendido que las colas de la curva normal son asintóticas al eje de abscisas y hacen una generalización incorrecta. Estos autores no proporcionan datos experimentales, sino sólo sus experiencias docentes.

La opinión de Huck es contradicha por Hawkins, Joliffe y Glickman (1992), para quienes uno de los usos más comunes de la media y de la desviación típica es el cálculo de puntuaciones Z (o puntuaciones tipificadas), por lo que creen que la mayoría de los estudiantes no tienen dificultad en comprender este concepto ni en calcular las puntuaciones Z para un conjunto de datos particular. Para ellos, los errores más comunes en un curso introductorio de estadística provienen del rol dominante que tiene el teorema central del límite y, del hecho de que la estimación y el contraste de hipótesis están con frecuencia basados en la hipótesis de que se trabaja con una distribución normal. Esta imagen tan potente de dicha distribución y el énfasis que generalmente se da a la tipificación puede ser el punto de partida para muchas concepciones erróneas relacionadas con las distribuciones de probabilidad y con la inferencia estadística.

La distribución normal como aproximación a distribuciones discretas

En otros casos, según Hawkins Joliffe y Glickman (1992), se producen errores cuando los estudiantes usan la distribución normal como una aproximación de la distribución binomial. Los errores provienen del hecho de que, muchas veces, los estudiantes no ven la diferencia entre lo discreto y lo continuo, y en muchos casos aplican la corrección por continuidad de una forma mecánica pero sin entender el significado de dicha corrección y sin saber en qué circunstancias debería ser aplicada. También resaltan que se debería poner sobre aviso a los estudiantes cuando utilizan paquetes de software estadístico, ya que éstos generalmente utilizan la corrección por continuidad y los alumnos no siempre prestan atención a estos detalles o no conocen las razones por las cuales se aplica dicha corrección.

Distribución normal y teorema central del límite

El teorema central del límite es uno de los teoremas estadísticos más importantes que explica el uso generalizado de la distribución normal. En relación con la comprensión del teorema central del límite y los diversos conceptos y procedimientos implícitos en él, Méndez (1991) estudia los sistemas de creencias de expertos y alumnos noveles. Su estudio tiene como propósitos, extraer datos fenomenológicos para representar las creencias que los sujetos tienen sobre los aspectos fundamentales del teorema central del límite, clasificar los errores más comunes y observar el alcance de las creencias de los alumnos noveles reflejadas en la representación experta.

En primer lugar, realiza un análisis de 10 libros de estadística básica e identifica cuatro propiedades básicas que deben entenderse para poder lograr una comprensión sólida del teorema, que resume de la siguiente forma:

1. La media de la distribución muestral es igual a la media de la población, e igual a la media de una muestra cuando el tamaño de la muestra tiende al infinito;
2. La varianza de la distribución muestral es menor que la de la población (cuando $N>1$);
3. La forma de la distribución muestral tiende a ser acampanada a medida que se incrementa el tamaño muestral, y aproximadamente normal, independientemente de la forma de la distribución en la población;
4. La forma de la distribución muestral crece en altura y decrece en dispersión a medida que el tamaño muestral crece.

A partir de textos escritos por personas expertas, representó el conjunto de conocimientos implícito en el teorema central del límite por medio de un mapa conceptual, utilizando las cuatro propiedades anteriores como base de un modelo mental de expertos sobre el teorema central del límite. Este modelo lo usó para obtener un marco a partir del cual investigar la comprensión del teorema, definiendo dos niveles de comprensión:

- El primer nivel está definido por las habilidades y conocimientos requeridos para resolver los ejercicios presentados en los libros de texto;
- El segundo nivel representa aspectos adicionales de conocimiento que generalmente no están incluidos en los libros de texto.

Estos dos niveles de comprensión se obtuvieron como resultado del análisis realizado a dos tests que el investigador pasó a los dos grupos seleccionados. Cada uno de los test tenía la finalidad de eliciar razonamientos en relación con conceptos que requieren diferentes niveles de interpretación. El test I, era un cuestionario con ítems de elección múltiple, con problemas clásicos extraídos de los libros de texto analizados previamente. El test II, presentaba 23 situaciones diferentes que estaban destinadas a eliciar conocimientos declarativo y procedimental, diversas representaciones, diversas formas de abstracción y creencias de los participantes. Como segunda fase de la investigación se realizaron entrevistas clínicas a un grupo de los alumnos que resolvieron los tests.

En el estudio se tomaron tres grupos de sujetos según si eran principiantes, (separando los que tenían algún estudio previo de estadística y los que no lo tenían), o si eran expertos (estudiantes de doctorado en estadística y economía). El objetivo general de la investigación era observar cómo los sujetos comprenden o no el teorema central del límite, y en particular observar la comprensión de los cuatro puntos básicos descritos.

Los estudiantes que estaban realizando estudios de doctorado mostraron relativamente, una buena comprensión del teorema y de sus elementos implícitos, pero tal comprensión era excesivamente formal. Carecían de capacidad de expresión intuitiva y además sus explicaciones eran formales pero no mostraban una comprensión profunda. Generalmente intentaban dar explicaciones a sus respuestas basándose en los axiomas de probabilidad.

En general, ninguno de los grupos presentó demasiado conocimiento del uso del vocabulario técnico, y además, los estudiantes de doctorado presentaban una falta de conocimiento en la utilización de expresiones cualitativas.

No se encontraron demasiadas diferencias en los otros dos grupos de estudiantes, quienes, en su mayoría, usaban los datos disponibles sin tener en cuenta la población de la que provenían y sin considerar el tamaño de muestra.

Tomando como base estas conclusiones, el autor recomienda que en un curso introductorio de estadística se tenga en cuenta la naturaleza de los materiales de aprendizaje, los conceptos y los procedimientos que se quieren enseñar. Esta investigación proporciona tres modelos de estudiantes típicos que debieran tenerse en cuenta a la hora de diseñar un curso.

Recomienda la utilización de datos para ayudar a los alumnos a observar los aspectos principales del teorema central del límite, así como la utilización de material manipulable, como por ejemplo, simulación por medio del lanzamiento de dados, para crear representaciones de los procesos muestrales y de la distribución muestral de la media, así como el ordenador para realizar simulaciones en las que el tamaño de muestra sea muy grande. También destaca la importancia de que el profesor sea consciente de los diversos niveles de comprensión que pueden adquirir sus alumnos. Aconseja además que, se propicie la comprensión intuitiva antes de conducir a los alumnos a un pensamiento más formal.

Afirma que los libros de texto generalmente, se centran en el uso cuantitativo de los conceptos sin considerar los aspectos cualitativos, lo que lleva a los alumnos a utilizar un lenguaje formal pero sin tener una comprensión profunda del concepto. La utilización de material de este tipo lleva también a realizar evaluaciones del mismo tipo. La entrevista clínica puede ser una herramienta de evaluación más adecuada de la comprensión del alumno en relación con el concepto, y no sólo del resultado numérico correcto.

Diversos niveles de concreción de un concepto en el estudio de la inferencia

Un problema relacionado con la comprensión de la idea de distribución, y, en general de la inferencia es, según Schuyten (1991), los diversos niveles de concreción de un mismo concepto que necesitamos usar cuando introducimos el estudio de la inferencia estadística. Esta investigadora obtiene sus conclusiones a partir de su experiencia docente en cursos introductorios de estadística en psicología y educación, más que en una investigación planeada.

El alumno, en estadística descriptiva usa como unidad de análisis el sujeto (un elemento de la población). La media \bar{x} se refiere a una muestra de tales elementos y es un valor numérico constante, puesto que no queremos extender los resultados más allá de dicha muestra.

En inferencia, se introduce la media teórica o esperanza matemática μ de *la población concreta*, y la media \bar{x} de la muestra particular con la que estamos trabajando, ya no se considera un único valor, sino una variable aleatoria, un caso particular de otra población: la población de todas las posibles medias de todas las posibles muestras de tamaño dado que

podríamos extraer de la población de interés. Por eso se considera la media de la muestra como un *estadístico* y la media de la población como un *parámetro*.

Al considerar la población de todas las medias, se cambia también la unidad de análisis, que ya no es el sujeto, sino la muestra de tamaño dado. Se estudia la distribución muestral de todas estas medias, distribución que, a su vez tiene una media o esperanza matemática: $\bar{E}[\bar{x}]$. Para el alumno diferenciar entre estos tres niveles de medias y las dos unidades de análisis supone una gran dificultad conceptual.

En su investigación Schuyten (1991) encuentra también la dificultad del uso de un lenguaje formal, que no todos los estudiantes son capaces de comprender, constituyendo las fórmulas, en ocasiones, un obstáculo insalvable para la comprensión de los conceptos estadísticos.

Los estudiantes no diferencian, en ocasiones, el conocimiento declarativo de un concepto del conocimiento procedimental, por lo que no comprenden que haya diversas fórmulas o procedimientos de cálculo para algunos estadísticos, como es el caso de la mediana. El uso de las tablas estadísticas, como las tablas de la distribución normal es también complicado, y en esta investigación alrededor de la cuarta parte de los estudiantes mostraron dificultades en su manejo. Los estudiantes no llegan a concebir la tabla como una función que puede ser usada en dos sentidos; directo para obtener una probabilidad dado un número e inverso, para obtener un número dada la probabilidad.

Como resumen, en los trabajos descritos en esta sección se han investigado la comprensión de las siguientes propiedades de la distribución normal:

- Tipificación, observándose que los alumnos confunden el rango de variación de puntuaciones normales y tipificadas;
- Aproximación a distribuciones discretas, donde la mayor dificultad es comprender la razón de la corrección de continuidad y la diferenciación entre lo discreto y lo continuo;
- El teorema central del límite, respecto al cual los alumnos muestran una concepción excesivamente formal y errores en el uso del vocabulario técnico;
- Los diversos niveles de uso de un concepto en inferencia, con la conclusión de que el alumno a veces confunde estos niveles y no diferencian el conocimiento declarativo y procedimental.

Estos trabajos se han centrado tan sólo en puntos aislados de la comprensión de la distribución normal, lo que nos sugiere el interés de hacer un estudio sistemático sobre la comprensión de los diversos elementos que configuran el significado de dicha distribución.

2.3.3. FACTORES QUE INFLUYEN EN LA COMPRESIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Ansiedad epistemológica

Wilensky (1995 a, 1995 b, 1997) estudia el efecto de la ansiedad epistemológica cuando los sujetos deben enfrentarse a situaciones de incertidumbre, analizando sus sentimientos y actitudes frente a conceptos que conocen teóricamente, pero cuyo significado no comprenden.

Según Wilensky, las investigaciones de Kahneman, Slovic y Tversky sugieren que las personas no pueden tener intuiciones correctas en el campo de la probabilidad y que los resultados correctos en este campo sólo provienen de la aplicación rigurosa y exacta de fórmulas. Ello implica el interés primordial de encontrar un medio de aprendizaje adecuado para ayudar a los estudiantes a transformar sus creencias probabilísticas en intuiciones efectivas y a obtener una comprensión conceptual sólida de la estocástica.

El objetivo del trabajo de Wilensky que se encuadra dentro de un programa de investigación denominado Matemáticas Conectada, es analizar el origen de las dificultades que tienen los estudiantes en estocástica, construir medios de aprendizaje que fomenten el desarrollo de concepciones correctas, y promover actitudes positivas hacia la disciplina. La hipótesis básica que sostiene Wilensky es que la antipatía de los estudiantes hacia la estocástica se debe principalmente a la *ansiedad epistemológica* que sufren frente a los conceptos básicos de esta disciplina y a que no poseen medios de aprendizaje suficientemente potentes.

Wilensky (1995 b, 1997) define la *ansiedad epistemológica*, como el sentimiento de confusión e indecisión que sienten la mayoría de los estudiantes frente a las distintas posibilidades o vías de resolución de un problema estocástico. Esta *ansiedad* está reforzada por las prácticas de enseñanza empleadas en la clase de matemáticas y por la cultura matemática “protectora” que no promueve el diálogo entre docente y alumno y entre alumnos entre sí para ir

construyendo el concepto. Wilensky concluye que se pueden dirigir efectivamente las dificultades de los estudiantes sin necesidad de recurrir a una instrucción demasiado formalizada.

En su investigación, realizó 17 entrevistas abiertas relacionadas con la estocástica, a estudiantes entre 14 y 64 años. El entrevistador condujo estas conversaciones de tal manera que se tocaran 23 temas: desde actitudes frente a situaciones de incertidumbre, hasta interpretación de información estadística en los periódicos, diseño de estudios estadísticos y problemas formales de probabilidad. En la mayoría de las entrevistas estuvo disponible un medio informático para realizar simulaciones y modelaciones, especialmente diseñado para experimentar con la estocástica.

Uno de los conceptos claves abordado fue el de las distribuciones de probabilidad, debido a las siguientes razones:

- La comprensión de las distribuciones de probabilidad es crucial para entender los modelos estadísticos ubicuos en la investigación científica;
- son igualmente centrales para el que participa en un foro público como para el ciudadano informado;
- sin el concepto de distribución los estudiantes no pueden entender verdaderamente cómo los sucesos pueden ser impredecibles y a la vez regulares; no pueden tener un concepto coherente de aleatoriedad;
- las distribuciones de probabilidad permanecen en la interface entre el estudio tradicional de probabilidad y el estudio tradicional de estadística y, por lo tanto, brinda una oportunidad de realizar fuertes conexiones entre ambas disciplinas;
- las distribuciones de probabilidad tienen el potencial para conducir a cambios significativos en la experiencia de aprendizaje de muchos estudiantes.

Wilensky (1995a, 1995b, 1997) afirma que hay muchas razones para que la *ansiedad epistemológica* sea particularmente pronunciada en el campo de la estocástica. Cuando encontramos datos estadísticos, generalmente no se especifica el método de recolección de los mismos. Además, las limitaciones de la memoria a corto plazo hacen difícil recoger grandes cantidades de datos en “tiempo real”. En consecuencia, construimos resúmenes de los datos que no son analizables sobre la base de sus elementos constitutivos y quedan desconectados de los datos originales. De esta forma, la estocástica supone un nivel de desarrollo que no es común con otras áreas de la matemática.

Una hipótesis central del proyecto de Probabilidad Conectada es que la tecnología informática debería ser para la probabilidad lo que la notación hindo-arábiga fue para la aritmética. Los medios informáticos permiten visualizar grandes cuerpos de datos en un pequeño espacio y en un corto lapso de tiempo, salvando las limitaciones de la memoria a corto plazo y de esa manera centrarnos en el razonamiento probabilístico.

Concienciarse de los fenómenos aleatorios que ocurren a nuestro alrededor, requiere ver nuestras situaciones cotidianas como ejemplos de una gran colección de situaciones posibles similares. Construir esta gran colección dentro de un objeto “concreto” de pensamiento requiere de un trabajo masivo de construcción (Wilensky, 1991). Esto requiere forjar uniones entre situaciones corrientes y situaciones olvidadas o futuras. Una manera de pensar sobre situaciones de probabilidad es pensar en entidades distribuidas, múltiples e interactivas. En consecuencia, construimos la totalidad fuera de las partes que interactúan y entendemos el comportamiento del conjunto en términos del comportamiento promedio.

Wilensky también habla sobre los *fenómenos emergentes*, de los cuales emergen los modelos globales a través de interacciones locales y pueden proveer de contextos ricos para que los estudiantes construyan la probabilidad. Los estudiantes pueden explorar las estructuras estables que emergen cuando el comportamiento probabilístico está dado por agentes computacionales distribuidos. En vez de encontrar la probabilidad a través de la resolución de conjuntos descontextualizados de problemas combinatorios, pueden participar en actividades constructivas, en las que diseñan y construyen modelos de probabilidad.

Las distribuciones de probabilidad pueden ser casos típicos de *fenómenos emergentes*, ya que son estructuras globales que surgen de las interacciones de múltiples agentes distribuidos. Generalmente, en las clases típicas de estadística, la naturaleza emergente de distribuciones tales como la distribución normal está oculta. “Aprendemos” acerca de las distribuciones por

descripciones de sus características globales, como por ejemplo: la media, la desviación típica, la varianza, etc. Esto oculta la forma en que las distribuciones son construidas o emergen de casos individuales. Como resultado de esto, se rompe la conexión crítica entre el micro nivel del fenómeno y el macro nivel. El estudiante está propenso a dar la descripción macro y la fórmula y a aceptar que tal descripción macro es la apropiada para tales y tales casos. Esto contribuye significativamente a la *ansiedad epistemológica*.

Para el tema de la distribución normal, Wilensky realizó estudios de casos con diversos estudiantes, la mayoría de carreras en las que se habían tratado temas estadísticos y otros eran profesionales, como por ejemplo, biólogos, psicólogos, que en su práctica aplicaban la estadística. En todos los casos utilizaba el ordenador como herramienta didáctica, aplicando una versión avanzada del lenguaje LOGO, con el que el entrevistado podía generar sus propios modelos y realizar simulaciones que le ayudaran a extraer conclusiones estadísticas. En estos estudios de casos utilizó las técnicas de resolución de problemas y también de proposición de problemas (problem posing).

Comenzaba todas sus entrevistas pidiéndole al entrevistado que le diera un ejemplo de aplicación de la distribución normal. Una vez que el entrevistado daba su ejemplo, el entrevistador le preguntaba por qué aplicaba la distribución normal y no alguna otra distribución. En general, encontró que todos sus entrevistados, sabían aplicar formalmente la distribución normal, pero no sabían explicar por qué debían aplicarla. Muchos decían que lo hacían porque así se lo habían enseñado en los cursos de estadística que habían realizado, pero que nunca se habían preguntado por qué era ése el procedimiento y no otro.

A continuación pedía al entrevistado que tratara de buscar por sí mismo alguna manera de fundamentar por qué era necesario aplicar la distribución normal en el ejemplo que había propuesto. El entrevistado era libre de utilizar las herramientas que considerara pertinentes y además podía simular su propio modelo por medio del ordenador. Pudo observar que en la mayoría de los casos, el entrevistado conocía y comprendía formalmente la distribución normal, pero que su conocimiento no estaba bien conectado, aplicaban las fórmulas de forma mecánica pero no tenía buenas conexiones e intuiciones sobre el tema.

Wilensky concluye que la ansiedad epistemológica que presentaban los entrevistados se puede combatir por medio de una terapia que debe tener en cuenta: a) El punto de vista personal del entrevistado en relación con la matemática y las relaciones de ésta con su propia experiencia. b) La posibilidad de utilizar un medio informático que permita construir modelos de fenómenos probabilísticos y que el entrevistado pueda realizar sucesivos refinamientos de éstos.

Los entrevistados por Wilensky podrían considerarse como expertos si se los analiza desde un punto de vista matemático formal y esto lleva a pensar que aún los expertos pueden tener serios problemas en la comprensión de los conceptos estadísticos.

El autor enfatiza la importancia de la resolución de problemas, y la proposición de problemas, ya que esta última permite proponer un problema de interés del propio entrevistado e ir realizando diversas aproximaciones hasta encontrar la solución adecuada. Además, cuando se usa un lenguaje informático para modelar un problema, se puede lograr la aparición de una visión natural de las distribuciones de probabilidad como un tipo de fenómeno emergente.

Diseño de cursos centrados en el estudio de otros factores que influyen en la competencia estadística

Garfield (1981) describe un estudio cuyo objetivo es aislar los factores que influyen en la competencia estadística global alcanzada por los estudiantes al finalizar un curso universitario de introducción a la estadística. Para desarrollar un marco de evaluación, usó el modelo de Chevarney y cols. (1977), en el que el proceso de resolver un problema estadístico tiene tres componentes:

- a. Comprensión: Identificar los términos estadísticos, la información conocida y desconocida y el tipo de problema;
- b. Planificación y ejecución: Seleccionar un procedimiento estadístico, aplicarlo y obtener la solución;
- c. Evaluación e interpretación: Verificar la solución, viendo si tiene sentido; interpretar la respuesta en términos estadísticos y en términos del problema.

Diseñó e implementó un curso basado en resolución de problemas tomando como guía el modelo detallado anteriormente. Para evaluar la instrucción, desarrolló una serie de tareas que le permitieron determinar el nivel del modelo de Chevarney, alcanzado por los alumnos, que incluyeron: preparación de informes subjetivos, informes sobre la verdad o falsedad de una proposición, proporcionar información faltante en un problema, responder preguntas específicas, reproducir un mensaje y ejecutar un procedimiento.

El curso estuvo basado en la resolución de problemas y estaba dividido en cinco unidades: Estadística Descriptiva - Probabilidad - La Distribución Normal - Inferencia Estadística y Datos Bivariantes. El estudio se llevó a cabo en dos fases, en cada una de las cuales participaron aproximadamente 80 estudiantes, que fueron asignados aleatoriamente a diferentes clases experimentales. Cada grupo estaba dividido en dos subgrupos.

En uno de los grupos (A) se dio a los alumnos problemas supplementarios que representaban a una variedad de áreas de aplicación. En el otro grupo (B), se les daba a los alumnos problemas bien o mal definidos que ellos debían investigar. En uno de los subgrupos era el profesor quien entregaba los problemas y en el otro subgrupo, eran los alumnos los que debían proponerlos. Los objetivos generales de la unidad sobre la distribución normal eran los siguientes:

- Conocer las características de la distribución normal y de la distribución normal típica;
- Usar la aproximación de la distribución normal a la binomial;
- Construir distribuciones muestrales de poblaciones finitas;
- Responder a cuestiones de probabilidad transformando medias de variables normales a valores tipificados. Usar la notación Z. Usar la tabla de valores Z para responder a preguntas de probabilidad;
- Usar el teorema central del límite;
- Usar la distribución normal típica para resolver problemas de probabilidad y problemas de aplicación.

En el instrumento de evaluación se usó una unidad con 16 ítems referida a la distribución normal, que fue pasada a 117 estudiantes. No proporciona conclusiones específicas sobre la comprensión de la distribución normal, debido a que la finalidad del estudio se dirigía a analizar la influencia de la ansiedad matemática sobre los alumnos en el curso de estadística. Dentro de los factores que la autora considera que influyen en la competencia estadística de los alumnos analizó la ansiedad matemática y la habilidad matemática.

Sus conclusiones, en general, apuntan a que el efecto de la ansiedad matemática sobre el aprendizaje es menor que el de la habilidad matemática del estudiante. Cuando se permitió a los estudiantes elegir un tema de su interés para realizar los ejercicios complementarios, el efecto de la ansiedad matemática pareció ser menos evidente. Cuando se pidió a los estudiantes que plantearan sus propios problemas, resultaron con frecuencia problemas mal definidos o que no podían resolverse con los conceptos que habían estudiado. Los estudiantes se quejaron cuando se les sugirió aplicaciones de la vida real, porque ello implicaba la necesidad de tener que recoger datos. También preferían que se les diesen instrucciones sobre cómo analizar los datos, en lugar de tomar sus propias iniciativas para elegir un procedimiento.

En resumen, en las investigaciones que hemos analizado en esta sección se han determinado que los siguientes factores pueden incidir en la comprensión de la distribución normal:

- La ansiedad del estudiante, que no posee medios de aprendizaje suficientemente potentes para comprender cómo emerge la distribución, llegándose a la conclusión de que el ordenador podría ser uno de estos medios.
- El efecto de la ansiedad y la habilidad matemáticas en el aprendizaje sobre la capacidad de resolución de problemas en un curso de estadística. Se observó el efecto de la habilidad matemática, lo que nos sugiere diferenciar los alumnos en dos tipos, según su conocimiento estadístico y matemático previo en nuestro trabajo. La dificultad general de los estudiantes al resolver y proponer problemas a partir de datos reales nos ha hecho incidir en el trabajo con datos reales en nuestra propuesta de enseñanza.

2.3.4. COMPRENSIÓN DE LAS DISTRIBUCIONES MUESTRALES

En el curso introductorio de estadística, el estudio de las distribuciones muestrales se reduce a la distribución de la media y proporción y otros estadísticos para el caso asintótico. Es

decir, el estudio de las distribuciones muestrales es una aplicación directa del teorema central del límite, e involucra a la distribución normal. Las investigaciones que describimos a continuación han analizado puntos en la comprensión de estas distribuciones.

Comprensión del efecto del tamaño de la muestra sobre la variabilidad de la distribución muestral

Well, Pollatsek y Boyce (1990) realizaron una investigación con estudiantes de psicología sobre la comprensión de las distribuciones de la media en el muestreo cuyo fin era identificar las razones que conducen a utilizar la heurística de la representatividad y los diversos juicios que realizan los sujetos al justificar sus respuestas. Puesto que la distribución de la media es asintóticamente normal, la comprensión de las distribuciones en el muestreo está también relacionada con la de la distribución normal. Algunas de las tareas usadas en esta investigación tienen cierto parecido a las que usaremos en nuestro experimento de enseñanza.

Dicha investigación estuvo compuesta de varios experimentos. En el primer experimento se comparó el rendimiento de un mismo grupo de sujetos en relación con dos versiones de enunciados de problemas, cada uno de los cuales presentaba dos variantes: uno, relacionado con el grado de exactitud con el que la población es representada por la distribución de las medias muestrales, y el otro, en el que se debía realizar una estimación del porcentaje de que un determinado valor promedio sea mayor que X (X es un determinado valor para cada problema), es decir, en este caso se utilizaba la cola superior de la distribución muestral, que es una distribución normal.

En el segundo experimento se presentó a los sujetos un mismo enunciado con tres versiones relacionadas con la estimación de porcentajes en una sola cola de la distribución muestral, en las dos colas y, en el intervalo central. Además de seleccionar la respuesta correcta como en los dos experimentos anteriores, se pidió a los sujetos que expresaran las razones de su elección. La construcción de estos problemas se basó en las respuestas dadas por los alumnos en el primer experimento. En ninguno de estos experimentos los sujetos habían recibido instrucción sobre estos temas. Los resultados obtenidos para la estimación de porcentajes en el centro de la distribución fue mucho mejor que para las otras dos versiones, lo cual condujo a los investigadores a intentar obtener más información al respecto. En consecuencia, quitaron la versión relacionada con la exactitud y agregaron una versión relacionada con la estimación de porcentajes en ambas colas de la distribución (tercer experimento). En estos tres experimentos los datos son recogidos con un cuestionario.

En el último experimento se adoptó una estrategia distinta dándoles a los sujetos una breve instrucción sobre el concepto de distribuciones muestrales y pidiéndoles luego que explicaran sus razonamientos. Se pasó un pretest, en el que se le entregaba al sujeto una hoja con el enunciado de uno de los problemas. Una vez que el sujeto lo resolvía, el entrevistador hacía una breve explicación en relación con la diferencia entre distribución muestral y poblacional, y por último, el sujeto podía experimentar con el ordenador para luego expresar sus conclusiones.

Los sujetos implicados fueron 114 estudiantes en el primer experimento, 151 estudiantes en el segundo, 120 estudiantes en el tercero y 27 sujetos del departamento de Psicología en el último.

Se concluye que los sujetos utilizan información del tamaño muestral en forma más apropiada cuando se les pregunta sobre la exactitud de las medias muestrales o sobre la región central de la distribución muestral que cuando se les pide información sobre las colas de las distribuciones muestrales. Esto sugiere que la variable más importante que influye en el éxito de la tarea es la similitud entre la media muestral y poblacional. En general, los sujetos parecen comprender que los promedios de muestras más grandes se acercan más a la media de la población, pero no comprenden las implicaciones de esto sobre la variabilidad de la media muestral. Esto sigue aconteciendo aún después de haberlos instruidos al respecto y aún después de que los mismos sujetos han podido experimentar realizando simulaciones con el ordenador.

El papel de las distribuciones muestrales en el contraste de hipótesis

Las ciencias empíricas, en general, y en particular la psicología y la educación, dependen en gran medida de la demostración de la existencia de efectos a partir del análisis estadístico de datos. La inferencia estadística se inició hace unos 300 años, aunque fue popularizada a partir de los trabajos de Fisher, Neyman y Pearson sobre los contrastes estadísticos. En la actualidad, la

mayor parte de los investigadores que emplean la inferencia, utilizan una mezcla de la lógica sugerida por estos tres autores. Sin embargo, debido a que la lógica de la inferencia estadística es difícil, su uso e interpretación no es siempre adecuado y han sido criticados en los últimos 50 años. Una descripción de esta problemática y revisión de estas críticas puede encontrarse en Batanero (2000 a).

Han sido varios los investigadores que han tratado de analizar los errores en la comprensión del contraste estadístico de hipótesis y se han centrado preferentemente en las dificultades sobre la interpretación del nivel de significación. Estos trabajos, que se describen en Vallecillos (1994, 1996, 1999) y Batanero (2000b) han dado razones de tipo psicológico para la explicación de tales errores.

Con un enfoque cualitativamente diferente, la investigación de Vallecillos (1994) aborda el estudio del contraste de hipótesis desde una perspectiva didáctica, utilizando el marco teórico sobre el significado de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994) que en dicho momento se hallaba menos desarrollado de lo que describimos en nuestra investigación. Por tanto, este trabajo constituye uno de los antecedentes básicos del nuestro, en el sentido de compartir nuestro marco teórico e interesarse, asimismo, por la comprensión de los alumnos universitarios sobre uno de los conceptos básicos en inferencia estadística.

La autora realiza un estudio epistemológico y matemático del contraste estadístico de hipótesis, relacionándolo con la problemática de la inducción en las ciencias empíricas y analizando hasta qué punto la inferencia estadística proporciona una solución a esta problemática. De este análisis teórico determina una serie de elementos de significado sobre el contraste estadístico de hipótesis, mostrando la complejidad conceptual del tema y la multitud de conceptos que el alumno debe integrar para lograr una comprensión completa del mismo. Uno de estos elementos es el de distribución muestral del estadístico.

Para realizar el estudio se construye un cuestionario de evaluación del significado personal construido por estudiantes del curso introductorio de estadística, al finalizar el mismo. Después de varias muestras piloto se pasó el cuestionario a una muestra de 436 estudiantes universitarios de la Universidad de Granada en diversas especialidades. El cuestionario contiene ítems de opciones múltiples, ítems en que el alumno debe justificar una respuesta, y problemas abiertos. El análisis cualitativo y cuantitativo de las respuestas, incluyendo métodos multivariantes, como análisis factorial y análisis cluster, permitió determinar diferentes componentes en el significado que los alumnos atribuyen al contraste de hipótesis.

El trabajo se complementa con entrevistas clínicas a un grupo reducido de alumnos. Como consecuencia, se describen concepciones erróneas respecto al nivel de significación, hipótesis y la lógica global del proceso (Vallecillos, 1995). También se estudian las relaciones entre el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental de los estudiantes. Los errores detectados aparecen en todas las muestras de estudiantes, incluidos alumnos que cursan la licenciatura de matemáticas.

Uno de los factores determinados por Vallecillos se refiere a las relaciones entre el parámetro y el estadístico de contraste. Sobre este factor se observa la falta de comprensión de la variabilidad del estadístico en el muestreo y la confusión entre estadístico y parámetro. Asimismo se observa una falta de comprensión del papel que juega la distribución del estadístico en la determinación del nivel de significación y las regiones crítica y de aceptación.

En conclusión, observamos en este grupo de investigaciones las siguientes dificultades de comprensión en las distribuciones muestrales que se conectan con el tema de la distribución normal, y que serán tenidas en cuenta a lo largo del trabajo:

- Dificultad de comprensión del efecto del tamaño de la muestra sobre las distribuciones asintóticas en el muestreo;
- Confusión entre estadístico y parámetro, lo que sugiere que los alumnos tienen dificultad en diferenciar entre los datos empíricos y el modelo que usamos para describirlos.

2.3.5. DISEÑO DE CURSOS PARA ESTUDIAR EL EFECTO DE LA ENSEÑANZA BASADA EN ORDENADOR EN LA COMPRENSIÓN DE DISTRIBUCIONES MUESTRALES

En la investigación de Lipson (1997), se trabajan las distribuciones muestrales con dos grupos de alumnos, uno de los cuales usa el programa *Minitab* y el otro con un paquete diseñado por Rubin, llamado *Sampling Laboratory*.

Los estudiantes que participaron en esta investigación provenían de distintos cursos y algunos ya habían realizado cursos previos de estadística. La experiencia se llevó a cabo en tres sesiones de una hora. En la primera clase, de tipo tradicional, se introdujo las distribuciones en el muestreo, a partir de un ejercicio de muestreo utilizando una caja con bolas blancas y rojas, obteniendo luego el histograma correspondiente. Luego, se dividió en forma aleatoria a los alumnos en los dos grupos que usarían cada programa. En las dos clases siguientes los alumnos debían realizar simulaciones con el ordenador para analizar distribuciones muestrales de diferentes tamaños de muestra y luego debían responder a determinadas cuestiones.

Al finalizar la clase introductoria, el investigador pidió a los estudiantes que realizaran un mapa conceptual basado en los siguientes términos: medidas de posición central, constante, distribución, estimación, distribución normal, población, parámetro poblacional, proporción de la población, muestra, distribución muestral, proporción muestral, estadístico muestral, variabilidad muestral, forma, dispersión y variable. Podían utilizar estos términos o agregar o quitar los que les parecieran. Al finalizar las sesiones con el ordenador se les pidió que revisaran sus mapas y si lo consideraban pertinente que los modificaran.

Para realizar el análisis de los mapas se clasificaron diversas proposiciones identificadas por expertos en el área, y luego se compararon las proposiciones observadas en ambos mapas conceptuales de tal manera que esto permitía observar si había habido evolución en el aprendizaje luego del trabajo con el ordenador.

Como conclusión no se encontraron grandes diferencias entre los estudiantes que habían trabajado con distintos programas. Los resultados mostraron que las actividades de simulación con el ordenador estaban asociadas con un desarrollo en la comprensión de muchos estudiantes. El análisis de los mapas conceptuales permitió al investigador observar un crecimiento en el conocimiento conceptual de los estudiantes, y también pudo observar que cada alumno construía un mapa conceptual exclusivo lo cual coincide con la teoría de que la comprensión es construida por el estudiante sobre la base de su propia estructura cognitiva, y no sólo con lo que haya recibido del profesor.

En delMas, Garfield, y Chance (1998) y Chance, Garfield y delMas (1999) se analiza el efecto de la simulación por ordenador en el desarrollo de la comprensión de las distribuciones muestrales. En la primera de estas investigaciones se plantea un modelo de evaluación basado en diversas teorías de procesamiento de información, teorías pedagógicas y diversas investigaciones relacionadas con el razonamiento estadístico. Dicho marco o modelo de evaluación/ instrucción consta de los siguientes componentes:

- Un pretest que evalúa el conocimiento previo requerido y las intuiciones que pueden afectar las interacciones de los estudiantes con la actividad planteada. Los resultados del pretest son usados como la base de discusiones con los estudiantes para clarificar concepciones erróneas que pueden interferir con el aprendizaje de la actividad.
- Un listado de objetivos de evaluación final que especifican el aprendizaje deseado y son usados para desarrollar la actividad de aprendizaje.
- Items de autoevaluación involucrados en las actividades de aprendizaje, mediante los que los estudiantes realizan y evalúan sus predicciones, para promover cambios conceptuales.
- Un postest de resultados deseados que evalúan los tipos correctos de razonamiento conceptual o los errores.
- Un postest que consta de ítems que podrían ser incluidos en un examen final del curso para evaluar la retención a largo plazo.

Los autores han realizado una investigación en la que trabajan con el micromundo *Sampling distributions*, diseñado específicamente para trabajar las distribuciones muestrales y una actividad basada en el modelo de evaluación descrito, con el fin de evaluar la efectividad de las actividades planteadas por los investigadores. Las cuestiones básicas de esta investigación son: identificar los problemas de aprendizaje, diseñar una técnica instruccional para mejorárlas, determinar si es o no efectiva y extraer consecuencias para continuar la investigación.

La experiencia se llevó a cabo en tres fases o versiones, en cada una de las cuales se iban modificando las actividades o el software para tratar de mejorar la comprensión de los estudiantes sobre las distribuciones muestrales.

En la primera versión se instruyó a los estudiantes sobre cómo crear una distribución muestral

por medio del programa, de esta manera realizaron varias simulaciones para distintos tamaños de muestras y luego se les pidió estudiar las siguientes cuestiones:

- Relación entre tamaño muestral y dispersión de la distribución muestral;
- Determinar a partir de qué tamaño muestral los estadísticos de la distribución comienzan a estabilizarse;
- Analizar si los estadísticos obtenidos son buenos estimadores de los parámetros de la población;
- Estudiar si el comportamiento de los estadísticos de la distribución muestral, concuerda con lo previsto por el teorema central del límite.

Estas actividades son realizadas con poblaciones normales u otras con diversas formas, como U, asimétrica o uniforme. Las preguntas y actividades están organizadas de tal forma que dirijan la atención de los estudiantes hacia diversos puntos del teorema central del límite y que permita evaluar sus hipótesis acerca del comportamiento de las distribuciones muestrales. Esta primera versión se administró a 79 estudiantes de un curso introductorio de estadística en una universidad privada y 22 estudiantes que habían tomado un curso previo de estadística básica.

Los instrumentos utilizados en esta primera versión fueron un pretest al iniciar la actividad con el ordenador y un postest al finalizarla. Cada test constaba de cinco problemas, en cada uno de los cuales se presentaba el gráfico de una distribución correspondiente a una población y cinco histogramas adicionales que representaban posibles distribuciones de medias muestrales para muestras aleatorias de una población particular. Estas cinco distribuciones muestrales representaban una distribución normal, una distribución asimétrica positiva y otra negativa, una distribución simétrica bimodal o trimodal y dos distribuciones irregulares. Los estudiantes debían seleccionar en cada problema cuál era el histograma que representaba a la distribución muestral correspondiente a la población, además de responder a otras preguntas. Los histogramas de las posibles distribuciones muestrales fueron diseñados de tal manera que los estudiantes pudieran mostrar diversos tipos de razonamientos correctos o erróneos. Las cuestiones realizadas en la actividad se obtuvieron de la fase piloto de la investigación.

Los resultados de la primera versión mostraron un cambio positivo del pretest al postest, pero, un número significativo de alumnos parecía no comprender las implicaciones básicas del teorema central del límite. En consecuencia, los investigadores decidieron mejorar el software y realizar una segunda experiencia, en la que los estudiantes realizaran sus propias predicciones y las evaluaran usando el programa. De esta forma el pretest de la primera versión formó parte de la actividad con el ordenador. En la nueva actividad se hizo más énfasis en las comparaciones de la forma y la dispersión que en los parámetros y estadísticos, y requirió que los estudiantes realizaran una comparación directa de sus predicciones en el pretest con las distribuciones muestrales producidas por medio del programa.

En esta segunda versión participaron 149 estudiantes, 32 de los cuales asistían a una universidad privada, 94 habían tomado un curso introductorio de estadística y 13 habían tomado un curso en la escuela de educación. 141 dieron respuestas a todos los ítems del pretest y postest. Los investigadores concluyeron que había evidencia de diferentes tipos de razonamiento, en las respuestas de los alumnos clasificándolos de la siguiente forma:

- “*Razonamiento correcto*”: cuando los estudiantes eligen los dos histogramas correctos para el problema planteado.
- “*Buen razonamiento*”: cuando los estudiantes eligen para el mayor tamaño de muestra un histograma que se asemeja a la distribución normal y con menor variabilidad que el histograma elegido para el menor tamaño de muestra.
- “*Razonamiento de mayor a menor*”: cuando los estudiantes eligen un histograma con menos variabilidad para el mayor tamaño de muestra o un histograma con una variabilidad similar a la de la población, o ambos histogramas tienen la forma de la población.
- “*Razonamiento de menor a mayor*”: cuando los estudiantes eligen un histograma de variabilidad menor para el mayor tamaño muestral, es decir, cuando esperan que la distribución muestral más semejante a la población es la que tiene un menor tamaño muestral.

En una tercera versión del software se incluía un programa que permitiera visualizar la distribución y los estadísticos para cada muestra. Se modificó la actividad para potenciar este nuevo elemento del programa, de tal manera que la actividad de la segunda versión requería aproximadamente de una hora para su resolución y en la tercera versión se necesitaba de dos horas.

La tercera versión fue administrada en un estudio piloto como parte del curso introductorio de estadística en la Universidad del Pacífico a 31 estudiantes y en la Universidad de Minnesota a 24 estudiantes. En este caso, en el pretest, se incluyeron cuestiones relacionadas con los conceptos que los investigadores consideraban como prerrequisitos para comprender las distribuciones muestrales, tales como, lectura de gráficos, medidas de posición, variabilidad e identificación de formas comunes de distribuciones.

Como conclusiones generales, los autores destacan que la presentación de información en grandes cantidades no siempre conduce a una buena comprensión de las distribuciones muestrales, y que se debe confrontar a los estudiantes con sus concepciones erróneas para promover un mejor aprendizaje. Concluyen además que los estudiantes aprenden mejor cuando las actividades están estructuradas de tal manera que los ayude a evaluar la diferencia entre sus propias creencias sobre el azar y los resultados empíricos.

En resumen, los investigadores que han diseñado cursos para estudiar el efecto de la enseñanza basada en ordenador de las distribuciones muestrales han concluido que:

- No hay grandes diferencias en el aprendizaje de los alumnos que han usado diferentes programas, lo cual nos autoriza a usar en nuestro trabajo el paquete estadístico Statgraphics, que tiene unas características didácticas razonables y que está a disposición de los alumnos en las aulas de informática de la Universidad de Granada
- La simulación, en general, mejoró la comprensión de los estudiantes, lo que nos sugiere que es interesante usar la simulación como uno de los recursos didácticos dentro de nuestro curso;
- Sin embargo, el ordenador añade nueva información en el aprendizaje y esto requiere un coste y esfuerzo añadido por parte de los estudiantes. Será necesario, en consecuencia evaluar el trabajo de los alumnos, tanto con métodos convencionales (cuestionario) como con una prueba de ensayo en la que deban mostrar su capacidad de uso del ordenador.

2.4. INVESTIGACIONES SOBRE EL PAPEL DEL ORDENADOR EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE CONCEPTOS ESTADÍSTICOS

2.4.1. INTRODUCCIÓN

Es un hecho aceptado por todos los investigadores en didáctica de la estadística que su gran evolución en el siglo XX se debe, fundamentalmente al desarrollo paralelo de los ordenadores y, en consecuencia, de los programas estadísticos. Puesto que el software es asequible a un mayor número de usuarios y acorta la distancia entre la comprensión de los procedimientos estadísticos (que a un nivel elemental es posible para cualquier universitario) y su aplicación (que, realizada a mano o con calculadora es demasiado compleja para tales usuarios), los ordenadores han contribuido a democratizar el uso de la estadística (Godino, 1995).

Este papel predominante del ordenador en el desarrollo de esta disciplina, en sus aplicaciones actuales y en consecuencia, en la enseñanza de la estadística, ha sido aceptado y reconocido por los investigadores, lo cual ha quedado explícito en diversos congresos y reuniones. Por ejemplo, el Instituto Internacional de Estadística organizó una *Round Table Conference* sobre el ordenador en la enseñanza de la estadística en Austria en 1970 y otra en Camberra en 1984. La *Round Table Conference*, organizada por IASE en Granada en 1996 se centró en el rol de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de estadística (Garfield y Burrill, 1997). En dicha conferencia se presentaron 22 trabajos, algunos de los cuales comentamos en este capítulo.

Destacamos lo que indica Hawkins (1997) en dicha conferencia: “*Los ordenadores han reducido muchas horas dedicadas al cálculo, permitiendo el estudio de mayores conjuntos de datos. Esto ha permitido agregar nuevos tópicos a la enseñanza de la estadística. Sin embargo, no han sido los ordenadores per se los que han cambiado la manera de enseñar estadística, sino que también hubo una micro-revolución que hizo que los ordenadores estuvieran a disposición de un mayor número de usuarios, y eso se debe al desarrollo del lenguaje natural del software que hizo accesible su uso.*

La gran ventaja de los ordenadores es su naturaleza dinámica, su velocidad, y el creciente rango de software que soportan. De esta manera, permiten a los estudiantes experimentar y explorar todos los aspectos de los procesos estadísticos, desde la planificación de la muestra o del diseño experimental hasta la recolección y el manejo de datos, la simulación y el análisis, para interpretar y comunicar los resultados. La tecnología actual da la oportunidad a los

estudiantes de poder trabajar sobre preguntas de investigación reales, las cuales brindan mayor interés (Pág. 13)"

También en los congresos ICOTS I, II, III, IV y V se ha dado gran importancia a los ordenadores y a la investigación basada en ellos. En el último ICOTS V el uso de ordenadores en la enseñanza de la estadística fue uno de los núcleos temáticos del congreso y en muchos de los trabajos presentados, no sólo dentro de este núcleo sino en los restantes se analizaron desarrollos de software, materiales para la enseñanza, instrumentos de evaluación basados en el uso de ordenadores, experiencias didácticas e investigaciones sobre el efecto del uso del ordenador en el aprendizaje y las actitudes de los alumnos (Pereira-Mendoza y cols., 1998).

No nos es posible en este trabajo, debido a su finalidad y a la extensión que sería requerida, revisar todas las investigaciones en el tema del uso de los ordenadores en la enseñanza de la estadística. En lo que sigue, haremos sin embargo un breve resumen de ciertos aspectos que consideramos fundamentales para nuestro trabajo: a) el análisis exploratorio de datos y cómo ha sido impulsado por los ordenadores; b) la problemática de la elección de software con finalidad didáctica; y c) describiremos la investigación sobre la construcción del significado de la asociación a partir de actividades de análisis de datos, que ha sido realizada en nuestro grupo de investigación y que constituye un antecedente inmediato de la nuestra.

2.4.2. ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS

La posibilidad de usar ordenadores en la enseñanza de la estadística permite dar un mayor énfasis al análisis gráfico y a los aspectos conceptuales y validativos, relegando el papel del cálculo algorítmico, lo que permite un primer acercamiento intuitivo a los conceptos estadísticos para pasar luego a un enfoque más formal. También ocasionaron una nueva filosofía en la estadística: el análisis exploratorio de datos.

Este tipo de análisis fue introducido por Tukey (1977). Como señalan Batanero, Estepa y Godino (1991 b), anteriormente a este enfoque el análisis de datos se basaba fundamentalmente en el cálculo de estadísticos, conduciendo a dos consecuencias: en primer lugar, se disminuía la importancia visual de la representación de los datos, dándosela exclusivamente a los cálculos y en segundo, se equiparaba el análisis con el modelo confirmatorio.

Según estos autores, en este tipo de análisis, el conjunto de valores de las variables observadas se supone que se ajusta a un modelo pre establecido, calculando los estadísticos para aceptar o no una hipótesis, que es previa a la toma de las observaciones, las cuales han sido recogidas con el único propósito de poner tal hipótesis a prueba. Al contemplar solamente dos alternativas, confirmación o no de la hipótesis, los datos no se suelen explorar para extraer cualquier otra información que pueda deducirse de los mismos.

Para entender los principios por los que se guía el análisis exploratorio, se ha de tener en cuenta que los datos están constituidos por dos partes: la “regularidad” y las “desviaciones”. La regularidad indica la estructura simplificada de un conjunto de observaciones (en una nube de puntos, por ejemplo, es la recta a la cual se ajusta). Las diferencias de los datos con respecto a esta estructura (diferencia en nuestro caso respecto a la recta), representan las desviaciones o residuos de los datos, que usualmente no tienen por qué presentar una estructura determinada.

Los autores señalan que tradicionalmente el estudio se ha concentrado en la búsqueda de un modelo que exprese la regularidad de las observaciones. Por el contrario, el análisis exploratorio de datos es básicamente el desglose de los mismos en las dos partes que hemos citado. En lugar de imponer, en hipótesis, un modelo a las observaciones, se genera dicho modelo desde las mismas. Por ejemplo, cuando se estudian las relaciones entre dos variables, el investigador no solamente necesita ajustar los puntos a una línea recta, sino que estudia los estadísticos, compara la línea con los residuos, estudia la significación estadística del coeficiente de correlación u otros parámetros para descubrir si la relación entre las variables se debe o no al azar. Aunque los estadísticos calculados presenten un valor estadísticamente significativo (en el ejemplo, el coeficiente de correlación sea significativamente distinto de cero), la relación entre las variables puede no ajustarse bien a una línea recta. En este caso al investigador le faltaría descubrir algo importante: el modelo latente no es el esperado.

El análisis exploratorio de datos, no es pues, un conjunto de técnicas, sino una nueva filosofía que consiste en el estudio de los datos desde todas las perspectivas y con todas las herramientas posibles (Godino, 1995). Esto lleva implícito el desarrollo de nuevas técnicas que permiten su aplicación y también de características didácticas que lo hacen potencialmente útil

dentro de las matemáticas escolares y universitarias, como las que se detallan en Estepa (1990) y Batanero y cols (1991 b):

- Posibilidad de generar situaciones de aprendizaje referidas a temas de interés al alumno, al permitirle trabajar con datos y aplicaciones reales;
- Fuerte apoyo en las representaciones gráficas, a las que se da un gran peso en las nuevas disposiciones curriculares;
- Empleo preferente de los estadísticos de orden, que son más robustos y tienen pocos cambios en sus valores, como consecuencia de la existencia de valores atípicos;
- No necesita una teoría matemática compleja, como el cálculo o álgebra, sino sólo la aritmética (Jullien y Nin, 1989);
- Es especialmente adecuado para trabajar con calculadoras y ordenadores, y pueden servir para que los alumnos se familiaricen con las nuevas tecnologías.

La importancia del análisis de datos es también resaltada por Ben-Zvi (2000), quien sugiere que: “*El análisis exploratorio de datos es la disciplina de organización, descripción, representación y análisis de datos, con una fuerte confianza en las herramientas analíticas y visuales. Su objetivo principal es dar sentido y buscar más allá de los datos para que, de esta manera, junto a la inferencia, se puedan explorar nuevos datos.*” (Pág. 130)

Son muchas las investigaciones sobre comprensión de los conceptos estadísticos elementales que intervienen en el análisis exploratorio de datos, tales como comprensión de gráficos, promedios, dispersión y asociación. Como hemos indicado, no haremos una revisión de todas las investigaciones, un resumen de las cuales puede encontrarse en Batanero y cols. (1994), Hawkins, Joliffe y Glickman (1992) y, para el caso de los promedios en Batanero (2000 b). Tan sólo describiremos, como ejemplos, algunas de estas investigaciones, que se centran en la evaluación del aprendizaje en cursos de análisis exploratorio de datos.

Investigaciones en cursos de análisis exploratorio de datos con alumnos universitarios

Un antecedente directo de nuestro trabajo es la investigación de Estepa (1990), quien realizó un estudio sobre la enseñanza de la estadística descriptiva, con enfoque exploratorio basada en el uso de un software didáctico denominado PRODEST, que describimos más adelante.

El tiempo total de enseñanza fue 7 semanas y la muestra estuvo constituida por alumnos de magisterio, especialidad ciencias en el segundo año de estudio, dentro de una asignatura optativa. Los contenidos abordados incluyeron el estudio descriptivo univariante y bivariante, pero no se abordaron problemas de inferencia ni el estudio de las distribuciones de probabilidad. En el aspecto metodológico este trabajo es innovador en el sentido de grabar y analizar la interacción del alumno con el ordenador, poniendo a punto esta técnica que luego utilizó en trabajos posteriores (Estepa, Batanero y Godino, 1990; Estepa y Batanero, 1995).

La investigación se inició con la recopilación, clasificación y estudio teórico de las posibles actividades de análisis exploratorio de datos en un curso basado en los ordenadores, describiendo las estrategias de análisis de datos en función de las variables de tareas de los problemas (Godino, Batanero y Estepa, 1991). Algunas de estas tareas o variantes de las mismas continúan usándose hoy día en el curso de análisis de datos en que hemos realizado nuestra investigación. También se pusieron a punto ficheros de datos que se usarían en las clases prácticas y algunos de los cuales también hemos usado en nuestra investigación. Con todo ello, y utilizando parte de un texto preparado con anterioridad por Batanero, Godino y Estepa (1988) organizan su experiencia de enseñanza.

El trabajo de los alumnos fue grabado en el ordenador, mediante el paquete PRODEST, y una vez impresos, se realizó un análisis de contenido, deduciendo variables estadísticas que fueron analizadas. Se describieron los procedimientos empleados por los alumnos, en función de las preguntas planteadas, la dificultad de las tareas, argumentos correctos e incorrectos y tipos de errores relacionados con diversos conceptos estadísticos, como los estadísticos de orden, promedios e interpretación de gráficos.

Los resultados indicaron que uno de los temas que resultó más conflictivo fue el de la asociación. Los problemas relacionados con este concepto surgen de una manera natural en un curso de análisis de datos. La investigación citada puso de manifiesto, sin embargo, la existencia de errores conceptuales que permanecieron al finalizar la instrucción (Godino, Batanero y

Estepa, 1990). Es por esto que los autores decidieron centrarse en este concepto en sus investigaciones posteriores sobre la enseñanza de análisis de datos.

Otro trabajo de este tipo es el de Biehler (1997 a), quien analiza el conocimiento y la competencia de los estudiantes al realizar tareas de análisis de datos trabajando con el ordenador. Desarrolla dos proyectos, uno con estudiantes de secundaria que asistieron a un curso de estadística y el otro, se desarrolló con estudiantes para profesores. En el primer proyecto se trabajó con 12 estudiantes de 7º grado que fueron entrevistados luego de realizar las tareas planificadas en el curso y utilizaban un software creado específicamente para desarrollar conceptos estadísticos básicos. En el segundo se utilizaba el paquete BMDP versión Windows y se entrevistaron 4 parejas voluntarias. Todas las entrevistas fueron filmadas y luego transcritas.

Del análisis de los casos, el autor identificó 25 áreas de problemas relacionadas con el análisis exploratorio elemental de datos y con la utilización de paquetes estadísticos. A continuación resumiremos sus conclusiones que hemos tomado como referencia para nuestro trabajo:

- Se deberían clarificar las diferencias y los puntos comunes entre un problema real, un problema estadístico y un problema escolar, debido a que los alumnos generalmente los confunden, llegando a soluciones inadecuadas;
- Se debería capacitar a los alumnos para conocer los métodos o convenios estadísticos que utiliza el software, la disponibilidad de resúmenes gráficos o numéricos y la aplicabilidad al problema planteado. Es necesario que los alumnos identifiquen las propiedades de cada tipo de resumen y puedan aplicarlas en los casos correctos y a la vez puedan optar críticamente entre las diversas herramientas que les proporciona el software. Por lo general, los alumnos se conforman con extraer conclusiones de un solo gráfico o resumen numérico y no están capacitados para comparar diversos elementos en más de un resumen, en consecuencia, obtienen resultados o conclusiones parcialmente correctos o incompletos.
- Es necesario reflexionar con los alumnos sobre las limitaciones de las herramientas de software. Los estudiantes tienden a olvidar el significado de los gráficos y procedimientos y el docente debe mostrar y recordar estos significados a los alumnos.
- Habría que concienciar a los alumnos de que un problema de análisis de datos puede tener una multiplicidad de resultados.
- El lenguaje común puede ser un obstáculo importante a la hora de realizar interpretaciones de gráficos y tablas estadísticas. Es importante realizar este tipo de tareas de análisis de datos para capacitar de una manera gradual a los alumnos.
- Se debería enseñar las convenciones que lleva implícitas un gráfico, por ejemplo, las convenciones gráficas implícitas en la definición del diagrama de la caja son muy diferentes de las convenciones de otros gráficos estadísticos.
- Habría que enfatizar en el estudio de las propiedades de una distribución como concepto estadístico. Seleccionar un estadístico entre varios en un contexto concreto requiere conocer las relaciones entre los estadísticos y la forma de la distribución, es decir, requiere de una interpretación funcional de los mismos. Esta dificultad puede provenir del hecho de que las distribuciones se enseñan en probabilidad, con un enfoque totalmente distinto al que se adopta en análisis de datos.
- Se debería profundizar sobre las diferencias de dispersión cuando se comparan dos distribuciones. Generalmente los estudiantes observan directamente la diferencia entre medias o medianas pero no prestan atención a las diferencias de dispersión.
- Se debería destacar la importancia del tamaño muestral cuando se realiza un análisis estadístico

Investigaciones en cursos de análisis exploratorio de datos con escolares

Ben-Zvi y Friedlander (1997) diseñan un currículum de estadística basado en el ciclo PCAI (Plantear, reColectar, Analizar e Interpretar) que ha sido descrito por diversos autores como componentes del razonamiento estadístico y utilizando una hoja de cálculo. Utilizan actividades estructuradas y proyectos estadísticos. Las primeras están basadas en situaciones problemáticas abiertas, en las que los estudiantes deben investigar aplicando el ciclo PCAI, están basadas en datos de la vida real y permiten introducir nuevos conceptos y métodos estadísticos mediante el trabajo en grupo de los alumnos. El profesor introduce los temas de investigación y guía a los alumnos a través de las técnicas y de las dificultades conceptuales y, obtiene conclusiones sobre

los resultados.

En los proyectos, también se trabaja en pequeños grupos investigando sobre la cuestión planteada por los estudiantes, quienes sugieren hipótesis, diseñan el estudio, recogen y analizan los datos, interpretan los resultados y obtienen conclusiones. Las actividades estructuradas refuerzan los conceptos y habilidades estadísticas que se requieren para lograr resolver con éxito el proyecto.

Durante la investigación se analizó el comportamiento de los estudiantes utilizando grabaciones y observaciones de clase, entrevistas y evaluación del curso. Como conclusiones, se identificaron y analizaron cuatro tipologías de pensamiento:

1. *Pensamiento acrítico*: los estudiantes ignoran los modelos sugeridos por sus representaciones gráficas, relacionando solamente aspectos obvios o extremos. Los métodos estadísticos son percibidos como meras rutinas. Las opciones por defecto del software son aceptadas y empleadas de una manera acrítica, proporcionando, por lo general, información errónea.
2. *Uso significativo de una representación*: los estudiantes utilizan una herramienta gráfica o numérica apropiada y explican su elección. Generalmente, dicha elección está basada en aspectos intrínsecos, tales como el tipo de datos o el método que implica su pregunta de investigación. Son capaces de modificar y transformar sus representaciones, y a través de ellas, interpretan y justifican su pregunta de investigación e interpretan los resultados.
3. *Manejo significativo de representaciones múltiples*: en este caso, los alumnos toman decisiones en la selección de gráficos, toman en consideración cuál es la contribución de éstos a su investigación y en consecuencia, realizan cambios en el análisis de datos. Éste incluye una gran variedad de métodos gráficos y numéricos e ilustran diferentes aspectos por múltiples representaciones. Realizan inferencias y los resultados obtenidos les sirven para organizar y reorganizar los datos.
4. *Pensamiento creativo*: éste es el tipo menos frecuente, pero sucede cuando el alumno busca métodos de presentar y justificar sus ideas que no siempre son los más comunes pero que expresan más claramente sus pensamientos.

Continuando con esta investigación, Ben-Zvi (2000), presenta una experiencia de clase, en la que da un ejemplo de la evolución de algunos de sus estudiantes al realizar, con la hoja de cálculo, una de las actividades de análisis de datos mencionadas anteriormente. De esta manera estudia también, el uso que hacen los estudiantes de la hoja de cálculo para dar significado a ciertos conceptos estadísticos, en este caso a la idea de tendencia.

Algunas recomendaciones que el autor hace en relación con los tópicos que deberían incluirse en un curso introductorio de estadística y que, aunque son a nivel de secundaria, pensamos que deben considerarse son:

- Incorporar más datos y conceptos, y dejar en segundo plano las deducciones más formales.
- En la medida de lo posible, realizar los gráficos y cálculos por medio de las herramientas tecnológicas disponibles.
- Fomentar un aprendizaje activo.
- Estimular el pensamiento crítico con el fin de lograr que los estudiantes sean evaluadores críticos de los temas estadísticos, incluyendo apreciaciones del poder de los procesos estadísticos, el azar, la aleatoriedad y el rigor investigador.
- Usar métodos alternativos para mejorar la comprensión y documentar el aprendizaje de los estudiantes.

En conclusión, en este capítulo hemos descrito algunas de las investigaciones que se han centrado en el análisis exploratorio de datos con apoyo del ordenador, y que se relacionan con nuestro trabajo. Estos autores destacan algunos puntos que tendremos en cuenta en el diseño de nuestra secuencia didáctica, como por ejemplo:

- Mostrar a los alumnos las posibilidades que brinda el uso de un paquete estadístico reflexionando también sobre sus limitaciones; trataremos en consecuencia de que los alumnos se vean obligados en ocasiones a usar opciones diferentes de las que aparecen por defecto en los programas de cálculo;
- Enfatizar las propiedades de la distribución como un todo, realizando interpretaciones de las relaciones entre sus diversas características. Este tipo de actividades se llevarán a cabo,

- sobre todo en las clases prácticas.
- Posibilidad de generar situaciones didácticas de interés para el alumno; por ello los ficheros de datos y actividades estarán conectadas con temas que les son familiares.

Estas investigaciones también nos proporcionan algunos modelos de trabajo y de instrumentos metodológicos. En particular tomaremos para nuestra investigación algunos de los ficheros de datos empleados en la investigación de Estepa y sus colaboradores y tomaremos de él la idea de analizar los documentos producidos por los alumnos durante el trabajo con ordenador.

2.4.3. SOFTWARE UTILIZABLE EN LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA

El creciente desarrollo del software estadístico puede apreciarse en la diversidad que encontramos, no sólo de software profesional sino también, de otro tipo de paquetes que cumplen diversas funciones. Debido a que no podemos negar este gran abanico de posibilidades a la hora de elegir un tipo de programa, a continuación realizaremos un breve detalle de las diversas categorías de programas informáticos que podemos encontrar. Este tema ha sido ya analizado por diversos autores como, Estepa (1990; 1993), Biehler (1991, 1994, 1997 b), Godino y Batanero (1993), Godino (1995) y Ben-Zvi (2000), de los cuales hemos resumido y completado sus conclusiones. Podemos diferenciar los siguientes tipos de software para la enseñanza:

1. *Lenguajes de programación.* En las primeras experiencias de enseñanza, una opción era que los alumnos escribieran sus propios programas de ordenador, en lenguaje LOGO, Basic o Pascal. En este caso era necesario que el alumno conociese el lenguaje de programación o, en su defecto, que el profesor dedicase cierta cantidad de tiempo a la enseñanza de éste. Esta opción está hoy día prácticamente abandonada, por la desventaja del tiempo adicional para la enseñanza del lenguaje de programación lo cual va en detrimento del tiempo dedicado al desarrollo de conceptos estadísticos.

2. *Paquetes estadísticos profesionales.* Existe una gran variedad de ellos, como por ejemplo: *BMDP New System*, *SYSTAT*, *STATVIEW*, *SPSS*, *STATGRAPHICS*, etc. En nuestro trabajo hemos optado por utilizar este último debido a que es el paquete instalado en el aula de informática. Cada uno de estos paquetes tiene una amplia disponibilidad de presentación gráfica y numérica, aunque en ciertos casos, pueden facilitar el proceso de comprensión de los alumnos (Biehler, 1997, Tauber y Batanero, 1998), si se cuida de proporcionar la información adecuada para no provocar confusiones, por lo que se deberán tener en cuenta estos condicionantes a la hora de planificar actividades para desarrollar con estos programas.

3. *Software didáctico.* Debido a la complejidad de estos programas algunos investigadores han realizado adaptaciones de ellos a lo que generalmente se requiere en la clase o han construido su propio paquete didáctico. En España se estuvo usando el paquete PRODEST (Batanero, Godino y Estepa, 1987; Estepa, Godino y Batanero, 1989) durante más de una década, cuando no se disponía del sistema Windows ni de software interactivo para uso didáctico. Este paquete, construido por sus autores, incluía todos los contenidos de un curso de análisis exploratorio de datos, probabilidad e inferencia estadística, a nivel universitario. El paquete era interactivo, y permitía grabar la interacción del alumno con el ordenador, por lo que fue usado en las investigaciones de los autores sobre análisis exploratorio de datos y asociación estadística.

Un ejemplo más reciente lo encontramos en el programa *MEDASS Light* (Biehler, 1997), el cual es una herramienta interactiva de análisis de datos para un curso introductorio de estadística. Incluye métodos gráficos como el diagrama de la caja, histogramas, diagramas de barras, gráficos de puntos y de líneas. También puede presentar resúmenes numéricos e información frecuencial para analizar diferentes tipos de variables. El paquete *ELASTIC* (Rosebery y Rubin, 1989) presenta características similares.

Fathom, (Ben-Zvi, 2000) es un medio de aprendizaje para análisis exploratorio de datos y álgebra, y se utiliza en secundaria y en cursos introductorios de estadística a nivel de bachillerato. Este paquete incluye manipulación dinámica de diversas representaciones, permite trazar gráficos de puntos, de barras, trazar funciones e importar datos desde Internet. En Biehler (1997) y Ben-Zvi (2000), así como en las actas de ICOTS V (Pereira-Mendoza y cols., 1998) se describen otros programas estadísticos especialmente diseñados para la enseñanza.

4. *Micromundos*. Estos consisten en grupos de programas que sirven para demostrar conceptos y métodos estadísticos, incluyen experimentos, visualizaciones exploratorias y simulaciones. Por medio de los micromundos, los estudiantes pueden conocer y comprender los conceptos estadísticos manipulando gráficos, parámetros y métodos (Ben-Zvi, 2000). Ejemplos típicos de estos micromundos son los que permiten la investigación de los efectos del cambio de datos o de coeficientes de correlación sobre las representaciones gráficas, o los efectos del cambio del tamaño muestral sobre la media de la distribución. Ejemplos de micromundos de este tipo son *Prob Sim* (Konold, 1994, 1995) y *Sampling Distributions* (delMas, Garfield y Chance, 1998; Chance, Garfield y DelMas, 1999).

5. *Software de uso general*, como por ejemplo las hojas de cálculo, *EXCEL*, *QUATTRO PRO*, *LOTUS*, etc, que son aplicadas en diversas experiencias de clase y brindan un amplio espectro de posibilidades en la enseñanza de conceptos elementales de estadística (Ben-Zvi y Friedlander, 1997; Ben-Zvi, 2000; Tauber, 1996 a y b; Tauber y cols., 1995).

6. *Tutoriales*, que son programas desarrollados para enseñar a los estudiantes sobre habilidades estadísticas específicas o evaluar su conocimiento. El tutorial puede, en algunos casos, reemplazar parcialmente al profesor y a los libros de texto proporcionando demostraciones y explicaciones de diferentes conceptos. Ejemplos de tutoriales utilizados en la enseñanza de la estadística son: *ActivStats* y *ConStats* (Cohen y Chechile, 1997),

7. *Software en Internet*, el tremendo desarrollo de la World Wide Web ha incrementado el material que puede obtenerse "on-line" y en ella podemos encontrar diversos recursos que sirven de apoyo en la enseñanza de la estadística como software, materiales de cursos de estadística, textos, artículos, etc. Por ejemplo, el micromundo *Sampling Distributions* (DelMas, Garfield y Chance, 1998; Chance, Garfield y DelMas, 1999), puede obtenerse por medio de Internet.

Otros recursos que pueden obtenerse desde Internet son las revistas y boletines electrónicos los cuales publican artículos, conjuntos de datos, revisiones e informes relacionados con todos los aspectos de la enseñanza de la estadística. Un ejemplo de ellos es el *Journal of Statistics Education (JSE)*, que sólo puede obtenerse por medio de Internet. Esto ya cae más bien dentro del material didáctico y no puede considerarse como parte del software. En Batanero (1998) y en las páginas Web de IASE, el grupo de estocástica de PME, y el servidor de JSE pueden obtenerse listas de direcciones de acceso a estos recursos. Su conocimiento nos ha permitido tomar decisiones en el diseño de nuestra propia investigación.

2.4.4. INVESTIGACIÓN SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE LA ASOCIACIÓN MEDIANTE ACTIVIDADES DE ANÁLISIS DE DATOS

Dentro de las investigaciones en las que se analiza la influencia del uso del ordenador en la comprensión de los conceptos de asociación y correlación destacaremos la llevada a cabo sobre el concepto de asociación en las Universidades de Jaén y Granada, en la que una parte importante es la tesis doctoral de Estepa (1993), que supuso un avance al plantearse como objetivos de investigación:

- Llevar a cabo un estudio didáctico del concepto de asociación, analizando el desarrollo histórico del concepto, su papel en estadística y las relaciones entre asociación y causalidad;
- Abordar el estudio de las concepciones previas de los alumnos sobre la asociación, desde una perspectiva matemática;
- Organizar un proceso de estudio de la asociación, basado en el uso de ordenadores;
- Analizar la evolución de las concepciones referidas a la asociación estadística, como consecuencia del proceso de enseñanza implementado.

Para validar el cuestionario, que estuvo basado en un diseño experimental que tuviese en cuenta las diversas variables de tarea identificadas previamente por Godino, Batanero y Estepa (1991), se tomó una muestra piloto de 51 alumnos, a partir de la cual se puso a punto las categorías de respuestas. También se realizó un estudio cualitativo de las correspondencias entre argumentos de los alumnos y juicios de asociación, lo que permitió una primera identificación de concepciones erróneas (Estepa y Batanero, 1995). Esta tesis consta de dos partes diferenciadas:

1. *Estudio de concepciones previas sobre la noción de asociación estadística*: En la que se

llevó a cabo una evaluación de las concepciones previas de 213 alumnos de características similares a los que luego participarían en el experimento de enseñanza. Los datos del cuestionario son sometidos a un análisis de contenido, y las respuestas son categorizadas para ser sometidas a análisis estadístico, incluyendo métodos multivariantes, tales como el análisis de correspondencias. Los principales resultados obtenidos en esta fase del estudio son los siguientes:

- Se clasifican las estrategias correctas e incorrectas descritas previamente en la literatura psicológica sobre los juicios de asociación en tablas 2x2 desde un punto de vista matemático y se extienden a tablas de contingencia de dimensión cualquiera r x c. Se identifican cuatro concepciones erróneas sobre la asociación en tablas de contingencia que se denominan concepción local, causal, determinista y directa (Estepa, Green, Batanero y Godino, 1994; Batanero, Estepa, Godino y Green, 1996).
- Se identifican y clasifican las estrategias correctas e incorrectas en los juicios sobre asociación en diagramas de dispersión y comparación de muestras, aspectos que no habían sido contemplados en investigaciones previas (Estepa y Batanero, 1994, 1996; Estepa, Batanero y Sánchez, 1999).

2. *Experiencia de enseñanza y su evaluación:* En esta fase, se utilizan como instrumentos de recogida de datos los siguientes:

- Cuestionario empleado en el estudio de concepciones de la primera muestra del trabajo, como pretest y otro cuestionario paralelo que se construye con este propósito empleado como postest.
- Prueba de ensayo sobre resolución de problemas de asociación estadística, para ser cumplimentado con ayuda del ordenador en el postest. Es decir, esta prueba es similar a la prueba que hemos usado en nuestro trabajo como parte de la evaluación final del aprendizaje.
- Registro de la interacción individual de cada uno de los alumnos, grabada con el ordenador durante las prácticas realizadas en el proceso de enseñanza y en la evaluación final de la misma.
- Ficha de observación para estudiar el trabajo de una pareja de alumnos durante cada una de las clases prácticas, grabación en cassette de sus conversaciones durante la sesión práctica y entrevista a esta misma pareja de alumnos sobre el proceso de resolución de los problemas en el pretest y postest y prueba final con ordenador.

Del análisis de los diversos tests aplicados, las entrevistas, grabaciones en audio transcritas y las observaciones, se han extraído las siguientes conclusiones:

- *Juicios de asociación:* Ha habido una mejoría notable, después de la enseñanza, en el caso de la independencia de las variables. Se conserva la dificultad en detectar la independencia inversa de las variables en la tabla de contingencia, ya que algunos alumnos han interpretado la dependencia inversa en tablas 2 x 2 como independencia.
- *Estrategias en los juicios de asociación:* En general hay una mejoría notable en las estrategias empleadas, en casi todos los ítems, excepto en los de dependencia inversa en tablas 2 x 2 y en los de comparación de muestras.
- *Concepciones erróneas sobre la asociación estadística:* Prácticamente todos los alumnos han superado la concepción determinista de la asociación, pasando a aceptar tanto la dependencia funcional como la aleatoriedad. Se admite la dispersión en la nube de puntos en el caso de dependencia y se reconoce claramente la constancia en la relación como sinónimo de independencia entre las variables.

En general, los alumnos que presentaban una concepción localista de la asociación la han superado, pasando a una visión basada en el conjunto de todos los datos y no en una parte de los mismos. Los alumnos que presentaban una concepción causalista continúan manifestándola. Todas estas conclusiones fueron publicadas en Batanero, Estepa y Godino (1997).

A partir de los resultados de este trabajo, los autores continuaron con su investigación sobre la comprensión de la asociación en cursos de estadística basados en el uso de ordenadores. En Batanero y Godino (1998), Batanero, Godino y Estepa (1998), Batanero, Estepa y Godino (2000) se describen las investigaciones realizadas por el equipo hasta la fecha, analizándolas

esta vez desde el punto de vista del marco teórico de la Teoría del Significado (Godino y Batanero, 1994, 1998) y diferenciando entre el significado institucional presentado en sus experiencias y el personal construido por los alumnos.

Durante el curso se realizan algunas evaluaciones de los alumnos mediante tareas de papel y lápiz y proyectos individuales realizados por los estudiantes. Al final del curso se realizó un examen utilizando un nuevo conjunto de datos para valorar el significado final que los estudiantes tenían de la asociación estadística. Cada estudiante trabajó en solitario en un ordenador y sus soluciones se registraron en un disco, utilizando los ficheros "Statfolios", incluyendo los cálculos y gráficos realizados, junto con los comentarios y soluciones. Algunos de los ficheros de datos preparados por los autores para esta experiencia, incluido el usado en la evaluación final, han sido utilizados de nuevo en nuestra tesis, así como los materiales y tareas teóricas y prácticas que han sido usados en la asignatura en los temas anteriores al de la distribución normal.

Los autores analizan también algunos casos de alumnos para mostrar la diferencia entre el significado puesto en práctica al resolver un mismo problema con herramientas convencionales y herramientas informáticas. Los resultados muestran que el análisis de datos es una actividad que requiere un cierto nivel de destreza y conocimientos incluso a nivel exploratorio, exigiendo conocimientos diversos sobre los problemas y conceptos puestos en juego en los procedimientos gráficos, numéricos, descriptivos e inferenciales relacionados con la asociación. Requiere seleccionar los instrumentos y representaciones mejor adaptados a los datos, flexibilidad para cambiar los procedimientos, interpretación adecuada de los resultados, capacidad de relacionarlos con el problema, y para evaluar la validez y fiabilidad de las conclusiones extraídas. Incluso cuando los estudiantes obtuvieron soluciones correctas para los problemas, se observó sus dificultades en cada paso del proceso.

Los trabajos descritos sobre la asociación han tenido impacto en otros que lo continúan, en particular el de Morris (1999), que estudia la comprensión de estudiantes de psicología en relación con el concepto de correlación estadística. Participaron 57 estudiantes de psicología que estaban en el tercer año de la carrera, los cuales tenían edades que oscilaban entre 18 y 25 años, 44 de ellos eran mujeres y 13 varones.

Para estudiar el rendimiento y errores de los estudiantes usa dos tests sobre correlación que fueron desarrollados específicamente para este estudio. Cada uno de los tests constaba de 25 preguntas y el tiempo que se daba a los estudiantes para resolver cada test era de 10 a 15 minutos. Los principales resultados extraídos de este estudio fueron que los estudiantes confunden correlación negativa con intensidad de la correlación (concepción unidireccional, identificada por Estepa), no consideran posibles explicaciones en relación con una correlación que han obtenido, p.e., no consideran que pueda existir una tercera variable que sea la responsable de la correlación (concepción causal, identificada por Estepa), piensan que la correlación cero indica una relación entre las variables y confunden el coeficiente de correlación con los niveles de significación estadística

Morris y Scanlon (1999) han realizado un estudio en el que utilizan el programa ActivStats para investigar qué actividades del programa podrían ayudar a la comprensión de los estudiantes en relación con la correlación e identificar aspectos del programa que los estudiantes encuentren útiles para su proceso de aprendizaje.

Participaron 6 estudiantes de psicología, cuyas edades oscilaban entre 20 y 52 años, todos los cuales habían estudiado el tema de correlación. Se los agrupó en tres parejas y el estudio estuvo dividido en dos fases. La primera fase estaba compuesta por una serie de actividades que los estudiantes debían realizar con el programa, dentro de dichas actividades se incluían: analizar las propiedades de la correlación; observar cómo la magnitud del coeficiente de correlación refleja el grado de asociación lineal y construir diagramas de puntos con una correlación dada.

Una vez que los estudiantes completaban estas actividades, y preguntas relacionadas, los entrevistaba realizando diversas preguntas relacionadas con el programa y con la comprensión de la correlación. Se incluyeron preguntas de opinión sobre ActivStats, aspectos que les gustaron o no, presentación de la correlación, actividades y preguntas en que los estudiantes debían ordenar los valores de una serie de coeficientes de correlación.

Se concluye que los estudiantes piensan que el programa ayudó en su comprensión de la

correlación, y que pueden extraer más información adicional que si trabajaran sólo con la fórmula. Las dos primeras parejas realizaron comentarios pertinentes en relación con la correlación y la causalidad, también estas dos parejas argumentaron que la correlación de -0,8 era más fuerte que la correlación 0,7. Las tres parejas realizaron una ordenación correcta de los conjuntos de coeficientes de correlación.

En resumen, en este apartado hemos descrito las investigaciones relacionadas con el estudio de la asociación por medio de análisis de datos en la Universidad de Granada y otras basadas en ella, que constituyen un antecedente de nuestro trabajo, en el sentido de interesarse también por la comprensión de un concepto estadístico (la asociación) en un curso introductorio de análisis exploratorio de datos. Además hemos tomado de estas investigaciones algunos de los ficheros de datos y actividades utilizadas, que incluso en los últimos trabajos son realizadas con el paquete Statgraphics y se comienza a utilizar el marco teórico sobre el significado de los objetos matemáticos.

Nuestra aportación respecto a los trabajos citados (además de referirse a un tema diferente que es la distribución normal) es que llevamos a cabo un estudio mucho más sistemático del significado del tema, tanto en libros de texto y la enseñanza diseñada, como en lo que se refiere al aprendizaje de los alumnos. Pensamos en consecuencia que ponemos a punto una metodología de análisis que puede ser útil para la investigación de otros conceptos estadísticos o matemáticos.

2.4.5. OTRAS INVESTIGACIONES SOBRE DIFERENTES ASPECTOS RELACIONADOS CON EL USO DEL ORDENADOR EN LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA

Conceptos básicos requeridos en un curso introductorio de estadística

Cohen y Chechile (1997) analizan el aprendizaje de conceptos de inferencia usando el programa ConStats, el cual está integrado dentro del currículum básico de estadística de los departamentos de psicología, economía e ingeniería. Los investigadores estaban interesados en analizar si el software era efectivo en un determinado rango de cursos de estadística en diversos departamentos.

Para diseñar el software se asumieron determinadas habilidades o conocimientos matemáticos, tales como fracciones, proporciones, orden en los enteros, álgebra básica y la distinción entre constantes y variables. Los diversos programas incluidos en el paquete requerían el conocimiento de diversos conceptos, los cuales eran específicos de cada programa, pero también podían aparecer implícitos en otros. Para evaluar la efectividad de cada parte de cada uno de los programas se debía identificar previamente qué concepto se debía enseñar. Para evaluar el trabajo de cada estudiante se agregó un sub-programa que grababa las acciones de cada alumno.

La muestra que participó en esta investigación estaba compuesta por 20 cursos introductorios de estadística y de métodos de investigación, con 739 estudiantes, durante dos años. Los cursos estaban separados en siete disciplinas: sicología, economía, educación infantil, biología, sociología, ingeniería y educación. 18 de los cursos se desarrollaron dentro de la universidad y los otros dos, fuera de ella. Cuatro de los cursos pertenecientes a la universidad participaron como grupo control.

Como instrumento se utilizó un pretest que evaluaba los conocimientos matemáticos básicos de los alumnos. Este test constaba de diez preguntas relacionadas con fracciones, proporciones, orden en los enteros, álgebra básica y la distinción entre constantes y variables. Además, se diseñaron 103 cuestiones que se presentaban a medida que se utilizaba el programa, estas cuestiones fueron divididas en tres tests. Cada test tenía cuestiones relacionadas con presentación de datos, estadística descriptiva, transformaciones, representación bivariada y regresión, distribuciones de probabilidad y muestrales.

De los resultados de esta investigación se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Muchos estudiantes presentaron problemas con los conocimientos básicos asumidos en el software. Deducimos de ello que el aprendizaje de Statgraphics en nuestra experiencia podría no ser tan sencillo como suponemos;
- Se presentaron diversos errores coincidentes con los problemas de razonamiento estocástico planteados por Kahnemann, Slovic y Tversky (1982). También hubo errores en la comprensión e interpretación de gráficos, tales como el significado del eje vertical en los histogramas. Esto nos indica que los estudiantes podrían tener dificultades con algunos de los temas en los que la distribución normal se apoya;

- Muchos alumnos dan interpretaciones erróneas de las distribuciones de probabilidad, confundiendo el modelo de probabilidad con los datos. Generalmente los alumnos dan respuestas más acertadas cuando deben interpretar una distribución finita.

Actitudes de los estudiantes

Schuyten y Dekeyser (1997) también estudian el impacto de la utilización del ordenador en el aprendizaje de estadística. El curso en el que se realiza la experiencia es de dos años de duración. En el primer año se desarrollan los siguientes temas: estadística descriptiva, asociación, distribuciones de probabilidad, test de hipótesis y estimación. En el segundo año se tratan temas como: estimación de medidas de asociación, tests paramétricos y no-paramétricos. En ambos cursos se trabaja con el paquete estadístico *SPSS* y se les entrega a los estudiantes una guía de aprendizaje que presenta un cuestionario que deben llenar al comenzar el año académico. Al comienzo del segundo año, se realiza un examen práctico en el que se evalúan las competencias mínimas que el estudiante necesita para trabajar con *SPSS*. En el primer curso participaron 550 estudiantes y 375 en el segundo, éstos fueron los que realizaron el examen práctico. El cuestionario fue completado por 193 estudiantes.

En el cuestionario se incluyeron cuestiones relacionadas con el impacto del *SPSS* sobre actitudes hacia la estadística, habilidades metacognitivas o comprensión de conceptos estadísticos y sobre las ventajas del *SPSS* como herramienta para “hacer estadística”. El interrogante principal giraba sobre si el uso del *SPSS* mejoraba la comprensión de 30 conceptos estadísticos específicos. Cada estudiante debía dar su opinión sobre 15 de esos conceptos. También se les pedía que dijeran cuáles habían sido sus experiencias más positivas y más negativas al trabajar con el programa.

La conclusión general del estudio es que el impacto del uso de un software estadístico debe ser tratado cuidadosamente debido a que no se puede aislar el software de los materiales curriculares, el impacto puede ser mejor o peor de acuerdo a las características de los estudiantes y el cuestionario planteado debe ser refinado, una posibilidad es incluir cuestiones abiertas en las que los alumnos justifiquen sus respuestas.

En estas investigaciones se extraen, en general, las siguientes conclusiones en relación con los conceptos y los instrumentos de evaluación requeridos en un curso de estadística a nivel introductorio, que serán considerados a lo largo de nuestro estudio:

- Se debe tener en cuenta los conocimientos estadísticos básicos que se requieren en el manejo de un programa estadístico, por ello, además de las actividades con ordenador en las clases prácticas prestaremos un interés especial a las actividades de los alumnos realizadas en las clases teóricas;
- Hay que hacer énfasis en la interpretación de los convenios de lectura de gráficos; trataremos de resaltar estos convenios, tanto en el material entregado a los alumnos, como en las explicaciones de la profesora;
- En relación con los instrumentos de evaluación, se aconseja la posibilidad de incluir cuestiones abiertas que permitan a los alumnos realizar validaciones. Nosotros usaremos este tipo de cuestiones no sólo en la evaluación, sino a lo largo de las clases prácticas.

2.5. COMPRENSIÓN DE GRÁFICOS

La posibilidad de usar ordenadores en el aula nos permite aplicar de forma más frecuente los gráficos y tablas, pero esto implica dos puntos muy importantes: por un lado, se puede obtener muy fácilmente cualquier tipo de gráfico si tenemos un programa apropiado para hacerlo, pero por otro lado, no siempre se poseen las herramientas cognitivas necesarias para poder comprenderlos. Mientras que la construcción de un gráfico desde un determinado programa es sencilla, los alumnos podrían tener dificultades en elegir el tipo de gráfico adecuado o bien, no ser capaces de modificar las opciones por defecto e incluso tener dificultades en la interpretación del gráfico.

Más allá del conocimiento técnico necesario (por ejemplo, es necesario conocer los convenios de construcción de un gráfico de caja para poder leerlo), algunas investigaciones ponen de manifiesto la existencia de diferentes niveles de comprensión de gráficos y que no todos los alumnos alcanzan el nivel más alto de comprensión.

En esta sección, analizaremos las dificultades más comunes que tienen los estudiantes a la hora de extraer información de un gráfico o de una tabla, los factores que inducen esas

dificultades, y el conocimiento previo necesario en los alumnos para poder comprender las relaciones matemáticas que se expresan por medio de un gráfico, con objeto de estudiar la forma de mejorar la comprensión de estos objetos.

Curcio (1987) define tres tipos de elementos o factores que requieren conocimiento previo, a saber:

- Las palabras claves tales como el título del gráfico, las etiquetas de los ejes y de las escalas, son algunos puntos que requieren de un conocimiento previo para comprender las relaciones expresadas en el gráfico.
- El contenido matemático presente en el gráfico, tal como los sistemas numéricos empleados, coordenadas cartesianas, áreas, longitud y las operaciones y relaciones fundamentales contenidos en él.
- La forma o el tipo de gráfico utilizado, tales como gráfico de barras, de líneas, pictogramas, etc. También es importante conocer acerca de las convenciones con las que se realiza el gráfico, para poder realizar una lectura correcta y poder realizar predicciones que se ajusten a la realidad.

La destreza en la lectura crítica de datos es un componente de la alfabetización cuantitativa y una necesidad en nuestra sociedad tecnológica. Curcio (1989) describe cuatro niveles distintos de comprensión de los gráficos:

- (a) "Leer los datos": este nivel de comprensión requiere una lectura literal del gráfico; no se realiza interpretación de la información contenida en el mismo.
- (b) "Leer dentro de los datos": incluye la interpretación e integración de los datos en el gráfico; requiere la habilidad para comparar cantidades y el uso de otros conceptos y destrezas matemáticas.
- (c) "Leer más allá de los datos": requiere que el lector realice predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico.
- (d) "Leer detrás de los datos" supone valorar la fiabilidad y completitud de los datos.

Por ejemplo, si analizamos las tareas que se requieren en la interpretación de una serie de tiempo, "leer los datos" se refiere a cuestiones sobre la lectura de las escalas o encontrar el valor de una de las coordenadas de uno de los puntos, dado el valor de la otra coordenada. "Leer dentro de los datos" se refiere, por ejemplo, a cuestiones sobre la tendencia, sobre si podría ser representada o no mediante una función lineal o sobre si se observan ciclos. La predicción del comportamiento de la serie para los próximos meses, requeriría el trabajo en el nivel de "leer más allá de los datos". "Leer detrás de los datos" se refiere a valorar si los datos son completos, analizar la forma en que fueron recogidos y detectar posibles sesgos.

Curcio encontró que las principales dificultades aparecen en los niveles superiores ("leer dentro de los datos", "leer más allá de los datos", "leer detrás de los datos"), pero que las dificultades disminuyen con la edad.

Li y Shen (1992) muestran ejemplos de elección incorrecta del tipo de gráfico en los proyectos estadísticos realizados por los estudiantes de secundaria. Algunos alumnos utilizaron un polígono de frecuencias con variables cualitativas, o un diagrama de barras horizontales para representar la evolución del índice de producción industrial a lo largo de una serie de años. Con frecuencia la elección de las escalas de representación son poco adecuadas para el objetivo pretendido. Los autores incluyen además, una lista de errores de carácter técnico entre los cuales destacamos los siguientes:

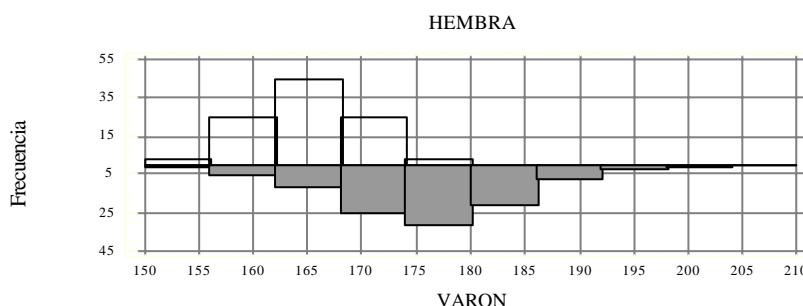
- omitir las escalas en alguno de los ejes horizontal o vertical, o en ambos;
- no especificar el origen de coordenadas;
- no proporcionar suficientes divisiones en las escalas de los ejes.

Este problema se agrava por la disponibilidad de software para la representación gráfica y el desconocimiento del modo correcto en que debe ser empleado por parte de los alumnos. Otras veces, el empleo inadecuado del software gráfico se debe a las concepciones incorrectas del estudiante, como al obtener un diagrama de sectores en los que éstos no son proporcionales a las frecuencias de las categorías, o comparar cantidades heterogéneas en un mismo gráfico.

Wainer (1992), por su parte, determina tres niveles de preguntas en relación a los gráficos:

1. Cuestiones de nivel elemental que involucran sólo extracción de datos. Por ejemplo, en el histograma que se reproduce en la figura 2.5.1, ¿cuál es el intervalo de alturas más comunes en la distribución de mujeres?
2. Preguntas de nivel intermedio que involucran "ver dentro de los datos". Siguiendo con el gráfico anterior, por ejemplo: tomando las alturas más frecuentes de ambas distribuciones, ¿cuál es la diferencia de altura más frecuente entre varones y mujeres?

Figura 2.5.1. Ejemplo de un gráfico en el que se comparan dos distribuciones



3. El tercer nivel involucra una comprensión profunda de la estructura total de los datos, como tendencias y agrupamientos, por ejemplo: ¿Cuáles de estas distribuciones se puede aproximar en forma más exacta por medio de una distribución normal?

Estos tres niveles generalmente, se utilizan en forma combinada, ya que por ejemplo, en la respuesta correspondiente a la tercera pregunta se necesita responder preguntas de los otros dos niveles previamente, que están implícitas en la pregunta general.

Leer un gráfico en el nivel intermedio o superior, es muy diferente que leerlo en el nivel elemental. Por ejemplo, el concepto de distribución normal requiere de las nociones de simetría, unimodalidad, continuidad, etc. Por lo tanto, para poder determinar si una variable puede ajustarse con una distribución normal se debe hacer una lectura del gráfico en un nivel superior, estableciendo relaciones además de extraer datos literalmente.

Analizando lo expresado en los párrafos anteriores, podemos deducir una relación estrecha entre la lectura tomada de un modo general y la lectura de un gráfico, por lo que podríamos tomar un gráfico como un objeto semiótico. Generalmente, cuando pedimos a nuestros alumnos que interpreten o realicen un gráfico, asumimos que ellos son capaces de realizar la traducción de la realidad al gráfico que la está representando o a la inversa, pero ellos no siempre son capaces de realizar en forma adecuada esta traducción debido a que en muchos casos tienen carencias en sus conocimientos previos o en su experiencia para construir e interpretar gráficos.

Pero, esta capacidad de interpretación puede ser construida de la misma manera que se construye la relación entre el significado de una palabra y su referente. Diversos estudios han mostrado que el gráfico, como la palabra, es un objeto semiótico independiente cuya relación con el fenómeno debe ser establecido a través de un largo proceso de trabajo. Algunos autores (Roth y McGinn, 1997; Wilensky, 1991; Ausubel y Novak, 1983) afirman que la capacidad para graficar y utilizar gráficos como dispositivos retóricos es una función de la experiencia, que se va desarrollando a través del tiempo.

De estos trabajos hemos tomado algunos elementos. Como veremos en los Capítulos V, VI y VII, hemos planteado a los alumnos diversas tareas, algunas de ellas realizadas en forma grupal en las clases, otras, como el cuestionario y la evaluación final realizadas en forma individual. En el primero, se plantean preguntas en las que se utiliza un nivel de comprensión de gráficos que corresponderían a los niveles elemental e intermedio mencionados por Wainer y Curcio y en la evaluación, además de estos niveles, se aplican cuestiones del tercer nivel.

2.6. CONCLUSIONES

En la revisión de investigaciones que hemos ido realizando dentro de psicología y educación estadística, hemos podido determinar la gran diversidad de enfoques y de temas relacionados con nuestra investigación, aunque hemos encontrado que muy pocas se han

centrado en el estudio específico de la distribución normal, y cuando lo hacen no es de una forma global.

En general, hemos podido distinguir diversas líneas en las que podemos ubicar las investigaciones mencionadas en este capítulo:

Razonamiento estocástico en sujetos adultos

Las investigaciones descritas en este apartado (Kahneman y cols., 1982) nos sugieren que la probabilidad y la estadística son temas difíciles incluso para los adultos y que los resultados de los experimentos de enseñanza no siempre son efectivos (Serrano, 1993, 1996; delMas, 1988; Garfield y delMas, 1989, 1990). Asimismo justifican el interés de continuar el estudio del efecto de la enseñanza sobre la mejora de la comprensión de temas particulares, es decir el interés de los estudios de tipo didáctico.

Investigaciones centradas en la distribución normal

Dentro de éstas podemos distinguir aquellos trabajos relacionados con la emergencia del concepto de distribución o el teorema central del límite (trabajos de Piaget e Inhelder). En otros, se plantea la evaluación de la comprensión de propiedades aisladas de la distribución normal (Huck y cols., 1986; Hawkins y cols., 1992; Méndez, 1991, Schuyten, 1991) o simplemente se refieren a ella como un componente dentro de un curso global, no centrando su atención concretamente en la misma. Por último, algunos trabajos analizan factores que influyen en la comprensión de la distribución normal, como por ejemplo la ansiedad epistemológica (Wilensky, 1991, 1995a y b, 1997) y la habilidad matemática (Garfield, 1981).

Comprensión de las distribuciones muestrales

Hemos encontrado también, trabajos que describen dificultades en relación con el *estudio de la inferencia*, como los de Schuyten (1991), Well y cols (1990). En particular, los trabajos de Vallecillos (1994, 1996 y 1999) que han sido elaborados dentro de nuestro equipo de investigación, describe dificultades en la comprensión de las distribuciones muestrales, en relación con el contraste de hipótesis.

Un segundo grupo de trabajos analizan el efecto de la enseñanza basada en ordenador sobre la comprensión de las distribuciones muestrales (Lipson, 1997; delmas, Garfield y Chance, 1998; Chance, Garfield y delMas, 1999).

Las investigaciones de estos dos últimos apartados nos sugieren que son muchos los elementos del significado de la distribución normal que no han recibido todavía atención por parte de los investigadores y que se requiere un estudio sistemático de la problemática específica de la distribución normal tanto desde el punto de vista epistémico (análisis del concepto y su presentación en textos y en secuencias de enseñanza) como cognitivo (comprensión de los estudiantes, dificultades y errores).

Investigaciones centradas en el papel del ordenador en la enseñanza y aprendizaje de conceptos estadísticos

Estas investigaciones nos resultan útiles porque en nuestro trabajo analizaremos una propuesta de enseñanza en la que hemos incorporado el ordenador como objeto de estudio y como recurso didáctico. En particular son dos los campos que hemos analizados en relación con nuestro trabajo:

Las investigaciones sobre *enseñanza de análisis exploratorio de datos*, puesto que estudiaremos la problemática relacionada con la distribución normal en un curso de análisis exploratorio de datos. Estas investigaciones nos proporcionan criterios útiles para el diseño de nuestras actividades y para la determinación de factores que pueden incidir en el aprendizaje, como la dificultad de uso del software, la necesidad de trabajar con conjuntos de datos reales, etc. Ninguna de estas investigaciones previas se ha centrado específicamente sobre la distribución normal.

Hemos analizado con especial interés las investigaciones de Estepa, Batanero y Godino, sobre el concepto de asociación, ya que son un antecedente directo de la nuestra. En estas investigaciones se diseñó un curso, primeramente apoyado en un software de elaboración propia y recientemente apoyado en Statgraphics y se ha evaluado el curso y la comprensión mediante observación, cuestionarios y pruebas de ensayo con ordenador, similares en algunos puntos a las

adoptadas en nuestro trabajo. Sin embargo, sólo muy recientemente los autores hacen uso del marco teórico sobre el significado de los objetos matemáticos, que hemos adoptado en nuestro trabajo, y en este sentido, creemos que nuestra investigación supone un avance sobre las anteriores al proporcionar una metodología más completa para el estudio de la enseñanza y aprendizaje de otros conceptos estadísticos.

Investigaciones centradas en la comprensión de gráficos

En esta línea encontramos diversos estudios sobre la comprensión de gráficos como numéricos, considerados como elementos semióticos. Pensamos que era importante revisar esta línea debido a que es un tema transversal a todos los temas estadísticos y que por supuesto influirá también, en la comprensión de la distribución normal.

En la tabla 2.6.1 realizamos un resumen de la clasificación expuesta anteriormente, en el que ubicamos las investigaciones realizadas en cada línea. De este estudio deducimos el interés de indagar más sobre la enseñanza de la distribución normal con alumnos universitarios, porque, como se puede observar, hay una gran dispersión dentro de los enfoques adoptados en estos trabajos y, aunque en muchos de ellos se refleja la importancia de las distribuciones de probabilidad y en particular de la distribución normal, ninguno se ha centrado en un estudio exhaustivo del tema.

Como consecuencia, creemos que se justifica un estudio de la problemática relacionada con la distribución normal en un curso de análisis exploratorio de datos desde un triple punto de vista: epistémico, cognitivo e instruccional, que es el que abordaremos en nuestro trabajo. Por tanto, hemos elegido como marco teórico para fundamentarlo el que se describe en el capítulo III que tiene en cuenta esta triple dimensión que queremos dar a nuestro estudio.

Desde el punto de vista metodológico, las investigaciones revisadas aplican diversos instrumentos con el fin de tener una visión más global de lo que estaban investigando. Por un lado, podemos ver que hay trabajos en los que se han utilizado grabaciones y observaciones de clases, aplicando luego entrevistas clínicas con el fin de profundizar en la problemática planteada (Ben-Zvi y Friedlander, 1997). Otros analizan tareas realizadas con apoyo del ordenador y entrevistas clínicas (Morris y Scalon, 1999).

Tabla 2.6.1. Esquema de las investigaciones realizadas

		Investigaciones centradas en:				
		Aspectos matemáticos relacionados con la distribución normal		Enseñanza basada en ordenadores		Aspectos sobre comprensión de gráficos
Razonamiento estocástico de adultos	Distribución normal y conceptos relacionados	Distribuciones muestrales	Asociación	Análisis exploratorio de datos		
Batanero, Serrano y delMas, 1996	Emergencia del concepto: Piaget e Inhelder, 1951	Comprensión de conceptos relacionados: Vallecillos, 1994, 1995, 1996, 1999	Batanero y Godino, 1998	Batanero y Godino, 1995, 1998	Batanero y Godino, 1995, 1998	Curcio, 1987
Garfield, 1988			Batanero, Estepa y Godino, 1997	Batanero, Estepa y Godino, 1997	Batanero, Estepa, 1988,	Li y Shen, 1992
Garfield y 1989, 1990			Batanero, Godino y Estepa, 1998	Batanero, Godino y Estepa, 1998	Batanero, Godino y Ben-Zvi y Friedlander, 1997	Wainer, 1992
Kahneman, Slovic y Pollatsek y cols., 1982	Comprensión de propiedades: Huck y cols, 1986	Well, Pollatsek y Boyce, 1990	Estepa y Batanero, 1994, 1995, 1996	Estepa y Batanero, 1994, 1995, 1996	Ben-Zvi, 2000	
Tversky, 1982			Estepa, 1993	Estepa, 1993	Biehler, 1997	
Scholz, 1991	Hawkins, Joliffe y Glickman, 1992	Diseño de cursos para estudiar diversos factores:	Estepa, Green, Batanero y Godino, 1994	Estepa, Green, Batanero y Godino, 1994	Estepa, 1990, 1992	
Serrano y cols., 1998	Serrano, 1991, 1996	Chance, Garfield y delMas, 1999	Morris y Scalon, 1999	Morris y Scalon, 1999	Batanero y Godino, 1990	
Serrano, 1991, 1996	Schuyten, 1991		Morris, 1999	Morris, 1999	Godino, Batanero y Estepa, 1990, 1991	
Shaughnessy, 1992	Méndez, 1991	Factores que influyen en la comprensión:	Garfield y delMas, Garfield y Chance, 1998	Garfield y delMas, Garfield y Chance, 1998	Otros temas	
		Wilensky, 1991, 1995 a y b, 1997	Lipson, 1997	Lipson, 1997	Cohen y Chechile, 1997	
					Schuyten y Dekeyser, 1997	

En otros casos, se han realizado análisis de mapas conceptuales y de tests destinados a profundizar en la comprensión de tópicos relevantes (Méndez, 1991).

Tabla 2.6.2. Instrumentos utilizados en las investigaciones revisadas

Instrumentos utilizados en las investigaciones revisadas			
Cuestionario	Pre – Pos test	Entrevistas clínicas	Otros
Batanero, Serrano y Garfield, 1996 Garfield, 1981 Huck y cols, 1986 Kahneman y cols, 1982 Morris, 1999 Schuyten y Dekeyser, 1997 Serrano, 1996 Vallecillos, 1994	Batanero, Estepa y Godino, 1997 Chance, Garfield y delMas, 1999 Cohen y Chechile, 1997 delMas, 1988 delMas, Garfield y Chance, 1998 Estepa, 1993 Garfield y delMas, 1989, 1990 Méndez, 1991 Well, Pollatsek y Boyce, 1990	Ben-Zvi y Friedlander, 1997 Biehler, 1997 Estepa, 1993 Méndez, 1991 Morris y Scalon, 1999 Piaget e Inhelder, 1951 Serrano, 1991, 1996 Vallecillos, 1994, 1995, 1996, 1999 Con apoyo del ordenador: Wilensky, 1995 a y b, 1997	Análisis de mapas conceptuales: Lipson, 1997 Méndez, 1991 Análisis de tareas y pruebas de ensayo con ordenador: Batanero y Godino, 1998 Batanero, Godino y Estepa, 1988 Biehler, 1997 Estepa y Batanero, 1994, 1996 Estepa, 1990, 1993 Estepa, Batanero y Godino, 1990 Morris y Scalon, 1999 Grabaciones y observaciones de clases: Ben-Zvi y Friedlander, 1997 Estepa, 1990, 1993

Otras trabajos utilizan pre y pos-tests con el fin de realizar comparaciones antes y después del desarrollo de la experiencia (Garfield y delMas, 1998, 1990). También, se han realizado análisis de tareas y de una prueba de ensayo con ordenador, además de pasar previamente un cuestionario con el objetivo de indagar sobre concepciones y errores (Estepa, 1993), se utiliza un cuestionario y entrevistas clínicas (Vallecillos, 1994) o sólo un instrumento metodológico tal como se describe en la tabla 2.6.2. Creemos importante considerar en el diseño de nuestra investigación más de un instrumento para analizar la problemática de la distribución normal.

Una vez justificado el interés y originalidad de nuestro estudio, en base a los antecedentes de nuestra investigación, pasamos en el Capítulo III a describir el marco teórico, objetivos específicos y enfoque metodológico adoptado.

CAPÍTULO III

FUNDAMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo II, en que describimos los antecedentes de nuestra investigación, hemos razonado la necesidad e interés de llevar a cabo una investigación comprehensiva sobre el tema específico de la distribución normal.

El estudio de las investigaciones sobre enseñanza de la estadística incorporando el ordenador, particularmente de la de Estepa (1993), Vallecillos (1994) y trabajos posteriores de Estepa, Batanero y Godino, de los que esta investigación es continuación, nos ha proporcionado fundamentos para nuestro estudio.

La revisión y el análisis de los resultados de las investigaciones citadas en el capítulo II, nos sugieren el interés de contemplar la dimensión institucional y personal en el estudio de la distribución normal y también la complejidad sistemática del objeto de estudio, así como las dimensiones epistémica, cognitiva e instruccional. En consecuencia, para ser coherentes con la problemática que deseamos estudiar, hemos decidido adoptar como marco teórico el desarrollado por Godino y Batanero (1994, 1998) en el que se tienen en cuenta las dimensiones mencionadas. Describiremos dicho marco teórico a continuación.

3.2. MARCO TEÓRICO

Somos conscientes que nuestro trabajo se ubica dentro del campo de investigación en Didáctica de la Matemática y que, como afirma Orton (1988), en ella no es posible hablar de un único marco teórico perfectamente definido y delimitado, al estar implicadas las cuestiones generales referidas al conocimiento y al aprendizaje, para los que no disponemos de un cuerpo único de conocimiento aplicable. Por lo tanto, consideramos importante clarificar los conceptos teóricos que hemos adoptado para fundamentar nuestro trabajo, ya que tomaremos el marco teórico mencionado en la sección anterior como referente para la construcción de la secuencia de enseñanza y el análisis y la caracterización de la comprensión de nuestros alumnos.

Nuestro trabajo de investigación se basa principalmente en un modelo propuesto por Godino (1999), que presenta tres dimensiones: epistemológica, semiótico-cognitiva e instruccional, cada una de las cuales se apoyan respectivamente en la teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994, 1998); teoría de las funciones semióticas (Godino, 1998) y, teoría de las trayectorias didácticas (Godino, 1999). A continuación, detallamos los elementos principales de estas dimensiones, que serán los que tomaremos como fundamentos de nuestra investigación.

3.2.1. DIMENSIÓN EPISTEMOLÓGICA: SIGNIFICADO INSTITUCIONAL Y PERSONAL DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

Para los distintos objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, teorías) se tienen en cuenta dos facetas: la institucional (o epistémica) y la personal (o cognitiva). Ello nos permitirá analizar el objeto "distribución normal" y fijar su significado en una propuesta concreta de enseñanza, así como valorar el grado de acuerdo alcanzado entre el significado institucional local previsto y el personal adquirido por los estudiantes.

Una de las características que distinguen al marco teórico citado, es que problematiza la naturaleza de un objeto matemático. Se parte del supuesto de que un mismo término o expresión

matemática, como por ejemplo, "la distribución normal", designa entidades diversas. Como afirman los autores, desde el punto de vista de la didáctica, deben distinguirse dos tipos de entidades designadas con el mismo término:

- a. *El significado institucional* de un concepto, que es el compartido dentro de una institución, en nuestro caso, la institución didáctica. Respecto al mismo, diferenciamos en nuestro trabajo:
 - a1. *El significado institucional local*, aquello que el profesor se propone enseñar en unas circunstancias determinadas.
 - a2. *El significado institucional observado*, lo que realmente se lleva a cabo en el aula, que puede variar respecto a lo previsto.
 - a3. *El significado institucional de referencia*, que sirve de pauta de comparación y da cuenta del hecho de que el contenido a enseñar en unas circunstancias determinadas no agota el significado completo del objeto.
- b. *El significado personal* adquirido por los estudiantes a lo largo del proceso de estudio.

Este modelo teórico parte de la noción de *situación-problema* como noción primitiva, considerando a dicha situación-problema como cualquier circunstancia en la que se debe realizar actividades de matematización (Freudenthal, 1991), como por ejemplo:

- Construir o buscar soluciones que no son inmediatamente accesibles;
- Inventar una simbolización adecuada para representar la situación y las soluciones encontradas, y para comunicar estas soluciones a otras personas;
- Justificar las soluciones propuestas (validar o argumentar);
- Generalizar la solución a otros contextos, situaciones-problemas y procedimientos.

Cuando una clase de situaciones-problemas comparten soluciones, procesos, etc, se considera que están agrupadas en un *campo de problemas*. Particularmente, en esta investigación nos centraremos en los campos de problemas asociados a la distribución normal, como por ejemplo, encontrar la distribución en el muestreo de la media y de la proporción muestral para muestras de tamaño grande o encontrar una aproximación a la distribución binomial $B(n, p)$ para tamaños grandes de n .

Cuando el sujeto se enfrenta a un problema y trata de resolverlo, para luego comunicar la solución a otras personas, validar y generalizar la solución a otros contextos y problemas, está realizando distintos tipos de *prácticas*. Prácticas características de los problemas descritos, serían representar los datos empíricos mediante un histograma y tratar de identificar una función matemática conocida que se ajuste al mismo, o calcular la probabilidad de que una variable tome un determinado valor en un intervalo dado.

A partir de las nociones primitivas de *situación-problema*, *campo de problemas* y *práctica*, y con el fin de estudiar los procesos cognitivos y didácticos, se desarrollan las nociones derivadas de *prácticas significativas* y el *significado de un objeto*, para las cuales se postulan dos dimensiones interdependientes, una personal y otra institucional.

De acuerdo con los autores, una práctica se considera significativa para una persona o para una institución, si cumple una función para resolver el problema, comunicar, validar o extender su solución. En consecuencia, las prácticas significativas están orientadas a un objetivo que implican una situación-problema, un contexto institucional, una persona y las herramientas semióticas que mediatizan la acción.

En el caso de la distribución normal, habría prácticas significativas vinculadas al análisis estadístico de las regularidades identificadas en una muestra de datos representativos de alguna población que interesa estudiar. Ejemplos de prácticas significativas sobre esta problemática, en el contexto de un curso introductorio de estadística, serían la tipificación, el cálculo de áreas, el estudio de la simetría y curtosis. Ejemplos de prácticas significativas más complejas, que llevan a cabo los estadísticos profesionales, sería el estudio de la robustez de un método estadístico cuando no se verifica la normalidad, la búsqueda de una transformación de los datos para transformar una distribución no normal en otra que pudiera aceptarse como normal, o usar funciones generatrices para determinar la función de densidad de una variable aleatoria.

Como podemos ver, se presentan una diversidad de prácticas significativas, respecto al mismo problema. Algunas de ellas sólo son realizadas por estadísticos profesionales y otras, pueden ser realizadas también por los alumnos. Esto nos lleva a diferenciar entre *prácticas*

institucionales y personales.

Las prácticas institucionales son aquellas aceptadas en el seno de una institución que puede ser por ejemplo, la institución que agrupa a los estadísticos profesionales, o la institución de los educadores estadísticos. En nuestro ejemplo, las prácticas que se desarrollan en el seno de la institución educativa no siempre coinciden con las que se desarrollan en la institución estadística, porque generalmente en la primera se manejan conceptos estadísticos menos formalizados. Siguiendo a los autores, consideraremos que una práctica es personal cuando la realiza una persona, como por ejemplo, un solo alumno.

En consecuencia, existe un sistema de prácticas institucionales o personales significativas asociadas a cada campo de problemas e institución o persona. El objeto matemático se presenta como un ente abstracto que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo o tipo de problemas matemáticos. Este proceso emergente es progresivo a lo largo del tiempo, hasta que en determinado momento es reconocido como tal por la institución. Luego sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociado, y en su evolución puede observarse la existencia cultural de distintos objetos, que dependen de la institución de referencia. Este carácter progresivo de la construcción de los objetos en la ciencia tiene su paralelismo en el aprendizaje del sujeto. La emergencia del objeto es progresiva a lo largo de la historia del sujeto, como consecuencia de la experiencia y el aprendizaje, y son estos objetos los constituyentes del conocimiento subjetivo.

El sistema de prácticas de donde emerge un objeto institucional o personal se define como el *significado institucional o personal* del objeto dado. Como hemos indicado, diferenciamos el *significado institucional de referencia*, o significado que se da desde los libros de texto y el *significado institucional local*, que en nuestro caso será el correspondiente al planificado por el profesor cuando diseña la secuencia didáctica.

3.2.2. ELEMENTOS DE SIGNIFICADO

En nuestro marco teórico, a cada objeto se asocia la entidad "*significado del objeto*" que se define como el sistema de prácticas (operatorias y discursivas) realizadas por el "agente" correspondiente para resolver y sistematizar la resolución de un campo de problemas específico.

En un texto matemático se pueden identificar los siguientes tipos de entidades:

- Enunciados de problemas, ejercicios;
- Notaciones, símbolos, texto ordinario, gráficos;
- Operaciones, algoritmos;
- Definiciones de conceptos, enunciados de proposiciones;
- Demostraciones, comprobaciones.

En correlación con estas entidades, se definen los siguientes tipos primarios de objetos que se ponen en juego en la actividad matemática y que consideramos como *elementos de los significados*, entendidos como "sistemas de prácticas":

- *Extensivos*: entidades fenomenológicas que inducen actividades matemáticas (situaciones-problemas, aplicaciones). Como por ejemplo, buscar una curva de densidad para aproximar un histograma de frecuencias;
- *Ostensivos*: representaciones materiales utilizadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos). Por ejemplo: la ecuación de la función de densidad, la notación $N(\mu, \sigma)$, o la gráfica de la función de densidad. Estos elementos ostensivos o representacionales se pueden observar y manipular y tienen una doble función. En primer lugar sirven para evocar los objetos abstractos inobservables. Por otra, se usan para operar con ellos (en representación de los correspondientes objetos matemáticos) y producir resultados aplicables a dichos objetos;
- *Actuativos*: modos de actuar ante situaciones o tareas (procedimientos, algoritmos, operaciones). Por ejemplo, la tipificación o el cálculo de probabilidades como áreas bajo la curva de densidad;
- *Intensivos*: ideas matemáticas, abstracciones, generalizaciones (conceptos, proposiciones). Por ejemplo, en la distribución normal, la simetría, el hecho de que la media y desviación típica son parámetros de la distribución, o la unimodalidad;

- *Validativos*: tipos de argumentaciones usadas para validar proposiciones: generalización, comprobación de casos, análisis, síntesis.

Estas cinco entidades primarias pueden ser agrupadas, dando lugar a entidades mixtas, como las *tecnologías* y las *teorías* que describen Chevallard, Bosch y Gascón (1997). Una *tecnología* es una agrupación estructurada (sistema) de entidades primarias que describe y sistematiza un campo de problemas (o una parte del mismo) y sus correspondientes técnicas de solución. Mientras que una *teoría* será una sistematización de los elementos intensivos y sus respectivas justificaciones.

La importancia de la noción de significado que hemos descrito se debe a que de ella se deduce una teoría de la comprensión (Godino, 1996). La comprensión personal de un concepto es, en este modelo, la "apropiación" del significado de dicho concepto. Ahora bien, puesto que el significado de un objeto no se concibe como una entidad absoluta y unitaria sino compuesta y relativa a los contextos institucionales, la comprensión de un concepto por un sujeto, en un momento y circunstancias dadas, implicará la adquisición de los distintos elementos que componen los significados institucionales correspondientes.

3.2.3. TIPOS DE FUNCIONES SEMIÓTICAS

Las entidades elementales que hemos descrito en la sección anterior (elementos extensivos, intensivos, ostensivos, actuativos y validativos) no aparecen aisladas en la actividad matemática, sino que se ponen en relación durante la misma. Para tener en cuenta estas relaciones entre elementos, además de la dimensión institucional, se tiene en cuenta en nuestro marco teórico la faceta semiótico-cognitiva. En Godino y Batanero (1998), se concibe la noción de *función semiótica* como una "correspondencia entre conjuntos", que pone en juego tres componentes:

- Un plano de expresión (objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo);
- Un plano de contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor);
- Un criterio o regla de correspondencia, esto es, un código interpretativo que relaciona los planos de expresión y contenido.

Los cinco tipos de entidades primarias consideradas (ostensivas, extensivas, intensivas, actuativas y validativas) pueden desempeñar el papel de expresión o de contenido en las funciones semióticas, alguna de las cuales pueden interpretarse claramente como procesos cognitivos específicos (generalización, simbolización, etc.). Atendiendo al plano del contenido (significado) estos tipos se reducen a las siguientes:

- Una *función semiótica es extensiva* cuando el objeto final es una situación-problema, como por ejemplo, la descripción verbal de una situación-problema, que es diferente de la propia situación, o cuando un fenómeno viene representado por una simulación (p.e.: la generación de números aleatorios por ordenador para simular el lanzamiento de un dado);
- Una *función semiótica es ostensiva* cuando el objeto final, o contenido de la misma, es un objeto ostensivo. Este tipo de función es el uso característico de los signos para nombrar objetos reales o figurados. Por ejemplo, cuando la notación $N(\mu, \sigma)$ remite a la gráfica de la curva normal (ostensivo);
- Una *función semiótica es de tipo actuativo* cuando su contenido es una acción del sujeto. Por ejemplo, la expresión $\bar{X} = (5+7)/2$, está indicando "Súmale 5 al número 7 y divide el resultado por 2 para calcular la media";
- Una *función semiótica es intensiva* cuando su contenido es un objeto intensivo. En la siguiente definición: "Diremos que la variable aleatoria X sigue la distribución normal si la ordenada de la curva de probabilidad es de la forma:

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}$$

que designaremos por $N(\mu, \sigma)$, en que μ y σ son parámetros que varían de una distribución a otra y que significan, el primero, la media, y el segundo, la desviación típica", las palabras 'variable aleatoria', la notación $N(\mu, \sigma)$, se refieren a generalizaciones matemáticas;

- Una *función semiótica es validativa* cuando remite a una demostración o justificación; por ejemplo, cuando decimos "la demostración del teorema central del límite".

Hay que tener en cuenta que las funciones semióticas extensivas, intensivas, actuativas y validativas implican correspondencias ostensivas asociadas, ya que las situaciones-problemas, las abstracciones y las acciones son 'concretadas' textualmente. Asimismo en una correspondencia actuativa y validativa siempre hay correspondencias intensivas implicadas. Pero la distinción de los distintos tipos de funciones es útil para el análisis de la actividad matemática. Además, es preciso distinguir entre *significados elementales o sistémicos*, definiéndolos de la siguiente manera:

- *Significado elemental*: Es el contenido de una expresión particular. El contenido de la función semiótica, es un objeto preciso, determinable sin ambigüedad en las circunstancias espacio-temporales fijadas.
- *Significados sistémicos*: En estos casos, la función semiótica hace corresponder a un objeto matemático el sistema de prácticas de donde proviene tal objeto (Godino y Batanero, 1994; 1998). Este significado sistémico de un objeto matemático se concibe como una entidad compuesta y organizada (sistema), cuyos elementos estructurales son los elementos extensivos, ostensivos, actuativos, intensivos y validativos que hemos descrito.

El significado sistémico de un objeto tiene un carácter teórico y trata de explicar la complejidad de los procesos didácticos, pero no puede ser descrito en su totalidad. Los sistemas de prácticas difieren sustancialmente según los contextos institucionales y personales en que se afronta la resolución de un campo de problemas, que determinan los instrumentos disponibles y las interpretaciones compartidas.

También hemos indicado que se diferencia entre '*significados personales*' y '*significados institucionales*', según se traten de prácticas sociales compartidas, o por el contrario, se refieran a manifestaciones idiosincrásicas de un sujeto individual. Cuando un sujeto entra a formar parte de una cierta institución (por ejemplo, la escuela) puede ocurrir que las prácticas adquiridas individualmente entren en conflicto con las admitidas para dicho objeto en el seno de la institución.

Los procesos de instrucción matemática tienen como principal objetivo el acoplamiento progresivo entre significados personales e institucionales. El sujeto debe apropiarse de los sistemas de prácticas compartidas en el seno de las instituciones de las que es miembro. Pero también la institución tiene que adaptarse a las posibilidades cognitivas e intereses de sus miembros potenciales. La relatividad institucional de los significados se puede generalizar a cualquier tipo de contexto o marco interpretativo (temporal, tecnológico, conceptual, etc.).

3.2.4. TRAYECTORIAS DIDÁCTICAS

Una tercera dimensión concebida por Godino (1999) es la dimensión instruccional, en la que se parte del concepto de *trayectoria didáctica*, con el fin de dar cuenta de las interacciones entre el conocimiento matemático, las funciones docentes y discentes, y los procesos semióticos que se ponen en juego en la instrucción matemática. Como indican Godino y Llinares (2000), una parte substancial de la investigación en educación matemática trata de estudiar las relaciones entre el profesor, los estudiantes y la tarea matemática en la clase de matemáticas.

Se define *trayectoria didáctica* a la conjunción interactiva entre las trayectorias epistémica, docente y discente relativas a un contenido y a unas circunstancias dadas. Es decir, relativas al modo específico en que los distintos componentes o facetas del contenido son enseñados y aprendidos.

Una *trayectoria docente (o discente)*, es la secuencia de funciones docentes (o discentes) que se generan a lo largo del proceso de estudio de un contenido. Algunos ejemplos en el estudio de la distribución normal serían:

- El profesor presenta la información y el alumno la recibe (Función docente de enseñanza; función discente de recepción);
- el profesor presenta una actividad que a continuación es resuelta por el alumno (Función docente de presentación; función discente de exploración de soluciones);
- el alumno discute con el profesor y sus compañeros las conclusiones extraídas de la resolución de la actividad y de la información recibida. (Función discente - docente de validación de las soluciones propuestas).

Teniendo en cuenta las aportaciones sobre este tema hechas por la pedagogía y la didáctica, un primer inventario de funciones docentes y discentes, mencionadas por este autor, podría ser el siguiente:

Funciones docentes:

1. Planificación: diseño del proceso, selección de los contenidos y significados a estudiar.
2. Dirección/ catalización: control del proceso de estudio, mediante el cambio de tareas, la orientación y estímulo de las funciones del estudiante.
3. Enseñanza: presentación de información.
4. Evaluación: valoración del estado del aprendizaje logrado en momentos críticos.
5. Investigación: reflexión y análisis del desarrollo del proceso para introducir cambios en futuras ediciones del mismo.

Funciones discentes:

1. Exploración: indagación, búsqueda de conjeturas y modos de responder a las cuestiones planteadas (situaciones de acción).
2. Formulación/comunicación: El sujeto que formula y comunica soluciones (situaciones de formulación-comunicación).
3. Validación: Argumentación y verificación de conjeturas (situaciones de validación).
4. Recepción: El sujeto receptor de información sobre modos de hacer, describir, nombrar, validar (situaciones de institucionalización).
5. Ejercitación: realización de tareas rutinarias para dominar las técnicas específicas (situaciones de ejercitación).
6. Aplicación: El sujeto aplica conocimientos aprendidos a resolver problemas reales (situaciones de aplicación).

3.2.5. EVALUACIÓN DE LA COMPRENSIÓN

En Godino (1996) se sugiere que para analizar los fenómenos ligados a la comprensión es preciso responder a dos preguntas: *qué* comprender, y *cómo* lograr la comprensión. Un modelo de la comprensión tendrá dos ejes: uno descriptivo, que indicará los aspectos o componentes de los objetos a comprender, y otro procesual que indicará las fases o niveles necesarios en el logro de la 'buena' comprensión. En esta investigación nos centramos principalmente en el eje descriptivo.

Además, en Godino (1996) se indica que la comprensión personal correspondería a la parte inobservable del conocimiento (sería un constructo, en términos psicológicos), mientras que el significado, como conjunto de prácticas, es, por lo menos potencialmente, observable.

Asimismo se concibe la evaluación como el estudio de la correspondencia entre los significados personales e institucionales, y con este sentido se toma en esta investigación. La evaluación de la comprensión de un sujeto tiene que ser relativizada a los contextos institucionales en que dicho sujeto participa. Una institución (escolar o de otro tipo) dirá que un sujeto 'comprende' el significado de un objeto si dicho sujeto es capaz de realizar las distintas prácticas prototípicas que configuran el significado de dicho objeto institucional, además de fundamentarlas y reflexionar sobre el proceso seguido.

Cuando se quiere caracterizar el significado de un objeto en una institución o para una persona, las prácticas observables son los indicadores empíricos que nos permiten esta caracterización. Por ejemplo, si al pedir al alumno que nos elija en un fichero de datos una variable que se pueda aproximar mediante la distribución normal, elige una variable cualitativa o claramente asimétrica deducimos que el significado que el alumno asigna a la distribución normal no coincide con el que el profesor ha fijado institucionalmente. En consecuencia, la comprensión personal de un individuo sobre un cierto objeto matemático deberá ser inferida mediante el análisis de las prácticas realizadas por la persona en la resolución de tareas problemáticas o ítems de evaluación que sean característicos para ese objeto.

La distinción realizada en esta teoría, entre el dominio de las ideas u objetos abstractos (personales e institucionales) y el dominio de los significados o sistemas de prácticas de donde emergen tales objetos inobservables, permite plantear con nitidez el problema de la búsqueda de correspondencia entre ambos dominios, o sea, el problema de la evaluación de los conocimientos, tanto subjetivos como objetivos o institucionales.

La complejidad de este proceso se deduce del hecho de que no sólo existen interrelaciones entre los conocimientos referidos a diferentes objetos matemáticos, sino que, incluso para un objeto matemático dado, el conocimiento de un sujeto sobre el mismo, no puede reducirse a un estado dicotómico (conoce o no conoce) ni a un grado o porcentaje unidimensional.

3.2.6. AGENDA DE INVESTIGACIÓN ASOCIADA AL MARCO TEÓRICO

Godino y Batanero (1998) proponen una agenda de investigación que se puede describir en términos de tres tipos diferentes de problemáticas, atendiendo a la finalidad del estudio.

En la *semiometría* se contempla la caracterización de los elementos de significado y funciones semióticas en las cuales un objeto se pone en juego en un contexto y circunstancias fijadas. La 'medida' de tales significados tendrá un carácter cualitativo y será relativa a una persona, institución, contexto fenomenológico y momento temporal especificado. En tal 'medición' se reconocen al menos cinco dimensiones o cualidades inherentes al concepto teórico: extensiva, ostensiva, actuativa, intensiva y validativa.

La *ecología de significados*: es el estudio de las condiciones de soporte de un objeto, su dependencia de otros objetos y de las funciones o papeles que desempeña en relación con los restantes objetos del sistema.

La *dinámica de significados* analiza el cambio de los distintos elementos estructurales del significado de un objeto en el transcurso del tiempo.

En la tabla 3.2.6.1, que hemos tomado de Godino (1999), se describen algunas cuestiones sobre las tres problemáticas citadas, que pasaremos a explicar a continuación.

Por otro lado, en relación al objeto de estudio, el autor considera:

El *análisis epistémico* es el proceso de identificación de los componentes del significado institucional del objeto. Puede ser determinado a partir del análisis de textos producidos por la institución o de la observación de sus prácticas y puede ser usado como *significado institucional de referencia* para las investigaciones.

Este análisis epistémico es la etapa previa y crucial de los análisis cognitivo y didáctico, porque permitirá identificar el sistema de entidades que se ponen en juego en el estudio de un contenido matemático, los cuales requerirán procesos instruccionales específicos. En nuestro caso realizaremos un análisis epistémico, a partir de libros de texto para determinar el significado institucional de referencia de nuestra investigación (Capítulo IV). Posteriormente será adaptado para constituir el significado institucional local previsto de nuestra secuencia de enseñanza. En el capítulo V hacemos también un análisis epistémico de la propuesta de secuencia didáctica, resaltando las principales diferencias entre el significado institucional de referencia y el significado institucional local previsto.

Tabla 3.2.6.1. Pautas para la generación de problemas didácticos

Finalidad Objeto de estudio	SEMIOMETRÍA (Medición)	ECOLOGÍA (Relación)	DINÁMICA (Cambio)
ANÁLISIS EPISTÉMICO (Objetos institucionales)	¿Qué significa el objeto para la institución?	¿Con qué otros objetos se relaciona y de qué depende el objeto en la institución?	¿Cómo cambia el significado del objeto para la institución?
ANÁLISIS COGNITIVO (Cognición) (Objetos personales)	¿Qué significa el objeto para la persona?	¿Qué relaciones establece la persona entre el objeto y otros objetos matemáticos?	¿Cómo cambia el significado del objeto para la persona?
ANÁLISIS INTRUCCIONAL (Instrucción)	¿Qué puede hacer el profesor para ayudar al alumno a estudiar el significado institucional del objeto en un contexto instruccional ?	¿De qué factores depende la implementación del proceso de estudio?	¿Cuáles han sido las trayectorias didácticas de cada componente del proceso de estudio?

Puesto que también analizamos los conceptos previos y elementos de significado relacionados con otros conceptos en que se apoya la distribución normal y estudiamos las relaciones entre ellos y dicha distribución, realizamos un estudio epistémico, tanto desde el punto de vista de la semiometría, como del de la ecología.

En el *análisis cognitivo* se identifican tanto los elementos de significado utilizados por los sujetos (significado personal) y las funciones semióticas que establecen en su trabajo al resolver problemas o en los procesos de comunicación entre los agentes participantes (profesor y alumnos). Este tipo de análisis tendrá en cuenta:

- *Los agentes involucrados*: estudiantes, profesor;
- *los objetos puestos en juego*: expresiones, contenidos;
- *las posibles correspondencias entre expresión y contenido* (Godino, 1998).

Este tipo de análisis puede servir para formular y evaluar hipótesis sobre puntos críticos del proceso instruccional en los cuales puede haber disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados o cambios en el proceso de estudio. Asimismo servirá para caracterizar los significados personales finales sobre los objetos matemáticos puestos en juego. En el caso que nos ocupa en esta investigación, usaremos este tipo de análisis en la evaluación de los alumnos participantes, tanto a lo largo del proceso de enseñanza, como al finalizar la misma. El análisis se llevará a cabo desde el punto de vista semiótico, ecológico y dinámico, ya que estudiamos el significado que los alumnos atribuyen a la distribución normal, las relaciones que establecen entre éstas y otros objetos y cómo cambia su conocimiento con la instrucción.

En el *análisis instruccional* se caracterizan las diversas funciones docentes y discentes, así como el desarrollo de una secuencia didáctica específica. En nuestro trabajo describiremos la observación del proceso de enseñanza para determinar el significado institucional realmente observado a lo largo del tiempo (dinámica).

En conclusión y si se observa la tabla 3.2.6.1, en nuestro trabajo realizaremos un análisis epistémico, cognitivo e instruccional en función de la ecología y la dinámica, y un análisis epistémico y cognitivo en función de la semiometría.

3.3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS DE LA INVESTIGACIÓN

Como hemos expuesto en la sección 1.6, la investigación tiene como finalidad general analizar la problemática específica que presenta el tema de la distribución normal a los alumnos que realizan un curso de nivel introductorio a la estadística con un enfoque basado en el uso de ordenadores, abordando las cuatro problemáticas descritas en dicha sección.

Asimismo, estamos interesados en detectar si existe o no dificultad en el aprendizaje y uso del software estadístico, y la capacidad que los alumnos adquieren al finalizar un curso introductorio para aplicar los conocimientos adquiridos al análisis de datos. Las conclusiones que se extraigan de este estudio, podrían ser útiles en el diseño de nuevas actividades para la enseñanza, de tal forma que se incida sobre aquellos problemas detectados. Como señala Sánchez (1994) muchas veces se ha mencionado la separación entre la práctica educativa y la investigación teórica, ya que los problemas que surgen coinciden con los objetivos de la investigación. Pensamos que en nuestro caso hay una coincidencia entre un problema práctico y un interés teórico.

Los cuatro objetivos generales enunciados en el Capítulo I, se concretarán en otros más específicos a la luz del marco teórico adoptado, los cuales describiremos a continuación. Estos objetivos, así como la metodología del trabajo se presentaron y discutieron en Tauber, Batanero y Sánchez (2000 b).

Determinación del significado institucional de referencia

De acuerdo con el marco teórico, cualquier objeto matemático (y en particular la distribución normal) no tiene un único significado puesto que no podemos considerar una sola institución.

En el caso de la distribución normal, una primera institución podría ser el cálculo de probabilidades (formado por los matemáticos que trabajan este campo). Una buena referencia de lo que sería el significado institucional en esta institución sería el libro de Johnson y Kotz (1972), pero en dicho libro no aparecen apenas sus aplicaciones (campos de problemas) ni la

mayor parte de representaciones y elementos actuativos que hemos usado en esta tesis. En cuando a las propiedades intensivas se incluyen muchas más, todas ellas de naturaleza matemática pero poco relevantes para la aplicación práctica de la distribución normal. En consecuencia el significado de esta distribución sería muy diferente si nos vamos a la estadística teórica, la estadística aplicada o el análisis multivariante.

En nuestro caso hemos fijado una institución formada por los cursos de estadística a nivel introductorio en la universidad. Dentro de esta institución el significado de la distribución normal viene definido por los campos de problemas abordados, que llamaremos *elementos extensivos del significado*, las herramientas disponibles en su solución, que son los *elementos intensivos, ostensivos, actuativos y validativos*, así como los factores contextuales que condicionen la enseñanza.

Para poder describir de la forma más objetiva posible dicho significado institucional, hemos decidido analizar una muestra de libros de texto dirigidos a este tipo de alumnos, elegidos en base a la experiencia de su autor.

Podemos, entonces considerar que el libro de texto refleja el significado que el autor considera adecuado para la institución de enseñanza particular a que el texto va dirigido. Si el autor tiene un gran prestigio en la estadística este libro es representativo de lo que se considera adecuado por los miembros de dicha institución.

Estas consideraciones nos llevaron a decidir que, para planificar adecuadamente la secuencia de enseñanza, comenzaríamos por analizar una muestra de libros de texto orientados a un curso de introducción a la estadística, como base en la fijación del *significado institucional de referencia*. Se deduce de ello el siguiente objetivo:

O1: Caracterizar los significados más comunes que se presentan en una muestra de libros de texto sobre la distribución normal (para fijar el Significado institucional de referencia).

Para ello hemos de identificar los diferentes campos de problemas elementales que llevan a la idea de distribución normal o aquellos para los que la distribución normal proporciona una solución. Asimismo identificaremos los elementos actuativos, ostensivos, intensivos y validativos específicos de la distribución normal y aquellos que estén relacionados con ella, que necesita el alumno para resolver cada uno de estos campos de problemas.

Para cumplir este objetivo, se ha realizado el análisis epistémico de libros de texto universitarios, en relación con la distribución normal, elegidos con el criterio que se describirá en el Capítulo IV, detectando los elementos de significado principales presentes en dichos libros. Por medio de este análisis, se ha obtenido el *significado institucional de referencia*.

Determinación del significado institucional local previsto y diseño de una secuencia didáctica

Entre las actividades involucradas en el razonamiento pedagógico, Sánchez (2000) describe el proceso de transformación de la materia para ser enseñada con el fin de generar un plan de acción específico para la enseñanza. Esta actividad comprende la revisión crítica de materiales instructionales a la luz de la propia comprensión de la materia, la organización del contenido en la planificación, la adaptación y ajuste a las características de los alumnos.

Por tanto, a partir del significado de referencia, es preciso seleccionar los elementos ostensivos, actuativos, intensivos, y validativos correspondientes a los campos de problemas y tareas que permitan establecer relaciones entre dichos elementos y sean adecuados a las características que pretendemos darle a la secuencia didáctica. Además, habrá que agregar ejemplos de problemas y tareas que no se encuentren en los textos, pero que se hagan necesarios por el uso del recurso informático. Con lo cual pensamos que la secuencia didáctica elaborada en esta fase tiene una problemática y características propias.

Por otro lado, es claro que en un tiempo limitado y con las características de los alumnos no es posible presentar un significado completo desde el punto de vista estadístico. Será preciso acotar y seleccionar los campos de problemas e instrumentos a presentar en la experiencia de enseñanza, justificando las elecciones de los mismos. Asimismo, será importante la búsqueda de contextos significativos para el alumno y la secuenciación de las actividades. Esto nos ha llevado al segundo objetivo:

O2: Seleccionar una muestra de elementos de significado que constituya la base del significado institucional local específico a presentar al alumno, justificando dicha elección, diseñando una trayectoria didáctica particular que tenga en cuenta los elementos anteriormente citados, su puesta en relación, el tiempo disponible, y el tipo de alumnos.

Para cumplir este objetivo se diseñó una secuencia de enseñanza de la distribución normal en la que se toma al ordenador como una herramienta didáctica básica para el desarrollo de ésta, la cual es analizada con detalle en el Capítulo V. Dicha secuencia estaría basada en otras que se habían experimentado previamente en años anteriores por los profesores que colaboran en la investigación. Puesto que las experiencias anteriores no tenían un propósito investigador, hubo que reelaborarlas con el fin de adecuarlas a los objetivos que nos hemos propuesto dentro de la secuencia didáctica.

Una opción asumida en nuestro trabajo es la de incorporar el ordenador, no sólo porque consideramos que es una herramienta imprescindible en la aplicación de la estadística y de la enseñanza, sino por sus posibilidades didácticas y por el impacto positivo que tiene sobre las actitudes de los alumnos hacia la estadística. Esta opción no se realiza, sin embargo, sin coste adicional, ya que el ordenador crea nuevas necesidades de aprendizaje. En consecuencia, cambia el significado de los conceptos estadísticos y por ello será necesario analizar el cambio que el ordenador implica sobre nuestra enseñanza del tema, de lo cual se deduce el tercer objetivo:

O3: Analizar los elementos de significado implicados en la enseñanza y aprendizaje de la distribución normal en la que se introduce un paquete estadístico con el que los alumnos trabajarán en la resolución de problemas.

Para conseguir este objetivo analizaremos con detalle los recursos informáticos disponibles en el paquete STATGRAPHICS, incluyendo las representaciones e instrumentos de cálculo disponibles (elementos ostensivos), los conceptos subyacentes que el alumno debe emplear para manejarlos (elementos intensivos), los procedimientos informáticos empleados en las prácticas (elementos actuativos) y los nuevos tipos de "demostraciones" que proporciona por medio de la simulación (elementos validativos).

Evaluación del significado institucional observado en el curso

De acuerdo con el objetivo general 3, pretendemos llevar a cabo una experimentación de la secuencia de enseñanza diseñada y una evaluación global de la misma en el grupo de alumnos lo cual da lugar a los siguientes objetivos específicos.

O4: Describir los elementos de significado efectivamente observados en el desarrollo de la secuencia de enseñanza.

Por medio de la observación de las clases se pretende comparar el significado institucional local efectivamente observado con el previsto, para describir los cambios y las dificultades que se hayan producido en el transcurso de la secuencia de enseñanza a nivel institucional.

Evaluación del significado personal construido por los alumnos del grupo a lo largo de la experiencia y al finalizar la misma

A pesar de que una secuencia didáctica específica haya sido planificada con detalle, es difícil prever todas las dificultades que pueden tener los alumnos en la realización de las actividades, y los conocimientos que adquieren del tema. Los alumnos construyen su propio significado de la distribución normal a partir de sus conocimientos previos y del trabajo en la clase.

Por ello nuestro cuarto objetivo global (Sección 1.5) será analizar los elementos de significado extensivos, ostensivos, actuativos, intensivos y validativos, puestos en práctica por los estudiantes durante las clases, así como en la evaluación final.

O5: Describir los elementos de significado efectivamente aplicados por los alumnos del grupo a lo largo de la enseñanza.

Se llevará a cabo mediante un análisis de las soluciones escritas de los alumnos, a tareas teóricas y prácticas, por medio del cual describiremos los elementos de significado implícitos en las respuestas de los alumnos, comparando con el significado institucional local previsto y estudiando su evolución.

O6: Analizar las características del significado personal efectivamente construido por los alumnos del grupo al finalizar la enseñanza.

Al final de la secuencia de enseñanza se lleva a cabo una doble evaluación individual de los alumnos para determinar el significado efectivamente construido sobre la distribución normal y comparar con el significado institucional local presentado en la enseñanza.

Dicha evaluación se realiza mediante el análisis de sus respuestas a dos instrumentos: un cuestionario escrito centrado en los elementos intensivos y ostensivos del significado y basado en la capacidad de lectura de datos de nivel elemental y, una prueba individual de resolución de problemas con apoyo del ordenador, que incorpora los elementos extensivos, actuativos, intensivos y validativos y nuevos elementos ostensivos, y evalúa la capacidad de análisis de datos de alto nivel.

La evaluación global permite una primera aproximación a las características del significado personal que los alumnos del grupo atribuyen a la distribución normal al finalizar la experiencia, y detectar la existencia de desajustes respecto al significado institucional. A través de estos objetivos exploraremos también la potencialidad del marco teórico utilizado para explicar los fenómenos que son objeto de nuestro estudio.

3.4. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.4.1. ENFOQUE GENERAL

Esta es una investigación que analiza principalmente variables cualitativas, como los elementos de significado institucional y personal de la distribución normal en un curso de estadística a nivel universitario. Ocasionalmente, sin embargo, haremos uso de algunos elementos cuantitativos, particularmente estudiaremos las variables numéricas deducidas de las respuestas correctas e incorrectas a los cuestionarios y del número de elementos de significado usados en la prueba con ordenador.

Puesto que es una investigación novedosa por su tema, el enfoque es necesariamente descriptivo y exploratorio en el inicio de la investigación, pasando a un enfoque interpretativo y explicativo en la última fase. No es sin embargo una investigación experimental, puesto que no se realiza un control y manipulación de variables independientes, sino que se engloba en la investigación cuasi - experimental (Cook y Campbell, 1979). Es un estudio que se realizó con un grupo en el curso 1998-99 y se repitió con otro en el curso 1999-2000, con diseño longitudinal, pues se toman datos a lo largo de todo el proceso. Se realiza además, un estudio de textos.

3.4.2. ORGANIZACIÓN Y FASES DE NUESTRA INVESTIGACIÓN

El diseño de esta investigación comprende distintas fases, que se describen a continuación, cada una de las cuales poseen un fin en sí misma y se corresponden con los objetivos de nuestra investigación. En la tabla 3.4.2.1 se muestra resumidamente la correspondencia entre las distintas fases de la investigación y los objetivos correspondientes a cada una de ellas y en la tabla 3.4.2.2. se muestra la temporalización de las distintas fases.

Análisis epistémico (fase 1). El fin de esta fase es fijar el *significado institucional de referencia*, que es la base del diseño de la secuencia didáctica. Se llevó a cabo desde Junio a Noviembre de 1998, a partir del estudio de una muestra de 11 textos universitarios, orientados a estudiantes en Educación y Ciencias Sociales. En el Capítulo IV nos centramos en la descripción del significado que se presenta de la distribución normal en estos libros, en sus cinco tipos de elementos: *extensivos, ostensivos, actuativos, intensivos y validativos*.

Selección de elementos de significado y diseño de una secuencia de enseñanza (fase 2): Se trata de seleccionar a partir del significado de referencia unos campos específicos de problemas

y una serie de instrumentos para abordarlos, así como unos contextos particulares de aplicación, relacionados con áreas de interés para el alumno, completándolos con otros elementos que sean necesarios para el enfoque que daremos a la enseñanza. Además se diseña una secuencia didáctica particular, que es objeto de experimentación y evaluación en la segunda fase de la investigación, partiendo de las experiencias previas de los profesores en cursos anteriores. Todo ello se describe en el Capítulo V.

Esta fase se ha llevado a cabo desde Noviembre de 1998 a Abril de 1999, y la etapa de revisión para el segundo curso se realizó desde Enero hasta Abril de 2000. Como consecuencia se ha producido un material escrito para los alumnos, se han diseñado una serie de actividades teóricas y prácticas, así como una secuenciación de éstas con las exposiciones del profesor y del debate en clase. En la revisión y profundización del diseño, incluimos un material escrito que sirve de apoyo para la realización de las prácticas y también para la utilización del paquete estadístico.

En la organización de la secuencia didáctica, se tienen en cuenta los factores contextuales que influyen en dicha organización, el conocimiento de los profesores acerca de la asignatura y acerca de los estudiantes. También se tuvieron en cuenta las normas de clase, el papel del profesor y de los alumnos y los atributos de la tarea. Todo ello se analiza con detalle en la sección 5.4. Todo lo anterior nos servirá de base en la selección de contenidos a evaluar en la última fase.

Determinación del significado institucional observado (fase 3): Por medio del análisis del protocolo de observación de las sesiones que componen la secuencia de enseñanza observada, se identifican los elementos de significado y algunas relaciones que se ponen de manifiesto y se compara con el significado institucional local previsto. De esta manera se observan los desajustes producidos, también las dificultades en la puesta en práctica de la secuencia, y además, los errores o dificultades que los alumnos ponen de manifiesto en el trámite de la enseñanza.

La secuencia de enseñanza fue llevada a cabo durante dos cursos consecutivos, entre los meses de Abril y Junio de los años 1999 y 2000. La observación de dichas experiencias se resume y analiza en el Capítulo VI.

Tabla 3.4.2.1. Correspondencia entre objetivos y fases de la investigación

Fases de la investigación	Objetivos generales	Objetivos específicos
<i>1. Determinación del significado institucional de referencia</i>	Realizar un análisis epistémico del tema en textos universitarios	O1: Caracterizar los significados más comunes que se presentan en los libros de texto sobre la distribución normal
<i>2. Fijación del significado institucional local previsto</i>	Elaborar una secuencia didáctica sobre la distribución normal	O2: Seleccionar una muestra de elementos de significado que constituya la base del significado institucional local específico a presentar al alumno y diseñar una secuencia didáctica O3: Analizar los elementos de significado implicados en la enseñanza y aprendizaje de la distribución normal en la que se introduce un paquete estadístico
<i>3. Determinación del significado institucional local observado</i>	Observar la secuencia de enseñanza	O4: Describir los elementos de significado efectivamente observados en la secuencia de enseñanza.
<i>4. Evaluación de las características generales en los significados personales construidos por los alumnos del grupo</i>	Estudiar la comprensión de los alumnos participantes en relación con la distribución normal	O5: Describir los elementos de significado efectivamente aplicados por los alumnos del grupo a lo largo de la enseñanza. O6: Analizar el significado personal efectivamente construido por los estudiantes del grupo al finalizar la enseñanza

Evaluación del proceso de aprendizaje y de la comprensión de los alumnos (fase 4): Se

orienta a caracterizar los elementos de significado puestos en juego por los alumnos, por medio del análisis de sus soluciones escritas a las tareas teóricas y prácticas, observando la correspondencia entre los significados personales construidos por los alumnos del curso y el significado institucional local previsto. Además, por medio de un cuestionario escrito y una prueba para ser resuelta con ordenador especialmente diseñados en esta investigación se evaluará la comprensión final lograda por los alumnos.

En Junio de 1998 se llevó a cabo una primera aplicación de la prueba con ordenador en la misma asignatura donde se lleva a cabo la experiencia. Aunque la secuencia didáctica no es exactamente la utilizada en nuestro trabajo, la estructura y enfoque metodológico del curso eran similares, así como lo esencial de los contenidos.

Desde Noviembre de 1998 hasta Abril de 1999 se prepararon los instrumentos de evaluación y la experiencia de enseñanza se llevó a cabo entre Abril y Mayo de 1999. En Junio de 1999, se recogieron datos del cuestionario y de la prueba de resolución de problemas con ordenador de cada alumno. Se realizó el análisis de estos datos en el verano de 1999.

En función de la primera experiencia y análisis de sus resultados, se revisaron algunos contenidos de la enseñanza así como el apunte destinado al tema de la distribución normal, y se repitió el experimento de enseñanza entre Abril y Junio de 2000. En Junio de 2000 se realizó de nuevo la evaluación en el segundo grupo de alumnos mediante el cuestionario y la prueba con ordenador.

3.4.3. POBLACIÓN Y MUESTRA

La población de interés en nuestro trabajo, son los alumnos en los primeros cursos universitarios que cursan una asignatura de estadística en ciencias humanas y sociales (educación, psicología, empresariales), y que eligen esta materia en forma voluntaria (por tanto suponemos que tienen interés y actitudes positivas hacia esta materia). Son alumnos con un conocimiento variado (aunque en general muy escaso) de estadística y que desconocen el uso de paquetes estadísticos.

La población objetivo se redujo a estos mismos estudiantes en la Universidad de Granada, que creemos puede representar bien a otras universidades andaluzas, ya que las características socio económicas de los alumnos y sus calificaciones de acceso a la universidad no presentan grandes diferencias con la de Granada.

Los grupos que participan en la investigación son los alumnos de tres cursos sucesivos de la asignatura de Análisis de Datos y su Didáctica en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, en los cursos 97-98, 98-99 y 99-2000. En el primero de estos cursos participó un grupo de 57 alumnos, con los que se experimentó una primera aproximación a la propuesta de enseñanza, aunque sólo se analizaron los datos tomados en la evaluación final de un total de 12 alumnos. Esta evaluación cuyos resultados han sido publicados, (Tauber y Batanero, 1998, 1999, Batanero, Tauber y Meyer, 1999) sirvió principalmente para poner a punto una primera versión de la secuencia de enseñanza y de la prueba con ordenador.

En el curso 1998-99 han participado 78 alumnos, de los cuales 54 llegaron a realizar el cuestionario escrito y 56 la prueba con ordenador, abandonando los demás el curso por diversos motivos. En el curso 1999-2000 se matricularon 65 alumnos, de los cuales 45 realizaron el cuestionario y 61 la prueba con ordenador.

Queremos hacer explícito nuestro agradecimiento a todos los alumnos participantes su colaboración e interés, su comprensión ante los problemas técnicos en el aula de informática y la masificación de uno de los grupos en el curso 99-2000, así como la buena voluntad para completar las tareas propuestas.

Tabla 3.4.2.2. Temporalización de la investigación

Mes - Año	Determinación del significado de referencia	Diseño de la enseñanza, materiales e instrumentos de evaluación	Implementación de la secuencia	Evaluación	Análisis de datos y redacción de informes
Enero 1998					Primera redacción de objetivos
Junio 1998	Análisis de libros			Prueba piloto con ordenador	Análisis de la prueba piloto
Noviembre 1998		Primer diseño			
Abril 1999			Observación participante		
Mayo 1999				Cuestionario	Análisis de las actividades teóricas y prácticas, cuestionario y prueba con ordenador (grupo 1999)
Junio 1999				Prueba con ordenador	
Noviembre 1999	Revisión según marco teórico	Revisión del primer diseño			
Enero 2000					
Abril 2000					
Mayo 2000			Observación	Cuestionario	Análisis de las actividades teóricas y prácticas, cuestionario y prueba con ordenador (grupo 2000)
Junio 2000				Prueba con ordenador	
Diciembre 2000					Redacción informe final
Enero 2001					
Abril 2001					

3.4.4. INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS

Puesto que el interés de nuestro trabajo se centra en tratar de determinar la correspondencia que existe entre los significados institucionales atribuidos por el profesor y los significados personales dados por el alumno, en el diseño de la investigación se hace necesario utilizar varios instrumentos de recogida de datos que permitan acceder al problema. A continuación, describimos las características generales de cada uno de los instrumentos utilizados, los cuales serán analizados con más extensión en capítulos posteriores.

Un primer instrumento corresponde al método de observación (Fox, 1981) donde los datos pueden tomarse directamente porque son accesibles al investigador. Es el siguiente:

1. *Diario de observación de la investigadora*, el cual fue elaborado durante el desarrollo de la secuencia de enseñanza llevada a cabo tanto en el curso 98-99 como en el 99-2000. El objetivo principal de realizar un diario de observación fue describir la enseñanza, tal como fue llevada a cabo, lo que nos permitió luego, comparar entre el significado institucional local previsto y el efectivamente observado, además de tomar nota de las dificultades planteadas por los alumnos, para poder interpretar mejor los datos recogidos por escrito de las actividades teóricas y los grabados en el ordenador durante las prácticas. No se usó guión estructurado de observación, pero al realizar las observaciones, se tuvieron en cuenta algunas de las recomendaciones dadas por Bisquerra (1989). Por ejemplo, se realizaron los registros en el campo e inmediatamente después de cada clase, se reunieron la investigadora con la profesora para revisar las notas de observación y agregar cualquier hecho que hubiera pasado inadvertido. Las notas de campo se tomaron lo más rápidamente que fue posible, con el fin de cubrir todo lo que sucedía en la clase.

La observación se centró en recolectar todas las preguntas y dudas planteadas por los alumnos con el fin de detectar los elementos de significado que presentaban mayores dificultades. También, se detalló la manera en que se fue desarrollando cada clase, para poder comparar luego con lo que se tenía previsto y de esta manera poder determinar qué elementos de significado se habían trabajado, cuáles se habían dejado de lado o cuáles presentaron más dificultades.

Otro grupo de instrumentos se encuadran en la medición según Fox (1981) como método de recogida de datos. Al tratar de evaluar el significado personal de un alumno o de un grupo de alumnos, hemos de tener en cuenta que es un *constructo inobservable*, por lo que sus características deben ser inferidas de las respuestas de los alumnos. Según Dane (1990) la medición se refiere al caso en que, por medio de las preguntas planteadas a los alumnos, pretendemos obtener una estimación de conocimientos y capacidades de los sujetos, que no son accesibles por simple observación. Son los siguientes:

2. *Informes escritos de actividades teóricas y prácticas*. Como complemento de la observación de clases, se seleccionaron siete actividades del total que habían sido previstas para las clases teóricas, las cuales eran tareas concretas para ser resueltas con papel y lápiz y que fueron resueltas en parejas por los alumnos. Además, se recogieron las actividades programadas en las tres clases de prácticas, las cuales también eran resueltas en parejas con apoyo del ordenador. Éstas últimas eran tareas abiertas de análisis de datos, en las que los alumnos debían producir un informe escrito de los resultados de sus análisis y cuyo estudio se presenta en el Capítulo VI. El objetivo de recoger los informes escritos de ambos tipos de tarea era identificar los elementos de significado que los alumnos aplicaban en la resolución para poder luego comparar con el significado institucional local previsto y observado.

Las tareas teóricas y prácticas tenían el carácter de *muestras de trabajo*, según la terminología de Fox (1981), debido a que para resolverlas se requiere de una combinación de destrezas y conceptos que se necesitan para actuar en una situación determinada. La combinación de destrezas requeridas incluye el conocimiento estadístico y la capacidad argumentativa, y en el caso de las prácticas, habilidad de manejo de software estadístico, habilidad de manejo del procesador de texto. Según este autor, la tarea debe ser un prototipo de una situación real, que en nuestro caso correspondería a la situación de análisis de datos a que estos alumnos pueden enfrentarse en su futura vida profesional

3. Un *cuestionario*, el cual se implementa al final de cada curso, para analizar la

comprensión de los elementos de significado de la distribución normal, que se describe en la sección 7.2. Este instrumento nos permite recoger en una sola sesión, datos relativos a una variedad de conocimientos de los alumnos, aunque con carácter más superficial. Es una prueba de tipo objetivo, ya que para cada pregunta podemos determinar si la respuesta es correcta o no.

Al construir el cuestionario, tomamos como referencia el significado local pretendido que se describe en el Capítulo V, teniendo en cuenta que, posteriormente se usaría el significado local efectivamente observado (Capítulo VI) para tratar de explicar las posibles dificultades de los estudiantes.

El instrumento construido lo encuadramos dentro de la teoría psicométrica *de maestría de dominio* (Thorndike, 1989), ya que podemos considerar que la puntuación total en la prueba está relacionada con el grado de maestría o habilidad de los sujetos en un dominio dado de conocimientos, en este caso, sobre la distribución normal.

Somos conscientes de que esta evaluación del significado personal es parcial, debido a que el tiempo limitado de que disponíamos nos ha hecho seleccionar sólo algunos de los elementos de significado desarrollados en la secuencia de enseñanza, aunque luego se complementa con la prueba con ordenador. Por otro lado, y fijado unos elementos de significado dados, las posibles preguntas y tareas que podemos proponer sobre los mismos son muy numerosas, incluso podríamos decir que potencialmente infinitas, ya que podemos variar el contexto, el formato y otros elementos de los ítems de la prueba. Aceptando estas limitaciones, creemos que este cuestionario nos permite realizar un primer acercamiento en relación con la comprensión de diversos elementos ostensivos, actuativos, intensivos y validativos del significado personal por el uso que se hace de ellos, aunque sea en forma superficial, ya que no podemos acceder a los razonamientos seguidos por los alumnos, a excepción de las preguntas en que se pide argumentación. Sin embargo, esta información es potencialmente útil para el profesor de estadística, debido a la escasez de investigaciones previas sobre el tema.

El cuestionario construido también presenta un valor en sí mismo. Como hemos visto en la revisión bibliográfica, las diversas investigaciones referidas al tema no presentan un instrumento de evaluación sistemático sobre los diferentes elementos del significado de la distribución normal. En consecuencia, ello nos ha obligado a construir nuestro propio instrumento. La construcción de éste se llevó a cabo el curso 1998-99, con anterioridad a que comenzase el experimento de enseñanza y se implementó en los dos cursos.

4. Una *prueba de ensayo para ser resuelta usando el ordenador*, con la que se evalúa un nivel de comprensión de datos de alto nivel (lectura más allá de los datos en la terminología de Curcio, 1989), y capacidad de síntesis y análisis de los alumnos. Debido a las características de la tarea implícita en dicha evaluación, para resolverla es necesario que el alumno haya podido adquirir una cierta capacidad de aplicación y análisis. La tarea propuesta en la evaluación es totalmente abierta, también tiene el carácter de *muestra de trabajo* y el análisis de ella y los resultados se describen en las secciones 8.3 y 8.4.

Al igual que en el cuestionario, al construir este instrumento tomamos como referencia el significado local pretendido que se describe en el Capítulo V, teniendo en cuenta que, posteriormente se usaría el significado local efectivamente observado (Capítulo VI) para tratar de explicar las posibles dificultades de los estudiantes. En los Capítulos VII y VIII se describen los procesos de construcción de ambos instrumentos.

3.4.5. TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE DATOS

Se han empleado diversas técnicas tanto cualitativas como cuantitativas, dependiendo de las fases de la investigación.

En primer lugar, para el estudio de los libros de texto se realiza un análisis de contenido basado en la categorización de los elementos de significado descritos en el marco teórico (Capítulo IV). Los resultados se presentan en forma de tablas y ejemplos prototípicos.

De la misma manera, se realiza un análisis de contenido de la secuencia de enseñanza prevista, presentando los resultados del análisis en tablas en las que se especifican los elementos de significado previstos para cada sesión. Estas tablas permiten realizar la comparación entre el significado institucional de referencia y el significado institucional local previsto (Capítulo V).

Respecto a la observación de la enseñanza, en primer lugar, a partir del diario de observación se preparó un resumen incluyendo la descripción del desarrollo de la clase, en el

que se intercalan, en la secuencia que ocurrieron, las diferentes explicaciones de la profesora e interacciones entre alumnos, o alumnos y profesora, destacando con un código dichas interacciones. Este material, que se incluye como parte del Capítulo VI, se analiza, categorizando los elementos de significado realmente observados. Los resultados de esta categorización se presentan en tablas por medio de las cuales se puede realizar la comparación entre el significado institucional local previsto y el realmente observado.

En el análisis de las tareas realizadas en las clases teóricas y prácticas se hace un análisis de contenido de las producciones escritas de los alumnos, del cual se definen variables estadísticas que recogen el uso correcto o incorrecto de los diversos elementos de significado para cada pareja o grupo de alumno. A partir de estas variables se presentan tablas de frecuencia de aparición de los diferentes elementos aplicados en forma correcta e incorrecta en cada uno de los dos cursos (Capítulo VI). Ello permite, analizar la evolución del aprendizaje, estudiar la dificultad de los diferentes elementos y comparar el desarrollo de los dos cursos consecutivos.

En cuanto al cuestionario se han realizado diversos análisis. En primer lugar, se verificó la validez de contenido por medio de un análisis conceptual previo, con lo cual se determinaron los elementos de significado cubiertos por cada uno de los ítems del cuestionario (Sección 7.2.4).

Una vez aplicado este instrumento, se calcularon los índices de dificultad y de discriminación de cada ítem (65 ítems) en el total de alumnos, así como resultados globales sobre fiabilidad y generalizabilidad del cuestionario (Brennan, 1983; Feldt y Brennan, 1991). Luego se realiza un estudio descriptivo de las diferencias de rendimiento en cada uno de los ítems, y se efectúa un contraste T de diferencia de medias de las puntuaciones total entre cursos y entre tipos de alumnos.

Realizamos también un análisis cluster de estos mismos ítems con el fin de observar las agrupaciones de respuestas correctas/incorrectas en los diversos ítems y de ello deducimos la interrelación entre una serie de elementos de significado, que, en líneas generales ha coincidido con lo esperado a nivel teórico.

En relación con la prueba de ensayo, como primer paso se ha realizado un análisis a priori categorizando los elementos de significado previstos institucionalmente. Los datos obtenidos luego de aplicar la prueba se han sometido a un proceso de varios pasos:

- Se realizó una primera lectura de los informes entregados por los alumnos, realizándose a partir de ella y del análisis previo, la definición de diversas variables estadísticas, que corresponden a los elementos de significado, que potencialmente era posible aplicar en cada pregunta.
- Se codificaron los datos de acuerdo a tres categorías para cada una de las variables: elemento aplicado en forma correcta, incorrecta y no aplicado.
- A partir de las tablas de datos obtenidas, se presentan tablas de frecuencias de los distintos elementos aplicados correcta e incorrectamente por el total de alumnos, discriminando los elementos de significado relacionados con la simetría, los específicos de la distribución normal y los elementos relacionados con ella. Por medio de un estudio descriptivo, y del estudio de las diferencias entre el número de elementos (ostensivos, actuativos, intensivos y validativos) correcta e incorrectamente aplicados, realizamos la comparación entre el significado institucional local previsto y el personal construido por los alumnos del grupo.
- Se analizan también las diferencias encontradas entre los cursos y los dos tipos de alumnos en cuanto al número de elementos y los elementos específicos aplicados correcta e incorrectamente siguiendo la misma técnica.

CAPÍTULO IV

DETERMINACIÓN DEL SIGNIFICADO DE REFERENCIA A PARTIR DEL ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

4.1. INTRODUCCIÓN

En esta sección analizamos el significado institucional de la distribución normal presentado en los libros de texto universitarios, dedicados a nuestro nivel de enseñanza y tipo de alumno, para cumplir nuestro primer objetivo específico. Nuestro objetivo es identificar aquellos elementos de significado más prototípicos, tanto intensivos como extensivos, actuativos, validativos y ostensivos, en la distribución normal, que aparecen en algunos textos utilizados en cursos introductorios de estadística para estudiantes de especialidades humanas y sociales. Tomaremos este significado como *significado institucional de referencia*, que servirá de base para la selección de los elementos de significado que consideraremos acordes con nuestro enfoque para la construcción de una secuencia de enseñanza.

Aunque los libros analizados presentan, en primer lugar, la definición y propiedades de la distribución normal y más adelante problemas de aplicación, siguiendo el esquema teoría - práctica, en las secciones que siguen describiremos el significado, organizado de acuerdo a nuestro marco teórico.

4.2. METODOLOGÍA SEGUIDA EN LA DETERMINACIÓN DEL SIGNIFICADO DE REFERENCIA

Para realizar el análisis, hemos tomado una muestra de textos de estadística aplicada dirigidos a estudiantes con similares características a los que participan en nuestro curso de análisis de datos, es decir, estudiantes que poseen una base poco sólida en matemáticas y especialmente en estadística.

La muestra de libros de texto se ha elegido en base a los siguientes criterios:

- El prestigio de su autor dentro de la estadística y su experiencia docente en el curso introductorio destinado a estudiantes similares a los del estudio. Este es el caso de Johnson, Moore, Peña, Ríos y Spiegel.
- El número de ediciones del libro o el hecho de que haya sido traducido a otros idiomas (Carro-Ramos, Runyon y Haber; Walpole y Myers).
- El resto de libros se incluyen por tener un enfoque más actual (Quandling, Graham) o por estar destinados a alumnos con base matemática escasa (Valeri).

En concreto los libros y páginas analizadas han sido los siguientes:

1. Carro Ramos, J. (1994). *Psicoestadística descriptiva*. Salamanca: Amarú (pp. 274 –287).
2. Graham, A. (1994). *Statistics*. Lincolnwood, IL: NTC Publishing Group (pp. 231 – 240).
3. Miller, I., Freund, J. y Johnson, R. (1992). *Probabilidad y estadística para ingenieros*. Cuarta edición. México: Prentice Hall (pp. 137 – 149).
4. Moore, D. S. (1995). *The basic practice of statistics*. Nueva York: Freeman (pp. 54-81).
5. Peña, D. y Romo, J. (1997). *Introducción a la estadística para las ciencias sociales*. Madrid: Mc Graw Hill (pp. 248 – 261).
6. Quandling, D. (1987). *Statistics and Probability*. New York: Cambridge University Press (pp. 194 – 215)
7. Ríos, S. (1991). *Iniciación estadística*. Séptima edición. Madrid: Paraninfo (pp. 86 – 97).
8. Runyon, R. y Haber, A. (1984). *Estadística para las ciencias sociales*. México: Fondo

- Educativo Interamericano (pp. 107–121).
9. Spiegel, M. (1991). *Estadística*. Segunda edición. Madrid: Mc Graw Hill (pp. 159–185).
 10. Valeri, E. (1992). *Estadística para no estadísticos*. Barcelona: EADA (pp. 70–82).
 11. Walpole, R. y Myers, R. (1992). *Probabilidad y estadística*. Cuarta edición México: Mc Millan, (pp. 143 – 161)

En estos libros hemos analizado los capítulos referidos al tema de la distribución normal, así como los dedicados a temas posteriores en que se use dicha distribución. Se ha llevado a cabo un análisis de contenido realizando los siguientes pasos:

- Se ha realizado una primera lectura, clasificando el contenido en definiciones y propiedades: específicas de la distribución normal y relacionadas; tipos de argumentaciones o validaciones; tipos de representaciones: gráficas, simbólicas y numéricas; tipos de problemas o ejercicios; contextos de aplicación.
- Se hace una clasificación y síntesis de los mismos ubicándolos en cada una de las categorías definidas en el marco teórico. De esta manera se eligieron los ejemplos prototípicos que mostraremos en las secciones que siguen, con objeto de clarificar el significado de referencia determinado en nuestro análisis.
- Por último, se organiza la información en las tablas que se muestran al final del capítulo, con el fin de tener una información resumida que nos permitirá realizar una comparación posterior con los significados presentados en los capítulos.

En los ejemplos que se muestran a lo largo del capítulo y en el análisis que hacemos de las diferentes categorías de elementos de significado, se puede también observar cómo los diferentes elementos de significado se ponen en relación.

4.3. ELEMENTOS EXTENSIVOS: PROBLEMAS Y CONTEXTOS DE LOS QUE SURGE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

4.3.1. PROBLEMAS

De los libros de texto hemos extraído los siguientes tipos diferenciados de problemas, que en su conjunto definen el campo de problemas relativos a la distribución normal en estos textos y que nos permiten determinar el significado de referencia de nuestro trabajo en relación con los elementos extensivos. Observamos en el análisis como la distribución normal (elemento intensivo) surge al tratar de resolver (elemento actuario) un cierto tipo de problemas (elemento extensivo) y en dicha resolución se ponen también en juego una serie de elementos intensivos que dependen del problema dado.

P1. Ajuste de un modelo a la distribución de datos reales en campos tales como la psicología, biometría, o teoría de errores.

Un primer tipo de problemas de donde surge la idea de distribución normal, y en general la de distribución y la de variable aleatoria, aparece al generalizar los conceptos de *polígono, diagrama de frecuencia y variable estadística*. Generalmente, los datos se obtienen de una *muestra*, que se supone representativa o al menos aleatoriamente extraída de una *población*. También se considera que la variable estudiada es *cuantitativa y continua*, por lo que teóricamente puede tomar todos los valores dentro de un intervalo dado (potencialmente infinito). Si se imagina que se aumenta indefinidamente el número de observaciones, y se piensa en la posibilidad de que ciertos valores de la variable aparezcan en el total de la población, llegamos a la idea de *variable aleatoria*. Al plantear el problema de encontrar una *función que aproxime* al polígono de frecuencias relativas de dicha variable aleatoria en la población y aumentar indefinidamente el número de intervalos, surge la idea de *función de densidad* y en algunos casos surge la curva normal como mejor aproximación a los datos. La generalización de la idea de *diagrama de frecuencias acumuladas* suele conducir a la de *función de distribución*.

El siguiente es un ejemplo típico de esta clase de problemas:

Se midió la actividad de una enzima rígida en la sangre humana en 100 adultos sanos (Street y Close, en Nature, Vol. 179), y se obtuvieron los siguientes resultados:

Actividad	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Frecuencia	3	12	16	19	16	12	11	3	5	1	2

¿Se puede encontrar un modelo que pueda servir como medida de comparación en observaciones con distintas personas adultas? (Quadling, 1987, pp. 210).

P2. La distribución normal como modelo aproximado de las distribuciones de variables discretas.

Una segunda clase de problemas es el estudio de la distribución normal como *modelo* que aproxima algunas *distribuciones de variables discretas*, por ejemplo, cuando se desea estudiar el número de caras que se obtiene al lanzar una moneda un número dado de veces. Si se incrementa el número de veces que observamos el fenómeno, se podrá observar cómo el diagrama de barras se va acercando cada vez más a la curva de densidad representativa de la distribución normal. La aproximación de una variable discreta por una continua puede realizarse si se sustituye el diagrama de barras por el histograma de frecuencias cuyos intervalos tienen base de amplitud unitaria. La corrección por continuidad plantea una dificultad especial debido a que, generalmente, el alumno pierde de vista que el problema original está referido a una distribución discreta (Hawkins, Jolliffe y Glickman, 1992).

Existen tablas para el cálculo de probabilidades de variables discretas, pero dichas tablas no poseen valores para tamaños de muestra muy grandes. Por lo tanto, se recurre a la aproximación por medio de modelos continuos para calcular probabilidades en esos casos en los que no se disponga de tablas. A continuación reproducimos un ejemplo de problemas que se plantean en los libros de texto en relación con este tipo de problemas:

Supongamos que sea 0,25 la probabilidad de obtener una pieza defectuosa en la producción de una máquina en condiciones estables. Si se toma una muestra de 1000 piezas, ¿cuál es la probabilidad de que contenga a lo sumo 15 defectuosas? (Ríos, S., 1991, pp. 93).

P3. Obtención de la distribución en el muestreo de la media de una distribución normal (distribución exacta).

En inferencia se desea obtener información acerca de determinadas variables de una población específica. A veces, pueden estudiarse todos los individuos de esa población por medio de un *censo*, pero como por lo general este procedimiento es lento y poco económico, se recurre a tomar una *muestra* de la población. El interés del estudio es estimar ciertos *parámetros* en la población, como pueden ser la media o la proporción. La estimación se produce a partir del *estadístico* calculado en una muestra tomada de la población.

Cuando se compara un *parámetro* con su correspondiente *estadístico* se ve que el primero es un valor constante pero desconocido, que se calcula en el total de la población, mientras que el *estadístico* es un valor conocido una vez que se toma la muestra, pero puede variar en una muestra diferente (Vallecillos, 1994). Es esencial, en el proceso de muestreo, determinar la distribución muestral del estadístico. Si se escoge una muestra aleatoria de n elementos que provienen de una población normal $N(\mu, \sigma)$, la media de la muestra sigue una distribución

normal $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y la distribución en el muestreo de la media presenta las siguientes

características:

- La media de las medias muestrales es igual a la media de la población de la cual provienen las muestras;
- la distribución de las medias muestrales se vuelve cada vez menos dispersa a medida que el tamaño de la muestra aumenta;
- la distribución de las medias muestrales será también normal.

A continuación reproducimos un ejemplo típico de esta clase de problemas:

Las alturas de 3000 estudiantes varones de una universidad están normalmente distribuidas con media 68 plg y desviación típica 3 plg. Si se toman 80 muestras de 25 estudiantes cada una, ¿cuáles serán la media y la desviación típica esperadas de la resultante distribución de muestreo de medias?. ¿En cuántas muestras esperaríamos encontrar una media entre 66,8 y 68,3 plg? (Spiegel, M., 1991, pp. 193).

P4. Obtención de distribuciones en el muestreo de la media y otros parámetros de poblaciones no necesariamente normales para muestras grandes (distribuciones asintóticas).

En la mayoría de los casos, la población desde la que se realiza el muestreo no es normal. Sin embargo, la media muestral tiende al valor de la media poblacional, por ser un estimador insesgado. Además, el teorema central del límite asegura que la precisión de la aproximación mejora al crecer el tamaño de la muestra. Además se estudia la distribución de otros parámetros como por ejemplo, la proporción φ con que en una población se presenta una cierta

característica. Para muestras suficientemente grandes la proporción p en la muestra sigue una distribución aproximadamente normal $N(\varphi, \sqrt{\frac{\varphi(1-\varphi)}{n}})$. El siguiente es un ejemplo de este tipo de problemas:

Se ha encontrado que el 2% de las piezas fabricadas en una cierta máquina son defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un envío de 400 piezas el 3% o más sean defectuosas? (Spiegel, M., 1991, pp. 198).

P5. Estimación por intervalos de confianza

En los dos tipos de problemas anteriores, la finalidad primordial era predecir qué valor se obtendría para un estadístico si se conoce el valor del parámetro. Pero en la práctica estadística, lo que realmente interesa es estimar el valor del parámetro en la población cuando se conoce el valor del estadístico en la muestra.

Conocida la distribución muestral del estadístico, es posible la obtención de intervalos de confianza para el parámetro de interés. Por ejemplo, se sabe que en una distribución normal el 95% de los casos se encuentran a una distancia 2σ de la media. Si μ es la media de una población normal y σ su desviación típica, la media muestral \bar{x} sigue una distribución aproximadamente normal $N(\mu; \sigma / \sqrt{n})$, siendo n el tamaño de la muestra. Por ello, en el 95% de las muestras la media muestral \bar{x} estará a una distancia $2\sigma/\sqrt{n}$ de la verdadera media μ de la población. Y recíprocamente, se puede deducir que en el 95% de las muestras la media μ en la población estará dentro del intervalo $\bar{x} \pm 2\sigma/\sqrt{n}$, obteniendo el intervalo de confianza del 95 %:

$$P(\bar{x} - 2\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + 2\sigma/\sqrt{n}) = 0,95 \text{ (Intervalo de confianza del 95%)}$$

A continuación se expone un ejemplo de aplicación de intervalos de confianza para la proporción:

Se espera que una elección entre dos candidatos sea muy reñida. ¿Cuál es el mínimo número de votantes a sondear si se quiere tener un 99 % de confianza sobre la decisión a favor de uno u otro?

P6. Contraste de hipótesis

En la práctica, se deben tomar decisiones relativas a una población basándonos en la información proveniente de muestras. Si se supone que una hipótesis sobre un parámetro en la población es cierta, pero se observa que los resultados obtenidos en una muestra aleatoria difieren notablemente de los esperados bajo tal hipótesis, entonces se debería rechazarla. Los procedimientos que se utilizan para determinar si las muestras observadas difieren significativamente de los resultados esperados y que ayudan a decidir si se acepta o se rechaza una hipótesis, son los *contrastes de hipótesis*.

Como en la estimación por intervalos, en los contrastes de hipótesis se puede trabajar con distintos estadísticos y con diversos tipos de distribuciones, pero, para grandes muestras, las distribuciones en el muestreo de muchos estadísticos son distribuciones normales o aproximadamente normales. A continuación transcribimos un ejemplo de aplicación de contraste de hipótesis para la media de una muestra:

Un profesor hace una prueba en la que la media es 78 y su desviación 7, de acuerdo con su experiencia de años anteriores. Su clase actual de 22 alumnos obtiene una nota media de 82. ¿Es correcto admitir que se trata de una clase sobresaliente? (Utilice $\alpha = 0,01$) (Runyon y Haber, 1984, pp. 238).

4.3.2. CONTEXTOS EN QUE SE PRESENTAN ESTOS PROBLEMAS

Los contextos principales en los que se aplica la distribución normal en los textos revisados, se presentan en la Tabla 4.3.2.1 y se podrían resumir en los siguientes tipos: físicos, industriales, antropométricos, errores de medidas, biológicos y psicológicos.

La no utilización de contextos podría conducir al alumno a pensar que la distribución normal es sólo un concepto abstracto. Como afirma Wilensky (1997), esto puede implicar la aplicación mecánica del concepto, sin comprenderse significativamente por qué se debe aplicar en determinados casos, y que se está trabajando con un modelo, el cual posee sus limitaciones. A pesar de esta importancia, son pocos los libros revisados que mencionan dichos contextos de

aplicación.

Tabla 4.3.2.1. Contextos citados en los libros

Contextos	Libros en los que se encuentran
<i>Mediciones físicas en experimentos meteorológicos</i> <i>Mediciones sobre partes manufacturadas</i> <i>Errores en las mediciones científicas</i>	Walpole y Myers (1992) Quadling (1987) Graham (1994)
<i>Puntuaciones de tests</i> <i>Medidas repetidas de la misma cantidad</i> <i>Características de poblaciones biológicas</i>	Moore (1995)
<i>Pesos de una muestra de adultos</i> <i>Errores en partes manufacturadas</i>	Quadling (1987)

4.4. ELEMENTOS OSTENSIVOS: REPRESENTACIONES USADAS

En los textos considerados, hemos encontrado las siguientes representaciones de la distribución normal y de conceptos relacionados con ella, de diversos tipos, tanto numéricas, como gráficas y simbólicas.

Representaciones gráficas

Específicas de la distribución normal: Hemos encontrado curvas de densidad, representación del área bajo la curva normal para los valores menores o mayores que un determinado valor o para el área bajo la curva entre dos valores, representación sobre la curva normal de los intervalos centrales y representación de curvas de densidad normales superpuestas.

Relacionadas con la distribución normal: Para representar los conjuntos de datos empíricos, hemos encontrado histogramas, polígonos de frecuencia y gráficos de la caja.

Representaciones numéricas

Específicas de la distribución normal: las más utilizadas son las tablas de probabilidades normales y tablas de valores críticos.

Relacionadas con la distribución normal: hemos encontrado tablas de datos, tablas de frecuencias y gráficos del tronco.

Representaciones simbólicas específicas de la distribución normal

Ecuación o fórmula de la distribución normal: La expresión que hemos encontrado en todos los libros que expresan esta ecuación es la siguiente:

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

Ecuación o fórmula de la distribución normal típica hay más variedad de expresiones, como por ejemplo:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

en las cuales con z se refiere a los valores tipificados correspondientes a una distribución normal con media cero y desviación típica igual a 1.

Expresiones que refieren a la distribución normal: Hemos encontrado diversas notaciones a la hora de referirse a la distribución normal, a saber:

$$n(x; \mu, \sigma), N(\mu, \sigma^2), N(\mu, \sigma), f(x; \mu, \sigma^2), N(\mu_x, \sigma_x)$$

En todas ellas μ representa la media de la distribución normal (representada por N o n) y σ es la desviación típica de dicha distribución. En algunos casos, en vez de aparecer la desviación típica, aparece la varianza que se representa por σ^2 . En el caso siguiente la variable y es combinación lineal de la variable x, es decir, $y = a x + b$, en consecuencia la distribución normal resultante es $N(a \mu_x + b, |a| \sigma_x)$.

Fórmula de tipificación: En todos los libros hemos encontrado mencionada en varias oportunidades la expresión que permite la tipificación de valores. La forma más común es: $z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, donde z es el valor tipificado correspondiente al valor x de la variable, X es el valor de la variable real para el cual se desea hallar una determinada probabilidad, μ es la media de la distribución y σ es la desviación típica.

Por otro lado, cuando se conoce el valor tipificado y se desea conocer el valor correspondiente de la variable, se utiliza la siguiente expresión:

$$X = \mu + z \sigma$$

Expresiones que refieren a la distribución normal típica: Para expresar que una distribución normal es típica se lo hace del siguiente modo: $N(0,1)$, lo cual significa que la media es 0 y la desviación típica es 1.

Formas de expresar la probabilidad en un intervalo: hemos encontrado diversas maneras de simbolizar la probabilidad en un intervalo cualquiera. Las siguientes son algunas de estas formas:

- Probabilidad para valores menores que uno dado: $P(Z < b)$;
- Probabilidad para valores mayores que uno dado: $P(Z > a) = 1 - P(Z < a)$;
- Probabilidad de un intervalo comprendido entre dos valores: en este ítem es donde hemos encontrado mayor variedad. Por ejemplo: $P(a < Z < b)$, $Pr\{a < X < b\}$ con $a < b$, $P(a < X < b)$, en los tres casos las expresiones se refieren a la probabilidad en un intervalo (a, b) , sólo que en el primer caso se está refiriendo a una variable normal tipificada Z y, en los otros dos casos a una variable normal cualquiera X ;
- $P(x_1 < X < x_2)$, este caso es una variación del anterior pero la finalidad también es la de expresar la probabilidad entre dos valores.

Expresiones para realizar el cálculo de probabilidades: Se presentan diversas simbolizaciones del cálculo de probabilidades en un intervalo.

- $P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$, esta expresión generalmente nos remite a la representación gráfica del área bajo la curva entre dos valores. Además se debe tener en cuenta que en este caso la expresión se está refiriendo a una variable normal tipificada, por lo cual se da esa expresión debido a que por lo general, las tablas de la normal típica dan la probabilidad correspondiente a todos aquellos valores menores que uno dado.
- $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$, en este caso se está refiriendo a una variable cualquiera X y al expresar $F(x)$ nos remite a una función de distribución.

$$\bullet P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} n(x; \mu, \sigma) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-1/2[(x-\mu)/\sigma]^2} dx,$$

aquí se da la expresión de cálculo de la probabilidad entre dos valores para una variable normal, remitiéndonos a la utilización de integrales.

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-1/2[(x-\mu)/\sigma]^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2/2} dz = \int_{z_1}^{z_2} n(z; 0, 1) dz = P(z_1 < Z < z_2)$$

En este caso la expresión propone el mismo cálculo de probabilidad que la anterior, sólo que en ésta se plantea también la expresión de tipificación por medio de integrales.

Representaciones simbólicas de conceptos relacionados con la distribución normal

Representaciones de un intervalo. Se presentan diversas expresiones, por ejemplo:

- $X = \bar{x} \pm k.s$, representa un intervalo en el que \bar{x} es la media de la muestra y s es la desviación típica. Esta expresión es también usada en otros temas de estadística descriptiva;
- $X = \mu \pm \sigma$, $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$, ambas expresiones están representando al mismo intervalo en el cual μ es la media de la población y σ es la desviación típica;
- $I(95\%) = \mu \pm 2\sigma$, la expresión se refiere al intervalo central específico del 95%;
- $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$, se hace referencia a un intervalo central para una distribución cualquiera.

Representaciones de los parámetros y estadísticos. Generalmente se los representa por medio de los siguientes símbolos, que ya han sido introducidos en temas anteriores: Media poblacional: μ , media muestral: \bar{x} , media de una distribución que es combinación lineal de otra variable: $a\mu_x + b$; desviación típica poblacional: σ , desviación típica muestral: s ; nivel de confianza: α ; coeficiente de sesgo: α_3 , coeficiente de curtosis: α_4 .

Representación simbólica de los axiomas de probabilidad: En los libros en los que se menciona a los axiomas de probabilidad, se plantean simbólicamente las condiciones que debe cumplir una distribución de probabilidad para ser considerada como tal y se expresan de la siguiente forma:

$$p(x_i) \geq 0 \text{ para todo } x_i \text{ o } f(x) \geq 0;$$

$$\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1 ; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

4.5. ELEMENTOS ACTUATIVOS: PRÁCTICAS ESPECÍFICAS EN LA RESOLUCIÓN DE LOS DIVERSOS TIPOS DE PROBLEMAS

La mayor parte de los libros presentan técnicas concretas para resolver los problemas planteados, que son objeto de enseñanza en forma explícita o implícita. De nuevo en estos elementos actuativos se ponen en relación diferentes elementos ostensivos e intensivos con los problemas (elementos extensivos) en que se aplican.

A1. Estudio descriptivo de datos para ajustar una curva

Al introducir la distribución normal, tanto en la teoría como en la práctica, algunos de los libros plantean el problema (P1) de sustituir la distribución empírica y el histograma de frecuencias por una función matemática y su correspondiente gráfica. La distribución normal tiene una forma fácilmente reconocible, y la mayoría de los libros de texto revisados introducen la ecuación de la función de densidad normal y las propiedades de su gráfica.

Sin embargo, tanto en la enseñanza como en las aplicaciones, los alumnos o investigadores deberán decidir si la distribución normal es o no adecuada para su conjunto de datos. Esta decisión se basará en un estudio descriptivo que incluye la representación gráfica de los datos, comprobación de simetría y valores típicos, cálculo de media y desviación típica, etc.

No todos los libros incluyen explícitamente este tipo de elemento actuativo en el tema de la distribución normal, aunque el estudio descriptivo anterior al tema implícitamente está dirigido a entrenar al alumno en este tipo de prácticas y orientado a este fin. Reproducimos un ejemplo en que explícitamente se presenta este estudio y en el que se hace referencia a diferentes propiedades (elementos intensivos) de la distribución.

Las Distribuciones Normales. Ahora tenemos un equipo de herramientas gráficas y numéricas para describir distribuciones. Además, tenemos una clara estrategia para explorar datos sobre una variable cuantitativa simple:

- Comenzar con un gráfico, generalmente un histograma o un diagrama de tallos y hojas.
- Mirar el modelo completo y buscar desviaciones tales como valores alejados.
- Elegir un resumen numérico para describir el centro y la dispersión. (Moore, 1995, pp. 54-56).

Una variante de este tipo de elemento actuativo es usar el ordenador para hacer el estudio. Éste deja de lado el uso de las tablas de la distribución normal tipificada, e implica trabajar con la distribución de datos reales. Otra propiedad del uso del ordenador es que se puede comprobar fácilmente la regla de los intervalos centrales, para ayudar a confirmar o a rechazar el ajuste de la distribución real por medio de la normal. Un ejemplo de aplicación de programas estadísticos en la resolución de problemas relacionados con la normal es el siguiente:

Medidas repetidas de la misma cantidad física generalmente tienen una distribución que se aproxima a una normal. Debajo se muestran 28 medidas de la densidad de la Tierra, hechas por Henry Cavendish en 1798. (Los datos dan la densidad de la Tierra como un múltiplo de la densidad del agua).

5,50 5,61 4,88 5,07 5,26 5,55 5,36 5,29 5,58 5,65 5,57 5,53 5,62 5,29
5,44 5,34 5,79 5,10 5,27 5,39 5,42 5,47 5,63 5,34 5,46 5,30 5,75 5,68

Si se realiza un diagrama de tronco por medio de un paquete estadístico mostraría que los datos son razonablemente simétricos. Realice el diagrama y verifique esta afirmación.

Ahora compruebe cómo se ajustan estos datos a la regla 68 - 95 - 99,7. Encuentre la media \bar{x} y la

desviación s , luego cuenta el número de observaciones que caen entre $\bar{x} - s$ y $\bar{x} + s$, entre $\bar{x} - 2s$ y $\bar{x} + 2s$, y entre $\bar{x} - 3s$ y $\bar{x} + 3s$. Compare los porcentajes de las 29 observaciones en cada uno de estos intervalos con la regla 68 - 95 - 99,7. (Moore, 1995, pp. 73).

A2. Tipificación

En todos los libros revisados, el cálculo de probabilidades en los problemas, se realiza por medio de la distribución normal típica, con excepción de un solo libro en que plantea brevemente la resolución con ayuda de un paquete estadístico. Hay que hacer notar que la tipificación se realiza sólo por fines prácticos, para que no haya necesidad de tener que manejar infinidad de tablas, pero que generalmente, los resultados que se obtienen no corresponden a una distribución normal típica. El siguiente es un ejemplo:

La transformación lineal más importante consiste en tipificar la variable, es decir, hacer la siguiente transformación: $Z = (x - \mu) / \sigma$ que tiene una distribución normal tipificada estándar $N(0, 1)$. Las probabilidades para una variable z con distribución $N(0, 1)$ pueden hallarse en las tablas de la normal, que proporcionan la probabilidad de que la variable tome un valor menor que cierta cantidad, es decir, $P(z < b)$ (Peña y Romo, 1997, pp. 251).

Igualmente, una vez calculada la probabilidad de interés o una vez hallado un valor crítico para la distribución normal tipificada es preciso deshacer el cambio de variable anterior, mediante la operación inversa a la tipificación (Moore, 1995, pp. 68 - 73):

En vez de querer encontrar una proporción, puede suceder que queramos conocer el valor observado con una proporción dada de las observaciones por arriba o debajo de ese valor. Para hacer esto, usamos la tabla de la normal típica a la inversa, es decir, buscamos la proporción dada en el cuerpo de la tabla, y leemos el correspondiente valor de z en la columna izquierda y en la fila superior, luego se “desestandardiza” para obtener el valor observado. Para “desestandarizar” utilizamos la fórmula de tipificación pero despejando X , de la siguiente forma: $X = \mu + z \sigma$

A3. Cálculo de probabilidades y valores críticos a partir de las tablas de la distribución normal tipificada

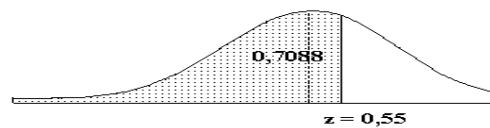
Muchos libros comienzan con ejercicios en los que se practica la utilización de las tablas de la normal en distintos casos, y luego se pasa a la resolución de problemas. En cada uno de los seis campos de problemas que hemos descrito en la sección 4.3, podemos encontrar tareas concretas que permiten ejercitarse el cálculo de probabilidades asociados a la distribución normal, en el que se utilizan diversas técnicas de cálculo, dependiendo del tipo de probabilidad pedida.

Se plantean ciertas reglas generales para el cálculo de probabilidades en diversas situaciones relacionadas con la posición de los valores con respecto a la curva. La curva normal de probabilidad permite resolver esencialmente dos tipos de problemas de uso común en estadística:

1. Dados uno o dos valores de la variable, calcular la probabilidad de que la variable tome valores en intervalos determinados por ese o esos puntos (cálculo de probabilidades);
2. Dada una probabilidad, encontrar ciertos intervalos tales que la variable tome sus valores con dicha probabilidad (cálculo de valores críticos).

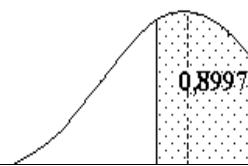
A continuación describimos los diversos casos que se consideran en los libros en este tipo de problemas para el caso 1 (cálculo de probabilidades) suponiendo siempre que se trabaja con valores tipificados. A cada uno de estos casos corresponde otro semejante de cálculo de valores críticos en que el problema se plantea a la inversa: dada la probabilidad, calcular uno o varios extremos de los intervalos a los que corresponde la misma.

Cálculo de probabilidades de obtener un valor $X < a$: Este es el valor dado habitualmente en las tablas de la distribución, de modo que para realizar el cálculo, sólo se debe buscar directamente la probabilidad pedida en la tabla, una vez que se ha tipificado la variable. En la interpretación de los resultados puede servir de gran ayuda la utilización de la curva para ubicar el valor y el área que se necesita calcular. El siguiente ejemplo, tomado de Carro Ramos (1994, pp. 276-283), muestra cómo se realiza este cálculo:

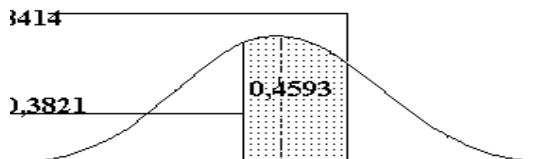


Área bajo el punto $z = 0,55$ (ver figura). De acuerdo con la tabla de la normal, el área debajo del punto $z = 0,55$ es de 0,7088.

Cálculo de probabilidades de $X > a$: Este valor no se obtiene en forma directa de la tabla sino que se busca la probabilidad correspondiente a z o a los menores que él, y luego se realiza la diferencia entre 1 y el valor encontrado. Por ejemplo, para obtener el valor que aparece en la figura siguiente (Área por encima del valor $z = -1,28$) se busca el valor de la probabilidad correspondiente a: $z = -1,28$ que es 0,1003 y se hace la diferencia: $1 - 0,1003$ para obtener el área solicitada. Un problema en el que se debe realizar este tipo de práctica es el siguiente:



El nivel de colesterol en sangre es importante porque un nivel alto puede incrementar el riesgo de ataque al corazón. La distribución del nivel de colesterol en sangre en una población de personas de la misma edad y sexo es aproximadamente normal. Para niños de 14 años, la media es $\mu = 170$ mg/dl de colesterol por dl de sangre (mg/dl) y la desviación típica $\sigma = 30$ mg/dl. Niveles cercanos a 240 mg/dl pueden requerir atención médica. ¿Qué porcentaje de niños tienen más de 240 mg/dl de colesterol? (Moore, 1995, pp. 63).



Cálculo de probabilidades en un intervalo a $< X < b$: En este caso, se deberán buscar los valores correspondientes a z menor o igual que a y menor o igual que b y hallar su diferencia.

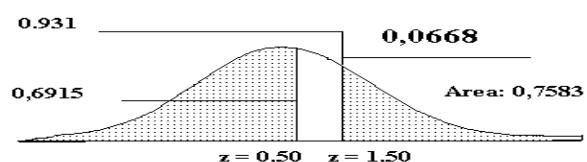
Siguiendo el ejemplo de la figura: $P(0,30 < Z < 1) = 0,8414 - 0,3821 = 0,4593$. Un ejemplo de ejercicios que se presentan en los libros, se transcribe a continuación:

Si la cantidad de radiación cósmica a la que una persona está expuesta mientras viaja en avión por la República Mexicana es una variable aleatoria con distribución normal con $\mu = 4,35$ mrem y $\sigma = 0,59$ mrem, calcúlese las probabilidades de que la cantidad de radiación cósmica a la cual un viajero queda expuesto en tal vuelo esté entre 4 y 5 mrem. (Miller, Freund y Johnson, 1992, pp. 148).

Cálculo de probabilidades para la unión de dos intervalos de la forma $X < a$ o $X > b$: En el ejemplo de la figura siguiente,

$P(Z > 1,50) = 1 - 0,931 = 0,0668$. Por lo tanto el área existente fuera del intervalo $z = 0,50$ a $z = 1,50$ será: $P(Z < 0,50) + P(Z > 1,50) = 0,6915 + 0,0668 = 0,7583$.

Un ejemplo es el problema siguiente:



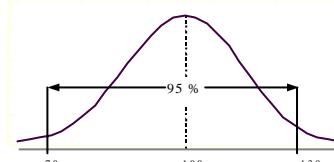
En un proceso industrial el diámetro de un balero es una importante parte componente. El comprador establece en sus especificaciones que el diámetro debe ser $3 \pm 0,01$ cm. La implicación es que no se acepta ningún balero que se salga de esta especificación. Se sabe que en el proceso, el diámetro de un balero tiene una distribución normal con una media de 3 y una desviación estándar de 0,005. En promedio, ¿cuántos baleros fabricados se descartarán? (Walpole, R. y Myers, R., 1992, pp. 155).

A4. Cálculo de los límites del intervalo central que contiene una proporción dada de observaciones.

En este caso, se conoce la proporción correspondiente a un intervalo central y se desea obtener los valores límites de ese intervalo, como en el ejemplo que hemos extraído de Graham (1994, pp. 239 - 240):

El intervalo del 95% se refiere al rango de valores entre los que cae el 95% promedio de la distribución. ¿Cuál es ese rango para esta distribución de CI?

Usted puede notar dos cosas sobre esta distribución. Primero, la media es 100 y segundo, que es más o menos simétrica. Esto sugiere que aproximadamente la mitad de los CI, o sea el 50 %, podrán estar a ambos lados de 100. Luego, encontrar el 95% promedio de una distribución involucra cortar dos colas de 2 ½% de cada lado. Esto podría sugerir el rango entre 70 y 130, como se puede observar en la gráfica.



A5. Comparación de puntuaciones diversas o comparación con una puntuación promedio

Algunos textos plantean la necesidad de comparar dos o más distribuciones de una misma variable que poseen media y desviación típica diferentes. Al no trabajar con las mismas unidades no hay ninguna posibilidad de comparación, y aparece la necesidad de buscar un modelo que pueda ayudarnos a solucionar este tipo de problemas, lo cual da lugar a la tipificación. A continuación reproducimos un ejemplo:

Las calificaciones de Pedro y Juan mediante tres tests han sido las siguientes:

	TEST A	TEST B	TEST C	MEDIA
Pedro	53	70	84	69
Juan	69	80	58	69
Media de la clase	65	74	71	
Desviación típica de la clase	4	6	12	

En promedio, ¿cuál de los dos alumnos tiene un mejor rendimiento? (Ríos, 1991, pp. 97).

4.6. ELEMENTOS INTENSIVOS: DEFINICIÓN y PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

En los problemas y prácticas que hemos descrito aparecen diversas propiedades de la distribución normal que contribuyen progresivamente a caracterizarla, así como a identificar las relaciones con otros conceptos que se introducen previamente, es decir a poner en correspondencia la idea de distribución normal con otros elementos intensivos. Los elementos intensivos se suelen institucionalizar en los textos y también en algunos casos se justifican mediante prácticas argumentativas, que analizamos posteriormente.

4.6.1. DEFINICIÓN

En esta sección analizamos las diferentes definiciones de la distribución normal y las diferentes propiedades clasificadas en diversos apartados.

D₁: Definición de la distribución normal a partir de la fórmula de la función de densidad y de sus propiedades

Se define la variable aleatoria normal como aquella cuya función de densidad que viene dada por una fórmula, la cual representa una familia de funciones caracterizada por unos parámetros dados (media y desviación típica), explicando intuitivamente el significado de estos parámetros. Una primera variante la hemos encontrado en Walpole y Myers (1992, pp. 144) que incluye la descripción de cómo varía la gráfica al cambiar los parámetros.

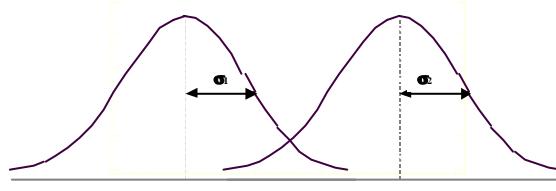
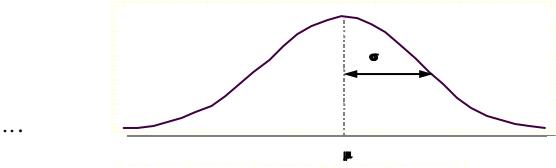
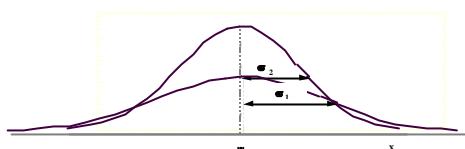
D_{1A}: Una variable aleatoria continua X que tiene la distribución en forma de campana de la figura, se llama **variable aleatoria normal**. La ecuación matemática para la distribución de probabilidad de la variable normal depende de los dos parámetros μ y σ , su media y su desviación estándar. Por lo tanto se representan los valores de densidad de X por $n(x; \mu, \sigma)$. La función de densidad de la variable aleatoria normal X , con media μ y variancia σ^2 , es:

$$n(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2},$$

$-\infty < x < \infty$, donde $\pi = 3.14159\dots$ y $e = 2.71828\dots$

Una vez que se especifican μ y σ la curva normal se determina completamente.

Si dos curvas normales tienen la misma desviación típica pero diferentes medias, las curvas son idénticas pero se centran en diferentes posiciones a lo largo del eje horizontal.



Si las curvas tienen igual media pero distintas desviaciones, la curva con desviación más grande es más baja y más extendida.

En Ríos (1991, pp. 88), hemos encontrado un segundo ejemplo, donde se hace explícita la idea de que la variable aleatoria surge como generalización de la idea de variable estadística al aumentar indefinidamente el número de observaciones.

D₁ B: Diremos que la variable aleatoria X sigue la distribución normal si la ordenada de la curva de probabilidad es de la forma:

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}$$

que designaremos por $N(\mu, \sigma)$, en que μ y σ son parámetros que varían de una distribución a otra y que significan, el primero, la media, y el segundo, la desviación típica. Es decir, si tuviéramos un gran número de observaciones prácticamente normal (tal que el contorno del correspondiente histograma se confundiera con una curva normal) y calculáramos su media y desviación típica, obtendríamos μ y σ .

En Miller, Freund y Johnson (1992, pp. 137-149), se presentan brevemente unas notas históricas explicando el problema que dio origen a la distribución normal. Asimismo, se hace mención al hecho de que la función de densidad no es integrable y se justifica con ello el recurso al manejo de las tablas de la distribución normal tipificada.

D₁ C: Entre las densidades de probabilidad especiales estudiaremos la **densidad de probabilidad normal**, conocida simplemente como **distribución normal**, es con mucho la más importante. Fue estudiada por primera vez en el siglo XVIII cuando los científicos observaron con sorpresa el grado de regularidad en los errores de medición. Descubrieron que los patrones (distribuciones) eran aproximados a una distribución continua que denominaron "curva normal de errores" y le atribuyeron reglas de probabilidad. La ecuación de densidad de probabilidad normal, cuya gráfica se asemeja al perfil de una campana, es:

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2} \quad -\infty < x < \infty$$

Dado que la densidad de probabilidad normal no puede ser integrada en forma exacta entre cualquier par de límites a y b, las probabilidades relacionadas con la distribución normal suelen obtenerse de tablas especiales. Estas tablas corresponden a la **distribución normal típica**, es decir, a la distribución normal con $\mu=0$ y $\sigma=1$, y proporciona los valores de

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt$$

para $z=0.00, 0.01, 0.02, \dots, 3.49$, y también para $z=4.00, z=5.00$ y $z=6.00$. Para calcular la probabilidad de que una variable aleatoria con distribución normal estándar tome un valor entre a y b, empleamos la ecuación $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$, y si a o b son negativos utilizaremos también la identidad $F(-z) = 1 - F(z)$.

De estas definiciones se deduce que lo esencial para trabajar con la distribución de probabilidad de una variable aleatoria normal, es conocer la media y la desviación típica. Esto requiere que los alumnos comprendan el significado de la media y desviación típica, por qué los valores de μ y σ son los parámetros de la distribución y qué implica que la curva cambie de forma al variar estos parámetros.

D₂: Definición de la distribución normal a partir de su ecuación sin explicar el significado de los parámetros

En Carro Ramos (1994, pp. 274-287) no se proporciona al alumno ninguna idea intuitiva de la forma de la distribución, del significado de los parámetros o de cómo éstos afectan a la forma de la función de densidad.

La distribución normal es un tipo particular de distribución continua de probabilidad. Engloba a todo un conjunto de distribuciones que tienen en común una serie de características que las diferencia de las restantes distribuciones continuas de probabilidad. La ecuación de esta distribución es:

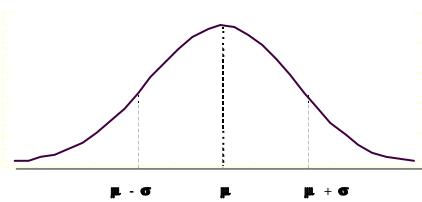
$$y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}$$

D₃: Definición de la distribución normal como función de la media y de la desviación típica sin especificar su fórmula

En este caso no se proporciona la ecuación de la función de densidad, sino que sólo se indica que depende de dos parámetros, explicando intuitivamente el significado de los mismos, como en el ejemplo que reproducimos a continuación:

La distribución normal de una variable x depende de dos parámetros: μ que puede tomar cualquier valor, y σ que ha de ser mayor o igual que cero. La distribución suele representarse por $N(\mu, \sigma)$. Se puede probar que μ es la media o valor esperado de la variable y que σ es su desviación típica; es decir,

$\mu_x = \mu$ y $\sigma_x = \sigma$ La densidad de la normal alcanza su valor máximo en la media μ_x , que es una medida de posición y determina la situación del centro de la distribución. Por la simetría, la mediana coincide con la media. La desviación típica σ_x expresa la concentración de la distribución alrededor del valor esperado. Gráficamente, la magnitud de la desviación típica puede determinarse porque los puntos de la densidad donde cambia la concavidad son $\mu - \sigma_x$ y $\mu + \sigma_x$, esto se ilustra en la gráfica siguiente: (Peña y Romo, 1997, pp. 248-250).



D₄: Definición implícita de la distribución normal como variable que surge de la confluencia independiente de muchos factores

En Valeri (1992, pp. 70-82), se describen las condiciones que debe seguir una variable para que pueda considerarse normal, sin explicitar la definición o la expresión de la función de densidad.

Una característica de las variables que siguen una distribución normal es que son el resultado de la influencia de muchos factores con pesos pequeños y similares. Por ejemplo: la altura de una persona sana depende de toda la información genética y de la influencia ambiental: buena alimentación, ejercicio, etc. Existe este elevado número de factores; cada uno, aportando su granito de arena.

Es importante que cada factor tenga esa influencia pequeña. Un factor importante, como puede ser el sexo en la variable altura, va a condicionar la existencia de una distribución bimodal.

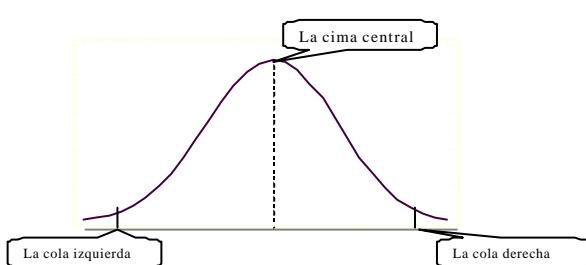
Otra forma en la que un factor puede adquirir la suficiente importancia para romper la simetría de la distribución normal es si, cuando aparece, provoca la actuación de otros factores que dependen de él. Si, por ejemplo, la edad va provocando que toda una serie de factores con pesos pequeños empiecen a actuar, la edad que puede tener una pequeña influencia directa en la altura, acaba teniendo una influencia global desproporcionada con respecto a los restantes factores. Por estos motivos, para que una variable siga una distribución normal, los factores que en ella influyen deben ser mutuamente independientes.

Esta definición corresponde a una introducción intuitiva al teorema central del límite por el que la suma de variables aleatorias tiene, para un número de sumandos suficientemente grande, distribución aproximadamente normal. El problema de esta manera de definir la distribución se plantea en la ambigüedad de la misma, ya que no se define claramente lo que representa la distribución normal y de qué manera puede estudiarse.

D₅: Definición de la distribución normal enunciada en forma intuitiva como límite de un histograma

En algunos casos se parte del histograma de frecuencias, para introducir de una forma intuitiva la idea de distribución normal, usando un ejemplo de datos reales. Una primera variante (Graham, 1994, pp. 231-236) usa un ejemplo concreto de datos reales:

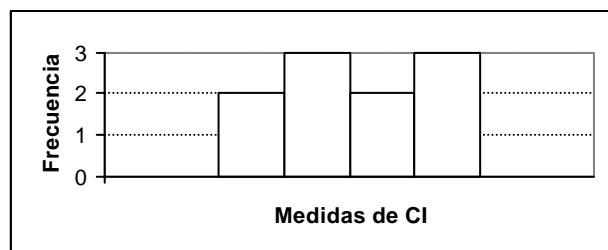
D₅: La curva acampanada de la figura representa la distribución conocida como **curva Normal**. La característica de la curva Normal es que tiene una cima en el medio y dos colas sobre los lados. Esta curva tiene una curvatura específica y está definida por una fórmula matemática exacta.



Para comenzar con la explicación elegimos una variable, como por ejemplo: el coeficiente intelectual de las personas (CI). Elegimos 100 personas aleatoriamente de una población, si usamos el mismo test estandarizado de CI, es común que la distribución de los resultados sea aproximadamente normal con una media de 100 y una desviación estándar de 15. La razón para que suceda esto es simple: los

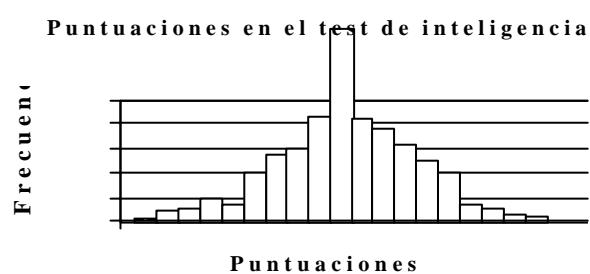
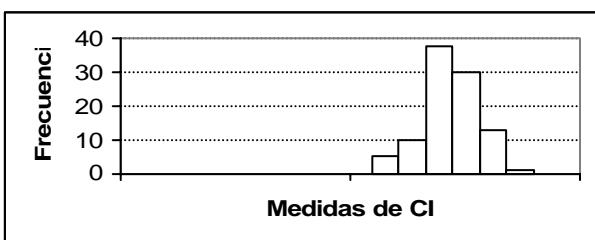
tests de CI están diseñados para producir tal distribución. Por supuesto, si sólo se elige una pequeña muestra aleatoria, entonces el resultado no es tan obvio. En la tabla siguiente se muestra un conjunto de puntajes para una muestra de 10 personas seleccionadas aleatoriamente.

CI	Número de personas
< 70	0
70 - 85	2
85- 100	3
100 -115	2
115 - 130	3
>130	0
Total	10



Como puede observarse este histograma no se acerca a una curva en forma de campana. La razón de esto es que, mientras que el CI es básicamente normal en su distribución, un tamaño de muestra de 10 es muy pequeño para esperar que se muestre claramente el modelo implícito. Aumentemos a 100 el tamaño de la muestra y observemos qué es lo que sucede:

CI	Número de personas
< 70	5
70 - 85	10
85- 100	38
100 -115	30
115 - 130	13
>130	1
Total	100

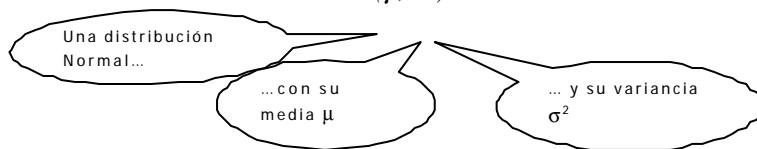


Claramente podemos ver que este histograma comienza a tomar una forma similar a la de la curva acampanada que habíamos predicho. Usted podría imaginar que si el tamaño de la muestra se incrementara sustancialmente, digamos a 100, la distribución podría llegar a ser más simétrica y acampanada, es decir se parecería a lo que muestra la figura siguiente:

Sin embargo, aún hay un problema con el hecho de que la curva Normal es una función continua

mientras que estos histogramas son escalonados. Este problema se puede solucionar reduciendo el ancho de los intervalos. En el caso límite, donde la muestra es infinitamente grande y los intervalos de clase son infinitamente pequeños, la curva normal y el histograma coinciden. Una propiedad importante de la distribución Normal es que puede quedar completamente definida conociendo dos datos claves: dónde está centrada (basada en la media) y cuál es la amplitud de dispersión (medida por la desviación estándar y por el cuadrado de la desviación estándar, la variancia). La forma más corta de describir esta distribución es la siguiente:

$$N(\mu \sigma^2)$$



Podemos también incluir en esta categoría la definición dada por Moore, (1995, pp. 54-56), donde no se trabaja a partir de datos reales, sino sólo se supone que en algunos casos el histograma se podrá aproximar a una función de densidad. Además, se hace una extensa referencia a las curvas de densidad para luego particularizar la curva de densidad normal.

D₆: Definición y síntesis de las características principales de la distribución normal dando énfasis a la tipificación

En esta categoría dos libros (Runyon y Haber, 1984; Spiegel, 1991) realizan un tratamiento similar, por lo tanto sólo haremos la transcripción de uno de ellos. Se hace una breve descripción de la ecuación de la función de densidad, la curva, el porcentaje de observaciones incluidas en los intervalos centrales, el área total bajo la curva y el área parcial entre dos valores

dados, así como las características de la distribución normal tipificada. Por último, se hace un resumen de los parámetros y medidas más representativas de la distribución normal.

En Spiegel (1991), sólo se dan los conocimientos básicos para poder utilizar la distribución normal típica para el cálculo de probabilidades, por medio de un uso mecánico, ya que todos los ejemplos resueltos que se presentan son ejercicios tipo que se repiten en los ejercicios propuestos.

D₆: Uno de los más importantes ejemplos de una distribución de probabilidad continua es la distribución normal, curva normal o distribución gaussiana, definida por la ecuación:

$$y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(x - \mu)/\sigma]^2}$$

donde μ = media, σ = desviación típica, $\pi = 3.14159\dots$ y $e = 2.71828\dots$. El área total limitada por la curva y el eje X es 1; por tanto, el área bajo la curva entre $X = a$ y $X = b$, con $a < b$, representa la probabilidad de que X esté entre a y b . Esta probabilidad se denota por: $Pr\{a < X < b\}$. Cuando se expresa la variable X en unidades típicas [$z = (X - \mu) / \sigma$], la ecuación anterior es reemplazada por la llamada forma canónica:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

En tal caso, decimos que z está normalmente distribuida con media 0 y varianza 1. La figura que sigue es un gráfico de esta forma canónica. Muestra que las áreas comprendidas entre $z = -1$ y $+1$, $z = -2$ y $+2$, y $z = -3$ y $+3$ son iguales, respectivamente a 68,27 %, 95,45% y 99,73% del área total, que es 1. Las tablas del apéndice muestran las áreas bajo esta curva acotadas por las ordenadas $z = 0$ y cualquier valor positivo de z . De estas tablas se pueden deducir el área entre todo par de coordenadas usando la simetría de la curva respecto de $z = 0$. Algunas propiedades de la distribución normal se listan en la tabla siguiente:

Media = μ

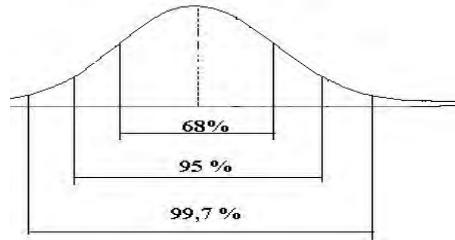
Varianza = σ^2

Desviación típica = σ

Coeficiente de sesgo = α_3

Coeficiente de curtosis = α_4

Desviación media = 0,7979 σ



4.6.2. PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

A continuación realizaremos una descripción de las propiedades que aparecen en los libros analizados, que hemos clasificado como: propiedades geométricas, propiedades estadísticas, propiedades algebraicas y relaciones con otros conceptos y en donde se ponen en correspondencia diferentes elementos intensivos y ostensivos.

Propiedades geométricas

Las definimos como aquellas que se derivan del análisis de la gráfica de la función de densidad, tales como simetría, concavidad y convexidad.

Simetría: Hay una serie de propiedades que se derivan del hecho de que la función de densidad es simétrica, debido a que en su fórmula aparece una exponencial al cuadrado. La simetría es importante en la distribución normal pues simplifica el cálculo de áreas. A continuación veremos algunas propiedades derivadas de la simetría:

La distribución normal es simétrica respecto de su eje vertical donde tiene la media. Esta es la propiedad básica pero la hemos encontrado enunciada de diversas maneras que transcribimos a continuación: Las dos áreas, la superior y la inferior son iguales. Es decir, existe la misma proporción de casos por encima y por debajo de la media. En consecuencia, la mediana, que es el punto de una curva de densidad que la divide en áreas iguales, coincide con la media. La mediana es el punto tal que la probabilidad de ser menor a ella es igual a 1/2.

La moda, que es el punto sobre el eje horizontal donde la curva tiene su máximo, ocurre en $x = \mu$ (media). Otras formas de expresar esta propiedad que hemos encontrado en los libros de texto han sido: a) El punto de máxima ordenada en la distribución normal será siempre el valor de la media de la distribución; b) en el caso de la distribución normal típica, la máxima altura está en el valor cero del eje X, que es la media de esta distribución.

La media, mediana y moda en las distribuciones simétricas coinciden en un mismo punto, por tanto son iguales en las distribuciones normales. Para la distribución normal típica, la

media vale cero. La media de una curva de densidad es el punto de balance, en el cual la curva podría balancearse si fuera un sólido.

En la tabla 4.6.2.1 incluimos citas textuales de los libros donde hemos encontrado reflejadas estas propiedades. En el primer bloque aparecen las propiedades relacionadas con la simetría, en el segundo la relación entre media, mediana y moda y en el tercero, propiedades específicas de alguno de estos tres conceptos. Es de destacar que de los 10 libros seleccionados, sólo 4 de ellos especifican las propiedades de las curvas de densidad y en especial de la distribución normal.

Tabla 4.6.2.1. Propiedades geométricas de la distribución normal citadas en los libros de texto

Simetría	<i>Es simétrica alrededor de la media. Las dos áreas, la superior y la inferior son iguales. Es decir: existe la misma proporción de casos por encima y por debajo. (Valeri, 1992, pp. 74) La curva es simétrica alrededor de su eje vertical donde se tiene la media μ (Walpole y Myers, 1992, pp. 145).</i>
Relación entre media, mediana y moda	<i>La media, mediana y moda coinciden en un mismo punto. Para la distribución normal típica es el valor cero. (Carro Ramos, 1994, pp. 275). Obsérvese que en la distribución normal, la media, la mediana y la moda coinciden con este eje de simetría central. (Valeri, 1992, pp 74). La mediana y la media son las mismas para una curva de densidad simétrica. Ambas se ubican en el centro de la curva. (Moore, 1995, pp. 58).</i>
Propiedades de las medidas de tendencia central	<i>La moda, que es el punto sobre el eje horizontal donde la curva tiene su máximo, ocurre en: $x = \mu$(media). (Walpole y Myers, 1992, pp. 145). El punto de máxima ordenada (máxima altura de la curva) será siempre el valor de la media de la distribución. En el caso de la distribución normal típica, la máxima altura está en el valor cero del eje X, que es la media de esta distribución. (Carro Ramos, 1994, pp. 75). La media de una curva de densidad es el punto de balance, en el cual la curva podría balancearse si fuera un sólido. (Moore, 1995, pp 58). La mediana de una curva de densidad es el punto que la divide en áreas iguales, el punto que divide al área bajo la curva en la mitad. (Moore, 1995, pp. 58).</i>
Concavidad y convexidad	<i>La curva tiene sus puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$ es cóncava hacia abajo si: $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$, y es cóncava hacia arriba en cualquier otro punto. (Walpole y Myers, 1992, pp. 145). Los puntos en que la curva normal se vuelve de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo están situados en los valores -1σ y $+1\sigma$, es decir a una distancia de una desviación típica a ambos lados de la media. (Carro Ramos, 1994, pp. 276). La desviación típica es igual a la distancia desde el centro al punto en que la curva cambia su sentido de giro, también llamado punto de inflexión. Esta propiedad es muy útil para ayudarnos a dibujar la gráfica, especialmente si recordamos que entre la media y una desviación típica hacia arriba y hacia abajo hay un 68 % de los casos. (Valeri, 1992, pp. 75).</i>
Asíntota horizontal	<i>La curva normal se acerca al eje horizontal en forma asintótica en cualquiera de las dos direcciones, alejándose de la media. (Walpole y Myers, 1992, pp. 145). La curva es asintótica: Se extiende indefinidamente en las dos direcciones del continuo de valores sin tocar nunca el eje de abscisas. (Carro Ramos, 1994, pp. 275). Las colas no llegan a tocar el eje horizontal. Lo que en términos matemáticos se expresa diciendo que son asíntotas a dicho eje. Esto significa que, por mucho que nos alejemos del centro, del valor de la media, siguen existiendo posibles casos; aunque cada vez con menor probabilidad. Claro que esta situación se torna poco clara cuando por ejemplo, estamos calculando la proporción de altura de la gente. Llegará un momento en que se sobrepondrá el cero. Y de acuerdo con la teoría de la distribución normal, podremos decir que individuos con alturas negativas son poco probables, pero posibles. Es importante este aspecto porque nos hace pensar en las limitaciones del modelo. La distribución normal es un modelo muy útil, pero como modelo no se le puede pedir exactitud total. (Valeri, 1992, pp. 75).</i>

Concavidad y convexidad: En la tabla 4.6.2.1 se presentan las propiedades que hemos encontrado en relación con la concavidad y convexidad, que tiene la particularidad de que el cambio se produce a una distancia de la media igual a la desviación típica. Si se comparan los enunciados que se presentan en la tabla, podemos ver que aunque todos se refieren a la misma

propiedad de la curva, en Valeri, (1992), se expone más claramente la función que cumple la desviación típica en una distribución; es decir, se puede ver en forma intuitiva que la desviación típica nos muestra de qué manera están dispersos los datos, en otras palabras, a menor desviación mayor concentración de datos alrededor de la media.

El eje de abscisas es una asíntota de la función de densidad: Aunque teóricamente el intervalo de variación de una variable aleatoria normal es $(-\infty, +\infty)$, en la práctica vemos que una vez que nos separamos dos o tres desviaciones típicas del centro de simetría (media) la altura de la función de densidad desciende muy rápidamente y tiende asintóticamente a cero a ambos lados de la media. Quiere esto decir que, aunque teóricamente posibles, los valores alejados de la media son altamente improbables.

Matemáticamente, esta propiedad se expresa diciendo que el eje X es una asíntota de la curva de densidad. Hemos encontrado esta propiedad expresada en forma ligeramente diferente, como se expresa en la tabla 4.6.2.1. Si comparamos estos enunciados, podemos observar que el tratamiento que realiza Valeri (1992) es más intuitivo y gráfico.

Propiedades estadísticas

En los textos revisados hemos encontrado también propiedades que definiremos como estadísticas ya que, son aquellas que relacionan la distribución normal con la predicción de valores y el cálculo de probabilidades, donde se formalizan las diversas prácticas que hemos descrito y se les da una justificación teórica.

Probabilidades dadas por áreas parciales bajo la curva normal: En primer lugar, hemos encontrado enunciados referidos al cálculo de la probabilidad de que la variable tome un valor en un cierto intervalo y su relación con el área bajo la curva.:.

La probabilidad de que X esté entre a y b, $P(a < X < b)$, está representada por el área bajo la curva limitada entre a y b. (Graham, 1994, pp 241).

La curva de cualquier distribución continua de probabilidad o función de densidad está construida de tal modo que el área bajo la curva, limitada por los dos puntos $x = a$ y $x = b$ es igual a la probabilidad de que la variable aleatoria X asuma un valor entre $x = a$ y $x = b$. Entonces, para la curva normal de la figura la probabilidad está representada por el área de la región sombreada. (Walpole y Myers, 1992; pp. 147).

Destacamos que sólo estos dos libros de los 11 seleccionados muestran en forma genérica el cálculo de probabilidades en una distribución normal con media μ y desviación típica σ , el resto de los libros explican el cálculo de probabilidades de la distribución normal tipificada directamente, como se muestra a continuación:

La curva de cualquier distribución continua de probabilidad o función de densidad está construida de tal modo que el área bajo la curva, limitada por los dos puntos $x = x_1$ y $x = x_2$ es igual a la probabilidad de que la variable aleatoria X asuma un valor entre $x = x_1$ y $x = x_2$.

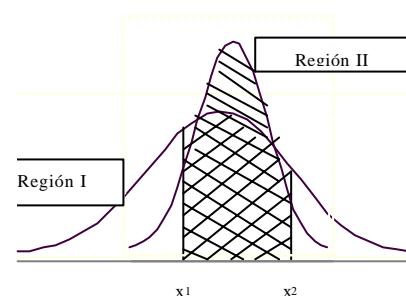
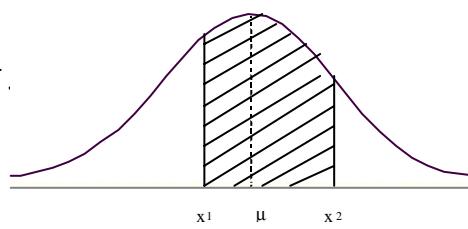
Entonces, para la curva normal de la figura, la probabilidad:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} n(x; \mu, \sigma) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

está representada por el área de la región sombreada.

Antes se observó cómo la curva normal depende de la media y de la desviación estándar de la distribución considerada. El área bajo la curva entre cualesquier dos puntos debe, entonces, depender también de los valores μ y σ . Esto es evidente en la figura, donde se han sombreado las regiones correspondientes a $P(x_1 < X < x_2)$ para dos curvas con medias y variancias diferentes.

La $P(x_1 < X < x_2)$, donde X es la variable aleatoria que describe la distribución I. Si X es la variable que describe la distribución II, entonces $P(x_1 < X < x_2)$; por lo tanto, la probabilidad asociada con cada distribución será diferente para dos valores de X dados. (Walpole y Myers, 1992; pp. 148).



Probabilidades dadas por el área total: De igual modo, hemos encontrado la propiedad de que el área total es igual a la unidad, expresada con diferentes grados de rigor. El significado geométrico de esta propiedad está íntimamente relacionado con la propiedad anterior, con los axiomas de probabilidad y con algunas de las condiciones que debe cumplir una función de densidad de probabilidad, a saber:

$$p(x_i) \geq 0 \quad \text{para todo } x_i \text{ o } f(x) \geq 0;$$

$$\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1 : \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Con el primer axioma se expresa que la función debe ser siempre positiva. Con el segundo axioma, se indica que la suma de todas las probabilidades correspondientes a un mismo espacio muestral es igual a 1. Y con la tercera condición, se relaciona el axioma anterior con las áreas bajo la curva. Como cada área limitada por dos valores cualesquiera representa la probabilidad entre esos dos valores, la suma de todas las áreas corresponde a la suma de todas las probabilidades, en consecuencia, dicha suma (integral) es 1. Hemos encontrado esta propiedad expresada en algunos textos de la siguiente forma:

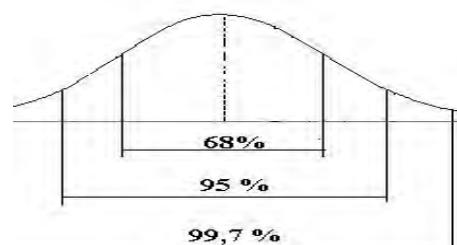
El área total bajo la curva y arriba del eje horizontal es igual a 1. (Walpole y Myers, 1992; pp. 145)
La curva normal es una distribución de probabilidad, por tanto, el área bajo la curva es igual a la unidad. (Carro Ramos, 1994, pp. 275).
El área bajo la curva es igual a 1. (Graham, 1994, pp 241).

Distribución de casos en relación con la desviación típica: Un punto importante en las distribuciones normales es que la proporción de casos que se encuentran en el intervalo ($\mu - k\sigma$, $\mu + k\sigma$) es siempre constante.

Esta propiedad se usa en algunos libros para resolver problemas en los que hay que calcular los límites entre los que se encuentra un determinado intervalo central, como puede ser el intervalo del 95% central de datos. También se utiliza para identificar la posición de un valor determinado con respecto a la media, o para saber si un determinado valor o intervalo es representativo o no de la distribución. A continuación mostramos algunos ejemplos:

Entre tres desviaciones típicas por debajo de la media y tres desviaciones típicas por encima de la media (un total de seis desviaciones típicas), se encuentran prácticamente todos los casos de la distribución normal (Carro Ramos, 1994, pp. 276).

El grueso de la probabilidad en una distribución normal aparece en la zona central. La figura siguiente, muestra que la probabilidad de que el valor de una variable normal diste de la media menos una desviación típica es 0,683; dicho de otra forma, la probabilidad de que una variable con distribución N(μ σ) tome un valor entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$ es 0,683. La probabilidad de una observación a menos de dos desviaciones típicas de la media, es decir, entre $\mu - 2\sigma$ y $\mu + 2\sigma$ es 0,955. También en la figura puede verse que la probabilidad de que la variable tome un valor entre $\mu - 3\sigma$ y $\mu + 3\sigma$ es de 0,997; en otras palabras, la probabilidad de que un dato procedente de una distribución normal diste de la media más de tres desviaciones típicas es menos de media centésima. (Peña y Romo, 1997, pp. 250).



En la distribución normal con media μ y desviación estándar σ

- 68% de las observaciones caen a σ de la μ*
- 95% de las observaciones caen a 2 σ de μ*
- 99,7% de las observaciones caen a 3 σ de μ (Moore, 1995, pp. 61).*

Si podemos saber que una variable sigue, "de forma más o menos razonable", la distribución normal vamos a poder calcular zonas de probabilidad. Por ejemplo, si una variable sigue la distribución normal, aproximadamente el 95 % de los casos se hallan comprendidos entre: La media menos dos desviaciones típicas, y la media más dos desviaciones típicas. De manera más formal: I(95 %) = $\mu + 2\sigma$ (Valeri, 1992, pp. 72).

Propiedades algebraicas

Otras propiedades son las relacionadas con la función de densidad considerada como

función algebraica, tales como el comportamiento de dicha función frente a transformaciones. Una propiedad muy importante de las variables normales es que sus transformaciones lineales también siguen una distribución normal. La media de la variable vendrá afectada por la misma transformación lineal, esto es si X es normal con media μ_x y desviación típica σ_x , entonces la variable $y = ax + b$ tiene una distribución normal con media $a\mu_x + b$. La desviación típica sólo viene afectada por el cambio de escala, o sea será $a\sigma_x$; es decir, si X es $N(\mu_x, \sigma_x)$ entonces $y = ax + b$ es $N(a\mu_x + b, a\sigma_x)$.

Por medio de esta propiedad, se puede hacer una extensión de las propiedades de una distribución normal a cualquier combinación lineal de ella, lo que tiene importancia por dos motivos. Primero, porque permite, a partir de la tipificación de las variables, calcular probabilidades basadas en las tablas de la distribución normal típica $N(0,1)$. Además asegura que, incluso en muestras pequeñas la media de la muestra tendrá distribución normal si la variable de partida es normal. Sólo hemos encontrado un caso referido a esta propiedad que reproducimos a continuación:

Una propiedad fundamental de las variables normales es que sus transformaciones lineales también siguen una distribución normal. Si x es normal con media μ_x y desviación típica σ_x , entonces la variable $y = ax + b$ tiene una distribución normal con media $a\mu_x + b$ y desviación típica $a\sigma_x$; es decir, si x es $N(\mu_x, \sigma_x)$ entonces $y = ax + b$ es $N(a\mu_x + b, a\sigma_x)$. (Peña y Romo, 1997, pp. 251).

4.7. ELEMENTOS VALIDATIVOS

En Didáctica de la Matemática se da importancia a los procesos de demostración, esto se pone en evidencia en los diversos trabajos que pueden encontrarse que se centran en el estudio de esta problemática. Especialmente, en la tesis de Recio (1999) se realiza una revisión de los estudios más importantes en relación con el tema de la demostración.

En dicho trabajo se describen y clasifican cuatro tipos básicos de demostración, a saber: argumentación explicativa, prueba empírico-inductiva, prueba deductiva-informal y demostración deductiva. Sin llegar a ser tan exhaustivos como en dicho trabajo, a continuación describiremos los diversos tipos de demostración que se presentan en los libros de texto y en los que de nuevo se ponen en correspondencia elementos intensivos actuativos y ostensivos de significado.

Validación a través de la representación gráfica: Se aplica como validación cuando por medio de ella se muestra visualmente la verdad o falsedad de una afirmación o de una propiedad. Por ejemplo, en Walpole y Myers (1992, pp. 147), se utiliza para mostrar cómo varía el área bajo la curva en un determinado intervalo (x_1, x_2). (ver ejemplo transcritto en la sección 4.6.2, correspondiente a propiedades estadísticas – probabilidades dadas por áreas parciales bajo la curva normal). Consideramos que esta es la manera más intuitiva de proporcionar una justificación.

Validación por medio de comprobación de casos: Cuando se utiliza un problema concreto para validar una determinada propiedad, como por ejemplo, verificar a partir de un problema particular la necesidad de la utilización de la tipificación. Un caso representativo de esto se da en Moore (1995, pp. 65):

Las alturas de mujeres jóvenes son aproximadamente normales, con $\mu = 64.5$ plg y $\sigma = 2.5$ plg. La altura tipificada de una mujer es el número de desviaciones típicas por el que su altura difiere de la altura media de todas las mujeres jóvenes. Por ejemplo, una mujer de 68 plg de altura, tiene una altura

tipificada de: $z = \frac{68 - 64.5}{2.5} = 1.4$, o 1.4 desviaciones típicas por encima de la media. De la misma

forma, una mujer con 60 plg de altura, tiene una altura tipificada de: $z = \frac{60 - 64.5}{2.5} = -1.8$, o 1.8 desviaciones típicas por debajo de la altura media.

Por lo tanto, si la variable que vamos a tipificar tiene una distribución normal, la tipificación nos da una escala común.... Tipificar una variable que tiene cualquier distribución normal produce una nueva variable que tiene la distribución normal típica.....

Demostraciones informales: Generalmente, en este caso, se utilizan representaciones gráficas junto a comprobación de casos particulares para demostrar de manera intuitiva una propiedad. Por ejemplo, cuando se muestra la aproximación de una distribución de datos reales a la curva de densidad normal al aumentar el número de observaciones y disminuir el número de

intervalos. Un ejemplo de este tipo de elemento validativo podemos observarlo en el problema transcritto en la sección 4.6, dentro de la definición D₅, que fue extraído de Graham (1994, pp. 231-236).

Demostraciones deductivas: Cuando se llega a enunciar una propiedad por medio de una demostración matemática en la que se utilicen fórmulas, axiomas u otras propiedades de una manera lógico – deductiva. Un ejemplo de esto se da en Walpole y Myers (1992, pp. 145 –147):

Ahora se mostrará que los parámetros μ y σ^2 son en realidad la media y la variancia de la distribución normal. Para evaluar la media se escribe: $E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-(1/2)(x-\mu)/\sigma^2} dx$

Si se hace $z=(x - \mu)/\sigma$ y $dx = \sigma dz$, se obtiene:

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma z)e^{-z^2/2} dz = \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ze^{-z^2/2} dz.$$

El primer término de la derecha es μ veces el área bajo la curva normal con media 0 y variancia 1, y por lo tanto, es igual a μ . Por integración directa es igual a 0. Por lo tanto, $E(X) = \mu$. La variancia de la distribución normal es: $E[(X - \mu)^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 e^{-(1/2)(x-\mu)/\sigma^2} dx$

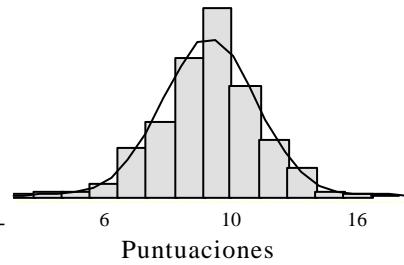
Otra vez, si $z=(x - \mu)/\sigma$ y $dx = \sigma dz$, se obtiene:

$$E[(X - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz$$

Se integra por partes con $u = z$ y $dv = ze^{-z^2/2} dz$, de tal forma

que $du = dz$ y $v = e^{-z^2/2}$, se encuentra que:

$$E[(X - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-ze^{-z^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz \right) = \sigma^2 (0 +$$



Análisis: Cuando se estudian las particularidades o características iniciales de una situación que pueden conducir posteriormente a generalizaciones o a una síntesis. (Ver ejemplo transcritto en Síntesis).

Generalización: Cuando a partir de demostraciones formales o informales se llegan a conclusiones que pueden extenderse a todos aquellos casos que cumplan las condiciones iniciales. (Ver ejemplo transcritto en Síntesis).

Síntesis: Cuando se realiza una conclusión en la que se incluyan todas las propiedades o conclusiones extraídas del análisis de un concepto. A continuación transcribimos un ejemplo extraído de Moore (1995, pp. 54 – 56), en el que puede observarse el análisis de una situación, la síntesis de propiedades o características específicas y una posterior generalización:

El histograma de la figura muestra la distribución de las puntuaciones de todos los estudiantes de Gary, Indiana, en un test de habilidades básicas. La distribución de todas las puntuaciones de este test a nivel nacional tiene una distribución regular. El histograma es simétrico, y ambas colas están a una distancia aproximadamente igual del pico. No hay valores atípicos obvios. (Análisis)

La curva de puntos trazada sobre la parte superior de las barras del histograma es una buena descripción del modelo.

Podemos ver que es más fácil trabajar con la curva que con el histograma. La razón es que el histograma depende de nuestra elección de los intervalos, mientras que con cuidado podemos usar la curva que no depende de tal elección. Veamos cómo se hace:

- Podemos usar una curva para describir qué proporciones de las observaciones caen en cada rango de valores, sin contar las observaciones.
- Nuestros ojos responden a las áreas de las barras en un histograma. Las áreas de las barras representan las proporciones de observaciones que caen en cada clase. De la misma forma esto se cumple para la curva: las áreas bajo la curva representan proporciones de las observaciones.
- Esta área representa la proporción 1, es decir, todas las observaciones. El área bajo la curva y entre cualquier rango de valores sobre el eje horizontal es igual a la proporción de observaciones que caen en este rango, digamos como una fracción del total. La curva es una curva de densidad para la distribución. (Síntesis).

En consecuencia, una curva de densidad es una curva que:

- está siempre sobre el eje horizontal, y
- el área bajo ella es exactamente 1 (Generalización)

4.8. CONCLUSIONES SOBRE LOS ELEMENTOS DEL SIGNIFICADO DE REFERENCIA

En correspondencia con el primer objetivo general (sección 1.5) y el objetivo específico O1 (sección 3.3) y luego de realizar un análisis exhaustivo de los libros de texto, hemos podido identificar los elementos de significado más comunes específicos de la distribución normal, determinando de esta manera *el significado institucional de referencia* a partir del cual llevaremos a cabo nuestra investigación. Hemos mostrado también ejemplos de las diferentes categorías en las que se puede observar cómo estos diferentes elementos se relacionan en la resolución de los problemas, descripción de propiedades y procesos de validación. De este significado de referencia seleccionaremos, en el Capítulo V, los elementos que se adecuen a la secuencia didáctica que pretendemos diseñar.

Para ello, hemos realizado una clasificación de los elementos encontrados, de acuerdo a nuestro marco teórico, los cuales resumimos en la Tabla 4.8.1. Al analizar los elementos de significado en el tema de la distribución normal, hemos encontrado también una serie de elementos de significado que no son específicos de esta distribución, sino de otros conceptos estadísticos, que el alumno ha debido estudiar previamente, pero que son necesarios para el estudio del tema. Estos elementos se muestran en la Tabla 4.8.2.

Elementos extensivos

Nuestro estudio ha servido para identificar los tipos de problemas presentados en un primer curso universitario, entre aquellos cuya solución requiere del concepto de distribución normal, y de los cuales elegiremos algunos para nuestro experimento de enseñanza. Todos ellos son problemas de gran relevancia, tanto teórica como práctica, como hemos señalado en Batanero y Tauber (1999).

Desde el punto de vista teórico, estos campos de problemas han dado origen al desarrollo de una buena parte de la inferencia estadística clásica (teoría de pequeñas muestras, distribuciones asintóticas en el muestreo, estimación y contraste), que posteriormente ha sido también extendido al caso multivariante. También el cálculo de probabilidades y la teoría de procesos estocásticos se han visto ampliados notablemente por los resultados sobre teoremas de límite.

Desde el punto de vista práctico, es claro que estos campos de problemas intervienen en un sinnúmero de situaciones de investigación en que se debe realizar inferencias a partir de datos empíricos y que los alumnos encontrarán en su futura vida profesional. Es desde este punto de vista práctico, que consideramos más importante el tema en la formación de los alumnos a los que va dirigido la enseñanza que diseñaremos en el Capítulo V y que se apoya en el análisis del significado institucional de referencia.

Elementos ostensivos

Hemos observado una gran variedad de representaciones gráficas, numéricas y algebraicas de la distribución normal, su función de densidad, los intervalos de valores que puede tomar y las probabilidades con que aparecen estos intervalos, así como de sus parámetros y los estadísticos que los representan en las muestras de valores de la distribución, lo que, sin duda, añade complejidad al tema. En nuestra secuencia trataremos de reducir esta complejidad, seleccionando las que consideramos imprescindibles para permitir al alumno la lectura posterior de textos de inferencia y la literatura de investigación y, asimismo, haciendo uso de la potencia de representación que posibilita el ordenador.

Elementos actuativos

Para resolver los problemas planteados se introducen una serie de prácticas, que son, a su vez, objeto de enseñanza, como la tipificación, el cálculo de probabilidades y el uso de tablas, en las que se invierte gran tiempo y esfuerzo y, algunas de las cuales pierden su vigencia con la disponibilidad de ordenadores. Como indican Rico, Sánchez y Llinares (1997, p 214) el desarrollo de las propias disciplinas matemáticas también plantean la necesidad de cambios curriculares, así como cuando se desarrollan, organizan y amplían algunas teorías ya existentes; citando como ejemplo el análisis exploratorio de datos.

Tabla 4.8.1. Elementos de significado específicos de la distribución normal en los libros de texto considerados

Elementos del significado institucional de referencia		
Extensivos	Actuativos	Validativos
Ajuste (aproximación al histograma) Aproximación de distribuciones discretas Distribución exacta en el muestreo Distribución asintótica en el muestreo Estimación por intervalos Contraste de hipótesis	Estudio descriptivo de datos para ajustar una curva Tipificación Cálculo de probabilidades y valores críticos con tablas Obtención de límites de intervalos centrales. Comparación de puntuaciones	Representación gráfica Comprobación de casos particulares Demostraciones informales Demostraciones deductivas Análisis Generalización Síntesis
Intensivos		Ostensivos
Area total bajo la curva normal Asíntota horizontal en la distribución Normal Curtosis en la normal Curva de densidad, curva normal Distribución normal, distribución normal típica o estándar Distribuciones discreta y continua de probabilidad Distribución original y transformada Distribución de casos en relación a la d. típica Ejes: de simetría en la distribución normal Función de densidad, aproximación al histograma y polígono de frecuencia Función de distribución Modelo Parámetros y estadísticos; parámetros de la distribución normal Posición relativa de media, mediana y moda en la d. Normal Probabilidad de valores en un intervalo; probabilidad en los intervalos centrales Punto de inflexión en la distribución normal Punto de ordenada máxima en la d. Normal Simetría en la distribución Normal Teorema central del límite Transformaciones algebraicas en la d. Normal Unimodalidad de la normal Variable aleatoria, cuantitativa, continua, discreta		Gráficos: Curva de densidad (gráfica) Curva de distribución (gráfica) Representación de áreas bajo la curva de densidad Numéricos: Tablas de la N(0,1). Tablas de cola, tablas de valores centrales Simbólicos: “Campana de Gauss”, “Densidad de probabilidad normal”, “Distribución gausiana” $N(\mu, \sigma)$, $N(\mu_x, \sigma_x)$, $N(\mu, \sigma^2)$, $N(a \mu_x + b, a \sigma_x)$, $n(x; \mu, \sigma)$ $f(x; \mu, \sigma^2)$ $\mu_x = \mu$ y $\sigma_x = \sigma$, $\mu_x - \sigma_x$ y $\mu_x + \sigma_x$ $F(z), F(-z) = 1 - F(z)$ $z = (X - \mu) / \sigma$ $\int_{x_1}^{x_2} n(x; \mu, \sigma) dx$ $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-1/2[(x-\mu)/\sigma]^2} dx$ $P(z > a) = 1 - P(z < a); P(a < z < b) = P(z < b) - P(z < a).$

En efecto, coincidimos con estos autores y creemos que la filosofía del análisis exploratorio de datos que queremos imprimir a nuestra secuencia de enseñanza nos obliga a reestructurar el currículo de estadística, suprimiendo enseñanzas vigentes hasta la fecha, como es el aprendizaje de las tablas de la distribución normal.

Por el contrario, otros elementos actuativos que provienen de la estadística descriptiva, como el estudio descriptivo cobran ahora una nueva dimensión para resolver el problema de ajuste de una distribución y podrían recibir un mayor interés. Tendremos esto en cuenta en el diseño de nuestra enseñanza.

Tabla 4.8.2. Elementos de significado relacionados con otros conceptos y que se utilizan en el tema de la distribución normal en los libros de texto considerados

Elementos del significado institucional de referencia		
Extensivos	Actuativos	Validativos
Descripción de una variable estadística	Tabulación de datos Cálculo de estadísticos resumen Representación gráfica de datos	Los mismos que en la tabla anterior
Intensivos		Ostensivos
Amplitud de un intervalo Coeficientes: de asimetría, de curtosis Concavidad y convexidad Coordenadas Curtosis Curva, Curvatura Desviación típica muestral y poblacional Distribución original y transformada Ejes: de simetría, de abscisas, eje horizontal Histograma Diagrama acumulativo Función continua Intervalos centrales Media muestral, media poblacional Medidas: de posición, de tendencia central, de variabilidad Muestra aleatoria Moda, Unimodalidad, multimodalidad Observaciones independientes Ordenada Población y muestra Posición relativa de media, mediana y moda Proporción de valores en un intervalo en el histograma Punto de inflexión Punto de ordenada máxima Rango de valores Simetría /asimetría/ coeficiente Tamaño de la muestra Unidades de medida Variable estadística, cuantitativa, continua, discreta Varianza		Gráficos: Histogramas Polígonos de frecuencias Gráficos de la caja Numéricos: Tablas de datos Tablas de frecuencias Diagramas de tronco Simbólicos: $\mu, \sigma, \sigma^2, X, \alpha_3, \alpha_4$ $-\infty < x < \infty$ $y = ax + b$ $a\mu_x + b$ $x - s$ $x = \mu \pm \sigma, \mu - \sigma < X < \mu + \sigma, (\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$ $p(x_i) \geq 0$ para todo x_i o $f(x) \geq 0$ $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$ $Pr\{a < X < b\}$ con $a < b$ $I(95\%) = \mu \pm 2\sigma$

Elementos intensivos

Nuestro estudio ha mostrado una variedad de definiciones y formas de introducir la distribución, así como una variedad de propiedades respecto a la misma, de tipo geométrico, algebraico y estadístico. En el Capítulo V justificamos la forma específica que hemos elegido para introducir el tema en nuestro caso y las propiedades incluidas, que son todas aquellas necesarias para que el alumno pueda trabajar con esta distribución con la ayuda del software estadístico.

Elementos validativos

Son escasas las demostraciones deductivas formales, aunque también aparecen ocasionalmente. La mayor parte de los libros usan demostraciones informales, se apoyan en la representación gráfica o la comprobación de casos y la generalización, para finalmente realizar un análisis y síntesis de conclusiones. Siguiendo la tendencia de estos libros, en nuestra secuencia no haremos uso de la demostración deductiva formal.

Relaciones entre los diferentes elementos

Los ejemplos tomados de los libros y el análisis de las diferentes categorías en cada uno de

los tipos de elementos de significado (extensivos, actuativos, ostensivos, intensivos y validativos) muestran la variedad de correspondencias semióticas que es preciso establecer entre estos tipos de elementos en el estudio de la distribución normal (en general, en la actividad matemática).

Aportaciones del estudio realizado

El estudio presentado en este capítulo permite alcanzar nuestro primer objetivo general (sección 1.5) y el objetivo específico O1 (sección 3.3) y nos proporciona cierta información sobre el *significado institucional de referencia* en el que basar el resto de la investigación. Presenta resultados originales, en cuanto no hemos encontrado estudios previos sobre análisis de la presentación de la distribución normal en textos universitarios, ni tampoco se menciona este tipo de estudios en el estado de la cuestión realizado por Ortiz (1999) en su tesis doctoral, en la que hizo una amplia búsqueda bibliográfica sobre investigaciones centradas en el análisis de textos matemáticos, en general, y estadísticos, en particular.

Pensamos que nuestro análisis presenta una información útil para profesores interesados en la enseñanza del tema, tanto para el diseño de unidades didácticas, como de instrumentos de evaluación que tengan en cuenta los diferentes elementos del significado del concepto. Es también de utilidad para investigaciones futuras que podrían completar nuestro análisis, o extenderlo a otros textos o niveles de enseñanza.

CAPÍTULO V

ORGANIZACIÓN DE UN PROCESO DE ESTUDIO DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

5.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se analiza el proceso de estudio de la distribución normal, que hemos organizado durante la segunda fase de nuestro trabajo. Con ello queremos cumplir nuestro segundo objetivo general, es decir, *elaborar una secuencia didáctica sobre la distribución normal de acuerdo con nuestro marco teórico, incorporando el ordenador como herramienta didáctica, el significado de referencia, las características del curso, las experiencias previas de los profesores en el mismo y las características de los alumnos (Fijación del significado institucional local previsto)*.

De acuerdo con el segundo objetivo específico (sección 3.3), hemos seleccionado los elementos de significado del significado institucional de referencia, que hemos considerado adecuados a nuestro enfoque de la enseñanza. Estos elementos se completarán con otros nuevos que son necesarios por la introducción del ordenador en la secuencia de enseñanza y que no se consideran en los libros de texto. Con todo ello fijaremos el significado institucional local previsto y a partir de éste diseñaremos una secuencia didáctica sobre la distribución normal que tiene en cuenta el tipo de alumnos con el que se piensa trabajar y el tiempo disponible para desarrollar el tema.

En relación al tercer objetivo específico descrito en la sección 3.3, analizamos a continuación los elementos de significado presentado a los alumnos (significado institucional local previsto), así como la organización de la secuencia didáctica. Para cada una de las actividades previstas se estudiará la solución prevista, describiendo las relaciones que se establecen entre los elementos del significado, tanto los tomados del significado de referencia, como los provenientes del uso de un paquete estadístico.

El análisis se realiza a priori, es decir, las conclusiones extraídas en este capítulo corresponden al significado institucional local previsto antes de desarrollar la experiencia de enseñanza (considerando el curso planificado como institución en este caso) y servirá para comparar con el significado institucional de referencia descrito en el Capítulo IV. Más adelante, este significado será comparado con el significado institucional efectivamente observado y con el significado personal construido por los alumnos del grupo a lo largo y al final de la experiencia (Capítulos VI, VII y VIII), de donde se observará hasta qué grado se han cumplido los objetivos didácticos propuestos.

La experiencia se realiza en dos cursos consecutivos y en el segundo se introducen ligeros cambios con el fin de resolver algunas dificultades puestas de manifiesto en la observación realizada el primer año. Estos cambios se indicarán a lo largo del capítulo.

5.2. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL CURSO

El curso donde se realizaron las experiencias de enseñanza es una asignatura de libre configuración de "Análisis de datos y su didáctica", de 9 créditos de duración, impartida en la Facultad de Educación de la Universidad de Granada. El tema de la distribución normal se desarrollaría hacia el final del curso, y anteriormente los alumnos estudiarían los temas de

estadística descriptiva univariante y multivariante y le sucedería un tema de introducción a la inferencia. Para cuando se comenzase el tema de la distribución normal (principio del tercer trimestre del curso) los alumnos tendrían suficiente manejo del ordenador, incluido el procesador de texto y el paquete estadístico Statgraphics.

Se pensó dedicar al tema de la distribución normal 6 sesiones de una hora y media de duración, de las cuales la mitad se desarrollarían en el aula tradicional y el resto en el aula de informática. También se trabajaría el tema en las 4 sesiones siguientes dedicadas al estudio de las distribuciones en el muestreo e intervalos de confianza, aunque esta parte del curso no sería el objeto específico de nuestro trabajo. Sin embargo, haremos breves referencias a ellas en el análisis a priori porque, durante las mismas, los alumnos tendrían ocasión de trabajar lo estudiado sobre la distribución normal y estudiar otros campos de problemas: la obtención de distribuciones asintóticas en el muestreo y la obtención de intervalos de confianza para la media y la proporción.

El tener en cuenta la dimensión ecológico-didáctica nos hizo considerar diferentes factores que podrían incidir en el tipo de enseñanza. Debido a que sabíamos previamente que los alumnos con los que iríamos a trabajar provenían de diversas carreras, lo cual implicaría diversidad de conocimientos en estadística, pensamos que sería necesario entregarles unos apuntes escritos que el profesor seguiría durante las clases en el aula tradicional, en los cuales también se incluyen las actividades a realizar en todas las sesiones y ejemplos de actividades resueltas. Dichos apuntes constaban de dos partes: una relacionada con la distribución normal y otra con el manejo del programa Statgraphics (Anexos I, II y III).

Asimismo, durante las clases en el aula de informática, una vez introducidas las opciones correspondientes del programa, se proporcionaría a los alumnos unos ficheros de datos y unas actividades a resolver sobre los mismos, que se presentan en el Anexo IV.

5.3. SIGNIFICADO INSTITUCIONAL LOCAL DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL PREVISTO EN EL CURSO

Debido a las características específicas de los alumnos con los que trabajaríamos y al tiempo disponible, hemos considerado que no sería conveniente realizar un desarrollo excesivamente formal del tema, lo que incide en la selección de los elementos de significado a presentar en el curso, entre los identificados en el Capítulo IV, y que describiremos en esta sección.

5.3.1. ELEMENTOS EXTENSIVOS

Tipos de problemas

Entre los campos de problemas descritos en el Capítulo IV decidimos presentar los siguientes en nuestra secuencia de enseñanza; puesto que son los que tienen mayor interés desde un punto de vista práctico, que es el que consideramos más adecuado a este tipo de alumnos:

P1. Ajuste de un modelo a la distribución de datos reales en campos tales como la psicología, biometría, o teoría de errores.

Esta es la principal aplicación de la distribución normal para los usuarios de la estadística. Se seguiría el tratamiento planteado en algunos de los libros de texto de la muestra (Graham, 1994; Moore, 1995), para mostrar que cierto tipo de distribuciones de datos reales pueden representarse en forma aproximada por medio del modelo de la distribución normal. A partir de datos de un contexto de aplicación determinado se realizaría un estudio que muestre de dónde surge la curva normal, como paso previo a la definición de la distribución normal.

Las actividades 1, 2, 4, 5, 6 y 7 que se desarrollarían en el aula tradicional y las actividades 1 y 3 que se desarrollarían en el aula de informática, corresponden a este campo de problemas (Anexos I y II).

P2. La distribución normal como modelo aproximado de las distribuciones de variables discretas.

Los alumnos, en su futura vida profesional tendrán que trabajar frecuentemente con variables discretas y necesitarán la aproximación normal en los casos que sea aplicable. Hemos considerado casos de variables discretas que pueden y no pueden ser aproximados por el modelo normal. Dentro de las actividades en las que no puede tomarse como modelo aproximado el

modelo normal, consideramos todas las de la segunda sesión desarrollada en el aula de informática. Por otro lado, las actividades 4 y 7 realizadas en el aula tradicional, nos dan ejemplos en los que se puede realizar tal aproximación y otros en los que no. Otros ejemplos se incluirían en el tema de muestreo, al estudiar la distribución en el muestreo de la proporción.

También se incluirían en el tema de muestreo (que no será objeto específico de nuestra investigación) los siguientes campos de problemas, de manera básica y apoyándose en la simulación con recursos materiales y con ordenador:

P3. Obtención de distribuciones en el muestreo de la media y otros parámetros de poblaciones no necesariamente normales para muestras grandes (distribuciones asintóticas).

P4. Estimación por intervalos de confianza

Estos dos campos son imprescindibles para el uso de la inferencia. No hemos utilizado en nuestra enseñanza el estudio de las distribuciones exactas en el muestreo para muestras pequeñas ni el contraste de hipótesis, que son tipos de problemas que se describen en el significado institucional de referencia (Capítulo IV). Esta restricción se ha asumido debido a las limitaciones de tiempo en nuestra experiencia, y a que son temas de mayor dificultad.

Contextos empleados en las actividades desarrolladas en el aula tradicional

La selección de contextos en nuestro estudio se realizó observando las áreas de interés de nuestros alumnos, habiendo elegido los siguientes:

- Antropométricos: se utilizaría en la actividad 1, que sirve para recordar algunos conceptos dados en clases previas y en las actividades de la tercera sesión que se desarrollaría en el aula de informática .
- Psicológicos: un ejemplo es el coeficiente de inteligencia, que se usaría como introducción a la idea de distribución normal en la primera clase teórica. Otros ejemplos se presentarían en la segunda sesión en el aula de informática y en la actividad 5.
- Errores de medición: por ejemplo, el problema complementario 4, tiene como finalidad realizar un análisis “a lápiz y papel” de la distribución de mediciones de la densidad de la Tierra realizadas por Cavendish.
- Educativos: en el ejemplo 3 se introduciría la necesidad de la tipificación para comparar las puntuaciones en diferentes exámenes de distintas asignaturas para dos alumnos, con el fin de entregarle una beca al que tenga mejor puntuación global.
- Meteorológicos: una aplicación de este contexto se presentaría en la actividad 6.
- Económicos: un ejemplo de este contexto se utilizaría en la introducción al tema de la distribución normal.

Ficheros de datos

Además de problemas clásicos, se plantearon otros a partir de ficheros de datos, que no suelen usarse en las clases de tipo tradicional y que, a excepción de uno de los libros revisados (Moore, 1995), tampoco son utilizados en los libros de texto. Estos problemas son más abiertos en el sentido que brindan la posibilidad de enfocar el curso con la filosofía del análisis exploratorio de datos, como se comentó en el Capítulo III. A continuación, describiremos las características principales de los ficheros de datos utilizados en las clases relacionadas con la distribución normal. Se puede encontrar una descripción con más detalle de los datos en el Anexo IV.

En las dos primeras clases que se desarrollarían en el aula tradicional, el segundo año se planeó utilizar un fichero con datos simulados por ordenador, por medio de la opción de generación de números aleatorios del programa STATGRAPHICS a partir de una distribución normal teórica de media 100 y desviación típica 15 (Anexo IV). Contiene datos sobre el coeficiente intelectual de 100, 1000 y 10000 personas. Estas variables nos servirían para mostrar la aproximación del histograma y/o polígono de frecuencias a la curva de densidad, al aumentar la cantidad de datos y disminuir la amplitud de los intervalos. En la Tabla 5.3.1.1, se presentan los resúmenes estadísticos de estas variables.

Tabla 5.3.1.1. Estadísticos de las variables incluidas en el fichero COEF_INT

ESTADÍSTICOS	COEFINT100	COEFINT1000	COEFINT
Media	97,26	99,26	100,11
Mediana	97,5	99	100
Moda	(*)	103	99
Asimetría tipificada	-0,43	0,79	-0,15
Curtosis tipificada	-0,33	1,26	-0,93
Asimetría	-0,10	0,06	-0,0035
Curtosis	-0,16	0,19	-0,05

(*) El intervalo modal es (90; 99], cuando se usan intervalos de amplitud 10, pero presenta dos modas, que pueden observarse con el diagrama de tallos y hojas. Tales valores son: 97 y 99.

El primer año, al no disponer de cañón de proyección no se llevó a cabo dicha simulación, aunque se planeó previamente que se mostraría a los alumnos una serie de gráficas del coeficiente intelectual con diferentes tamaños de muestra en las que se podría apreciar la forma progresivamente normal del histograma.

Tabla 5.3.1.2. Variables incluidas en el fichero TEST_P.SF

NOMBRE DE LA VARIABLE	TIPO DE VARIABLE
COLEGIO	Variable cualitativa con tres valores: 1, 2 y 3
SEXO	Variable cualitativa dicotómica (1=varón; 2=mujer)
CURSO	Variable cualitativa con tres valores: 6, 7 y 8
APTITUDMAT: (Aptitud para las matemáticas)	Variable cuantitativa discreta con 11 valores (0 a 10)
PUNTCOMBIN: (Puntuación en las preguntas sobre combinatoria)	Variable cuantitativa discreta con 6 valores (1 al 6)
PUNTVERBAL: (Puntuación en las cuestiones de lenguaje probabilístico)	Variable cuantitativa discreta con 14 valores (1 a 14)
PUNTPROBAB: (Puntuación en las preguntas de cálculo probabilístico)	Variable cuantitativa discreta con 25 valores (1 a 25)
P_TOTAL: (Puntuación total)	Variable cuantitativa discreta suma de las tres anteriores (0 a 50)
NIVELPROB: (Nivel probabilístico en relación con la teoría de Piaget)	Variable cuantitativa discreta con cuatro valores: 0, 1, 2 y 3.

En la primera y segunda sesión a desarrollar en el aula de informática, hemos utilizado el fichero TEST_P, que contiene un conjunto de datos sobre los resultados de aplicar un test de evaluación de intuiciones probabilísticas primarias a niños del Ciclo Superior de EGB, aplicado a 250 alumnos de tres colegios de Jaén. Las variables incluidas en dicho fichero son las que se presentan en la Tabla 5.3.1.2 y en el Anexo IV puede observarse el fichero de datos. Como en las sesiones en el aula de informática sólo se utilizaron las variables NIVELPROB y P_TOTAL, presentamos en la Tabla 5.3.1.3. los resúmenes estadísticos de ellas. La variable P_TOTAL podría ser razonablemente ajustada por una distribución normal.

En la tercera sesión a desarrollar en el aula de informática se utilizaría el fichero ALTU1000, que contiene datos de las alturas de 1000 mujeres y fueron simulados por medio de STATGRAPHICS a partir de una distribución normal teórica de media 164 y desviación típica 5. Se comprobó con un test la bondad de ajuste a la distribución normal. En el Anexo IV se puede observar el fichero de datos completo. En la tabla 5.3.1.4 se presentan los estadísticos de esta variable.

Tabla 5.3.1.3. Estadísticos de las variables NIVELPROB y P_TOTAL del fichero TEST_P

ESTADÍSTICOS	NIVELPROB	P_TOTAL
Media	1,67	25,76
Mediana	2,0	26,0
Moda	1,0	26,0
Asimetría tipificada	0,48	- 0,69
Curtosis tipificada	- 2,35	- 1,47
Asimetría	0,07	- 0,11
Curtosis	- 0,73	- 0,46

Tabla 5.3.1.4. Estadísticos de la variable ALTURA del fichero ALTU1000

ESTADÍSTICOS	ALTURA
Media	164,27
Mediana	164,14
Moda	163,27
Asimetría tipificada	1,54
Curtosis tipificada	0,49
Asimetría	0,12
Curtosis	0,07
Desviación típica	4,92

5.3.2. ELEMENTOS OSTENSIVOS: REPRESENTACIONES USADAS

Apoyándonos en el significado institucional de referencia (Capítulo IV), en las representaciones disponibles en Statgraphics, así como en los materiales didácticos disponibles de la enseñanza realizada en años anteriores en la misma asignatura, hemos seleccionado los siguientes elementos ostensivos:

Representaciones gráficas

Específicas de la distribución normal: Representación de la curva de distribución y de densidad de las distribuciones normal y uniforme, representación del área bajo la curva normal para intervalos centrales u otros, representación de curvas de densidad normales superpuestas. Serían necesarias para analizar las propiedades geométricas de la distribución normal, para realizar a mano algunas actividades de cálculo de probabilidad y para tener un primer criterio de reconocimiento de aquellas variables estadísticas que pueden aproximarse por una distribución normal.

Relacionadas con la distribución normal: Gráficos de puntos, histogramas, polígonos de frecuencias. Serían necesarios para el estudio descriptivo de las variables.

Representaciones numéricas

Específicas de la distribución normal: áreas de cola de la distribución normal y de valores críticos realizados por ordenador (TAIL AREAS, CRITICAL VALUES y DISTRIBUTION FITTING), que serían necesarios para calcular probabilidades y valores inversos.

Relacionadas con la distribución normal: tablas de datos, tablas de frecuencias, resúmenes estadísticos (SUMMARY STATISTICS) y diagramas de tronco.

Representaciones simbólicas específicas de la distribución normal

Ecuación o fórmula de la distribución normal: Hemos utilizado la fórmula de la función de densidad normal que reproducimos a continuación, aunque sólo realizaríamos una explicación intuitiva de lo que significan los parámetros de esta ecuación, ya que la mayor parte de nuestros alumnos no tendrían conocimientos en cálculo.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

Otras expresiones que refieren a la distribución normal: Para referirnos a la distribución normal, se utilizarían las siguientes notaciones: $N(\mu, \sigma)$ y $N(x; \mu, \sigma)$, $N(0, 1)$, siendo μ la media poblacional y σ la desviación típica poblacional.

Fórmula de tipificación: Se aplicaría la fórmula: $z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, donde: z es el valor tipificado correspondiente al valor x de la variable, X es el valor de la variable real para el cual deseamos hallar una determinada probabilidad, μ es la media de la distribución y σ es la desviación típica. Para calcular los valores críticos se utilizaría la siguiente expresión: $X = \mu + z\sigma$

Representaciones simbólicas no específicas de la distribución normal

Representaciones de un intervalo: Para los intervalos centrales, utilizaríamos las siguientes expresiones:

- En el caso de que el intervalo se refiera a una muestra: $\bar{x} \pm k.s$, ($\bar{x}-k.s, \bar{x}+k.s$), donde \bar{x} es la media de la muestra y s es la desviación típica.

- En el caso de que el intervalo se refiera a una población utilizamos: $\mu \pm \sigma$, $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$, $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$, en donde μ es la media de la población y σ es la desviación típica.

Representaciones de los parámetros y estadísticos: Los parámetros y estadísticos de una distribución se los representa por medio de los siguientes símbolos:

- Media poblacional: μ , media muestral: \bar{x}
- Desviación típica poblacional: σ , desviación típica muestral: s

Representación simbólica de los axiomas de probabilidad: Se utilizaría la representación simbólica clásica de los axiomas de probabilidad, pero se realizaría una explicación informal de éstos debido a que no podríamos trabajar con integrales porque muchos de nuestros alumnos no han dado estos temas de cálculo:

$$p(x_i) \geq 0 \text{ para todo } x_i ; f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Representaciones disponibles en Statgraphics

La mayoría de las actividades se desarrollarían con el programa STATGRAPHICS, que brinda una gran variedad de representaciones numéricas y gráficas.

Algunas de estas representaciones son las ya tradicionales, como el *histograma*, el *polígono de frecuencias*, la *curva de densidad*, el *diagrama de tronco*, el *gráfico de caja*, la *tabla de frecuencias*. La diferencia es que se pueden realizar en un tiempo mucho menor y podemos disponer de ellos en forma simultánea en la pantalla, lo cual nos permite realizar diversos análisis y contrastes que generalmente, no pueden hacerse por la forma tradicional, debido al tiempo que insume realizar cada uno de estos elementos.

Además, el programa ofrece también otras representaciones que generalmente no se utilizan en los libros de texto ni en las clases tradicionales, como por ejemplo, representar las *funciones de densidad* o *funciones de distribución acumulada* en un mismo marco de referencia a fin de poder realizar una comparación visual, superponer el *histograma de frecuencias* y la *curva de densidad* para realizar un contraste de ajuste visual de la distribución empírica con la distribución normal, utilizar el gráfico *symmetry plot* para observar el grado de simetría de la distribución real o el *normal probability plot* para observar si los valores de la distribución real se aproximan a una recta que representa a una distribución normal, etc. Es posible también cambiar opciones, como los extremos de los intervalos de clase o, las escalas y observar su efecto sobre los gráficos o bien seleccionar una parte de los datos o suprimir los valores atípicos.

Todas estas posibilidades reducen el tiempo de cálculo y graficación y brindan potencia exploratoria, pero también traen otros problemas como el manejo correcto de los diversos menús y opciones, además de que se debe destinar cierto tiempo a enseñar el manejo y la utilidad de cada una de las opciones. Otro problema es que hay opciones que pertenecen a un nivel secundario de menú, es decir, sólo se puede acceder a ellas por medio del botón derecho del ratón y de los menús desplegables, por lo cual son más difíciles de recordar y en muchos casos no se las utiliza, aún cuando son opciones importantes, como por ejemplo, cambiar el ancho de los intervalos o construir un polígono de frecuencias.

Por otro lado, el software disponible usa el idioma inglés. Los alumnos participantes tendrían un nivel de inglés razonable, pero el idioma técnico añadiría una dificultad que debemos tener en cuenta, como por ejemplo, que el alumno no aprovecharía las ventajas del Stat Advisor, que podrían servirles de apoyo en la realización de las prácticas.

5.3.3. ELEMENTOS ACTUATIVOS: PRÁCTICAS ESPECÍFICAS EN LA RESOLUCIÓN DE LOS DIVERSOS TIPOS DE PROBLEMAS

Algunos elementos actutivos que utilizariamos en nuestro proceso de estudio coinciden con los observados en el significado de referencia (Capítulo IV), mientras que otros serían elementos nuevos que provienen de la utilización del ordenador.

A1. Estudio descriptivo de datos para ajustar a una curva

Este es uno de los elementos actutivos que no se encuentran muy a menudo en los libros de

texto, pero que más utilizaríamos en nuestra secuencia de enseñanza, ya que nos permitiría mostrar a los alumnos las diversas técnicas a utilizar cuando deben decidir si cierta variable puede aproximarse mediante la distribución normal. La decisión al respecto puede apoyarse en un estudio descriptivo que incluye la representación gráfica de los datos, cálculo de coeficientes de simetría y de valores atípicos, etc. El *estudio descriptivo de datos para ajustar una curva*, deberemos recordar que es un elemento actuativo compuesto que integra diversos elementos actuativos como los que hemos descrito en el párrafo anterior. Por ejemplo, en las actividades 1, 2 y 3 de la primera sesión a desarrollar en el aula de informática utilizaríamos este planteamiento.

A2. Tipificación

En nuestro curso no se utilizaría el algoritmo de tipificación para introducir el manejo de tablas como sucede en la mayoría de los cursos de este nivel, y como puede apreciarse en los libros analizados. En nuestro caso, utilizaríamos el ordenador para obtener las probabilidades sin necesidad de tipificación, ni del uso de las tablas. Por tanto, buscamos un contexto (comparación de puntuaciones en diversas materias) que motivase la utilización del algoritmo de tipificación en sí y no como herramienta auxiliar en el uso de tablas. Este tipo de elemento actuativo se planificó para las actividades 8, 9 y 10. El ejemplo utilizado para introducir la distribución normal típica en la sección 6 del Anexo I, muestra una forma de trabajar con este elemento.

A3. Cálculo de probabilidades y valores críticos

Puesto que con el ordenador se evita el uso de las tablas de la distribución normal típica, el cálculo de probabilidades se realizaría en forma directa por medio de algunas de las opciones incluidas en el programa, que podría resumirse por medio de dos técnicas:

- a. Dados uno o dos valores de la variable, calcular la probabilidad de que la variable tome valores en intervalos determinados por ese o esos puntos (cálculo de probabilidades). Se utilizaría la opción TAIL AREAS del menú PLOT, dando como dato los valores de la variable.
- b. Dada una probabilidad, encontrar los extremos del intervalo que comprenda dicha probabilidad (cálculo de valores críticos). Se utilizaría la opción CRITICAL VALUES que pide como dato el valor de la probabilidad. Esta opción también sería utilizada en el cálculo de cuartiles y percentiles (actividad 3 de la tercera sesión para ser desarrollada en el aula de informática).

En estas prácticas apoyaríamos el cálculo por medio de las posibilidades gráficas que brinda el programa para que el alumno pueda observar qué parte del área bajo la curva corresponde a la probabilidad calculada o ingresada como dato. También en este caso, este elemento actuativo estaría compuesto por otros procedimientos tales como los mencionados en los dos ítems anteriores, es decir, se ponen en relación diversos elementos actuativos. Un ejemplo de este tipo de elemento actuativo puede observarse en la actividad 3 de la segunda sesión a desarrollarse en el aula de informática.

También se planificaron actividades en las que se calcularían diversas probabilidades utilizando lápiz y papel. En unos casos, se debería calcular el área bajo el polígono de frecuencias o las probabilidades para un determinado intervalo tomando los datos de la tabla de frecuencias, con el fin de relacionar probabilidades y áreas. En otras actividades planteadas en nuestro curso, se usarían las propiedades de simetría y distribución de casos alrededor de la media en lugar de las tablas de la distribución normal típica.

A4. Cálculo de los límites del intervalo central que contiene una proporción dada de observaciones

Esta práctica también difiere de las encontradas en el significado de referencia, ya que en nuestro caso combinaríamos diversos elementos actuativos que se realizan de forma manual con elementos actuativos propios de la actividad informática, debido a que se realizarán las siguientes acciones:

- Calcular "manualmente" (con la ayuda de una calculadora) los límites correspondientes a los intervalos centrales ($x \pm k.s$).
- Modificar el número de intervalos, por medio de una opción incluida en el programa,

hasta obtener los límites de intervalos calculados anteriormente.

- Extraer de la tabla los valores de las frecuencias correspondientes a los intervalos comprendidos entre los límites obtenidos en el primer paso, calcular los porcentajes correspondientes y compararlos con los de una distribución normal (68 - 95 y 99,7%). Si esos porcentajes son aproximados, es una pauta de que la distribución real puede ajustarse por una normal.

En la actividad 3 de la primera y segunda sesión a desarrollar en el aula de informática, se aplican este tipo de elemento actuario.

A5. Cálculo de áreas y estimación de probabilidades en un histograma o polígono de frecuencias a partir de tablas de frecuencias

El cálculo de áreas en histogramas de frecuencias no es específico del tema de la distribución normal, pero sí la estimación de probabilidades a partir de las mismas. No es frecuente este tipo de elemento en los libros de texto, dentro del tema de la distribución normal. Ejemplos de éste de elemento pueden encontrarse en la actividad 1.

A6. Cálculo de porcentajes o proporciones en tablas de frecuencias modificando los intervalos (con ordenador)

Tampoco es específico del tema, aunque lo utilizaríamos en el mismo. Esta práctica consiste en el cálculo de porcentajes o proporciones en función de tablas de frecuencias construidas por medio del ordenador. El trabajo con el ordenador implica otros elementos actuativos como modificar la amplitud y el número de los intervalos de clase para adecuar los límites de éstos, de tal manera que se obtengan valores muy aproximados a los solicitados. En consecuencia este elemento está íntimamente ligado al elemento actuativo A4 y se incluye en la actividad 3 de la primera y segunda sesiones que se desarrollarían en el aula de informática.

A7. Comparación visual

Este procedimiento consistiría en comparar la forma del polígono de frecuencias con la gráfica de la curva normal para ver si se aproxima o no a ésta. De esta forma se observa si sería adecuado el ajuste de la distribución teórica a la empírica. Ejemplos de la aplicación de este elemento pueden verse en las actividades 2 y 7, y en la actividad 1 de la primera y segunda sesión a desarrollar en el aula de informática.

A8. Comparación de puntuaciones diversas o comparación con una puntuación promedio

Este elemento coincide con el observado y descrito en el significado institucional de referencia y sirve para justificar el uso de la tipificación. En el Capítulo IV se describió el algoritmo y procedimiento que se utiliza al aplicar este elemento. Se utilizaría en el ejemplo de introducción de la distribución normal tipificada (Anexos I y II) y en las actividades 8, 9 y 10.

5.3.4. ELEMENTOS INTENSIVOS

Definición y propiedades de la distribución normal

A partir del significado de referencia obtenido en el Capítulo IV, hemos optado por seguir el enfoque de Graham (1994) y Moore (1995) para definir la distribución normal, por considerarlo menos formal y acorde a los conocimientos previos de nuestros alumnos, así como al tiempo disponible para desarrollar el tema. Planteado el problema de la inferencia, y la necesidad de uso de modelos, se hablaría brevemente del modelo normal, de su utilidad y desarrollo histórico. A continuación, se propondría el análisis de la distribución de una variable estadística resaltando propiedades que luego van a caracterizar la distribución normal. Se introducirían las ideas de experimento aleatorio y estadístico, variable aleatoria y estadística, haciendo énfasis en su distinción.

En el segundo año, en que sabíamos que podríamos disponer de un cañón de proyección en la sala de clase y usando el ordenador, se mostraría en forma dinámica el ejemplo de los coeficientes intelectuales (pp. 3 y 4 del apunte, Anexos I y II) y la forma que va tomando el polígono e histograma de frecuencias al aumentar el número de casos (hasta un total de 10000) y al reducir la amplitud de los intervalos, comparando con la forma de la función de densidad normal teórica. De esta forma se lograría una definición “intuitiva” de la distribución normal como una aproximación al histograma y al polígono de frecuencias cuando el número de

intervalos tiende a infinito y su amplitud tiende a cero. Para ello usaríamos los programas DESCRIBE – NUMERIC DATA – ONE VARIABLE ANALYSIS y DISTRIBUTION FITTING del paquete STATGRAPHICS, proyectando la salida del ordenador en una pantalla. Finalizaríamos con una breve referencia a la forma y expresión de la función de densidad y al significado de sus parámetros. (Ver secciones 1, 2 y 3 del apunte. Anexos I y II).

De las propiedades determinadas en el significado de referencia (Capítulo IV) hemos seleccionado las que describimos brevemente a continuación (Ver sección 4 de los Anexos I y II):

- *Propiedades estadísticas:* probabilidades dadas por áreas parciales bajo la curva normal, probabilidad total bajo la curva y distribución de casos en relación con la desviación típica y media;
- *Propiedades geométricas:* relación existente entre la desviación típica con los puntos de inflexión de la curva, concavidad y convexidad, valores atípicos, asíntotas. Además, hemos considerado las *propiedades de simetría*: posición relativa de media, mediana y moda, área por encima y por debajo de la media, coeficientes de curtosis y de curtosis tipificado; coeficiente de asimetría y de asimetría tipificado;
- *Propiedades relacionadas con los parámetros de la distribución normal:* significado de la media y desviación típica, variación de la función de densidad normal y de la función de distribución al variar estos parámetros, distribución normal tipificada, apuntamiento en función de la desviación típica;

Relación con otros conceptos y procedimientos estadísticos

En la tabla 5.3.4.1 se muestran los conceptos y propiedades relacionados con los elementos intensivos específicos de la distribución normal.

Tabla 5.3.4.1. Relación de la distribución normal con otros conceptos estadísticos

Elementos intensivos específicos de la distribución normal	Conceptos y/o propiedades relacionados
Definición y propiedades de la distribución normal	Variables estadísticas - Tablas de frecuencias - Histogramas - Polígono de frecuencias - Medidas de tendencia central y dispersión – Simetría - Curtosis
Distribución de casos en relación con la desviación típica	Simetría – moda – media – mediana - dispersión – proporción – porcentaje – distancia – distribución
Cálculo de probabilidades Comparación de distribuciones	Axiomas de probabilidad – probabilidad en un intervalo

5.3.5. ELEMENTOS VALIDATIVOS

Optaríamos por un tratamiento en el que se evite la formalización excesiva sin perder el rigor. Como indica Moore (1997), no todos los alumnos serán estadísticos profesionales y por tanto no es siempre necesario mostrarles el detalle completo de las demostraciones matemáticas de los teoremas o propiedades.

Trataríamos, en consecuencia, de reducir al mínimo el aspecto validativo formal y de usar tipos de prueba más informales, siendo un elemento importante la simulación, ya sea por ordenador como a mano. Se realizarían simulaciones con objetos concretos, como dados, para estudiar la distribución de los puntos obtenidos para una distribución muestral con muestras de tamaño 1 y 2, y se utilizaría el ordenador para estudiar distribuciones con tamaños de muestra mucho más grandes. También, en el segundo año, se usaría la simulación para mostrar cómo se aproxima la curva normal a cierto tipo de distribuciones reales. Es decir, que en nuestra secuencia adoptaríamos un nuevo elemento validativo que es la simulación la cual no se aplica en los libros de texto.

La *simulación* proporcionaría una comprobación experimental y tendría como finalidad convencer al alumno de la pertinencia y validez de las propiedades. Por supuesto, no se trata de una verdadera demostración matemática, que no creemos necesaria a este nivel, pero tiene una gran fuerza intuitiva, como lo muestra el hecho de haber sido usada históricamente como medio de "demostración" científica. Baste citar la "prueba" que dio Galton con su famoso aparato precisamente de la distribución normal de la suma de variables aleatorias. Es un tipo de validación que se usa escasamente en los cursos de estadística tradicionales y es propia de los

cursos basados en el uso del ordenador.

El ordenador también nos proporcionaría validación para otro tipo de propiedades, como el significado de los parámetros de la distribución normal o la bondad del ajuste de datos empíricos a la distribución mediante la representación gráfica.

En nuestra secuencia de enseñanza aplicaríamos elementos validativos tales como: *análisis, comprobación de propiedades de la distribución normal, generalización de una propiedad*. Un ejemplo de este último elemento validativo se da en la actividad 1, en la que se generaliza la propiedad correspondiente a la igualdad de las áreas bajo el polígono de frecuencias y el área en un histograma para el mismo intervalo. La *representación gráfica* ha sido otro elemento validativo importante. Otro elemento validativo es la *síntesis*, que permite observar razonamientos de alto nivel y el grado de comprensión de las tareas.

Finalmente, se tiene en cuenta la necesidad de que los alumnos tuvieran sobradas ocasiones de ejercitarse su capacidad argumentativa y validativa en las clases en el aula de informática, en las que deberían elaborar informes sobre sus análisis de datos y justificar las respuestas a las preguntas planteadas.

5.4. ORGANIZACIÓN DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA

Una vez seleccionados los elementos de significado, hay muchas posibilidades diferentes de presentarlos a los alumnos, dependiendo de la secuenciación concreta, los papeles del alumno y del profesor, las actividades específicas, los objetivos de cada una de éstas y las relaciones entre elementos de significado que se ponen de manifiesto en dichos objetivos. En lo que sigue, tratamos de describir la trayectoria didáctica particular diseñada. Posteriormente, nos centraremos en su desarrollo e implementación en el aula, presentando en el Capítulo VI, los resultados de la observación de las clases y el análisis del trabajo de los alumnos en las distintas sesiones.

5.4.1. ORGANIZACIÓN GENERAL DE LA ENSEÑANZA

La experiencia de enseñanza que describimos en este capítulo es parte de un curso oficial y completo de análisis de datos, por lo que se debe tener en cuenta que hemos debido adaptar la secuencia de enseñanza a ciertas características regladas en dicho curso, tales como el tiempo que debía disponerse al tema, las horas y días que podía utilizarse el aula de informática, el número de alumnos por grupo y el tipo de alumnos que lo cursan.

Como hemos indicado, en el curso se planeó realizar dos tipos de sesiones: unas que se desarrollarían en el aula tradicional y otras que se desarrollarían en el aula de informática, las que por cuestiones de brevedad, a partir de ahora llamaremos *sesiones teóricas y prácticas*. Cada una de estas sesiones conlleva un tipo diferente de interacción y diferentes roles desempeñados por el profesor y los alumnos, que a continuación pasamos a detallar.

Tipos de interacciones organizadas en al aula

En las sesiones realizadas en el aula tradicional (sesiones teóricas) se presentaría el tema a los alumnos, que previamente habrían recibido una fotocopia de los apuntes preparados especialmente para el tema de la distribución normal (Ver anexos I y II). Estos apuntes fueron revisados el segundo año, en que se añadió la parte descriptiva de los diferentes programas de Statgraphics que se usarían a lo largo del curso y su forma de operación, lo cual no se dio a los alumnos del curso '98-'99. En dichos apuntes se siguió un enfoque similar al adoptado en Pérez (1998), de quien tomamos algunas ideas.

El motivo de añadir esta parte de los apuntes estuvo basado en las dificultades observadas el primer año en lo que respecta a la traducción de los comandos del programa y el uso de las opciones de los menús secundarios.

Además, en el segundo curso se mejoró la redacción de los apuntes, se destacaron mejor los ejemplos y se hizo mayor énfasis en los criterios de reconocimiento de distribuciones empíricas que pueden ajustarse mediante la distribución normal. Se varió ligeramente el lugar en que se proponían las actividades en la clase teórica, para adaptarnos a los resultados de nuestra experiencia en el primer año. Por ejemplo, el primer año se proponen juntos los cinco apartados de la actividad 1, mientras que el segundo se divide esta actividad en dos partes, intercalando con breves períodos de exposición teórica por parte de la profesora.

También se resaltan en el segundo año cuando un ejemplo es continuación del anterior (por

ejemplo, en la página 10 del apunte, Anexo II) y se destacan las preguntas relativas a un ejemplo con soluciones, para que quede más clara la resolución de la misma. Se separaron los ejemplos relativos a cálculo de probabilidades con Statgraphics y a evaluación de la normalidad de la distribución con Statgraphics, resaltando los pasos a seguir y la finalidad de cada uno. Se adelanta el problema de comparación de puntuaciones antes de introducir la distribución normal tipificada (tercera sesión teórica). En conjunto el apunte del segundo año es más claro, está mejor estructurado, se incluyen títulos y referencias a las tablas y gráficos para que sea más sencilla su localización y se añaden tres páginas. Incluimos las dos versiones del apunte en los Anexos I y II, de forma que puedan observarse mejor los cambios efectuados.

Las sesiones en el aula tradicional servirían para desarrollar diversas actividades para realizar con lápiz y papel, de tal forma que sirvieran de apoyo para introducir a los alumnos en diversas propiedades de la distribución normal.

La metodología de enseñanza en estas sesiones combinaría los siguientes tipos de interacciones:

En relación con el profesor

- Planificación de la enseñanza por parte de la profesora, en colaboración con la investigadora y preparación del material para el alumno.
- Presentación por parte de la profesora de algunas propiedades y de posibles formas de solución de algunos problemas que servirían de introducción de diversos conceptos o propiedades. Este tipo de interacción sería limitado, ya que los alumnos dispondrían de los apuntes.
- Propuesta de actividades, supervisión del trabajo de los alumnos mientras realizan la resolución, ayuda en los puntos conflictivos que se presentasen.
- Evaluación de los alumnos, durante las sesiones y evaluación final, motivación del interés de los alumnos.
- Ayuda en la elaboración de los proyectos y atención a consultas en horario de tutoría.
- El segundo año se haría demostración de propiedades con ordenador proyectando en pantalla las salidas.
- También el segundo año se haría una preparación previa del trabajo de las clases prácticas explicando el uso de las opciones del programa.

En relación con los alumnos

- Resolución en parejas de actividades conducentes a ejercitarse una cierta técnica, descubrir por sí mismos alguna propiedad o poner en relación diferentes elementos de significado.
- Debate colectivo de las soluciones a dichas actividades. Una vez que la mayoría de los alumnos pensaran la actividad, se solicitaría a alguno de ellos que la resolviese en la pizarra. Otros alumnos podrían proponer soluciones alternativas o bien discutir las dadas. El profesor procuraría intervenir sólo en caso de que no surgiese en la clase la solución correcta.
- Lectura y discusión del texto fotocopiado, explicación escrita de las soluciones a algunas de las actividades por parte de los alumnos como modo de obtener una evaluación continua y para ejercitarse la capacidad de argumentación de los alumnos.
- Exploración de datos y propiedades, formación de conjeturas sobre los mismos, análisis de datos y problemas e interpretación de las soluciones encontradas, participación en los debates, ayuda a los compañeros en la resolución de sus dudas.
- Desarrollo de proyectos elegidos libremente en tiempo extraescolar.

La metodología de enseñanza en las sesiones en el aula de informática (clases prácticas) fundamentalmente consistiría en la resolución por parejas de ejercicios de análisis de datos con ayuda del ordenador. Para ello se proporcionaría a los alumnos unas relaciones de ejercicios prácticos y uno o varios ficheros de datos en torno a los cuales giraría cada práctica. Al iniciar la clase, se explicarían los objetivos generales de la práctica y las nuevas opciones del programa Statgraphics que los alumnos deberían aprender durante esa clase. Una vez iniciado el trabajo en parejas, el profesor recorrería la sala atendiendo las preguntas de los alumnos. Ocasionalmente, alguno de los alumnos ayudaría a sus compañeros en puntos conflictivos. Asimismo, en ciertos momentos el profesor suministraría explicaciones o instrucciones complementarias. La solución

a la práctica, junto con las tablas, gráficos y cálculos requeridos quedaría grabada por cada pareja mediante el procesador de textos Word, produciéndose un informe que posteriormente permitiría evaluar las producciones de los alumnos.

A continuación, realizaremos un análisis del significado institucional local previsto y de la secuencia didáctica prevista, para comparar luego con el desarrollo efectivo de dichas clases (Capítulo VI). En cada sesión comenzamos detallando los elementos de significado que se introducirían y luego describimos el desarrollo hipotético de la sesión, en la cual se entremezcla la forma de desarrollar cada clase y los elementos que se ponen en juego en cada actividad con el fin de mostrar la riqueza de toda la trayectoria didáctica tal y como fue prevista. Esto nos permitirá en el Capítulo VI, comparar con la trayectoria didáctica que hemos observado y determinar cuáles han sido los elementos de significado que se han aplicado, cuáles han brindado más dificultades, y qué relaciones entre elementos se pudieron establecer en la clase.

5.4.2. PRIMERA SESIÓN PREVISTA A DESARROLLAR EN EL AULA TRADICIONAL

Esta sesión se dedicaría a introducir la idea de distribución normal como aproximación al polígono de frecuencias y mostrar sus características principales, así como el significado de los parámetros.

Elementos del significado institucional local previstos

En el desarrollo de esta sesión se preveía aplicar los siguientes elementos de significado:

- *Elementos extensivos*: problema de ajuste de un modelo a una distribución de datos reales.
- *Elementos ostensivos*: histograma y polígono de frecuencias, gráfica de la función de densidad normal, histograma y curva de densidad normal superpuestos, tabla de frecuencias, representación simbólica de intervalos centrales: ($x - k.s ; x + k.s$), fórmula de la función de distribución normal y representación simbólica de una distribución normal: $N(\mu, \sigma)$, representación simbólica de la media y desviación típica muestral y poblacional.
- *Elementos actuativos*: estudio descriptivo de datos para ajustar una curva, obtención de límites de intervalos, cálculo de áreas en un histograma y en un polígono de frecuencias, estimación de probabilidades a partir de una tabla de frecuencias, comparación visual, representación gráfica de datos.
- *Elementos intensivos*: Simetría, unimodalidad, posiciones relativas de media, mediana y moda, propiedad de los intervalos centrales, porcentaje y probabilidad en un intervalo, área bajo el polígono de frecuencias en un intervalo, media y desviación típica como parámetros de la distribución normal, función de densidad normal, coeficiente de curtosis, eje de simetría, distribución empírica, tipos de frecuencias, convenios de lecturas de gráficos, intervalos de clases, límites de intervalos, muestra aleatoria, tipos de variables.
- *Elementos validativos*: Análisis, aplicación de una propiedad, comprobación de casos particulares, generalización de propiedades, representación gráfica, síntesis. El segundo año se usaría la simulación con ordenador.

Más específicamente, estos elementos se relacionarían de diversas maneras concretándose en los siguientes objetivos de aprendizaje:

- A partir de una tabla de frecuencias (elemento ostensivo), el alumno debe deducir las características gráficas del histograma y polígono de frecuencias (elementos ostensivos), respecto a la unimodalidad y simetría (elementos intensivos).
- Estimar (elemento actuativo) el valor de la moda y mediana (elementos intensivos) a partir de una tabla de frecuencias (elemento ostensivo).
- Calcular (elemento actuativo), a partir de la tabla de frecuencias (elemento ostensivo), la proporción de observaciones en los intervalos centrales ($x - ks, x + ks$) (elementos intensivos).
- Estimar (elemento actuativo) las *probabilidades*, en los que la *variable* tome *valores en intervalos* dados (elementos intensivos) a partir del histograma y de la tabla de frecuencias (elementos ostensivos).
- Reconocer a partir de un histograma (elemento ostensivo) que las *frecuencias* en un *intervalo* de la *variable* vienen dadas por el *área* comprendida en dicho *intervalo* entre el *eje de abscisas* (elementos intensivos) y el histograma y aplicarlo al cálculo (elemento actuativo)

- de diversas frecuencias (elemento intensivo).
- Comprender la idea de *función de densidad* (elementos intensivo) que permite aproximar el histograma y polígono de frecuencias relativas (elementos ostensivos) en una variable continua (elemento intensivo).
- Reconocer la familia de distribuciones normal (elemento intensivo), mediante la fórmula de la función de densidad (elemento ostensivo) y la representación gráfica (elemento ostensivo) de la misma.
- Interpretar los coeficientes de asimetría y de curtosis (elementos intensivos).

Estos objetivos ponen de manifiesto la riqueza de relaciones que se establecen entre diferentes elementos. No reiteraremos en el análisis de las tareas la descripción del tipo de elemento que se pone en relación para simplificar la lectura ni tampoco lo haremos en el resto de las sesiones.

Introducción al tema

En primer lugar se entregaría el material correspondiente al tema a los alumnos y se les explicaría la investigación en curso, pidiéndoles su colaboración. Seguidamente se haría una introducción al tema, resaltando la importancia de la distribución normal en estadística.

Se comenzaría con una puesta en común en la que se recuerden los elementos principales de una tabla de frecuencias, el significado de los coeficientes de curtosis y de asimetría y de las medidas de tendencia central. Se indicarían los objetivos del tema, descubriendo algunos ejemplos de aplicación de la distribución normal y algunas notas históricas, haciendo luego referencia a la forma característica de dicha distribución.

En el segundo año se decidió que antes de comenzar a trabajar con la pregunta e de la actividad 1, se explicaría brevemente por qué el área de un intervalo dado es aproximadamente igual en el histograma y en el polígono de frecuencias, debido a que el primer año se observaron dificultades en este punto.

Estudio de la simetría y curtosis de una distribución

Se plantearía la primera parte de la actividad 1 que aparece en el Cuadro 5.4.2.1 para introducir propiedades que serán condiciones necesarias para que una distribución empírica pueda逼近arse a una distribución normal.

Cuadro 5.4.2.1. Actividad 1. a - Primera sesión teórica

Actividad 1. La siguiente tabla de frecuencias ha sido obtenida con el paquete estadístico STATGRAPHICS, a partir de los datos de la altura de 1000 chicas, con edades comprendidas entre 15 y 20 años. Se presentan también algunos estadísticos.

Frequency Tabulation for altura

Class	Lower Limit	Upper Limit	Midpoint	Frequency	Relative Frequency	Cumulative Frequency	Cum. Rel. Frequency
at or below	140,0			0	0,0000	0	0,0000
4	146,0	148,0	147,0	1	0,0010	1	0,0010
5	148,0	150,0	149,0	0	0,0000	1	0,0010
6	150,0	152,0	151,0	10	0,0100	11	0,0110
7	152,0	154,0	153,0	14	0,0140	25	0,0250
8	154,0	156,0	155,0	23	0,0230	48	0,0480
9	156,0	158,0	157,0	65	0,0650	113	0,1130
10	158,0	160,0	159,0	70	0,0700	183	0,1830
11	160,0	162,0	161,0	132	0,1320	315	0,3150
12	162,0	164,0	163,0	158	0,1580	473	0,4730
13	164,0	166,0	165,0	165	0,1650	638	0,6380
14	166,0	168,0	167,0	143	0,1430	781	0,7810
15	168,0	170,0	169,0	99	0,0990	880	0,8800
16	170,0	172,0	171,0	71	0,0710	951	0,9510
17	172,0	174,0	173,0	27	0,0270	978	0,9780
18	174,0	176,0	175,0	19	0,0190	997	0,9970
19	176,0	178,0	177,0	3	0,0030	1000	1,0000
above	180,0			0	0,0000	1000	1,0000

Mean = 164,721 Standard deviation = 4,92274 Variance = 24,2334
 Skewness = -0,165955 Kurtosis = -0,0385743

1.a. ¿Qué características puedes deducir, sobre la forma de las representaciones gráficas del histograma y polígono de frecuencias de esta distribución? ¿Es la distribución aproximadamente simétrica respecto a su centro? ¿Qué nos indica el coeficiente de apuntamiento?

Para resolverla se podría tomar la columna de las frecuencias absolutas (FREQUENCY) observando que las frecuencias equidistantes del intervalo central son aproximadamente iguales, lo que corresponde a una curva simétrica. Por otro lado, en los intervalos inferiores y superiores las frecuencias son bastante pequeñas, mientras que en los intervalos centrales (intervalos 7 a 10) se acumulan la mayor cantidad de datos, por lo que las barras centrales del histograma serían más elevadas que las extremas.

Otra posibilidad sería analizar el coeficiente de asimetría, que posee un valor negativo correspondiente a una distribución asimétrica a izquierda con asimetría leve. También podríamos estudiar el coeficiente de curtosis, que indica que la distribución es un poco más aplanada que la normal, pero bastante cercana a ella. Estos conceptos ya habrían sido trabajados en temas previos y se pretendería que el alumno los recordara por sí solo o con ayuda del compañero.

Determinación de moda y mediana

Luego de analizar y discutir los resultados obtenidos en las cuestiones anteriores, se plantearía la actividad 1.b (Cuadro 5.4.2.2) para recordar el significado de la mediana y de la moda y de las propiedades que cumplen éstas en una distribución simétrica.

Cuadro 5.4.2.2. Actividad 1. b - Primera sesión teórica

1.b. ¿En qué intervalo se encontrarían la moda y mediana? ¿Cuál sería su valor aproximado? ¿Recuerdas el significado de estas medidas?

Se esperaría que el alumno recordase que la moda es el valor más observado; en caso contrario el profesor lo recordaría. Como se trabaja con intervalos de clase, esperaríamos que el alumno busque el intervalo modal (164; 166). Puesto que la mediana deja a cada lado 50 % de los datos, para encontrarla, se debería observar la columna de frecuencias acumuladas (CUMULATIVE FREQUENCY) y buscar el intervalo que contenga la frecuencia acumulada 500, que es el intervalo (164; 166) cuya frecuencia acumulada es 638. En el breve resumen numérico que se presenta en la tabla de frecuencias (Cuadro 5.4.2.1), se puede ver que la media de la distribución es 164,721, con lo cual media, mediana y moda corresponden al intervalo (164; 166). Estos resultados serían necesarios, pero no suficientes para que la distribución que se analiza sea aproximadamente normal.

Porcentajes de casos en intervalos centrales

La actividad 1c, estaría encaminada a introducir la regla que da la proporción de valores en los intervalos centrales en distribuciones normales, comprobando dicha propiedad empíricamente.

Cuadro 5.4.2.3. Actividad 1. c - Primera sesión teórica

1. c. Calcula, a partir de la tabla y de un modo aproximado, el porcentaje de chicas en este grupo cuya altura está comprendida en el intervalo ($\bar{x} - 2s$, $\bar{x} + 2s$), donde con \bar{x} indicamos la media y con s la desviación típica de esta muestra. En una distribución normal teórica, el porcentaje de casos que está situado a menos de dos desviaciones típicas de la media es del 95%.

Para calcular el porcentaje de chicas con alturas comprendidas en el intervalo solicitado, se tendría en cuenta que: $\bar{x} = 164,721$ y $s = 4,92274$ (donde \bar{x} es la media y s es la desviación típica de la muestra), en consecuencia:

$$(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) = (164,7 - 4,9 ; 164,7 + 4,9) = (154,8 ; 174,6)$$

Como los intervalos de la tabla de frecuencias poseen extremos enteros, se debería realizar un redondeo y se podrían presentar dos posibilidades: Tomar el intervalo (154; 176) o el intervalo (154; 174), aunque éste sería el más aproximado. Si se trabaja con el intervalo (154; 176), sumando las frecuencias relativas (RELATIVE FREQUENCY) se obtendría como resultado: 0,972. Por lo tanto, la proporción de chicas que poseen una altura comprendida entre 154 y 176 sería 97,2%.

Con la segunda opción, se obtendría un 95,3 % de chicas con una altura comprendida entre 154 y 174. Una vez finalizado el cálculo, el profesor mostraría a los alumnos cómo estos valores

se aproximan al 95% teórico esperado en las distribuciones normales. Al llegar a este punto, se introducirían los conceptos de variable estadística y aleatoriedad, experimento estadístico y aleatorio, resaltando sus diferencias y se continuaría con la siguiente cuestión planteada en la actividad 1.

Estimación de probabilidades a partir de tablas de frecuencias

La siguiente cuestión se plantearía con la finalidad de establecer las primeras relaciones entre porcentaje en un intervalo y probabilidad.

Cuadro 5.4.2.4. Actividad 1. d - Primera sesión teórica

1.d. Supongamos que escribimos el nombre de cada chica que tomó parte en la muestra anterior en un papel y elegimos uno de ellos al azar, ¿Cuál será la probabilidad de que la chica en cuestión tenga una altura comprendida en el intervalo ($\bar{X}-2.S$, $\bar{X}+2.S$)? ¿Y que tenga una altura que caiga fuera del intervalo?

Se trataría de que el alumno reconozca que la proporción hallada en la actividad anterior podría usarse para estimar la probabilidad de que una chica elegida al azar tenga una altura dentro del intervalo solicitado, y que recuerde que la probabilidad total de un espacio muestral es igual a 1, es decir, el 100 % de los casos observados. En conclusión, la probabilidad de que la chica seleccionada tenga una altura fuera de ese intervalo sería de: $1 - 0,953 = 0,047$ (o del 4,7 %), trabajando de manera implícita con la propiedad de la probabilidad del suceso complementario. Otra forma de resolver esta última parte, podría ser que el alumno sumara las frecuencias correspondientes a los demás intervalos, sin incluir el intervalo (154; 174).

Análisis a priori de las actividades que los alumnos resolverían y entregarían por escrito

Con estas actividades se reafirmarían las ideas que aparecieron en las actividades anteriores. El alumno observaría que el área correspondiente a un determinado intervalo en el histograma, es aproximadamente igual al área en el mismo intervalo en el polígono de frecuencias, y que el valor de la probabilidad se puede estimar por medio del valor del área.

Para contestar a la pregunta 1.e.1 (Cuadro 5.4.2.5) se deberían sumar las frecuencias relativas correspondientes a las clases 11 a 15 inclusive (ver Tabla en Cuadro 5.4.2.1), que da un total de 0,697. En la pregunta e.2, se debería destacar que el área de este intervalo en el histograma es la misma que en el polígono de frecuencias, por lo tanto también sería 0,697. La probabilidad pedida en el ítem e.3, sería 69,7%.

Cuadro 5.4.2.5. Actividades 1. e y 1.f de la primera sesión teórica

1.e. En un histograma, las áreas de cada rectángulo representan las frecuencias en el intervalo. Recíprocamente, a partir de las frecuencias podemos calcular el área que, en el histograma corresponde a un intervalo dado. En el histograma de frecuencias relativas que representa a esta distribución:

- e.1. ¿Cuál sería el área correspondiente al intervalo (160 - 170)?*
- e.2. ¿Cuál sería el área aproximada en este intervalo en el polígono de frecuencias?*
- e.3. ¿Cuál sería la probabilidad de que una chica elegida al azar tenga una altura entre 160 y 170?*
- e.4. ¿Y que mida más de 174 cm?*

1.f. Compara los resultados de e.1 y e.3. ¿Qué conclusiones puedes extraer?

Para contestar la pregunta e.4, una opción sería sumar las frecuencias relativas correspondientes a las clases 14 en adelante, con lo que obtenemos 0,022, es decir un 2,2 %. También podría realizarse el cálculo utilizando las frecuencias acumuladas, restando el total menos la frecuencia acumulada correspondiente al intervalo (172; 174) y luego dividiendo por el total y multiplicando por 100 o, utilizando la frecuencia acumulada relativa y realizando la diferencia del total menos la frecuencia del intervalo (172;174) multiplicando luego por 100.

La distribución normal como modelo que aproxima una distribución de datos empírica

Finalizada la actividad anterior, se realizaría una introducción de la distribución normal definiéndola a partir de la aproximación al polígono de frecuencias cuando se aumenta el número de casos progresivamente y el número de intervalos.

Para la secuencia didáctica del primer año, se pensó plantear en forma oral esta actividad, discutiéndola entre el profesor y los alumnos, de tal manera que se pudiera mostrar de qué forma puede llegar a aproximarse la distribución empírica a la teórica. Pero, en el segundo año, con la

introducción del ordenador conectado al proyector en las sesiones teóricas, se planificó esta actividad de tal manera que se pudiera mostrar la aproximación gráfica por medio del ordenador, utilizando el fichero COEF_INT, descrito en la sección 5.3. Se utilizarían para ello, las representaciones del histograma y polígono de frecuencias de la distribución del coeficiente intelectual y se compararía con la curva normal superpuesta (Fichero COEF_INT. Anexo IV). Se utilizaría el ordenador, proyectando la salida en una pantalla y aumentando el número de casos de 100 hasta 10.000. Terminada la introducción, se definiría brevemente la distribución normal, su ecuación y fórmula, según se describe en las páginas 3 a 7 del apunte (Anexo II) analizando el significado de los parámetros.

Como parte final de la sesión se pensó en la siguiente actividad que sería discutida en la clase.

Cuadro 5.4.2.6. Actividad 2 de la primera sesión teórica

Actividad 2: La función de densidad es una función matemática que usamos como modelo de una distribución de datos. Con ella podemos representar aproximadamente y hacer cálculos aproximados sobre la distribución de datos. Representa, aproximadamente, la función de densidad que correspondería a las alturas de las 1000 chicas, dadas en la Tabla 1, y compárala con la gráfica usual en las distribuciones normales. ¿Piensas que se obtendría una buena aproximación al representar los datos mediante una distribución normal? ¿Cuáles serían la media y desviación típicas de dicha distribución normal teórica?

5.4.3. PRIMERA SESIÓN PREVISTA A DESARROLLAR EN EL AULA DE INFORMÁTICA

En la primera sesión práctica se analizaría una variable estadística que podría aproximarse adecuadamente mediante una distribución normal, con el fin de que los alumnos adquieran criterios de identificación de tales variables, en particular, la forma de la distribución, los valores de los coeficientes de asimetría y curtosis, unimodalidad, posición relativa de media, mediana y moda y proporción de casos alrededor de la media. Los alumnos harían un análisis similar al desarrollado en la primera sesión teórica pero se trabajaría con opciones conocidas del programa STATGRAPHICS. Los elementos de significado previstos se describen a continuación.

Elementos del significado institucional local previstos

- *Extensivos:* problema de ajuste de un modelo a una distribución de datos reales;
- *Ostensivos:* histograma, polígono de frecuencias, gráfica de la función de densidad normal, tabla de datos, tabla de frecuencias y resumen estadístico, representación simbólica de intervalos centrales para una población y para una muestra: $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$ y $(\bar{x} - ks, \bar{x} + ks)$;
- *Actuativos:* representación gráfica de datos, estudio descriptivo de una variable para ajustar una curva, obtención de límites en intervalos centrales, cálculo de porcentajes en tablas de frecuencias con ordenador, estimación de probabilidades a partir de tablas de frecuencias, comparación visual;
- *Intensivos:* simetría, unimodalidad, posiciones relativas de media, mediana y moda, coeficientes de asimetría y curtosis y tipificados, propiedad de intervalos centrales en una distribución normal, función de densidad normal, simetría, curtosis y unimodalidad en la distribución normal, bondad de ajuste, media y desviación típica muestral y poblacional, distribución empírica, experimento aleatorio y estadístico, tipos de frecuencias, convenios de lecturas de gráficos, intervalos de clases, muestra aleatoria, población, probabilidad, proporción, porcentaje, tipos de variables;
- *Validativos:* análisis, comprobación, generalización y aplicación de propiedades, síntesis, simulación con ordenador, representación gráfica, síntesis.

Más específicamente, estos elementos se relacionarían de diversas maneras concretándose en los siguientes objetivos de aprendizaje:

- Identificar variables (elementos intensivos) para las que puede ser adecuado ajustar una distribución normal a una distribución de datos (elemento extensivo), tomando como base las propiedades gráficas (elementos intensivos) del histograma y curva de densidad (elementos ostensivos), los coeficientes de asimetría y curtosis (elementos intensivos) y

basándose en la propiedad de las áreas correspondientes a los intervalos $\mu \pm k\sigma$ (elementos intensivo).

- Calcular (elemento actuario) la *proporción* de valores por encima o por debajo de un determinado valor o entre dos valores dados en una *variable estadística* (elementos intensivos) a partir de la tabla de frecuencias (elemento ostensivo).
- Representar gráficamente con la opción DESCRIBE – NUMERIC DATA – ONE VARIABLE ANALYSIS (elementos actuarios), el histograma, el polígono de frecuencias y la curva de la función de densidad (elementos ostensivos). Reconocer las propiedades gráficas de la distribución normal (elementos intensivos).
- Representar gráficamente (elemento actuario) la función de densidad (elemento intensivo) de algunas variables (elementos intensivos) en el fichero TESTP, realizando una comparación visual (elemento actuario) de su forma con las del histograma y polígono de frecuencias (elementos ostensivos).
- Analizar la simetría (elemento intensivo) de la curva de densidad (elemento ostensivo) en algunas variables (elementos intensivos) y decidir si podrían o no ser aproximadas adecuadamente mediante una distribución normal (elemento extensivo).
- Comprobar (elemento validativo) los valores de los coeficientes de asimetría y curtosis (elementos intensivos). Dar una interpretación (elemento validativo) de estos valores en relación con la distribución empleada.
- Ajustar una distribución normal a los datos (elemento extensivo), calculando con la opción adecuada del programa (elemento actuario) los parámetros (elementos intensivos).
- Calcular (elemento actuario) la *proporción* de observaciones en los *intervalos* ($x - ks$, $x + ks$) para las *variables estadísticas* (elementos intensivos), particularizando (elemento validativo) para algunos valores de k usando la tabla de frecuencias (elemento ostensivo). Justificar (elemento validativo) si la distribución normal constituye o no una aproximación aceptable.

Estos elementos y objetivos se considerarán en las actividades que se presentan a continuación.

Introducción de la sesión

Antes de comenzar, se previó hacer una breve descripción de los programas y menús que se utilizarían para resolver las actividades planteadas. Para esta sesión en particular, se trabajaría con la variable P_TOTAL del fichero TESTP (Ver su descripción en el Anexo IV).

Análisis a priori de las actividades que los alumnos resolverían y entregarían en disquete

La primera actividad que se plantearía se transcribe en el cuadro 5.4.3.1. Se buscaría que el alumno observe la forma aproximadamente simétrica del polígono de frecuencias, y compare la forma de éste y la de la curva de densidad para realizar una comparación visual.

Cuadro 5.4.3.1. Actividad 1 de la primera sesión práctica

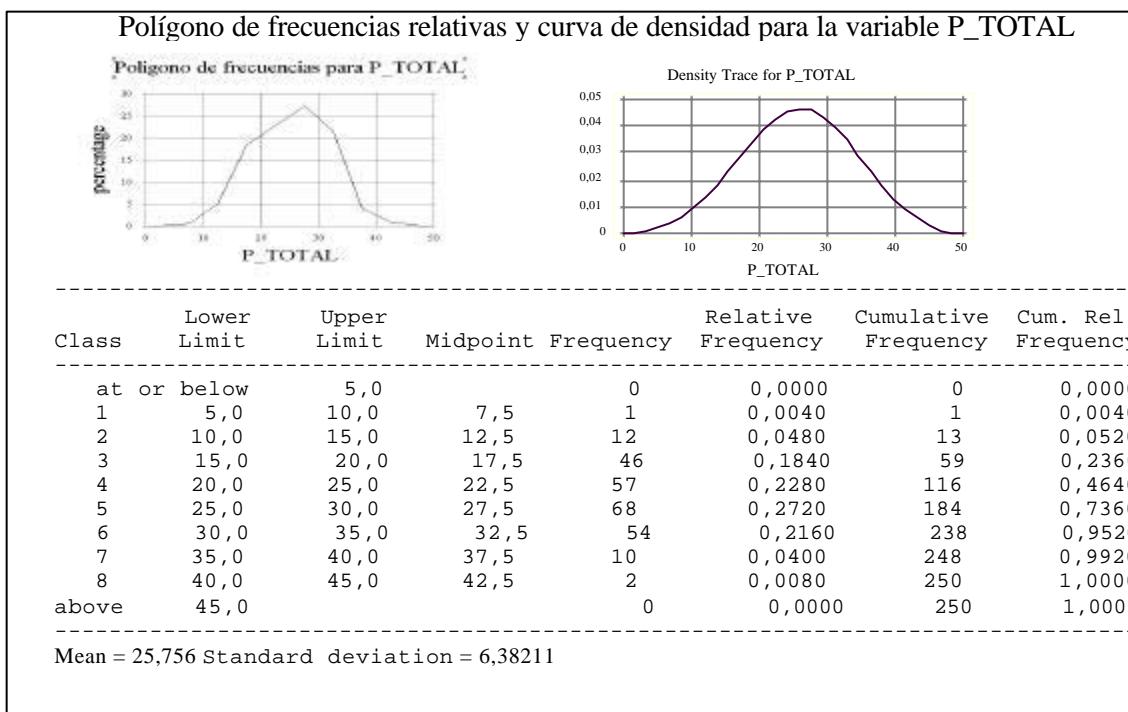
- Abre el programa STATGRAPHICS y carga el fichero TESTP. Este fichero, que viene descrito en los apuntes, contiene los resultados de diferentes puntuaciones obtenidas al pasar un test de intuiciones probabilísticas a una muestra de alumnos. Lee en los apuntes la descripción del fichero y el significado de las variables.
- En esta práctica y la que sigue vamos a analizar en este fichero algunas variables, para decidir si es o no adecuado ajustar una distribución normal a las mismas. En el tema escrito sobre la distribución normal se describen los puntos a tener en cuenta para decidir si la distribución normal es una buena aproximación a los datos. Consulta estos pasos en la página 12, en los que se incluye un ejemplo, que puede servirte en la realización de esta práctica. Analizaremos sólo variables numéricas, ya que la distribución normal no se aplica a variables cualitativas.
- En esta práctica vamos a analizar la puntuación total en el test de probabilidad, para ver si la distribución normal sería una aproximación aceptable para esta variable. Estudiaremos, primeramente la forma de la distribución, para comparar con la esperada en una curva normal.

Actividad 1. Con ayuda del programa DESCRIBE; ONE VARIABLE NUMERICAL, prepara una tabla de frecuencias y un polígono de frecuencias relativas de la puntuación total en el test de probabilidad.

Estudia la forma del polígono de frecuencias relativas y la función de densidad

a) ¿Son el polígono y la función de densidad aproximadamente simétricos? b) ¿Tiene una o varias modas?

También se pretende que se analice la unimodalidad, a partir de la tabla de frecuencias y del polígono. Una dificultad posible sería, que si el número de intervalos es excesivamente grande, se produzcan picos y no se observen estas propiedades. Además la opción del programa con la que se puede modificar el número de intervalos, no está en un menú directo y el profesor debería explicar la manera de cambiar el ancho de los intervalos. A continuación presentamos algunos de los elementos ostensivos que podrían ser aplicados por los alumnos en la resolución de la actividad 1.



A medida que se fuesen realizando las actividades, se generaría un debate en relación con los elementos analizados para mostrar a los alumnos la utilidad de cada uno de ellos y la manera de obtener una conclusión a partir de los resultados obtenidos. Se plantearía a continuación la actividad que se transcribe en el cuadro 5.4.3.2.

Cuadro 5.4.3.2. Actividad 2 de la primera sesión práctica

Actividad 2. Mediante **SUMMARY STATISTICS** calcula los valores del coeficiente de asimetría y de curtosis y valores tipificados (si hace falta, usa **PANE OPTIONS**). ¿Son los valores obtenidos aceptables para una distribución normal?

En esta ocasión, el alumno debería utilizar el resumen estadístico (**SUMMARY STATISTICS**), dentro de la opción **ONE VARIABLE ANALYSIS** del menú **DESCRIBE**, que le serviría para calcular los coeficientes solicitados. A continuación, se muestran los resultados que entregaría el programa.

Summary Statistics for P-total

Skewness = -0,107854
Kurtosis = -0,456166
Std. Skewness = -0,696194
Std. Kurtosis = -1,47227

De estos valores se podría concluir que esta distribución es levemente asimétrica a izquierda y un poco más aplanada que la normal, ya que los coeficientes de asimetría y curtosis son ambos negativos. Se suponía que los alumnos lograrían interpretar los valores de los coeficientes tipificados, aceptándose como válidos los que estén en el intervalo [-2, 2]. Al culminar esta actividad, podría recordarse nuevamente los resultados obtenidos en ambas actividades con el fin de mostrar la relación existente entre ellos y luego se pasaría a desarrollar las dos últimas actividades que se transcriben en el cuadro 5.4.3.3.

Cuadro 5.4.3.3. Actividades 3 y 4 de la primera sesión práctica

3. Has estudiado en clase teórica la regla de los intervalos $\mu \pm \sigma$, $\mu \pm 2\sigma$, $\mu \pm 3\sigma$ en una distribución normal. Utilizando la tabla de frecuencias, calcula el porcentaje de niños cuya puntuación total está incluida en los intervalos $x \pm s$, $x \pm 2s$, $x \pm 3s$. El valor de la media y desviación típica viene dado en la tabla de frecuencias que has construido anteriormente. Si es necesario, cambia la amplitud de los intervalos para que los extremos coincidan con los valores que te interesan. ¿Se cumple la regla 68-95-99?
4. Teniendo en cuenta los puntos 1, 2, 3 ¿Crees que la distribución de esta variable es aproximadamente normal?

Con la actividad 3 se esperaría que el alumno comprobaría si los datos empíricos siguen la propiedad de los intervalos centrales en la distribución normal y que pudieran manipular las opciones de la tabla de frecuencias, para realizar un cálculo más rápido. Los intervalos que obtendría con los valores de media y desviación típica que aparecen en la tabla de frecuencias serían aproximadamente los siguientes:

$$\begin{aligned}(\underline{x} - s, \underline{x} + s) &= (19,37389 ; 32,13811) \cong (19,5 ; 32) \\(\underline{x} - 2s, \underline{x} + 2s) &= (12,99178 ; 38,5202) \cong (13 ; 38,5) \\(\underline{x} - 3s, \underline{x} + 3s) &= (6,41367 ; 44,902) \cong (6,5 ; 45)\end{aligned}$$

En consecuencia, debería modificar la tabla de frecuencias para obtener tales intervalos. El alumno realizaría una aproximación de estos intervalos y debería ser consciente de que los resultados obtenidos no serían exactos y que se obtendrían distintos resultados aproximados, de acuerdo al redondeo realizado y al número de intervalos que se tome en la tabla de frecuencias.

Class	Lower Limit	Upper Limit	Midpoint	Frequency	Relative Frequency	Cumulative Frequency	Cum. Rel. Frequency
at or below	9.8			0	0.0000	0	0.0000
1	9.8	11.4	10.6	4	0.0160	4	0.0160
2	11.4	13.0	12.2	3	0.0120	7	0.0280
3	13.0	14.6	13.8	2	0.0080	9	0.0360
4	14.6	16.2	15.4	11	0.0440	20	0.0800
5	16.2	17.8	17.0	6	0.0240	26	0.1040
6	17.8	19.4	18.6	20	0.0800	46	0.1840
7	19.4	21.0	20.2	22	0.0880	68	0.2720
8	21.0	22.6	21.8	7	0.0280	75	0.3000
9	22.6	24.2	23.4	27	0.1080	102	0.4080
10	24.2	25.8	25.0	14	0.0560	116	0.4640
11	25.8	27.4	26.6	33	0.1320	149	0.5960
12	27.4	29.0	28.2	26	0.1040	175	0.7000
13	29.0	30.6	29.8	9	0.0360	184	0.7360
14	30.6	32.2	31.4	24	0.0960	208	0.8320
15	32.2	33.8	33.0	13	0.0520	221	0.8840
16	33.8	35.4	34.6	17	0.0680	238	0.9520
17	35.4	37.0	36.2	8	0.0320	246	0.9840
18	37.0	38.6	37.8	1	0.0040	247	0.9880
19	38.6	40.2	39.4	1	0.0040	248	0.9920
20	40.2	41.8	41.0	1	0.0040	249	0.9960
21	41.8	43.4	42.6	1	0.0040	250	1.0000
above	43.4			0	0.0000	250	1.0000
<hr/>							
Mean = 25.756 Standard deviation = 6.38211							

En relación con la tabla que mostramos como ejemplo antes, se obtendría un 64,8 % para el intervalo $(\underline{x} - s, \underline{x} + s)$, 96 % para el intervalo $(\underline{x} - 2s, \underline{x} + 2s)$ y, 100 % para el intervalo $(\underline{x} - 3s, \underline{x} + 3s)$, con lo que se podría concluir que aproxima bien a la regla 68-95-99,7 %.

5.4.4. SEGUNDA SESIÓN PREVISTA A DESARROLLAR EN EL AULA TRADICIONAL

En esta sesión se recordaría lo estudiado en las clases anteriores y se introducirían diversas características y propiedades de la distribución normal. También, se recordaría la propiedad de los intervalos centrales, introducida en la clase práctica y se explicaría de qué manera se puede utilizar la curva de densidad para extraer información cuando se desea calcular probabilidades

sencillas. Se ha previsto trabajar con los siguientes elementos de significado.

Elementos del significado institucional local previstos

- *Extensivos*: ajuste de un modelo, aproximación de distribuciones discretas.
- *Ostensivos*: histograma, gráfica de la función de densidad normal, gráficos de puntos, representación de áreas bajo la curva normal en determinados intervalos, representación simbólica de intervalos centrales para una población y para una muestra: ($\mu - k\sigma, \mu + k\sigma$) y ($\bar{x} - ks, \bar{x} + ks$), representación simbólica de probabilidades y de los axiomas de probabilidad, representación simbólica de las probabilidades en un intervalo: $P(x_1 < X < x_2)$.
- *Actuativos*: estudio descriptivo de datos para ajustar una curva, obtención de límites en intervalos, cálculo de áreas en la curva normal, comparación visual, representación gráfica de datos.
- *Intensivos*: simetría, unimodalidad, posiciones relativas de media, mediana y moda y propiedad de intervalos centrales en una distribución normal, axiomas de probabilidad, ajuste, coeficientes de asimetría y curtosis, media y desviación típica muestral y poblacional, distribución empírica, eje de simetría, convenios de lectura de gráficos, intervalos de clases, intervalos centrales, límites de intervalos, muestra aleatoria, población, probabilidad, reglas de cálculo de probabilidades, proporción, porcentaje, tipos de variables, áreas bajo la curva normal, parámetros de la distribución normal, función de densidad normal, funciones de densidad simétricas, probabilidad de valores en un intervalo de la distribución normal.
- *Validativos*: aplicación y comprobación de propiedades, representación gráfica, análisis y síntesis.

Más específicamente, estos elementos se relacionarían de diversas maneras concretándose en los siguientes objetivos de aprendizaje:

- Comparar visualmente (elemento actuativo) la forma de la curva de densidad normal (elemento ostensivo) con funciones de densidad de variables aleatorias normales y no normales (elementos ostensivos) dibujadas a mano (elemento actuativo), reconociendo las propiedades gráficas de unimodalidad y simetría en la distribución normal (elementos intensivos).
- Analizar (elemento validativo) ejemplos de variables aleatorias reales (elementos intensivos) cuya distribución (elemento intensivo) se conoce en forma aproximada, y discriminar si podrían o no ser adecuadamente modelizadas por medio de una distribución normal (elemento extensivo).
- Analizar la propiedad de la posición de media, mediana y moda (elementos intensivos) y aplicar (elemento validativo) dicha propiedad para calcular el tanto por ciento de casos por encima o por debajo de la media (elemento actuativo).
- Calcular (elemento actuativo) el intervalo central de valores (elementos intensivos) que contiene el 95% de los datos en una distribución normal de media y desviación típica conocidas (elementos intensivos).
- Aplicar (elemento validativo) la propiedad de los intervalos centrales ($\bar{x} - ks, \bar{x} + ks$) en las distribuciones normales (elementos intensivos), particularizando para algunos valores de k y comprobarla (elemento validativo) para una cierta distribución (elemento intensivo), así como las correspondientes a la simetría, deduciendo (elemento validativo) que la distribución normal podría ser un buen modelo para aproximar los datos empíricos (elemento extensivo).

Se comenzaría la sesión recordando las propiedades de una distribución normal desarrolladas en las clases anteriores.

Simetría y parámetros de la distribución normal

A continuación se describirían las propiedades de simetría de la distribución normal incluidas en la página 6 del Anexo I, el significado de los parámetros de una distribución normal y su interpretación geométrica sobre la curva de densidad. Luego se realizaría y discutiría la actividad 3 que se transcribe en el Cuadro 5.4.4.1., para que el alumno pudiera ver que existen

distintas funciones de densidad, y que observara las características gráficas de las diversas funciones de densidad.

Esperaríamos que los alumnos logren dar sus propios ejemplos y de esta manera realizar un debate en el que se pudieran extraer conclusiones sobre los diferentes tipos de curvas de densidad. También pretendemos que el alumno identifique otras curvas de densidad simétricas que no son necesariamente normales, para que observe que la simetría es una condición necesaria para la normalidad pero no suficiente.

Cuadro 5.4.4.1. Actividad 3 – Segunda sesión teórica

Actividad 3: a. Trazar, a mano alzada, una curva de densidad normal. b. Trazar una curva de densidad que sea simétrica, pero cuya forma sea diferente a la de la distribución normal

La distribución normal como modelo que aproxima distribuciones empíricas: ejemplos

Uno de los primeros puntos que se debe analizar cuando se desea determinar si un conjunto de datos puede ser o no aproximado por medio de una distribución normal, es el carácter de la variable con la que se está trabajando. Para poner de manifiesto esta importancia, hemos planificado realizar la actividad que se detalla en el cuadro 5.4.4.2.

Cuadro 5.4.4.2. Actividad 4 – Segunda sesión teórica

Actividad 4: Supongamos que hacemos un estudio estadístico sobre los alumnos de la clase. Describir ejemplos de variables cuya distribución pudiera aproximarse bien mediante la distribución normal y otras para las que no sea adecuada dicha distribución.

Se esperaría que el alumno discriminaría aquellos casos en los que se puede aplicar la distribución normal y aquellos en los que no podrá aplicar tal modelo, para concluir que se podrá aplicar la distribución normal en casos en que la variable sea continua o discreta con muchos valores, pero no cuando la variable sea cualitativa.

Propiedades relacionadas con la media y desviación típica. Cálculo de probabilidades utilizando propiedades de la curva normal

Se continuaría explicando las propiedades de la distribución normal en relación con sus parámetros, y nos centraríamos en la propiedad de los intervalos centrales, la cual nos permitiría abordar las actividades descritas en los cuadros 5.4.4.3 y 5.4.4.4.

Cuadro 5.4.4.3. Actividad 5 – Segunda sesión teórica

Actividad 5: Las puntuaciones obtenidas en un test de inteligencia por un grupo de alumnos siguen una distribución normal con media 110 y desviación típica 25.

- ¿Qué proporción de alumnos puntuó por encima de 110?*
- Obtener los valores de las puntuaciones tales que el 95% central de los casos esté comprendido entre dichos valores.*

Como se estaría trabajando sobre el supuesto previo de que la distribución es normal, se podrían utilizar las características de simetría y unimodalidad para resolver el problema, por lo que no se precisa introducir al alumno en el manejo de las tablas. Como en una distribución normal el 50% de los datos se distribuyen a cada lado de la media, la proporción de alumnos con una puntuación mayor que la media sería del 50%.

En el ítem b, se mostraría que debido a que en una distribución normal, el 95 % central de los datos se presenta en el intervalo $\mu \pm 2\sigma$, este porcentaje estaría comprendido en el intervalo (60 ; 160) como consecuencia del siguiente cálculo:

$$(\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma) = (110 - 2 \cdot 25; 110 + 2 \cdot 25) = (60; 160)$$

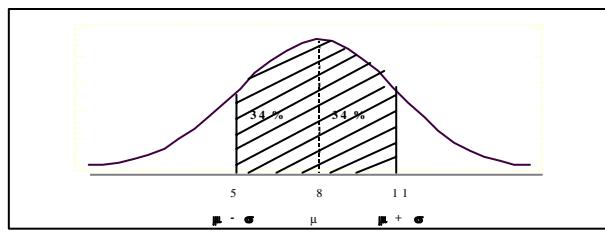
Tanto en esta actividad como en la siguiente, el objetivo primordial sería capacitar al alumno en la aplicación de propiedades de la distribución normal para realizar el cálculo de probabilidades.

Cuadro 5.4.4.4. Actividad 6 – Segunda sesión teórica

Actividad 6: La temperatura media en Noviembre, en Nueva York, sigue una distribución normal con 8 grados de media y 3 grados de desviación típica.

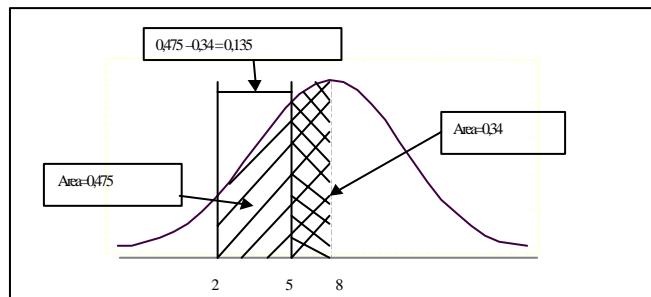
- ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura de un día esté comprendida entre 5 y 11 grados?*
- ¿Y entre 2 y 5 grados?*
- ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura sea menor que 2 grados?*

Para calcular la probabilidad pedida en el primer ítem de la actividad 6 (Cuadro 5.4.4.4) se debería destacar que el intervalo $(5 ; 11)$ corresponde al intervalo central: $(\mu - \sigma, \mu + \sigma) = (8 - 3 ; 8 + 3)$, por lo que es factible aplicar la propiedad de los intervalos centrales. De esta manera se podría afirmar que la probabilidad de que la temperatura de un día esté entre 5 y 11 grados es del 68 %. La solución se facilitaría con la representación de la función de densidad, como la de la figura que se observa a continuación, que es un elemento ostensivo muy potente para visualizar la probabilidad pedida.



Utilizando un razonamiento similar se podría resolver el ítem 6b , ya que se podría observar que: $5 = \mu - \sigma$ y $2 = \mu - 2\sigma$. Esto valores corresponden a los límites inferiores de los intervalos centrales $(\mu - \sigma ; \mu + \sigma)$ y $(\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma)$, de probabilidades respectivas 95 % y 68 %. Tomando la mitad de cada uno de los intervalos, se tendría el 47,5 % y 34% respectivamente. En consecuencia, para hallar la probabilidad de que la temperatura esté entre 2 y 5 grados, se debería hacer la diferencia de los dos porcentajes anteriores, obteniéndose: $47,5 \% - 34 \% = 13,5 \%$.

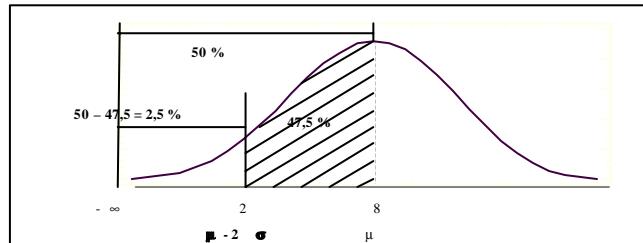
En conclusión, el alumno debería aplicar las propiedades de simetría de la curva y la regla de adición de probabilidades, así como la de la probabilidad del suceso contrario. Estas reglas no han sido objeto explícito de enseñanza, pero se pretende que el alumno las descubra por sí mismo, usando la representación de la probabilidad como área bajo la curva, la cual reproducimos a continuación.



En la actividad 6c, se estaría trabajando con el intervalo $(-\infty ; 2)$, el cual correspondería a: $(-\infty ; \mu - 2\sigma)$. Por un lado, el intervalo $(\mu ; \mu - 2\sigma)$ corresponde al 47,5 % de los datos y por otro, el intervalo $(-\infty ; \mu)$ corresponde al 50 % de los datos. Si se aplica la propiedad de simetría de la distribución normal, el porcentaje sería: $50 \% - 47,5 \% = 2,5 \%$, el cual se representa en la figura contigua.

Ajuste de una distribución normal: propiedades que debe seguir la distribución empírica

Se presentaría un resumen del contenido teórico desarrollado en estas sesiones utilizando el ejemplo 3 del apunte (pp. 9 a 13, Anexo II), el cual también serviría para recordar las opciones del programa y los conceptos que se trabajarían en la sesión práctica siguiente.



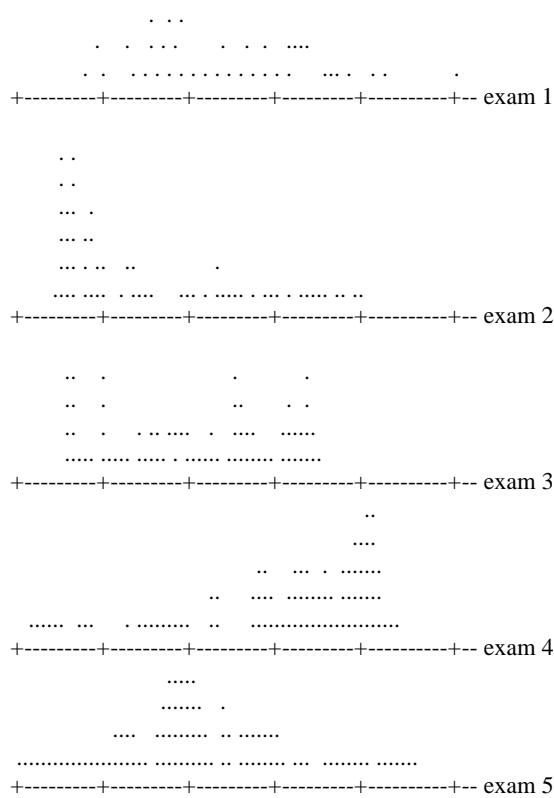
Análisis a priori de las actividades que los alumnos resolverían y entregarían por escrito

Para cerrar esta sesión los alumnos resolverían la actividad que se presenta en el cuadro 5.4.4.5. Con ella se podría diferenciar datos empíricos que provienen de una distribución normal de los que provienen de otro tipo de distribuciones continuas, utilizando las propiedades de simetría y unimodalidad. Se realizaría una comparación visual para buscar una curva que aproxime a cada uno de los diagramas de puntos.

Se concluiría que las muestras que no provienen de una distribución normal corresponden a los exámenes 2, 3 y 4, debido a que el gráfico correspondiente al examen dos es asimétrico a derecha, el del examen 3 presenta varias modas y el del examen 4 es asimétrico a izquierda.

Cuadro 5.4.4.5. Actividad 7 – Segunda sesión teórica

Actividad 7: Los siguientes gráficos muestran las distribuciones de las puntuaciones de 5 exámenes. Dos de estas muestras han sido extraídas de poblaciones normalmente distribuidas. Identifica las tres muestras que no proceden de una distribución normal, indicando en qué te basas.



5.4.5. SEGUNDA SESIÓN PREVISTA A DESARROLLAR EN EL AULA DE INFORMÁTICA

Esta sesión tiene la finalidad de mostrar al alumno un ejemplo de una distribución discreta que no se aproxima a la distribución normal. Al comienzo de la clase, se realizaría un breve repaso de lo realizado en la clase práctica anterior y de las propiedades desarrolladas en las dos clases teóricas.

Elementos del significado institucional local previstos

En las tres primeras actividades de esta práctica se aplican los mismos elementos de significado que en la primera sesión práctica, mientras que en las tres últimas actividades se aplicarían los siguientes elementos de significado:

- *Extensivos*: ajuste de un modelo, aproximación de distribuciones discretas;
- *Ostensivos*: DISTRIBUTION FITTING, TAIL AREAS, SUMMARY STATISTICS, representación de áreas o intervalos bajo la curva normal;
- *Actuativos*: estimación de probabilidades a partir de tablas de frecuencias, cálculo de áreas o probabilidades en la curva normal y de valores críticos (con ordenador), representación gráfica de datos.
- *Intensivos*: función de densidad normal, probabilidad de valores en un intervalo de la distribución normal, parámetros de la distribución normal, simetría, curtosis y unimodalidad en la distribución normal;
- *Validativos*: análisis, aplicación y comprobación de propiedades, síntesis.

Más específicamente, estos elementos se relacionarían de diversas maneras concretándose en los siguientes objetivos de aprendizaje:

- Analizar (elemento validativo) casos en los que no se puede ajustar una distribución normal a una función de densidad empírica (elemento extensivo), tomando como base la gráfica (elemento ostensivo) y por otro lado, basándose en las áreas de los intervalos $\mu \pm k\sigma$

- (elemento intensivo).
- Representar (elemento actuario), con la opción DESCRIBE – NUMERIC DATA – ONE VARIABLE ANALYSIS, el histograma, el polígono de frecuencias y la función de densidad (elementos ostensivos). Aplicar (elemento validativo) propiedades gráficas (elementos intensivos) para reconocer distribuciones no normales (elemento intensivo).
 - Analizar (elemento validativo) la forma de la función de densidad (elemento ostensivo) en algunas variables (elementos intensivos) y decidir cuándo no podrían ser aproximadas adecuadamente (elemento extensivo) mediante una distribución normal (elemento intensivo).
 - Calcular (estudio descriptivo de datos; elemento actuario) los valores de los coeficientes de simetría y curtosis (elementos intensivos), realizando una interpretación de los convenios de lectura (elementos intensivos) de éstos y llegando a una síntesis (elemento validativo) sobre el ajuste (elemento extensivo) esperado en una distribución normal (elemento intensivo).
 - Calcular (elemento actuario) la *proporción constante de observaciones en los intervalos centrales* ($x - ks, x + ks$) en las *distribuciones no normales* (elementos intensivos), aplicando dicha propiedad (elemento validativo) para algunos valores particulares de k en algunas variables (elementos intensivos) usando la tabla de frecuencias (elemento ostensivo). Realizar una síntesis (elemento validativo) de los resultados obtenidos y decidir que la distribución normal no constituye una aproximación aceptable (elemento extensivo).

Desarrollo de la sesión

Se realizaría una puesta en común de lo obtenido en las dos primeras actividades y luego se explicarían brevemente las opciones que se utilizarían en las actividades 4, 5 y 6. Una vez realizadas las actividades que se detallan en el Cuadro 5.4.5.4, se expondrían las conclusiones extraídas por los alumnos, realizando un cierre con las conclusiones más importantes.

Análisis a priori de las actividades que los alumnos resolverían y entregarían en disquete

En las actividades que se citan en el Cuadro 5.4.5.1 se seguiría trabajando con el fichero TESTP.SF, pero en este caso se utilizaría la variable NIVELPROBA (Anexo IV) que no posee las características de simetría y unimodalidad, es decir, es un ejemplo de una variable discreta que no se aproxima a la distribución normal.

Cuadro 5.4.5.1. Actividades 1 y 2 de la segunda sesión práctica

- | |
|--|
| <ul style="list-style-type: none"> ▪ Abre el programa STATGRAPHICS y carga de la unidad U (carpeta DATOS) el fichero TESTP. ▪ En esta práctica vamos a analizar el nivel probabilístico, para ver si la distribución normal sería una aproximación aceptable para esta variable. Estudiaremos, primeramente la forma de la distribución, para comparar con la esperada en una curva normal. <ol style="list-style-type: none"> 1. Con ayuda del programa DESCRIBE; NUMERIC DATA, ONE VARIABLE ANALYSIS, prepara una tabla de frecuencias y un polígono de frecuencias relativas de la puntuación total en el test de probabilidad. Estudia la forma del polígono de frecuencias relativas y la función de densidad a) ¿Son el polígono y la función de densidad aproximadamente simétricos? b) ¿Tiene una o varias modas? 2. Mediante SUMMARY STATISTICS calcula los valores del coeficiente de asimetría y de curtosis y valores tipificados (si hace falta, usa PANE OPTIONS). ¿Son los valores obtenidos aceptables para una distribución normal? |
|--|

Los elementos ostensivos que se obtendrían con el programa se presentan en los Cuadros 5.4.5.2 y 5.4.5.3, de los que se podrían extraer las siguientes conclusiones que ponen en relación diversos elementos de significado:

- Observando el polígono de frecuencias, la curva de densidad, o la tabla de frecuencias se observarían las dos modas, con lo que no se cumpliría la condición de unimodalidad.
- Realizando una comparación visual, también se podría apreciar que la función de densidad no se asemeja a la de una distribución normal.
- Puesto que los valores de los coeficientes tipificados están dentro del intervalo (-2; +2) y el coeficiente de asimetría es muy próximo a cero se brinda una excelente oportunidad para mostrar a los alumnos que no pueden dar conclusiones basadas en el cumplimiento de una sola propiedad y que se deben analizar los resultados en su conjunto.
- Si se observan los datos se podría concluir que la variable es cuantitativa discreta con pocos

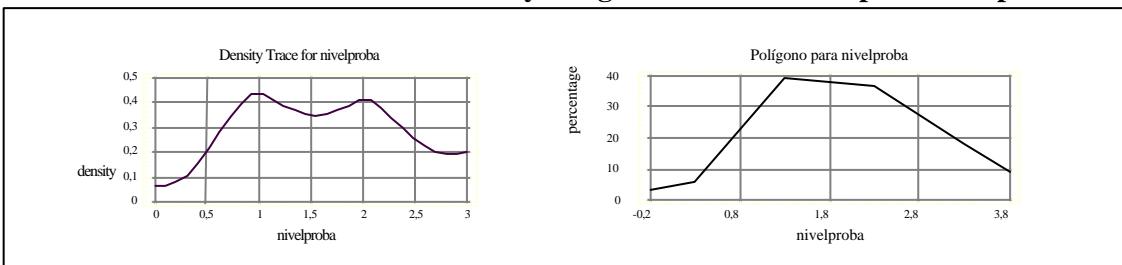
valores, por lo que este hecho podría respaldar la decisión de no realizar una aproximación por medio de una distribución normal.

Cuadro 5.4.5.2. Tabla de frecuencias y resumen estadístico correspondientes a las actividades 1 y 2 de la segunda sesión práctica

Class	Lower Limit	Upper Limit	Midpoint Frequency	Relative Frequency	Cumulative Frequency	Cum. Rel. Frequency
at or below	0,0		15	0,0600	15	0,0600
1	0,0	1,0	0,5	0,3920	113	0,4520
2	1,0	2,0	1,5	0,3680	205	0,8200
3	2,0	3,0	2,5	0,1800	250	1,0000
above	3,0		0	0,0000	250	1,0000

Mean = 1,668 Standard deviation = 0,839401
 Summary Statistics for nivelproba
 Std. Skewness = -0,696194
 Std. Kurtosis = -1,47227
 Skewness = 0,0745488
 Kurtosis = -0,729464

Cuadro 5.4.5.3. Curva de densidad y Polígono de frecuencias para nivelproba



Cuadro 5.4.5.4. Actividades 3, 4, 5 y 6 de la segunda sesión práctica

3. Has estudiado en clase teórica la regla de los intervalos $\mu \pm \sigma$, $\mu \pm 2\sigma$, $\mu \pm 3\sigma$ en una distribución normal. Utilizando la tabla de frecuencias, calcula el porcentaje de niños cuyo nivel probabilístico está incluido en el intervalo $x \pm s$, $x \pm 2s$, $x \pm 3s$. a) ¿Se cumple la regla 68- 95- 99? b) Teniendo en cuenta los puntos 1, 2 y 3, ¿Crees que la distribución de esta variable es aproximadamente normal?
4. Usa ahora la opción DISTRIBUTION FITTING, dentro de DESCRIBE - NUMERIC DATA - ONE VARIABLE ANALYSIS ajusta una curva normal a los datos. ¿Cuáles son los parámetros de la curva normal ajustada?
5. Utilizando la opción TAIL AREAS en este programa, que proporciona probabilidades para la curva normal ajustada ¿Cuál es la probabilidad de que, en esta curva teórica ajustada a los datos se obtenga un nivel igual o menor a 2?
6. Usando de nuevo la opción ONE VARIABLE ANALYSIS, y la tabla de frecuencias, calcula la proporción de niños en la muestra con nivel igual o menor a 2. ¿Crees que la curva normal da un ajuste aceptable de los datos?

Al igual que en la actividad 3 de la primera sesión práctica, los alumnos trabajarían con la tabla de frecuencias, modificando el número y límites de intervalos para obtener los extremos correspondientes a los intervalos centrales. La forma más rápida sería obtener una tabla con un solo intervalo en la que los límites inferior y superior coincidieran con los de los extremos de los intervalos que se desea calcular, como la que se presenta a continuación.

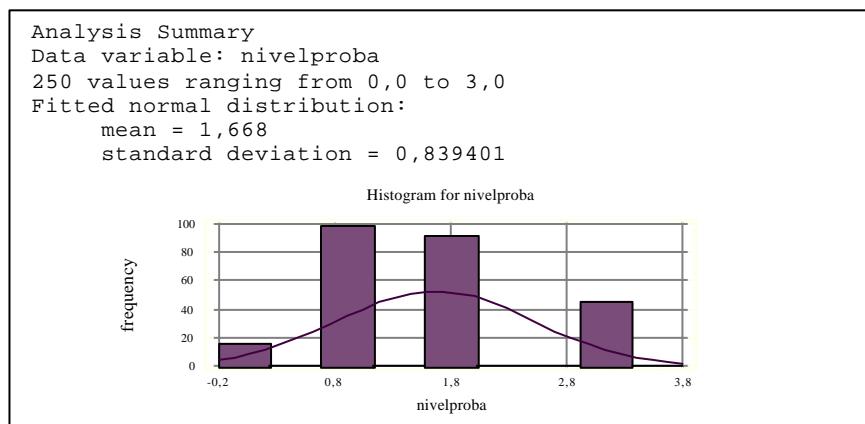
Tomando $x = 1,668$ y $s = 0,839$, el primer intervalo resultaría ($x-s; x+s$) = (0,829; 2,507) y el porcentaje de niños con niveles comprendidos en este intervalo sería el 76%, como se ve en la tabla de frecuencias siguiente.

Frequency Tabulation for nivelproba						
Class	Lower Limit	Upper Limit	Midpoint Frequency	Relative Frequency	Cumulative Frequency	Cum. Rel. Frequency
at or below	0,829		15	0,0600	15	0,0600
1	0,829	2,507	1,668	0,7600	205	0,8200
above	2,507		45	0,1800	250	1,0000

Mean = 1,668 Standard deviation = 0,839401

Análogamente, se obtendría el segundo intervalo: ($\bar{x} - 2.s; \bar{x} + 2.s$) = (-0,01; 3,346) y el porcentaje de niños con niveles comprendidos en él sería aproximadamente del 100%. Por último, para el intervalo ($\bar{x} - 3.s; \bar{x} + 3.s$) = (-0,849 ; 4,185), también correspondería el 100%. Observando estos resultados y los de las dos actividades anteriores se podría sacar una primera conclusión acerca de que esta distribución no se ajusta bien a una distribución normal.

En la resolución de la actividad 4 se utilizaría una nueva opción del programa que permitirá calcular los parámetros de la distribución normal ajustada a la distribución empírica (DISTRIBUTION FITTING). Una posibilidad adicional de dicha opción, sería superponer la curva de densidad normal sobre el histograma de frecuencias, lo cual permite verificar si el ajuste visual realizado al comparar la función de densidad con el polígono de frecuencias es o no aceptable. Como puede apreciarse en la figura siguiente la curva de densidad no se ajusta al histograma.



Otra propiedad que se pretendería mostrar con esta actividad es el hecho de que los valores de los parámetros correspondientes a la distribución normal coincidirán con los valores de los estadísticos correspondientes a la distribución empírica.

Con las actividades 5 y 6 descritas en el Cuadro 5.4.5.4, se pretende mostrar al alumno una nueva herramienta de análisis, ya que se compararía los valores obtenidos para la probabilidad solicitada en la actividad 5 y la proporción pedida en la actividad 6. Puesto que los valores son muy poco aproximados (63.57% y 83%), nos daría una nueva pauta para rechazar la aproximación de la distribución teórica a la empírica.

A continuación se muestra el resultado que se obtendría por medio de la opción DISTRIBUTION FITTING – TABULAR OPTIONS – TAIL AREAS para la actividad 5.

Tail Areas for nivelproba area below 2,0 = 0,653772
--

El cálculo de la proporción solicitada en la actividad 6 se realizaría de manera análoga al desarrollado en la actividad 3. Como cierre de esta sesión se discutirían los resultados obtenidos para lograr una síntesis y una conclusión general.

5.4.6. TERCERA SESIÓN PREVISTA A DESARROLLAR EN EL AULA TRADICIONAL

El fin principal de esta clase sería introducir la distribución normal tipificada y su necesidad de aplicación a ciertos tipos de problemas. Los elementos de significado y objetivos específicos de esta sesión se detallan a continuación.

Elementos del significado institucional local previstos

- *Ostensivos*: tablas de datos, expresiones simbólicas de la fórmula de tipificación y de su inversa: $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ y $X = \mu + Z \cdot \sigma$, representaciones simbólicas: μ , σ e intervalos centrales;
- *Actuativos*: Tipificación, cálculo de valores tipificados o de valores inversos.
- *Intensivos*: distribución normal tipificada, media muestral y poblacional, medidas de

- tendencia central, muestra, población, parámetros de la distribución normal tipificada, experimento aleatorio y estadístico;
- **Validativos:** comprobación de casos particulares, aplicación y generalización de una propiedad.

Más específicamente, estos elementos se relacionarían de diversas maneras concretándose en los siguientes objetivos de aprendizaje:

- Introducir la distribución normal tipificada (elemento intensivo), mostrando su necesidad y utilidad en la comparación (elemento actuario) de distribuciones con diferente media y desviación típica (elementos intensivos).
- Calcular (elemento actuario) puntuaciones tipificadas en una distribución normal (elementos intensivos).
- A partir de las distribuciones tipificadas (elementos intensivos), calcular (elementos actuario) el valor de una variable aleatoria normal (elemento intensivo) en casos de puntuaciones tipificadas positivas y negativas (elementos intensivos).
- Analizar (elemento validativos) los valores tipificados en función de la distribución real (elementos intensivos).
- Calcular (elemento actuario) el valor de la media y desviación típica en la distribución normal típica (elementos intensivos).

Los elementos y objetivos descritos anteriormente se reflejan en las tareas y desarrollo que se describen y analizan a continuación.

Distribución normal tipificada

Se previó que el profesor mostraría la necesidad de la utilización de la tipificación en casos en los que se debe hacer comparación de puntuaciones. Se desarrollarían y discutirían con los alumnos el ejemplo que se presenta en el Cuadro 5.4.6.1.

Con este ejemplo, se haría notar a los alumnos que con la información proporcionada por el enunciado del problema no se puede responder directamente a esas cuestiones, y sería necesario aportar la información adicional que aparece en el Cuadro 5.4.6.1, en relación con las calificaciones de Ángel, de otro estudiante y de la clase en general.

Cuadro 5.4.6.1. Actividad de introducción a la distribución normal típica

Ángel posee las siguientes calificaciones en un conjunto de asignaturas: 195 puntos en Inglés, 20 en Economía, 39 en Informática, 139 en Matemáticas y 41 en Física. ¿Es este estudiante mejor en Inglés que en Economía?. ¿Será igualmente bueno en todas las asignaturas? (Guilford y Fruchter, 1978, pp. 474).

(1) Examen	(2) Media de la clase	(3) D. Típica de la clase	(4) Puntuaciones (X)		(5) Desviaciones a la media (x)		(6) Puntuaciones tipificadas (Z)	
			Ángel	Carlos	Ángel	Carlos	Ángel	Carlos
Inglés	155,7	26,4	195	162	+39,3	+6,3	+1,49	+0,24
Economía	33,7	8,2	20	54	-13,7	+20,3	-1,67	+2,48
Informática	54,5	9,3	39	72	-15,5	+17,5	-1,67	+1,88
Matemáticas	87,1	25,8	139	84	+51,9	-3,1	+2,01	-0,12
Física	24,8	6,8	41	25	+16,2	+0,2	+2,38	+0,03
Totales			434	397			+2,54	+4,51
Medias			86,8	79,4			+0,51	+0,90

Comparación de distribuciones normales. Puntuaciones tipificadas

Con esta información se pretendería analizar y discutir con los alumnos, las cuestiones que se describen en el cuadro siguiente, para que los alumnos pudieran ver la necesidad de obtener medidas uniformes para comparar diversos conjuntos de datos, mostrando la utilidad de la tipificación.

Cuadro 5.4.6.2. Actividad de introducción a la distribución normal típica (continuación)

1. Carlos está más cerca de la media en Inglés que Ángel. ¿Y en las otras asignaturas?
2. Ángel está 39,3 puntos por encima de la media en inglés y 16,2 puntos por encima de la media en informática (ver columna 5). ¿Es este estudiante mejor en Inglés que en informática?.
3. Carlos está 20,3 puntos por encima de la media en economía y 17,5 en informática. ¿Es este estudiante igualmente bueno en las dos materias?
4. ¿Cómo podríamos comparar a los dos estudiantes?. Ángel parece superior en tres materias y Carlos en las otras dos. Pero, suponiendo que los dos están compitiendo para una beca en la universidad; ¿cuál la merece más?.
5. La suma de todas las puntuaciones son 434 y 397, y favorece a Ángel. ¿Sería justo dar la beca a Ángel, ya que tiene mayor suma de puntuaciones?.

Una vez discutidas estas cuestiones se introduciría la idea de tipificación, su fórmula, cada uno de sus elementos y los resultados que se obtendrían por medio de ella. Además, se explicaría que cuando se calculan probabilidades en una distribución normal típica, se obtiene un área bajo la curva que es equivalente al área bajo la curva de la distribución normal original, apoyándose en gráficas realizadas en la pizarra.

Análisis a priori de las actividades que los alumnos resolverían y entregarán por escrito

Después de desarrollar la actividad de introducción se plantearían las actividades que aparecen en los Cuadros 5.4.6.3 y 5.4.6.4.

Cuadro 5.4.6.3. Actividad 8 – Tercera sesión teórica

Actividad 8: Para comparar entre sí diferentes distribuciones normales, conviene tipificar la variable, restándole la media y dividiendo por su desviación típica, obteniendo de este modo las puntuaciones Z o puntuaciones tipificadas. Para la distribución de la actividad teórica 1 (altura de chicas), tomando la $\mu = 165$ y $\sigma = 5$. a) ¿Cuáles serían las puntuaciones tipificadas para las alturas 164, 178, 150?. b) ¿Qué alturas corresponden a las puntuaciones tipificadas Z=0, Z=1, Z=-2?. Compara los resultados de ambos ítems.

El propósito de esta actividad sería dotar de sentido a las medidas tipificadas, en relación con el contexto en el que se está trabajando, además de utilizar puntuaciones tipificadas directas e inversas. En la primera cuestión, el alumno debería trabajar con la fórmula de tipificación:

La interpretación de este resultado sería que una altura x de 164 cm corresponde a un valor tipificado z = -0,14646. De la misma forma pueden obtenerse los valores tipificados para 178 y 150, cuyos valores z son, 2,69748 y -2,99041 respectivamente.

En la segunda pregunta se necesitaría el paso inverso, es decir, conocemos el valor de Z y

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{164 - 164,721}{4,92274} = -0,14646$$

debemos hallar el valor de X, de la siguiente forma: $X = \mu + Z\sigma$. Se pretendería que el alumno descubriera por sí mismo esta expresión, pero si no aparece en forma espontánea, el profesor explicaría cómo resolver el problema.

Para $Z = 0 \rightarrow X = 164,721 + 0 \cdot 4,92274 = 164,721$ cm. Es decir, que para un valor tipificado $Z = 0$, su equivalente en esta distribución de alturas es 164,721 cm. Análogamente, para $Z = 1$ y $Z = -2$, se obtiene 169,64374 y 154,87552 cm, respectivamente.

Cuadro 5.4.6.4. Actividades 9 y 10 – Tercera sesión teórica

Actividad 9: La puntuación total en probabilidad en el fichero TESTP (que hemos usado en las clases prácticas), toma un valor medio de 25 puntos con desviación típica 6. ¿Qué puntuación en probabilidad corresponde a un alumno que tenga una puntuación tipificada de 1,2 y -1,5?

Actividad 10: ¿Cuál será la media y desviación típica de las puntuaciones tipificadas?

En la actividad 9 se conocen los valores de la variable tipificada y se trata de conocer a qué valores de la variable real corresponden. Entonces se tendría lo siguiente:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow 1,2 = \frac{x - 110}{25} \Rightarrow x = 110 + 1,2 \cdot 25 \Rightarrow x = 140$$

De manera análoga, se obtendría que para un valor de $Z = -1,5$ corresponde un valor de $x = 72,5$.

Puesto que al restar a todos los valores de una variable una constante, la media también

disminuye en el mismo valor, la media de la distribución tipificada es igual a cero. En forma análoga se razonaría que la desviación típica de la distribución tipificada es igual a 1.

5.4.7. TERCERA SESIÓN PREVISTA A DESARROLLAR EN EL AULA DE INFORMÁTICA

El propósito principal de esta sesión sería recordar las propiedades teóricas y opciones del programa aprendidas; en particular, el significado de los parámetros de la distribución normal. También se ejercitaría el cálculo de probabilidades y valores críticos con ayuda del ordenador.

Se trabajaría con la variable ALTURA del fichero ALTU1000 (su descripción puede verse en el Anexo III). Además, se introduciría una nueva opción del programa que es: PROBABILITY DISTRIBUTIONS del programa PLOT y dentro de ella se utilizarían los submenús: INVERSE CDF, que serviría para el cálculo de cuartiles y percentiles, y DENSITY/MASS FUNCTION para graficar las funciones de densidad y de distribución acumulada.

Antes de que los alumnos comenzaran con la resolución de las actividades, la profesora explicaría el modo de utilización de estas nuevas opciones y la finalidad de su utilización.

Elementos del significado institucional local previstos

En esta sesión se ha previsto aplicar los siguientes elementos:

- *Extensivos*: ajuste de un modelo;
- *Ostensivos*: DISTRIBUTION FITTING, TAIL AREAS y CRITICAL VALUES, tablas de datos. Gráficos: función de densidad y funciones de distribución superpuestas, representación de áreas o intervalos bajo la curva normal;
- *Actuativos*: cálculo de probabilidades en la curva normal con ordenador, representación gráfica de datos, comparación visual;
- *Intensivos*: bondad de ajuste, media y desviación típica muestral y poblacional, distribución empírica, convenios de lecturas de gráficos, probabilidad, reglas de cálculo de probabilidades, variables estadísticas y aleatorias, parámetros de la distribución normal, áreas de cola, estadísticos de orden: cuartiles y percentiles, función de densidad y función de distribución, probabilidad de valores en un intervalo de la distribución normal, propiedad de los intervalos centrales en una distribución normal;
- *Validativos*: análisis, comparación de resultados gráficos, aplicación y generalización de una propiedad, síntesis, representación gráfica.

Más específicamente, estos elementos se relacionarían de diversas maneras concretándose en los siguientes objetivos de aprendizaje:

- Realizar una comparación visual (elemento actuativo) de una distribución empírica (elemento intensivo) con la función de densidad normal (elemento intensivo).
- Comprobar (elemento validativo) el valor de la media y desviación típica en una distribución normal teórica (elementos intensivos) que approximase una distribución dada (elemento extensivo).
- Representar gráficamente datos y calcular (elementos actuativos) probabilidades de la distribución normal (elementos intensivos) por medio de la opción PLOT del programa Statgraphics.
- Recordar el significado de los parámetros en una distribución normal (elementos intensivos) y calcular a partir del estudio descriptivo (elemento actuativo) los parámetros (elementos intensivos) adecuados para resolver problemas prácticos de ajuste de modelos y aproximación de distribuciones (elementos extensivos).
- Calcular (elemento actuativo) probabilidades diversas en la distribución normal (elementos intensivos) usando DISTRIBUTION FITTING (elemento ostensivo).
- Calcular (elemento actuativo) percentiles (elementos intensivos) por medio de la opción TAIL AREAS Y CRITICAL VALUES (elementos ostensivos).
- Analizar (elemento validativo) la variación de la forma de la función de densidad normal (elemento ostensivo) al variar los parámetros (elementos intensivos) de la misma.

Análisis a priori de las actividades que los alumnos resolverían y entregarían en disquete

Se comenzaría esta sesión recordando el significado de los parámetros de una distribución

normal, para introducir luego la actividad 1 que se detalla a continuación.

Cuadro 5.4.7.1. Actividad 1 – Tercera sesión práctica

- Abre el programa STATGRAPHICS y carga el fichero *altu1000* del disco U (carpeta *datos*). Este fichero contiene datos sobre la altura de 1000 chicas de entre 18 y 20 años que se pueden aproximar mediante la distribución normal.

Actividad 1. Usando la opción *Describe. Numeric Data. Distribution Fitting*, calcula la media y desviación típica de la distribución normal que aproximaría las alturas de las 1000 chicas.

La media y desviación típica correspondientes a la distribución normal que ajusta los datos de las 1000 alturas, se obtendría directamente de la opción DESCRIBE – DISTRIBUTION FITTING – ANALYSIS SUMMARY (ver cuadro siguiente).

```
Analysis Summary
Data variable: ALTURA
550 values ranging from 151,221 to 181,569
Fitted normal distribution:
    mean = 164,982
    standard deviation = 4,94016
```

Se debería hacer énfasis en diferenciar la distribución teórica de la real, aclarando que ambas deberían tener la misma desviación típica y media, pero mostrando que los parámetros se calculan desde la opción descrita anteriormente, mientras que los estadísticos se obtendrían por medio de la opción DESCRIBE – ONE VARIABLE ANALYSIS y además, que los parámetros provienen de una población y los estadísticos de una muestra. Luego se daría la información necesaria para utilizar el menú por medio del cual se resolvería la actividad 2 (Cuadro 5.4.7.2) y se dejaría que el alumno explore las diversas posibilidades del programa.

Cuadro 5.4.7.2. Actividad 2 – Tercera sesión práctica

Actividad 2: Usando la opción *Tail areas* del programa DISTRIBUTION FITTING, y a partir de la curva normal ajustada

- Calcula la probabilidad de chicas que, en la población donde se han tomado los datos tendrían más y menos de 150, 160 y 170 cm de altura en la curva normal ajustada.
- ¿Qué proporción de chicas se encuentra en los siguientes intervalos (160-170) (150-170)?

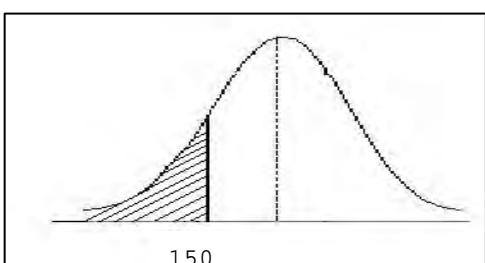
En el ítem a, para calcular las proporciones de casos con menos de 150, 160 y 170 cm, se debería utilizar la opción DESCRIBE – NUMERIC DATA – DISTRIBUTION FITTING - TABULAR OPTIONS – TAIL AREAS. El programa entrega directamente los valores de estas proporciones desde el resumen TAIL AREAS, tal como se muestra en el cuadro siguiente.

```
Tail Areas for altura
area below 150.0 = 0.00158515
area below 160.0 = 0.188593
area below 170.0 = 0.881904
```

Por ejemplo, si observamos los resultados mostrados en el resumen anterior, la proporción de chicas con menos de 150 cm. de altura sería del 0,158 %. Se debería recordar cómo cambiar las opciones por defecto con el botón derecho del ratón para colocar los valores solicitados en el problema.

Para calcular las probabilidades de una altura, por ejemplo, mayor a 150, se debería aplicar la propiedad de que las sumas de todas las probabilidades, en una distribución de probabilidad, es igual a 1. En otras palabras, calcular la probabilidad del suceso contrario. La resolución podría estar basada en la visualización del área bajo la curva de densidad que se desea calcular, ésta es una herramienta ostensiva que generalmente, ayuda al alumno a situar su problema.

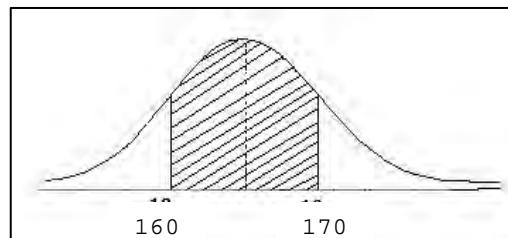
Por ejemplo, en la figura siguiente se muestra el área que correspondería a los valores menores que 150, ya que ésa sería el área que entrega el programa. En consecuencia, la proporción de chicas con una altura mayor a 160 cm sería: 1 – 0,188593, es decir, aproximadamente un 11,41% de chicas tiene una altura mayor que 160 cm.



En el ítem b, para calcular la proporción de personas que tienen una altura comprendida en un intervalo, el alumno debería utilizar los valores

obtenidos en el ítem a y también cabría la posibilidad de que utilizara un gráfico similar al de la figura siguiente, para visualizar qué tipo de operación debería realizar.

La probabilidad de que la altura de una chica esté comprendida en el intervalo (160-170) sería la diferencia entre los valores de las probabilidades para los menores que 170 menos los menores que 160, que se podrían extraer del resumen numérico TAIL AREAS que se presenta en la página anterior resultando: 0,88194 – 0,188593, es decir el 69,33%. Análogamente, se podría realizar el cálculo para el intervalo (150 – 170), obteniéndose: 88,04 %.



Cuadro 5.4.7.3. Actividad 3 – Tercera sesión práctica

Actividad 3: Mediante la opción CRITICAL VALUES, halla los valores de las alturas que corresponden a los cuartiles del 25 y 75 por ciento y a los percentiles del 10 y 90 por ciento en la curva normal ajustada.

Una vez extraídas las conclusiones de la actividad 2, se pasaría a resolver la actividad siguiente (Cuadro 5.4.7.3), en la que los alumnos utilizarían una nueva opción del programa: el resumen CRITICAL VALUES, el cual les serviría para realizar el cálculo de cuartiles y percentiles. Por lo que antes de realizar la actividad, se explicaría cómo se ejecuta y qué interpretación se les debería dar a los resultados.

Para obtener estos resultados se debería trabajar con la opción DISTRIBUTION FITTING – TABULAR OPTION – CRITICAL VALUES y luego se especificarían los valores de cuartiles o percentiles. En el cuadro siguiente se reproduce el informe que proporciona el programa.

```
Critical Values for altura
area below 158,073 = 0,1
area below 161,009 = 0,25
area below 167,533 = 0,75
area below 170,469 = 0,9
```

Se trataría que el alumno interprete bien estos resultados, es decir, que comprenda que, por ejemplo, para el primer valor obtenido: 158,073 es el mayor valor tal que la probabilidad de no exceder este valor sea menor o igual al 0,1. Dicho de otra manera: la probabilidad de que al seleccionar una chica al azar tenga una altura menor o igual que 158,073 cm es del 10%.

Una vez discutidos los resultados de la actividad 3, se pasaría a la actividad siguiente (Cuadro 5.4.7.4), en la que también se utilizaría una nueva opción, que se habría explicado previamente en clase teórica. El fin de esta actividad sería que el alumno discuta previamente con su compañero cómo cambia la gráfica si se varía el valor de la media. La intención es que luego, pudiera comprobar si sus hipótesis eran correctas o no por medio del uso del programa.

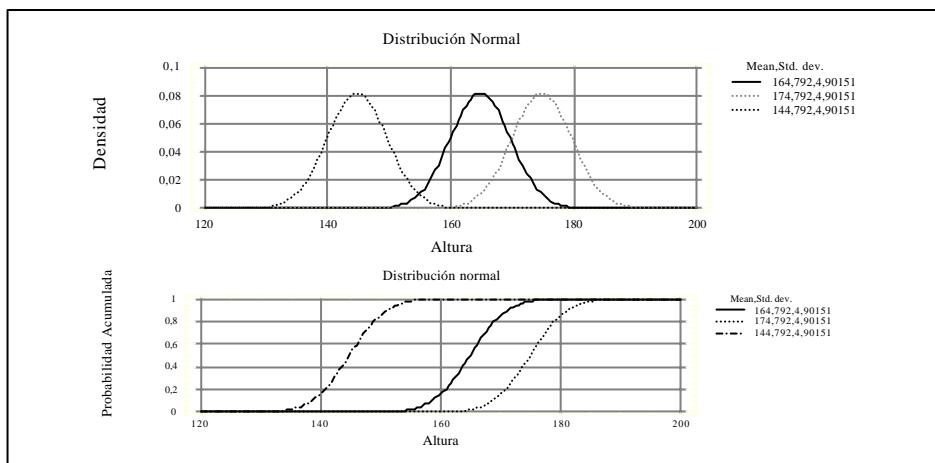
Cuadro 5.4.7.4. Actividad 4 – Tercera sesión práctica

- La opción PLOT sirve para representar gráficamente y calcular probabilidades de diversas distribuciones. Consulta en los apuntes la descripción de este programa. Ábrelo y selecciona la distribución normal. Cambia ANALYSIS OPTIONS para que el programa realice cálculos con una distribución normal ajustada a los datos de la muestra, es decir, con la media y desviación típica halladas en el punto 1.

Actividad 4: Representa gráficamente la función de densidad y función de distribución (acumulativa) de la distribución normal ajustada a la altura de las chicas de la muestra.

- a) ¿Cómo piensas que cambiarían estas gráficas si, conservando la misma desviación típica aumentamos la media en 10 cm?
- b) ¿Y si disminuimos la media en 20 cm? Comprueba si has acertado en tu pronóstico, representando gráficamente las nuevas distribuciones y explica las diferencias encontradas.

Los gráficos que se muestran a continuación, representan las funciones de densidad y de distribución para las distribuciones con igual desviación y con medias 164,792, 144,792 y 174,792 respectivamente obtenidas con la opción PLOT – PROBABILITY DISTRIBUTION – GRAPHICAL OPTIONS – DENSITY/MASS FUNCTION (para la función de densidad) y CDF (para la función de distribución acumulada).

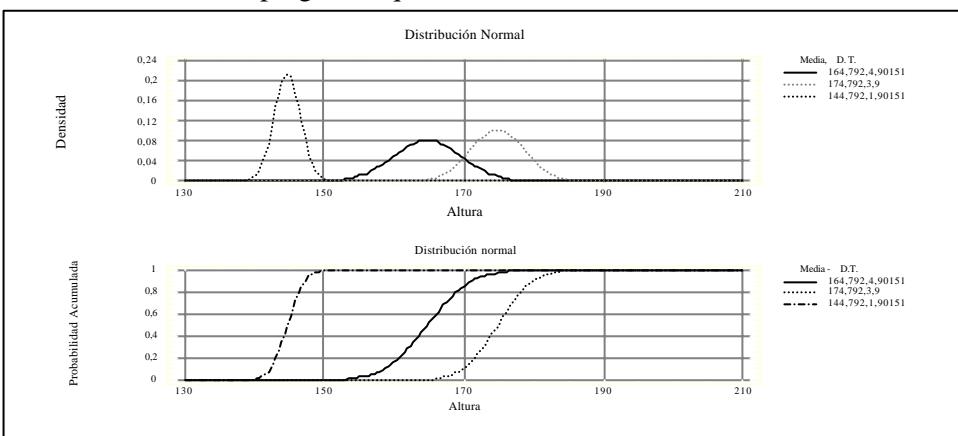


Una vez realizada la puesta en común de esta actividad, se pasaría a la última actividad (Cuadro 5.4.7.5), donde se variaría el valor de la desviación típica, esperando que el alumno realizara conjeturas sobre la manera en que se modifica la gráfica cuando varía el valor de la desviación típica.

Cuadro 5.4.7.5. Actividad 5 – Tercera sesión práctica

Actividad 5: ¿Cómo piensas que cambia la distribución normal si, conservando la misma media aumentamos o disminuimos la desviación típica? Comprueba tus pronósticos representando gráficamente 3 distribuciones normales de igual media y diferente desviación típica y explica las diferencias encontradas.

El alumno debería realizar primero su propio análisis y luego verificaría sus conclusiones por medio de los resultados del programa, que se muestran a continuación.



5.5. CONCLUSIONES SOBRE EL SIGNIFICADO INSTITUCIONAL LOCAL PREVISTO

En este capítulo hemos fijado el significado institucional local y descrito la secuencia de enseñanza diseñada durante la segunda fase de la investigación, para cumplir el segundo objetivo general y los objetivos específicos 2 y 3. Para ello, hemos seleccionado los elementos de significado básicos que presentaremos a nuestros alumnos, y las relaciones entre ellos que deberán haber adquirido al finalizar la experiencia de enseñanza. En la Tabla 5.5.1 se presentan los elementos específicos de la distribución normal utilizados en la enseñanza planificada y en la Tabla 5.5.2, los elementos relacionados con otros conceptos, que conjuntamente describen el significado institucional local previsto. Estas tablas nos permitirán establecer comparaciones con el significado de referencia, el local efectivamente observado y con lo que los alumnos aplicarán durante y al finalizar la experiencia de enseñanza.

A continuación describiremos nuestras conclusiones sobre las semejanzas y diferencias entre los elementos de significado considerados en el significado de la distribución normal en un curso tradicional de iniciación a la estadística para alumnos con características similares a los que participan en nuestro estudio (significado institucional de referencia, que se describió en el Capítulo IV y se resume en Tablas 4.8.1 y 4.8.2).

Elementos extensivos

De los diversos tipos de campos de problemas utilizados en el significado institucional de referencia, descritos en la sección 4.3, hemos conservado en nuestra enseñanza todos esos tipos, a excepción de los campos relacionados con el estudio de las distribuciones exactas en el muestreo y el contraste de hipótesis. Sólo analizaremos en nuestra investigación los campos P1 y P2 (Ajuste de un modelo a la distribución de datos reales y la distribución normal como modelo aproximado de las distribuciones de variables discretas), aunque en el resto del curso también se trabajan los campos P3 y P4 (Obtención de distribuciones en el muestreo de la media y estimación por intervalos de confianza).

Aunque en general se mantienen los campos de problemas planteados en el significado de referencia, una diferencia importante entre dicho significado y el significado institucional local, es que en nuestra secuencia de enseñanza se utilizan contextos relacionados con los campos de interés de nuestros alumnos y el trabajo con ficheros de datos y contextos reales. Esto es un factor motivador y brinda a los alumnos la posibilidad de estar frente a situaciones similares a las que podrían llegar a encontrarse en su vida profesional. Además, las actividades planteadas les exige un razonamiento y argumentación muy diferentes a las actividades tradicionales, ya que no están relacionadas con un concepto específico sino que, deben realizar una integración de diversos conceptos.

Tabla 5.5.1. Elementos del significado institucional local específicos de la distribución normal previstos en la secuencia de enseñanza

Elementos de significado	Sesiones en que se usan					
Extensivos	T1	P1	T2	P2	T3	P3
Ajuste de un modelo (aproximación al histograma)	X	X	X	X		X
Aproximación de distribuciones discretas			X	X		

Ostensivos	Representaciones gráficas					
Gráfica de la función de densidad normal	X	X	X	X		X
Gráfica de la función de distribución						X
Representación de curvas de densidad normales superpuestas	X					X
Histograma y curva de densidad normal superpuestos				X		
Representación de áreas o de intervalos bajo la curva normal		X	X			X
Representaciones numéricas						
TAIL AREAS					X	X
CRITICAL VALUES					X	X
DISTRIBUTION FITTING				X		X
Representaciones simbólicas						
Z, X, N(μ , σ), N(x; μ , σ), N(0,1)	X					
$z = (X - \mu) / \sigma$, $X = z\sigma + \mu$				X		X
$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma)$			X	X		
$P(x_1 < X < x_2)$			X	X		
$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}, \quad -\infty < x < \infty,$	X					

Actuativos						
Estimación de probabilidades a partir de tablas de frecuencia	X	X	X	X		
Estudio descriptivo de datos para ajustar una curva	X	X	X	X		
Cálculo de áreas, probabilidades y valores críticos (con lápiz y papel)			X			
Comparación de puntuaciones diversas					X	
Cálculo de áreas o probabilidades en la curva normal y de valores críticos (con ordenador)				X		X
Comparación visual	X	X	X	X		X
Obtención de límites en intervalos centrales	X	X	X	X		
Tipificación: cálculo de valores tipificados o sus inversos					X	

Intensivos			X	X	X	X
Área bajo la curva normal, áreas de cola, valores críticos	X		X			X
Desviación típica (como parámetro)		X	X			X
Distribución normal tipificada, d. original y transformada				X	X	
Función de densidad normal, función de distribución	X	X	X	X		X
Media como parámetro	X		X			X
Parámetros de la distribución normal	X		X	X	X	X
Posición relativa de media, mediana y moda en la d. normal	X	X	X	X		
Probabilidad de valores en un intervalo en la d. normal			X	X		X
Propiedad de los intervalos centrales en la distribución normal	X	X	X	X		X
Simetría en la distribución normal		X	X	X		
Curtosis en la distribución normal		X		X		
Unimodalidad de la distribución normal		X	X	X		

Validativos			X	X	X	X
Análisis	X	X	X	X		X
Aplicación de una propiedad	X	X	X	X	X	X
Comprobación de casos particulares o de propiedades	X	X	X	X	X	X
Generalización de una propiedad	X	X		X	X	X
Representación gráfica	X	X	X	X		X
Síntesis	X	X	X	X		X
Simulación con ordenador	X					

Elementos ostensivos: Representaciones utilizadas

Hemos utilizado prácticamente todos los gráficos tradicionales incluidos en el significado institucional de referencia (histograma, el polígono de frecuencias, curva de densidad, áreas bajo la curva), pero, la utilización del ordenador nos ha permitido aplicar nuevas representaciones gráficas como: el gráfico symmetry plot o el gráfico normal probability plot. También se utilizarían gráficos superpuestos para realizar comparaciones, por ejemplo: la curva de densidad superpuesta sobre el histograma, dos o más curvas de densidad normal o curvas de distribución acumulada en un mismo sistema de ejes, para estudiar como varían dichas curvas al modificar los parámetros.

Dentro de las representaciones numéricas, coincidimos con el significado de referencia en el uso de tablas de frecuencias, sólo que en este caso, la mayoría están generadas por ordenador, y se puede modificar número de intervalos, recorrido, quitar valores atípicos, etc.

Una diferencia importante es que no se utilizan tablas de probabilidad normal ni de valores críticos, siendo éstas sustituidas por TAIL AREAS y CRITICAL VALUES, los cuales se utilizan en el cálculo de probabilidades y de valores críticos o medidas de posición, respectivamente. El cálculo manual o con calculadora de resúmenes numéricos se cambia por el efectuado con ordenador mediante SUMMARY STATISTICS (resumen estadístico), con el que se pueden calcular media, mediana y moda, coeficientes de asimetría y de curtosis, etc.

En relación con las representaciones simbólicas hemos utilizado la ecuación de la función de densidad normal explicando el significado de sus parámetros de manera intuitiva, la fórmula para el cálculo de valores tipificados y sus inversos, la representación de los axiomas de probabilidad y las expresiones que representan los intervalos centrales en una distribución normal y en una muestra.

Las representaciones que esencialmente difieren más del significado de referencia son las expresiones verbales que se obtienen por medio del programa estadístico, ya que el texto que se presenta en dichos términos aparece en inglés.

Elementos actuativos

En los elementos actuativos es donde se producen mayores diferencias entre el significado institucional de referencia y el significado institucional local. Se ha previsto introducir nuevos elementos actuativos diferentes a los encontrados en los libros de texto y además, algunos de los elementos comunes a ambos significados poseen características diferentes.

La primera diferencia está relacionada con la tipificación, debido a que se suprime el cálculo habitual con tablas de la distribución normal dando más énfasis a la interpretación de los

resultados entregados por el ordenador. El manejo de tablas se sustituye por el aprendizaje de las opciones del programa para poder calcular probabilidades sin necesidad de tipificar. Por lo que en nuestra enseñanza sólo tiene sentido la tipificación cuando se necesita comparar medidas relacionadas con distintas escalas.

El cálculo de probabilidades y valores críticos que es común a ambos tipos de significados institucionales, en nuestra experiencia se realizarían con ayuda del ordenador. Esto lleva una ventaja debido a que las probabilidades obtenidas son directas, con lo cual resulta más simple la interpretación o se puede destinar más tiempo a ella.

Por otra parte, la obtención de los límites de un intervalo, en nuestro significado estaría ligado a nuevos elementos, tales como el cálculo de áreas o estimación de probabilidades a partir de tablas de frecuencias y el cálculo de porcentajes en tablas de frecuencias modificando los intervalos en los que se combinaría el trabajo manual y el trabajo con el ordenador.

Un nuevo elemento que difiere de los anteriores y que se introduce en nuestra experiencia de enseñanza es la comparación visual, que tiene un papel destacado en nuestra enseñanza ya que al optar por un tratamiento más intuitivo de la distribución normal, se hace necesario utilizar este elemento actuario.

Se introduce como elemento actuario esencial el manejo del software, así como el manejo del procesador de texto, ya que este último se utiliza para que los alumnos aprendan también a elaborar un informe estadístico adecuado. En el procesador de texto se copian los gráficos y resúmenes numéricos obtenidos, y además el alumno escribe sus interpretaciones. Por lo tanto, el manejo del procesador de texto y del paquete estadístico es esencial y también es tomado en cuenta a la hora de evaluar el proceso de aprendizaje. Se sustituyen la realización efectiva de cálculos y gráficos por la localización de procedimientos dentro del programa, el conocimiento de los iconos y opciones. Mientras que en la enseñanza tradicional, se toma en cuenta el aprendizaje de algoritmos para realizar cálculos, en nuestra enseñanza se le presta una atención especial al uso adecuado de los distintos programas y opciones del paquete estadístico.

Elementos intensivos

En relación con la definición de la distribución normal adoptada en nuestra experiencia de enseñanza, se ha tomado un enfoque similar a lo expresado en D5 del significado de referencia (Definición de la distribución normal enunciada en forma intuitiva como límite de un histograma. Capítulo IV), considerando un ejemplo similar al de Graham (1994) pero cambiando el contexto para introducir la idea de función de densidad normal y también, tomando algunos elementos de Moore (1995). Basándonos en esto hemos agregado el segundo año algunas particularidades que provienen de la utilización del ordenador, tales como la generación por medio de números aleatorios de un fichero de datos para mostrar de manera dinámica, por medio de simulación, la aproximación del histograma y polígono a la curva de densidad, cambiando la cantidad de intervalos, su amplitud y el número de observaciones.

Con respecto a las propiedades de la distribución normal, daríamos especial énfasis a las propiedades geométricas enunciadas en el capítulo IV (Sección 4.7), especialmente a las propiedades de simetría. En menor medida, aplicaríamos la concavidad y convexidad y el carácter asintótico de la curva. Por último, y relacionado con las propiedades estadísticas, se aplicarían las de probabilidades en áreas parciales y total, pero utilizando técnicas diferentes al significado de referencia. No se han trabajado las propiedades algebraicas.

Elementos validativos

De los elementos validativos incluidos en el significado de referencia, se prescinde de demostraciones formales porque la mayoría de los alumnos no poseen los elementos básicos matemáticos que sirven de apoyo para una validación formal, aunque se mantienen los demás elementos descritos en el Capítulo IV.

Por otra parte, algunos de estos elementos validativos se verán ligeramente modificados por el uso del ordenador, además de aparecer algún elemento nuevo como por ejemplo, *la simulación*, que es muy importante en nuestra secuencia de enseñanza. La diferencia fundamental con la enseñanza tradicional, es que en ésta generalmente, primero se expresa un teorema, definición o propiedad, como algo que todos conocen o que todos deben aceptar o bien se demuestra formalmente. Por el contrario, en nuestra enseñanza, el alumno previamente tiene la oportunidad de experimentar y de poder descubrirlos en forma empírica.

La representación gráfica como elemento validativo

Este es otro tipo de elemento validativo que nos proporciona el ordenador, ya que al tener la posibilidad de realizar diversas representaciones en una misma pantalla, como por ejemplo superponer una curva de densidad a un histograma, nos permite comprobar conjeturas basándonos en las apariencias visuales de los gráficos.

5.5.2. Elementos del significado institucional local relacionados con otros conceptos que se utilizan en el tema de la distribución normal en la experiencia de enseñanza

Elementos de significado	Sesiones en que se usan					
Extensivos	T1	P1	T2	P2	T3	P3
Obtención de distribuciones en el muestreo de la media y otros parámetros	Estos elementos fueron desarrollados después del tema de la distribución normal					
Estimación por intervalos de confianza						

Ostensivos	Representaciones gráficas					
Histograma	X	X	X	X		
Gráfico de puntos			X			
Polígono de frecuencias	X	X		X		
Representaciones numéricas						
SUMMARY STATISTICS		X		X		
Tablas de datos			X		X	
Tablas de frecuencias	X	X		X	X	X
Representaciones simbólicas						
$\mu, \sigma, \sigma^2, x, s$	X	X	X	X	X	X
$\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma, (\mu - k\sigma, \mu + k\sigma), \mu \pm k\sigma$		X	X	X		
$x \pm k.s, (x - k.s, x + k.s)$	X	X	X	X	X	
$P(x_i) \geq 0 \text{ para todo } x_i \text{ o } f(x) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$			X			

Actuativos						
Cálculo de áreas en histograma o polígono de frecuencias a partir de la tabla de frecuencias	X					
Cálculo de porcentajes o proporciones en tablas de frecuencias con ordenador		X		X		
Representación gráfica de datos	X	X	X	X		X
Intensivos						
Ajuste, bondad de ajuste	X	X	X	X		X
Área bajo el polígono de frecuencias en un intervalo			X			
Axiomas de probabilidad	X	X	X	X		
Coeficientes: de asimetría, de curtosis	X	X	X	X		
Desviación típica muestral y poblacional. Dispersión		X	X	X		X
Distribución empírica	X	X	X	X		X
Ejes: de simetría, vertical y horizontal	X		X			
Estadísticos de orden: cuartiles, percentiles		X				X
Experimento aleatorio y estadístico	X	X		X	X	
Frecuencias: absolutas, relativas, acumuladas, acumuladas relativas	X	X		X		
Función de densidad simétrica			X			
Convenio de lectura de gráficos: histograma, polígono de frecuencias, gráficos de puntos	X	X	X	X		
Intervalos centrales. Intervalos de clases, límites de intervalos	X	X	X	X		
Media muestral y poblacional		X	X	X	X	X
Medidas de tendencia central: media, mediana, moda.	X	X	X	X	X	
Posiciones relativas						

Unimodalidad, multimodalidad	X	X	X	X		
Muestra aleatoria, Población	X	X	X	X	X	
Probabilidad, reglas de cálculo de probabilidades	X	X	X	X		X
Proporción, porcentaje	X	X	X	X		X
Simetría – Asimetría , Valores atípicos	X	X	X	X		
Variables estadísticas y variables aleatorias. Tipos de variables	X	X	X	X		X

Conclusiones sobre los tipos de actividades planteadas

Como se puede apreciar en el desarrollo de cada una de las sesiones descritas en este capítulo, en cada actividad planteada *se utiliza más de un elemento de significado* para que los alumnos obtengan conclusiones consistentes sobre los campos de problemas trabajados. Con ello se pretende que los alumnos *establezcan diversas relaciones entre los elementos trabajados*, de tal manera que conduzcan gradualmente a la construcción del significado de la distribución normal. En particular, *se establecen conexiones entre los elementos de significado tradicionales y aquellos elementos nuevos aportados por la utilización del ordenador*. El tipo de relaciones a destacar se describe en los objetivos de cada una de las sesiones.

El análisis de los elementos de significado realizado en esta sección nos permite fijar el significado local previsto y permitirá en el Capítulo VI, realizar una comparación, entre la secuencia prevista y la efectivamente observada, para poder determinar si se producen o no algunos desajustes, qué elementos presentaron más dificultades, etc. También nos permitirá comparar con el significado personal construido por los alumnos participantes a lo largo de la enseñanza.

Además, los elementos que se prevén aplicar en la secuencia de enseñanza nos servirán de parámetros, así como los efectivamente observados, para evaluar los significados aplicados por los alumnos y nos permite acceder a la evaluación de la comprensión, entendiéndose ésta según la caracterización realizada en nuestro marco teórico (Capítulo III).

El análisis efectuado en este capítulo nos ha permitido alcanzar nuestro segundo objetivo general, así como los objetivos específicos 2 y 3 que se describen en el Capítulo I y III respectivamente. En el capítulo siguiente describimos y analizamos la forma en que fue llevada a cabo la enseñanza, para poder comparar con el significado institucional local previsto y el que efectivamente se observa en la experiencia.

CAPÍTULO VI

ANÁLISIS DE UNA TRAYECTORIA DIDÁCTICA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

6.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo analizamos la trayectoria didáctica (Godino, 1999) que efectivamente se lleva a cabo. Dicho análisis se realiza a partir de la observación de las diversas sesiones y su objetivo primordial es el de describir la secuencia de enseñanza, tal como fue llevada a cabo, para tratar de aportar información sobre los elementos del significado institucional que se ponen de manifiesto en el aula. Esto nos permitirá comparar con el significado institucional local previsto que se describió en el capítulo V. Con ello queremos cumplir nuestro tercer objetivo general y el objetivo específico O4. Pretendemos también, estudiar las concordancias y diferencias entre el significado institucional local y el significado personal puesto en juego por los alumnos participantes, durante el desarrollo de la secuencia de enseñanza y al realizar las tareas propuestas.

Durante la observación, se tomó nota de las preguntas que los alumnos plantearon a la profesora y se recogieron, en cada una de las sesiones teóricas y prácticas, las soluciones a las actividades, que resolvían trabajando en pequeños grupos de dos o tres alumnos. Todos estos protocolos son analizados en este capítulo, para aportar información sobre la evolución del significado personal de los alumnos del grupo a lo largo del proceso de aprendizaje, de acuerdo con nuestro cuarto objetivo general y con el objetivo específico O5 (Capítulos I y III).

El análisis no cubre en forma completa las trayectorias docente y discente (Godino, 1999), sino que es sólo una aproximación que nos permite determinar los elementos de significado que se explicitan en la secuencia de enseñanza. Sin embargo, permitirá interpretar mejor los datos recogidos por escrito de las actividades realizadas por los alumnos así como los datos de la evaluación final que se describen en los capítulos VII y VIII. También podrá servir de base para trabajos posteriores en los que se podría profundizar en las funciones docentes y discentes, y en los procesos semióticos que efectivamente se ponen de manifiesto en el proceso de estudio.

Metodología de la observación

La observación de las clases fue realizada por la investigadora, durante dos cursos sucesivos (1998-99 y 1999-2000). El primer año realizó una observación participante, colaborando con la profesora en las clases teóricas y prácticas para atender las dudas de los alumnos. En consecuencia, sólo se anotaron aquellos aspectos más sobresalientes de las sesiones, en relación con la explicitación por parte de los alumnos o de la profesora de elementos de significado puestos en uso.

El segundo año, la investigadora se centró exclusivamente en la observación completa de las clases, con el fin de centrarse con más detalle en los diversos aspectos del desarrollo de la trayectoria, profundizando en la observación de las interacciones entre los alumnos y la profesora. Por ello, la investigadora se limitó a realizar la observación sin intervenir en las dudas planteadas por los alumnos.

En ambos cursos, la investigadora había comenzado a asistir a las clases unos días antes del comienzo de la experiencia y fue presentada a los alumnos, explicándose la razón de su

presencia en el aula y pidiéndoles su colaboración. También en ambos cursos, la investigadora tomaba nota de la observación en cada sesión, y disponía de un guión de observación en el que se tenía en cuenta los puntos específicos y actividades que se pensaba desarrollar en la sesión y el análisis a priori del Capítulo V. Además, en el segundo curso, se tuvo en cuenta también el diario de observación del curso anterior. Al acabar cada clase, la investigadora y la profesora se reunían a revisar las notas de observación por si algún incidente de importancia no hubiera quedado registrado. Se preparaba por la tarde un resumen del desarrollo de la sesión, y a la mañana siguiente, observadora y profesora leían de nuevo el resumen de la sesión para verificar su exactitud.

El segundo año, puesto que se disponía de la transcripción de la observación realizada el primero, la profesora y observadora analizaban antes de cada clase las preguntas surgidas el primer curso en relación a la sesión, con objeto de prever las posibles dificultades de los alumnos y la forma en que la profesora podría ayudarles a superarlas. Asimismo, al disponer de la observación del curso anterior, la investigadora tenía ya una pauta de lo que esperaba encontrar al observar la sesión, por lo que tenía la posibilidad de comprender mejor los datos de la observación y de completar los puntos que el primer año no quedaron bien recogidos. Es por esto que, generalmente, las observaciones del segundo curso son más completas que las del primero.

Respecto a las actividades desarrolladas en las sesiones teóricas y prácticas, se pidió a los alumnos que trataran de resolverlas en parejas, o en pequeños grupos, dando la profesora algún tiempo para ello. Si ningún alumno lograba la solución correcta, la profesora proporcionaba ayudas para que pudieran llegar a la solución. Una vez resueltas las actividades, la profesora o alguno de los alumnos analizaba la solución obtenida, con objeto de detectar las soluciones erróneas, así como de institucionalizar los nuevos conocimientos adquiridos en el transcurso de la actividad. Se recogieron por escrito las soluciones de algunas actividades teóricas y todas las correspondientes a las actividades prácticas que se plantearon.

Se realizó un análisis de contenido de estos protocolos escritos, identificando en ellos el uso correcto o incorrecto de los elementos de significado previstos sobre la distribución normal. Se han elaborado unas tablas mostrando las frecuencias con que se usaron estos elementos en cada curso y se describen ejemplos que clarifiquen las categorías usadas. Debemos aclarar que los párrafos correspondientes a la transcripción del diario de observación que se presentan en este capítulo sólo son un extracto de éste, ya que solamente hemos tomado un resumen del desarrollo de la clase y los bloques de interacción entre profesor y alumnos y entre alumnos entre sí en los que se ponen de manifiesto elementos de significado y sus relaciones.

Cambios efectuados en la enseñanza el segundo año

Como hemos descrito en el Capítulo V, la observación del primer año nos ayudó a mejorar el material específico de la distribución normal entregado a los alumnos. En primer lugar, tomamos la decisión de agregar un apunte sobre el manejo del programa informático, debido a que observamos muchas dificultades por parte de los alumnos para recordar algunas opciones del programa y para traducir los términos en Inglés (Anexo III). Contiene descripción detallada de todos los programas y opciones que el alumno debe utilizar durante las clases prácticas.

Se cambió ligeramente el orden de algunas actividades teóricas para dar la oportunidad de que los alumnos reflexionaran sobre algunos elementos de significado que resultaron difíciles en la primera experiencia, antes de introducirlos teóricamente, tales como: idea de modelo, significado del área en un histograma y estimación de probabilidades a partir de ella, diferencias entre distribución empírica y teórica, análisis a priori de los datos, síntesis de los resultados.

Los ejemplos que se desarrollaban en el apunte en relación a cómo se podía obtener la distribución normal a partir de un conjunto de datos, pudieron ser tratados de manera dinámica ya que el segundo año se disponía de un cañón que proyectaba la salida del ordenador, por lo que podían realizarse simulaciones. Otros ejemplos se reestructuraron de tal forma que en algunos casos se agregaban las resoluciones realizadas por medio del programa Statgraphics, lo cual servía de guía al alumno cuando desarrollaba las clases prácticas.

También se destacaron los puntos que deberían analizarse cuando se realiza el análisis de un conjunto de datos con el fin de observar si se pueden aproximar por medio de una distribución normal.

A continuación analizamos la trayectoria didáctica, siguiendo el orden de la misma forma

en que fue llevada a cabo, así como los datos sobre las respuestas a las tareas entregadas por los alumnos, destacando los diversos elementos de significado que han utilizado los alumnos. Puesto que la secuencia fue planificada de antemano y se reprodujo en la forma más similar posible a lo planificado los dos años, analizamos conjuntamente la observación de los dos años consecutivos, haciendo sólo referencia a las posibles diferencias en el desarrollo o en las respuestas de los alumnos, en caso de que se hubieran producido.

Trascribiremos los resúmenes más significativos de las diversas partes de cada sesión observada. En cada uno de ellos, primero analizamos la introducción de un elemento o grupos de elementos de significado. A continuación presentamos las actividades planteadas a los alumnos en relación al mismo, presentando bloques de aquellas interacciones entre alumnos y profesora en que se puede identificar el uso de diferentes elementos de significado, detallando si se trata del primero o segundo curso. Cada bloque será designado con un código de modo que pueda ser referenciado en el análisis que se hace a continuación (Por ejemplo, para el primer bloque de interacción: I-1). Para terminar, se presentan las actividades que los alumnos deben realizar por escrito y se analizan sus resultados.

6.2. PRIMERA SESIÓN DESARROLLADA EN EL AULA TRADICIONAL

En esta sesión, en la que participaron 21 alumnos en el curso 1998-1999 y 30 alumnos en el curso 1999-2000, se desarrollaron las actividades 1 y 2 y se explicaron las tres primeras secciones del apunte (hasta la mitad de la página 7, Anexo II). En los cuadros 6.2.1, 6.2.2 y 6.2.3 se reproduce una síntesis de la observación de esta sesión, en la que se destacan los puntos que hemos considerado relevantes en relación a los elementos de significado.

Cuadro 6.2.1. Síntesis de la observación de la primera clase teórica (parte 1)

Introducción al tema

En ambos cursos, la profesora comenzó recordando lo tratado en temas anteriores (acababa de finalizar el período de exámenes, en que había habido una interrupción de tres semanas). Luego se comenta la importancia de la distribución normal en la inferencia, introduciendo por medio de un ejemplo, las ideas de variable estadística y variable aleatoria.

A continuación, se insiste en la utilidad y necesidad de realizar inferencias, resaltando la diferencia entre el estudio de muestras y la extensión de las conclusiones a la población completa. Se alude a la idea de modelo y al modelo de distribución normal, que tendrá gran utilidad en problemas aplicados. Se dan algunos datos históricos y se describe la forma de la función de densidad normal (Pág. 1, Anexo I).

Estudio de la simetría de una distribución

Seguidamente, se fueron discutiendo las cuestiones propuestas en la actividad 1, que los alumnos desarrollaron por parejas, desde el ítem a hasta el c, con la ayuda y guía de la profesora. A continuación reproducimos la actividad planteada:

Actividad 1: La siguiente tabla de frecuencia ha sido obtenida con STATGRAPHICS a partir de los datos sobre altura de 1000 chicas de edades comprendidas entre 15 y 20 años. Se presentan también algunos estadísticos.

Frecuency Table for ALTURA

Class	Lower Limit	Upper Limit	Midpoint	Frequency	Relative Frequency	Cumulative Frequency	Cum. Rel. Frequency
at or below	146,0			0	0,0000	0	0,0000
1	146,0	148,0	147,0	1	0,0010	1	0,0010
2	148,0	150,0	149,0	0	0,0000	1	0,0010
3	150,0	152,0	151,0	10	0,0100	11	0,0110
4	152,0	154,0	153,0	14	0,0140	25	0,0250
5	154,0	156,0	155,0	23	0,0230	48	0,0480
6	156,0	158,0	157,0	65	0,0650	113	0,1130
7	158,0	160,0	159,0	70	0,0700	183	0,1830
8	160,0	162,0	161,0	132	0,1320	315	0,3150
9	162,0	164,0	163,0	158	0,1580	473	0,4730
10	164,0	166,0	165,0	165	0,1650	638	0,6380
11	166,0	168,0	167,0	143	0,1430	781	0,7810
12	168,0	170,0	169,0	99	0,0990	880	0,8800
13	170,0	172,0	171,0	71	0,0710	951	0,9510
14	172,0	174,0	173,0	27	0,0270	978	0,9780
15	174,0	176,0	175,0	19	0,0190	997	0,9970
16	176,0	178,0	177,0	3	0,0030	1000	1,0000
above	178,0			0	0,0000	1000	1,0000

Mean = 164,721 Standard deviation = 4,92274 Variance = 24,2334 Skewness = -0,165955 Kurtosis = -0,0385743

- a) *¿Qué características puedes deducir, sobre la forma de las representaciones gráficas del histograma y polígono de frecuencias de esta distribución? ¿Es la distribución aproximadamente simétrica respecto a su centro? ¿Qué nos indica el coeficiente de apuntamiento?.*

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en el curso '98-'99

I-1: Aunque aún no se había explicado nada de la distribución normal, algunos alumnos del año 99, sugirieron que la forma de las representaciones gráficas sería muy similar a la de la campana de Gauss (probablemente debido a que esos alumnos ya habían estudiado el tema en otra asignatura).

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en el curso '99-2000'

I-2: Algunos alumnos concluyeron que la distribución es aproximadamente simétrica, basándose en la igualdad aproximada de las frecuencias equidistantes. Una alumna sugirió que observando los valores de los números centrales se puede ver que la distribución es simétrica. La profesora le preguntó en qué columna está observando tales valores, a lo cual la alumna contesta que observa las frecuencias absolutas. Otro alumno dice que también podrían observarse las frecuencias relativas.

I-3: Pregunta de la profesora sobre otras formas de ver la simetría de la distribución.

- Una alumna contesta que observando la media, mediana y moda.
- Pregunta de la profesora sobre cuáles serían tales valores.
- Algunos alumnos contestan que la moda está en el intervalo (164; 166) porque es el que tiene la mayor frecuencia.

I-4: Pregunta de la profesora sobre cuál sería aproximadamente la mediana. Ante la falta de respuestas, pregunta en qué columna de la tabla deberían fijarse.

- Una alumna responde que en las frecuencias acumuladas
- Otro alumno, que aproximadamente es 162 (pero la respuesta es errónea).
- Pregunta de la profesora sobre a qué intervalo corresponde esa frecuencia.
- Un alumno responde que al intervalo número 12 (contestando incorrectamente).

I-5: Pregunta de la profesora sobre si se fijan en el extremo superior o inferior del intervalo cuando observan las frecuencias acumuladas. Ante la falta de respuestas, la profesora explica cómo deben observar dichas frecuencias.

I-6: Pregunta de la profesora sobre si hay algún otro método de análisis de la simetría. Como nadie contesta, ella les recuerda que podrían analizar también el valor del coeficiente de asimetría.

Determinación de moda y mediana

En ambos cursos la profesora continúa realizando las siguientes preguntas correspondientes a la misma actividad:

Actividad 1-b): *¿En qué intervalo se encontrarían la moda y la mediana? ¿Cuál sería su valor aproximado? ¿Recuerdas el significado de estas medidas?*

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en los dos cursos

I-7: Los alumnos detectan rápidamente el intervalo modal (seguramente porque este tema había sido desarrollado con anterioridad).

I-8: Algunos anticipan que el intervalo donde cae la mediana sería el mismo que el intervalo modal debido a que la distribución es simétrica.

I-9: Otros no recuerdan que la mediana puede determinarse ubicando en la frecuencia acumulada el 50 % de los datos. Ante las dificultades observadas, la profesora realiza un breve repaso del significado de cada una de las medidas con el fin de que los alumnos lo recordaran

Porcentajes de casos en intervalos centrales

En ambos cursos se continúa con el siguiente ítem de la actividad.

Actividad 1-c): Calcula, a partir de la tabla y de un modo aproximado, el porcentaje de chicas en este grupo cuya altura está comprendida en el intervalo ($x - 2s$, $x + 2s$), donde con x indicamos la media y con s la desviación típica de esta muestra. En una distribución normal teórica el porcentaje de casos que está situado a menos de dos desviaciones típicas de la media es el 95%.

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en el curso '98-'99

I-10: En este año hubo más diversidad de soluciones propuestas al problema, entre las que destacamos las siguientes:

- Se toman las frecuencias acumuladas. Al total se le resta la frecuencia correspondiente a los valores menores que 154 y a este resultado se le restan las frecuencias de los intervalos mayores que 174 y luego se divide por 1000, que es el total de observaciones.
- Se suman las frecuencias absolutas de los intervalos correspondientes y luego se divide por 1000.
- A la frecuencia acumulada relativa correspondiente al intervalo (172 ; 174) se le resta la frecuencia acumulada relativa del intervalo (152 ; 154).
- Otros alumnos propusieron sumar las frecuencias absolutas correspondientes a los intervalos comprendidos entre 154 y 174, pero se olvidan de dividir por el total de datos.

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en el curso '99-2000

I-11: Puesto que en esta actividad se habla de la distribución normal teórica, la cual aún no se ha desarrollado, la profesora explica que en una distribución de este tipo el 95 % de los datos centrales están comprendidos en el intervalo ($\mu \pm 2\sigma$). Luego les pide que realicen los cálculos en el conjunto de datos empírico para decidir si sería adecuado ajustar a los mismos una distribución normal teórica. La profesora:

- Plantea preguntas relacionadas con la identificación de la media y la desviación típica del conjunto de datos,
- Menciona el uso del redondeo de los valores que se presentan en la tabla para que el cálculo sea más rápido (ya que casi nadie tiene calculadora).
- Escribe lo siguiente en la pizarra: $x = 164,7$ $s = 4,9$ $2.s = 9,8$
 $(x - 2.s; x + 2.s) = (164,7 - 9,8; 164,7 + 9,8) = (154,9; 174,5)$
- Pregunta cuál sería el intervalo aproximado al que aparece en la pizarra (puesto que en la tabla no aparecen los extremos del intervalo obtenido, es necesario aproximarlos).
- Ante la falta de aportaciones de los alumnos, sugiere tomar el intervalo (154; 174) (debido a que los extremos que aparecen en la tabla son pares).

I-12: Ante la demanda por parte de la profesora del cálculo del porcentaje de chicas con alturas comprendidas en este intervalo, una alumna pregunta la columna que se debe usar. La profesora le dice que justamente eso es lo que les está pidiendo. Como nadie responde, la profesora indica que si se usan las frecuencias absolutas, debe dividirse el resultado por 1000, y les pregunta si a alguien se le ocurre una forma diferente de hacer el cálculo, pero nadie contesta.

I-13: Ante la demanda por parte de la profesora del cálculo del porcentaje de chicas que miden menos de 174 cm, un alumno da la frecuencia absoluta de casos. La profesora recuerda que como se pide la proporción hay que dividir por 1000. Otro alumno responde que también se podría hacer el cálculo con las frecuencias acumuladas.

La profesora vuelve a la tarea propuesta y les pregunta si prefieren usar frecuencias absolutas o relativas, aclarando que si se toman las relativas no necesitan dividir. Un alumno responde que el porcentaje pedido en la tarea es 97,8 %.

I-14: Pregunta de la profesora demandando el cálculo del porcentaje de chicas con alturas de hasta 154 cm.

- Una alumna dice que no entiende cómo obtuvo el valor de la pregunta anterior. Aclaración de la profesora indicando que las frecuencias acumuladas siempre se referirán al extremo superior del intervalo y luego, vuelve a repetir la pregunta relacionada con los 154 cm.
- Un alumno contesta que el resultado es 2,5%. Explicación de la profesora sobre el procedimiento a seguir: restar los dos valores obtenidos en los cálculos anteriores para obtener el valor solicitado en la actividad 1c, y pregunta otra vez cuál es el porcentaje de alumnas con altura dentro del intervalo central. Un alumno responde que aproximadamente es 95,3%.

El análisis de la observación puso de manifiesto que *en ambos cursos* la clase comenzó, en

líneas generales, según la secuencia prevista. Ningún alumno llega a comentar sobre la curtosis, y la profesora olvida de que en la actividad se pregunta expresamente sobre el coeficiente de curtosis. Por tanto este concepto no se llega a trabajar explícitamente en la sesión.

En el bloque (I-7; I-8) se aprecia cómo los alumnos determinan visualmente los intervalos modal y mediano pero no son capaces de relacionar este último con las frecuencias acumuladas (*relación entre dos elementos intensivos*). Esta dificultad se vuelve a presentar en el bloque I-9, en el que no se logra una relación entre el concepto de mediana (como el valor que deja el 50% de los datos a cada lado) y el procedimiento para determinarla en una tabla de *frecuencias* (*relación entre elementos intensivo y actuativo*). La profesora tuvo que insistir sobre este punto.

En las interacciones recogidas en el *primer año* se hacen explícitos los conocimientos previos de algunos alumnos sobre la distribución normal, relacionando la forma de la distribución empírica con la curva representativa del modelo (I-1).

Asimismo estos alumnos aplicaron una mayor diversidad de elementos actuativos para obtener los límites del intervalo central solicitado y del porcentaje correspondiente (bloque I-10).

En el *segundo curso*, las interacciones recogidas en los bloques I-2 a I-6 nos indican que, al llegar al estudio de la asimetría, ningún alumno sugiere hacer uso del coeficiente de asimetría y curtosis (en contra de lo que se preveía), a pesar de que la profesora trata de llegar a este concepto, preguntando inicialmente hasta llegar a una pregunta expresa. En consecuencia, para determinar (elemento actuativo) el tipo de asimetría, los alumnos usan correctamente otros elementos, tales como frecuencias equidistantes, posiciones relativas de media, mediana y moda (elementos intensivos).

Se produce también un cambio en relación con lo establecido en la planificación de la enseñanza, ya que la profesora trata de que sean los mismos alumnos los que recuerden los conceptos previos de simetría, lectura de tablas, etc., en lugar de hacer un breve repaso, como se había previsto (I-2 a I-4). Estos alumnos interpretan correctamente distintos tipos de frecuencias poniéndolas en relación con el concepto de simetría (I-2) y dicho concepto con la propiedad de la posición relativa de media, mediana y moda (I-3), (*relacionan correctamente elementos intensivos*). Esto último no estaba previsto al elaborar la secuencia, ya que en ella se había dado mayor énfasis al estudio mediante el coeficiente de asimetría, pero parece que los alumnos recordaban mejor la propiedad de media, mediana y moda.

En relación con la determinación del intervalo modal, puede verse en el bloque I-3 que no se presentan problemas para relacionar éste con la mayor frecuencia absoluta, mientras que se presentan problemas cuando deben determinar el intervalo al que corresponde la mediana (I-4) (*relaciones entre elementos actuativos e intensivos*).

Aparecen dificultades en la resolución del ítem 1-c, en la que la mayoría de los alumnos del segundo año no identifican las acciones que deben realizar para calcular el porcentaje solicitado (I-12, I-13, I-14). Se pueden observar diversas dificultades al operar con los diferentes tipos de frecuencias, lo cual denota que en general, los alumnos no recuerdan cómo utilizarlas en el cálculo de porcentajes (*relaciones entre elementos actuativos e intensivos*). Se ponen de manifiesto las dificultades que presenta el establecer *relaciones entre elementos intensivos y actuativos*.

Los estudiantes tienen bastante dificultades en la determinación del número de casos en los intervalos centrales (I-11), y es prácticamente la profesora la que tiene que dar la solución (*relación entre elementos actuativos e intensivos*).

Cuadro 6.2.2. Síntesis de la observación de la primera clase teórica (parte 2)

Estimación de probabilidades a partir de datos de frecuencias

En ambos cursos, la profesora parte de los conceptos de variable estadística y aleatoriedad (recordando lo ya dado), y resalta su diferenciación basándose en el ejemplo de la actividad desarrollada. Luego continúa con la siguiente actividad:

Actividad 1-d: *Supongamos que escribimos el nombre de cada chica que tomó parte en la muestra anterior en un papel y elegimos uno de ellos al azar, ¿Cuál será la probabilidad de que la chica en cuestión tenga una altura comprendida en el intervalo $(x - 2s, x + 2s)$? ¿Y que tenga una altura que caiga fuera del intervalo?*

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en los dos cursos

I-15: Algunos alumnos identificaron que se estaba pidiendo el valor que habían calculado en el ítem anterior, aunque otros no comprendían lo que se les pedía.

La distribución normal como modelo que aproxima una distribución de datos empírica

En los dos cursos se resume lo dado hasta el momento.

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en el curso '98-99

I-16: El primer año se introduce verbalmente la idea de distribución normal a partir de los apuntes. Utiliza el ejemplo de la página 3 del apunte (Anexo I), relacionado con los coeficientes intelectuales, comentando la forma en que se construyen los tests de inteligencia y lo que significa el C.I.

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en el curso '99-2000

I-17: La profesora comienza a desarrollar (con ayuda del ordenador y el cañón proyector) la introducción a la distribución normal. Utiliza el fichero COEFINT, que contiene tres variables con muestras de coeficientes intelectuales de 100, 1000 y 10000 personas respectivamente (ver descripción en sección 5.3). En el desarrollo del ejemplo la profesora:

- Toma la muestra de 100 personas y realiza el histograma, cambiando las opciones por defecto para obtener: límite inferior = 50; límite superior = 150 y 8 intervalos;
- Analiza la forma de dicho histograma y luego muestra el polígono de frecuencias, que tiene una sola moda, pero su forma no se aproxima a la de la distribución normal;
- Cambia el número de intervalos a 15, destacando que la forma sigue sin suavizarse y explicando que esto ocurre porque tienen una muestra pequeña, por lo que deben estudiar la muestra con 1000 personas;
- Nuevamente cambia los límites y el número de intervalos y se observa que el histograma es más “redondeado” que el anterior. Construye el polígono de frecuencias, que sigue presentando un pico, pero cuya forma es más parecida a la de la distribución normal que la del caso anterior;
- Cambia el número de intervalos a 20 pero la forma no es muy convincente, se cambia el número de intervalos a 15 y la forma mejora.

I-18: La profesora indica que va a adelantarse un poco a lo estudiado y les muestra un nuevo programa (DISTRIBUTION FITTING), que superpone al histograma una curva normal teórica con la misma media y desviación que la distribución empírica. A partir de ahí, la profesora:

- Muestra los gráficos superpuestos y los analiza;
- Explica lo que supone aumentar el número de datos, y comienza a trabajar con la muestra de 10000 personas, tomando el límite inferior = 50; límite superior = 150 y el número de intervalos = 15, y observando que el histograma sale más redondeado. Al cambiar el número de intervalos a 20 la forma del histograma y del polígono se aproximan bastante bien a la normal;
- Concluye indicando que para observar cómo se aproxima el histograma y el polígono de frecuencias a la curva se debe tomar una muestra grande y disminuir el ancho de los intervalos. Luego explica que la curva normal les servirá para realizar inferencias en la población de la cual proviene la muestra.

I-19: Pregunta de la profesora sobre cuál es el porcentaje de casos que cae por encima de la media (al explicar las propiedades que aparecen en la página 5, Anexo I). Ante la falta de respuestas de los alumnos, pregunta de la profesora sobre qué porcentajes de personas tiene un coeficiente intelectual entre 50 y 150.

- Una alumna responde que el 100 % (lo cual es correcto debido a que se está trabajando con todo el rango de valores).
- La profesora le pregunta qué porcentaje de personas tiene un coeficiente mayor que 100 (que es la mediana).
- La misma alumna le responde que el 50 %.

Representación gráfica, ecuación y parámetros de la distribución normal

La profesora continúa en ambos cursos con la explicación de la ecuación y la representación gráfica de la función de densidad normal, destacando:

- La no necesidad de aprender de memoria la ecuación;
- La posibilidad de que se puedan variar los valores de la media y de la desviación típica, que son los parámetros de la distribución, por lo cual ésta quedará totalmente definida si conocemos los valores de los parámetros;

- Apoyándose en la gráfica dibujada en la pizarra, muestra que los puntos de inflexión se encuentran a una distancia de la media igual a la desviación típica.

El análisis de esta segunda parte de la sesión muestra, en el bloque I-15, dificultades en algunos alumnos en cada uno de los *dos cursos* relacionadas con la comprensión de las preguntas planteadas, aunque otros identifican la aproximación entre el valor del porcentaje en un intervalo central y la probabilidad *solicitada* (*relación entre elementos intensivos*). En ambos cursos se resaltan las *diferencias entre diferentes elementos intensivos* (variable estadística y aleatoria; significado de los parámetros, propiedades geométricas).

El *primer año* la introducción de la idea de distribución normal (elemento intensivo) se basa únicamente en los apuntes escritos (I-16).

EL *segundo año*, la introducción de forma experimental (I-17 a I-19) mejora el análisis de la idea de aproximación del histograma a la distribución *normal* (*relación entre extensivo e intensivos*). Los alumnos parecen comprender esta idea, por sus respuestas en las interacciones citadas. Hacemos notar, sin embargo que, dependiendo de los intervalos escogidos el histograma podría presentar picos, aunque esto sirve para mostrar la diferencia entre el modelo teórico y los datos *empíricos* (*relación entre elementos intensivos*). También sugiere, como indica Konold (1995), la dificultad de que una experiencia realizada en la clase converja exactamente en el sentido previsto por el profesor, por lo cual es importante estudiar previamente el fichero de datos que se va a presentar a los alumnos para que la experiencia pueda ser provechosa.

Finalizadas las explicaciones correspondientes al desarrollo de esta sesión, la profesora pide a los alumnos que resuelvan las actividades 1-e y 1-f y que las entreguen por escrito.

Cuadro 6.2.3. Síntesis de la observación de la primera clase teórica (parte 3)

Actividad 1-e) En un histograma, las áreas de cada rectángulo representan las frecuencias en el intervalo. Recíprocamente, a partir de las frecuencias podemos calcular el área que, en el histograma corresponde a un intervalo dado. En el histograma de frecuencias relativas:

1. ¿Cuál sería el área correspondiente al intervalo (160-170)?
2. ¿Cuál sería el área aproximada en este intervalo en el polígono de frecuencias?
3. ¿Cuál sería la probabilidad de que una chica elegida al azar tenga una altura entre 160 y 170?
4. ¿Y que mida más de 174 cm?

Actividad 1-f) Compara los resultados de e.1) y e.3). ¿Qué conclusiones puedes extraer?

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en los dos cursos

I-20: Algunos alumnos muestran confusión con respecto al intervalo en el que deben incluir el extremo superior cuando necesitan determinar las frecuencias en los intervalos de clase.

I-21: Algunos alumnos no recuerdan la utilidad del polígono de frecuencias, tampoco logran estimar el área en un intervalo bajo el polígono de frecuencias o en un histograma.

I-22: No se comprende por qué se obtiene el mismo resultado si se suman frecuencias relativas o si se restan frecuencias acumuladas.

I-23: Se presentan dificultades cuando se debe calcular la frecuencia de un intervalo que es unión de varios intervalos o por diferencia entre la frecuencia acumulada de los intervalos a los que corresponden sus extremos.

I-24: La mayoría de los alumnos identifica las posiciones relativas de la media, mediana y moda cuando se presenta una distribución asimétrica.

El análisis de las interacciones recogidas en el aula permite apreciar que hay algunos alumnos en *ambos cursos* que no presentan una adecuada comprensión de algunos de los elementos de significado relacionados con la distribución normal que se suponían adquiridos previos al desarrollo del tema. Así:

- La dificultad mencionada en I-20 indica que no se interpretan correctamente los convenios de construcción de intervalos en una tabla de frecuencias, lo cual implicaría un error en la idea de intervalo semiabierto (Elemento intensivo).
- En I-21 se muestra que no se reconocen los convenios en la elaboración de los gráficos que

es uno de los componentes en la comprensión de gráficos señalado por Curcio (1987). En consecuencia, *no se logra establecer relaciones* entre el gráfico propiamente dicho (Elemento ostensivo) y lo que representan cada uno de sus elementos (Elementos intensivos).

- En I-22 se indica una *dificultad en relacionar* los distintos tipos de frecuencias (Elementos intensivos) y los procedimientos de cálculo que se realizan con cada una (Elementos actuativos). *Tampoco en este caso se logra relacionar* la frecuencia de la unión con la suma de frecuencias (Elementos intensivos y actuativos) o la frecuencia acumulada y no acumulada (Elementos intensivos).
- Por otro lado, en I-24, *se logra establecer una relación correcta entre dos elementos intensivos*: la propiedad de las medidas de tendencia central y el concepto de asimetría, y también, *se relacionan con la representación gráfica* de la situación (Elemento ostensivo).

Elementos de significado personal identificados en las respuestas a las tareas escritas

En lo que sigue se detalla el análisis de las respuestas escritas a las cuestiones 1.e y f. Destacaremos las diferencias más importantes en los dos cursos, en relación al uso de los diversos elementos de significado que hemos podido identificar en su resolución, cuyas frecuencias se recogen en la tabla 6.2.1.

Elementos Extensivos

En la actividad desarrollada se ha aplicado el ajuste de un modelo por medio de la aproximación de la curva de densidad al histograma que representa la distribución empírica.

Elementos Ostensivos

En esta actividad algunos alumnos han utilizado, además de la tabla de frecuencias presentada, el histograma y el polígono de frecuencias construidos a mano para visualizar las áreas y probabilidades solicitadas. Algunos alumnos trazaron el histograma y el polígono de frecuencias superpuestos para visualizar por qué las áreas eran iguales. Este elemento no estaba contemplado cuando se planificó la actividad, pero es un elemento que aporta más información y permite al alumno justificar la respuesta. No aparecen diferencias relevantes entre los cursos.

Elementos Actuativos

En esta tarea se aplican los siguientes tipos de elementos actuativos:

Cálculo de áreas en histogramas y polígonos de frecuencias. Para ello los alumnos suman las frecuencias absolutas y las dividen por el número total de observaciones. Esta acción se realiza en ambos cursos con un porcentaje de respuestas incorrectas muy elevado. Los principales errores han sido calcular la suma de las frecuencias absolutas sin dividir por N o la diferencia de frecuencias acumuladas absolutas y equivocarse de intervalo.

Estimar probabilidades a partir de las frecuencias en una tabla. Para ello, alrededor de la mitad de los alumnos restan las frecuencias acumuladas y luego las dividen por 1000 y por último expresan el resultado en porcentaje o como decimal. En ambos cursos, los errores han consistido en: no especificar cómo obtienen el resultado, dar un resultado incorrecto o no resolver el problema.

Representación gráfica de datos. En este caso, unos pocos alumnos de ambos cursos, han realizado manualmente y correctamente algunos gráficos como los descritos en los elementos ostensivos.

No aparecen diferencias acusadas entre los cursos.

Elementos Intensivos

En ambos cursos, se han aplicado los conceptos de área comprendida en un intervalo del histograma o polígono de frecuencias, que viene dada por las frecuencias absolutas y relativas o la diferencia de frecuencias acumuladas y acumuladas relativas, cometiendo gran diversidad de errores.

Tabla 6.2.1. Elementos de significado empleados correcta o incorrectamente por los alumnos en las actividades 1.e y f

Elementos de significado	Aplicados Correctamente		Aplicados Incorrectamente	
	1999 (n=21)	2000 (n=30)	1999 (n=21)	2000 (n=30)
Ostensivos				
Representaciones gráficas				
Histogramas		2		
Histograma y polígono de frecuencias superpuestos	2	1		
Actuativos				
Cálculo de áreas en histogramas y polígonos de frecuencias (Items e.1 y e.2)	2	7	19	23
Estimación de probabilidades a partir de tabla de frecuencias (ítem e.3)	13	17	8	13
Estimación de probabilidades a partir de tabla de frecuencias (ítem e.4)	8	10	13	20
Representación gráfica de datos	2	3		
Intensivos				
Área como suma de frecuencias relativas en un intervalo	2	7	9	17
Área como diferencia de frecuencias relativas acumuladas			10	6
Probabilidad aproximada por la suma de frecuencias relativas	2	7	9	17
Probabilidad aproximada por la diferencia de frecuencias relativas acumuladas (Ítem e.4)	8	10	8	7
La probabilidad se puede expresar como porcentaje	10	5		
La probabilidad se puede expresar como proporción	4	3		
La probabilidad se puede estimar por el área	2	10	4	
Validativos				
Comprobación de casos particulares		3		
Generalizar una propiedad o un resultado	12	4	4	
Representación gráfica	2	3		

También se ha utilizado correctamente la propiedad de que la probabilidad en un determinado intervalo puede aproximarse a la frecuencia, que coincide con el área y que puede expresarse como proporción o porcentaje. Además, de manera implícita, se ha aplicado el concepto de intervalos de clases, se han debido reconocer e interpretar diferentes tipos de frecuencias y también, los convenios de lectura de gráficos.

El principal problema detectado en una cantidad considerable de alumnos de los dos cursos al interpretar el área en el histograma correspondiente a un intervalo, ha sido usar frecuencias absolutas o absolutas acumuladas sin dividir por el tamaño de la muestra, que puede tener implícito la confusión entre los tipos de frecuencias, ya que, aunque es posible realizar un histograma de frecuencias absolutas, en el enunciado se expresaba claramente que se trabajaría con un histograma de frecuencias relativas. Por ejemplo, a continuación reproducimos el trabajo de una de las alumnas:

"e.1. Observaciones: $132 + 158 + 165 + 143 + 99 = 697$

Por lo tanto, el área correspondiente al intervalo (160-170) es 697

e.2. El área del polígono de frecuencias sería aproximadamente la misma".

En otros casos se piensa que el área está dada por la frecuencia absoluta y la probabilidad se obtiene al dividir el área por N. También se producen errores en la estimación de probabilidades porque los alumnos no llegan a relacionar la probabilidad con el área (elementos intensivos).

La variación en la frecuencia de errores en los cursos se explica por los diferentes procedimientos usados por los alumnos, lo que implica el uso de diferentes elementos intensivos.

Elementos Validativos

Pocos alumnos aplican este tipo de elementos en ambos cursos. Principalmente se aplicaron como elementos validativos, la comprobación de casos particulares y la generalización de una propiedad o resultado. Dentro de la primer categoría están aquellos que sólo observaban que el valor del área era igual al de la probabilidad, y en la segunda categoría, hubo alumnos que además de observar esto generalizaban tal resultado. También hubo un pequeño número de alumnos en ambos cursos, que utilizaron la representación gráfica como una forma de validar sus resultados.

En relación con la generalización, hubo mayor cantidad de alumnos del segundo curso que llegaron a generalizar correctamente dicha propiedad. En todo caso, no se pidió explícitamente la validación.

6.3. PRIMERA SESIÓN DESARROLLADA EN EL AULA DE INFORMÁTICA

En esta sesión se trabajó con el fichero TESTP, y más específicamente con la variable P_TOTAL (Anexo IV). En el año 1999 se recogieron datos de 58 alumnos y de 46 en el año 2000. En el cuadro 6.3.1 se transcribe un párrafo de la observación correspondiente a esta sesión, para pasar luego a su análisis.

Cuadro 6.3.1. Síntesis de la observación de la primera clase práctica

Introducción a las actividades

En ambos cursos, la profesora comienza la sesión haciendo un breve repaso de los conceptos teóricos desarrollados en la clase anterior que eran necesarios para el desarrollo de las actividades. Además, explica de qué forma deben realizar dichas actividades y recuerda cómo ingresar a las opciones del programa que iban a utilizar en esta clase.

Aunque algunas opciones ya habían sido aplicadas en sesiones anteriores, muchos alumnos no recordaban cómo utilizarlas, por lo que además de la explicación inicial, la profesora debe pasar por las mesas realizando explicaciones individuales.

Se indica a los alumnos la forma de evaluar la normalidad de una distribución, también se les comenta los objetivos de la práctica y se les sugiere que pueden seguir los pasos del ejemplo de la página 13 del apunte (Anexo I). En los dos años hubieron problemas con el funcionamiento de algunos ordenadores.

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en los dos cursos

I-1. Los alumnos confunden los distintos programas. Generalmente, los alumnos saben utilizar todos los programas que se les ha enseñado pero no siempre los aplican en las ocasiones correctas.

I-2. No recuerdan el programa que deben usar para realizar los gráficos o los coeficientes de asimetría y curtosis, incluso el segundo año, en que se hizo mención a esto dentro de la misma hoja de prácticas.

I-3. Algunos no logran pegar los gráficos en el informe escrito en Word.

I-4. La pregunta 3 resultó la más difícil para la mayoría de los alumnos.

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en el curso 1999-2000

I-5. Faltaban 5 ordenadores y otro se estropeó al final, cuando los alumnos aún no habían grabado y estaban acabando su trabajo.

I-6 La mayoría de los alumnos, sabían cómo cambiar los extremos de los intervalos, pero no relacionaban esta acción con la pregunta.

I-7 . Un alumno intentaba leer los ficheros de Word con el Statgraphics (confundiendo la utilidad de cada programa).

I-8. Un alumno preguntó por qué a doble anchura del intervalo no había doble proporción, refiriéndose al intervalo ($\bar{x} - 2.s ; \bar{x} + 2.s$).

I-9. Otro preguntó de dónde salía la regla de los intervalos centrales

La observación de la clase *en los dos cursos* pone de manifiesto distintos tipos de dificultad en su desarrollo. En particular, en relación al uso del paquete estadístico (I-1) y coincidiendo

con lo que afirman Ben-Zvi y Friedlander (1997), muchos alumnos lo utilizan de una manera acrítica, olvidando el significado de las opciones o utilizando opciones que no son pertinentes para la resolución que deben realizar (Elementos actuativos).

Es claro que, aunque el ordenador resuelve el problema de cálculos y gráficos, tiene una semiótica compleja. Los algoritmos de cálculo son sustituidos por el manejo de iconos. Un ícono remite a una operación, por lo que constituye un sistema de representación, una nueva herramienta semiótica. Los menús del programa se organizan en forma jerárquica y el alumno debe conocer los convenios y formas en que están estructurados. Este tipo de actividad no es usual en la clase de matemáticas y tiene una notable complejidad, como se pone de manifiesto en la observación de la clase.

Los alumnos tienen notables dificultades en el manejo (elemento actuativo) de los programas (I-2 e I-3). Como indican DelMas, Garfield y Chance (1998), el aprendizaje de la herramienta informática añade un coste cognitivo, puesto que la cantidad de información que el alumno puede adquirir en cada sesión es limitada. Esto se ha confirmado por el hecho de que los alumnos olvidan rápidamente el manejo de algunas de las opciones del programa.

Las dificultades principales se plantearon al resolver la tercera cuestión (I-4), creemos que se debió a que el trabajo con la propiedad de los intervalos centrales (elemento intensivo), conlleva la aplicación de un gran número de elementos de significado, tanto actuativos como intensivos, tales como: obtención de límites, cambio del número de intervalos con el ordenador, cálculo de porcentajes, interpretación de los distintos tipos de frecuencias y relación entre los resultados obtenidos con la propiedad en una distribución normal. Para resolver dicha tarea, *los alumnos deben integrar todos estos elementos* mediante diversas acciones y procedimientos informáticos, lo cual hace que la complejidad semiótica de esta propiedad sea mucho mayor que la de las actividades anteriores.

En relación con la implementación de esta sesión, se debería resaltar que una dificultad que presenta la utilización de ordenadores, es que en ocasiones como ésta en la que fallaron algunas máquinas, se hace más difícil el trabajo, no sólo del profesor sino también el de los alumnos, debiéndose improvisar el desarrollo de clases adicionales.

En el *segundo curso* se muestran más claramente las dificultades que mencionamos antes (I-5 a I-7; I-9), y también observamos que un alumno intenta hacer una generalización (elemento actuativo) errónea de la proporcionalidad (I-8).

Elementos de significado personal identificados en las respuestas escritas a las tareas

En el Cuadro 6.3.2, se transcriben las actividades planteadas en esta sesión y luego se realiza el análisis y descripción de los elementos de significado que hemos podido identificar en las respuestas escritas de los alumnos a las actividades. En la Tabla 6.3.1 se presentan los resultados correspondientes a las actividades de esta sesión.

Cuadro 6.3.2. Actividades planteadas en la primera sesión práctica

- *Abre el programa STATGRAPHICS y carga de la unidad U (carpeta DATOS) el fichero TESTP. Este fichero, que viene descrito en los apuntes, contiene los resultados de diferentes puntuaciones obtenidas al pasar un test de intuiciones probabilísticas a una muestra de alumnos. Lee en los apuntes la descripción del fichero y el significado de las variables.*
 - *En esta práctica y la que sigue vamos a analizar en este fichero algunas variables, para decidir si es o no adecuado ajustar una distribución normal a las mismas. En el tema escrito sobre la distribución normal se describen los puntos a tener en cuenta para decidir si la distribución normal es una buena aproximación a los datos. Consulta estos pasos en la página 12 y siguientes, en los que se incluye un ejemplo, que puede servirte en la realización de esta práctica. Analizaremos sólo variables numéricas, ya que la distribución normal no se aplica a variables cualitativas.*
 - *En esta práctica vamos a analizar la puntuación total en el test de probabilidad, para ver si la distribución normal sería una aproximación aceptable para esta variable. Estudiaremos, primeramente la forma de la distribución, para comparar con la esperada en una curva normal.*
1. *Con ayuda del programa DESCRIBE; ONE VARIABLE NUMERICAL, prepara una tabla de frecuencias y un polígono de frecuencias relativas de la puntuación total en el test de probabilidad. Estudia la forma del polígono de frecuencias relativas y la función de densidad (que puede obtenerse con la opción density trace). a) ¿Son el polígono y la función de densidad aproximadamente simétricos? b) ¿Tiene una o varias modas?*
 2. *Mediante SUMMARY STATISTICS calcula los valores del coeficiente de asimetría y de curtosis y valores tipificados (si hace falta, usa PANE OPTIONS). ¿Son los valores obtenidos aceptables para una distribución normal?*

3. Has estudiado en clase teórica la regla de los intervalos $\mu \pm \sigma$, $\mu \pm 2\sigma$, $\mu \pm 3\sigma$ en una distribución normal. Utilizando la tabla de frecuencias, calcula el porcentaje de niños cuya puntuación total está incluida en el intervalo $x \pm \sigma$, $x \pm 2\sigma$, $x \pm 3\sigma$. El valor de la media y desviación típica viene dado en la tabla de frecuencia que has construido anteriormente. Si es necesario, cambia la amplitud de los intervalos para que los extremos. ¿Se cumple la regla 68-95-99?
4. Teniendo en cuenta los puntos 1, 2, 3 ¿Crees que la distribución de esta variable es aproximadamente normal?

Elementos Extensivos

En las actividades de esta sesión, los alumnos han aplicado el problema de ajuste del modelo normal, que se concreta en la aproximación de la curva de densidad al histograma que representa a la distribución empírica.

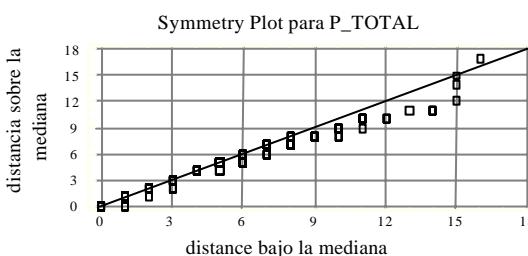
Elementos ostensivos

Dentro de los elementos ostensivos hemos considerado las siguientes categorías:

Representaciones gráficas: son los gráficos usados por los alumnos para justificar la normalidad (tales como histograma, polígono de frecuencias, curva de densidad, symmetry plot, histograma y curva de densidad superpuestos), y para la determinación de la simetría y unimodalidad.

Se considera incorrecto el uso del histograma o polígono de frecuencias si se han utilizado las frecuencias absolutas, ya que se pedía utilizar el polígono de frecuencias relativas. En otros casos se hace una interpretación errónea de los gráficos, como en la resolución que se transcribe a continuación :

"Sí, ya que en la curva de densidad se ve que es muy parecido a la campana de Gauss, y en la segunda gráfica (Symmetry Plot), sale casi perfectamente la línea recta". (elemento ostensivo e intensivo)



Representaciones numéricas: dentro de esta categoría se han utilizado dos tipos:

SUMMARY STATISTICS: El resumen que el programa da por defecto muestra los siguientes coeficientes y medidas: media, varianza, desviación típica, mínimo y máximo, y los coeficientes de asimetría y curtosis tipificados. A continuación, transcribimos un ejemplo de un alumno que ha utilizado el resumen estadístico que entrega por defecto el programa y al lado el que se considera correcto:

Summary Statistics for P_TOTAL	Summary Statistics for P_TOTAL
Count = 250	Count = 250
Average = 25,756	Moda = 26
Variance = 40,7314	Skewness = -0,107854
Minimum = 10,0	Stnd skewness = -0,696194
Standard deviation = 6.38211	Kurtosis = -0.456166
Maximum = 43,0	Stnd. kurtosis = -1.47227
Stnd skewness = -0,696194	
Stnd Kurtosis = -1,47227	
Sum = 6439,0	

En otros casos, se realiza el cálculo de los coeficientes de asimetría y curtosis por medio de este resumen numérico y el cálculo de la media y la desviación típica por medio del programa de ajuste de distribuciones (DISTRIBUTION FITTING), lo cual hemos considerado incorrecto ya que se debía calcular todo por medio del SUMMARY STATISTICS, esto podría ser un indicador de que no se ha comprendido la diferencia entre distribución teórica y empírica. A continuación reproducimos un ejemplo:

Fitted normal distribution:	Stnd. Skewness = -0,696194
Mean = 25,756	kurtosis = -0,456166
Standard deviation = 6,38211	Stnd. Kurtosis = -1,47227

Tabla de frecuencias: la aplicación se considera *incorrecta* cuando no se modifica la amplitud de los intervalos de modo que se obtengan extremos aproximados a los necesitados, es decir, se toman los intervalos que el programa da por defecto. Consideramos correctos los casos en los que se ha modificado el número y amplitud de intervalos para realizar un cálculo lo más aproximado posible de los porcentajes, como en el ejemplo siguiente:

Frequency Tabulation for P_TOTAL							
Class	Lower Limit	Upper Limit	Midpoint	Frequency	Relative Frequency	Cumulative Frequency	
at or below	5,0	2,5	0	0,0000	0	0,0000	
1	5,0	10,0	7,5	1	0,0040	1	0,0040
2	10,0	15,0	12,5	12	0,0480	13	0,0520
3	15,0	20,0	17,5	46	0,1840	59	0,2360
4	20,0	25,0	22,5	57	0,2280	116	0,4640
5	25,0	30,0	27,5	68	0,2720	184	0,7360
6	30,0	35,0	32,5	54	0,2160	238	0,9520
7	35,0	40,0	37,5	10	0,0400	248	0,9920
8	40,0	45,0	42,5	2	0,0080	250	1,0000
above	45,0			0	0,0000	250	1,0000
Mean = 25,756 Standard deviation = 6,38211							

Al comparar en la Tabla 6.3.1 con lo previsto en el análisis a priori para esta práctica (capítulo V), observamos que hay un empleo casi predominante de la curva de densidad lo que sugiere que ésta es la representación en la que los alumnos reconocen con mayor facilidad la curva normal. También, que en esta representación se reconoce mejor la unimodalidad y simetría, ya que no depende, como en el polígono e histograma de la amplitud y el número de intervalos, aspecto que los alumnos parecen no dominar.

La mayoría de los alumnos han usado correctamente la tabla de frecuencias y el resumen estadístico. Es decir, fueron capaces de modificar el ancho de los intervalos en la tabla y de cambiar las opciones por defecto en SUMMARY STATISTICS, a pesar de que en ambos casos debían usar un menú secundario, lo que muestra que, a pesar de las dificultades que se mostraron en el análisis de las interacciones en la clase, los alumnos logran resolver la tarea con la ayuda de la profesora.

Las principales dificultades se producen en el polígono de frecuencias, en que muchos alumnos usaron frecuencias absolutas, en lugar de relativas. Resaltamos, no obstante, la complejidad de la tarea, puesto que, en el menú secundario hay que modificar tres puntos: el ancho y límite de los intervalos, el tipo de frecuencias (de absolutas a relativas) y el tipo de gráfico (histograma o polígono). En cambio, en la tabla de frecuencias sólo hay que modificar el ancho y extremos de los intervalos, lo que explica el mayor porcentaje de uso correcto en la misma.

No se observan grandes diferencias en los dos cursos, salvo que en 1999, hubo más errores en la aplicación del histograma y en 2000, más alumnos que usaron el polígono de frecuencias. Esto puede ser consecuencia de las modificaciones realizadas en la enseñanza durante el segundo curso, donde se explica más claramente la forma de obtener el polígono de frecuencia a partir del menú secundario.

En el caso del SUMMARY STATISTICS, podemos apreciar que ha sido aplicado en forma correcta por más alumnos en el primer año mientras que sucede al contrario con la tabla de frecuencias. Creemos que en este caso, los alumnos del segundo año han tenido más oportunidades de observar cómo se trabaja con la tabla de frecuencias por el uso del proyector en la clase teórica.

Aunque en la actividad no se pedía expresamente la utilización de la curva de densidad y el histograma superpuestos, muchos de los alumnos del primer año lo han aplicado correctamente. Por el contrario, este elemento no fue aplicado por ningún alumno en el segundo año. Creemos que esto puede ser consecuencia de que no se lo pedía en la actividad y de que, aunque la profesora había adelantado el uso del programa en la clase teórica anterior, no hizo mención expresa a que se lo utilizaría en la clase práctica.

Elementos Actuativos

Hemos observado que los alumnos aplican los siguientes:

Obtención de los límites en los intervalos centrales: Este es un punto importante, del que dependerá el resultado de los porcentajes pedidos y las conclusiones en relación con la normalidad de la distribución. Los alumnos han realizado diversas acciones, tales como: redondear los valores de la media y de la desviación típica antes de calcular los extremos; considerar los valores exactos de media y desviación típica y luego redondear los valores de los límites (bien por exceso o por defecto). Otros alumnos han calculado los límites exactos de los intervalos, sin realizar redondeo, y en el cálculo de porcentajes no especifican los límites, como en el siguiente caso donde la tabla de frecuencias presentada no corresponde a los límites calculados y ni siquiera a valores aproximados:

Frequency Tabulation for P_TOTAL							
Class	Lower Limit	Upper Limit	Midpoint	Frequency	Relative Frequency	Cumulative Frequency	Cum. Rel. Frequency
at or below	0.0			0	0.0000	0	0.0000
1	0.0	5.55556	2.77778	0	0.0000	0	0.0000
2	5.55556	11.1111	8.33333	4	0.0160	4	0.0160
3	11.1111	16.6667	13.8889	16	0.0640	20	0.0800
4	16.6667	22.2222	19.4444	55	0.2200	75	0.3000
5	22.2222	27.7778	25.0	74	0.2960	149	0.5960
6	27.7778	33.3333	30.5556	72	0.2880	221	0.8840
7	33.3333	38.8889	36.1111	26	0.1040	247	0.9880
8	38.8889	44.4444	41.6667	3	0.0120	250	1.0000
9	44.4444	50.0	47.2222	0	0.0000	250	1.0000
above	50.0			0	0.0000	250	1.0000

Mean = 25.756 Standard deviation = 6.38211

1º Intervalo: $[\mu \pm 1\sigma] = [19.37389, 32.13811]$; Porcentaje = 64,6%

2º Intervalo: $[\mu \pm 2\sigma] = [12.99178, 38.52022]$; Porcentaje = 96%

3º Intervalo: $[\mu \pm 3\sigma] = [6.60967, 44.90233]$; Porcentaje = 100%

Cálculo de porcentajes en tablas con Statgraphics, modificando los intervalos de clase: Los alumnos han utilizado frecuencias absolutas o acumuladas, dividiendo por el total de la muestra, o bien frecuencias relativas o relativas acumuladas. En otros casos, no se ha especificado la forma en que lo resolvieron, como en el ejemplo que hemos transcritto antes.

Estudio descriptivo (tablas y resumen estadístico) con Statgraphics: consideramos las acciones sobre los resúmenes numéricos, como el cambio del número y ancho de los intervalos en la tabla de frecuencias o, el cambio de los estadísticos o medidas de posición que se debían calcular con el resumen estadístico.

Al considerar los elementos actuatorios (Tabla 6.3.1), la mayoría de los alumnos han realizado correctamente la obtención de los límites centrales y el cálculo de los porcentajes correspondientes a dichos intervalos, observándose una mejoría en el segundo curso en ambos casos.

La diferencia más importante entre cursos es que fueron muchos más los alumnos que en el segundo curso aplican correctamente el estudio descriptivo con Statgraphics, lo que se explica por el mayor detalle dado en los apuntes a la forma de llevar a cabo este análisis.

Elementos Intensivos

Simetría – asimetría: La interpretación es correcta cuando se analiza la simetría o asimetría de la distribución empírica mediante los coeficientes de asimetría o la visualización del histograma, polígono de frecuencias, o curva de densidad. Por ejemplo, a continuación se transcribe parte de la resolución correcta de un alumno que se basa tanto en lo gráfico como en lo numérico:

"Podemos decir, observando los gráficos y los estadísticos correspondientes, que tanto el polígono de frecuencias relativas como la función de densidad son aproximadamente simétricos"

Moda, unimodalidad: La interpretación es correcta cuando además de realizar una interpretación gráfica también se realiza el cálculo de la moda y se especifica la unimodalidad o el intervalo modal, como en el siguiente caso:

"Como puede observarse en el polígono de frecuencias, la distribución tiene una sola moda que cae en el intervalo (25, 30) con una frecuencia de 68 y su valor exacto es 26".

Coefficientes de asimetría y curtosis: la interpretación es adecuada si además de calcular los valores correctos se da una interpretación de cada uno de ellos, como en la resolución realizada por un alumno que transcribimos a continuación:

"La distribución es levemente asimétrica a izquierda ya que el valor del coeficiente de asimetría es: -0.107854"

Proporción de casos en los intervalos centrales en una distribución normal: La interpretación es inadecuada cuando el resultado no es el correcto, se dan resultados parciales, o la interpretación del resultado no es correcta, por ejemplo:

"Los valores de los extremos del intervalo son 49,9 y 6,62, con lo cual el 100 % de los alumnos estarían dentro de ese intervalo. Parece que la distribución de la puntuación total sí es aproximadamente normal".

La interpretación es correcta cuando, además de realizar el cálculo correcto se relaciona con la proporción de casos en la normal, como se muestra a continuación:

"1.intervalo (19,37-32,13); 2.intervalo (13,99-38,52); 3.intervalo (6,60-44,90)						
Class	Lower Limit	Upper Limit	Midpoint	Frequency	Relative Frequency	Cumulative Frequency
at or below	19,37			46	0,1840	46
1	19,37	32,13	25,75	162	0,6480	208
above	32,13			42	0,1680	250
						1,0000
Class	Lower Limit	Upper Limit	Midpoint	Frequency	Relative Frequency	Cumulative Frequency
at or below	13,99			7	0,0280	7
1	13,99	38,52	26,255	240	0,9600	247
above	38,52			3	0,0120	250
						1,0000
Lower Class	Upper Limit		Midpoint	Frequency	Relative Frequency	Cumulative Frequency
at or below	6,6			0	0,0000	0
1	6,6	44,9	25,75	250	1,0000	250
above	44,9			0	0,0000	250
<i>Mean = 25,756 Standard deviation = 6,38211 Average = 25,756 Mode = 26,0</i>						
<i>Tras hacer los intervalos y sus correspondientes tablas de frecuencias, podemos observar que la variable "P.TOTAL", se aproxima a una distribución normal porque la proporción de casos obtenida es cercana al 68%, 95% y 99,7%.</i>						

Los alumnos emplean los elementos intensivos previstos (Tabla 6.3.1), aunque no todos se usan con la misma frecuencia, lo que puede indicar que unos, como la simetría y unimodalidad, han sido mejor comprendidos que otros, como los coeficientes de asimetría y curtosis y la proporción de valores centrales, y esto coincide con lo observado en el análisis de las interacciones de la clase. En general, son escasos los errores cometidos en relación con estos elementos de significado.

En el segundo curso se observa una leve mejora en todos los elementos intensivos. La mejora es especialmente visible en la interpretación correcta de los coeficientes de asimetría y curtosis y en consecuencia, la simetría y unimodalidad de la distribución, además la mayoría aplica correctamente la propiedad de intervalos centrales. Seguramente la mayor insistencia de la profesora en estos puntos en la clase teórica, así como los cambios efectuados en los apuntes facilitaron a los alumnos la comprensión de estos elementos.

Tabla 6.3.1. Frecuencias de los elementos de significado personal identificados en las

respuestas de los alumnos a la práctica 1

Elementos de significado	Aplicados correctamente		Aplicados incorrectamente	
	1999 (n = 58)	2000 (n = 46)	1999 (n = 58)	2000 (n=46)
Ostensivos				
Representaciones gráficas				
Curva de densidad	46	46	16	4
Histograma	2	1		
Curva de densidad e histograma superpuestos	22			
Polígono de frecuencias relativas	8	17	22	23
Symmetry plot	4		6	
Representaciones numéricas				
SUMMARY STATISTICS	54	33	2	7
Tabla de frecuencias	42	34	4	6
Actuativos				
Obtención de los límites en los intervalos centrales	40	39	2	2
Cálculo de los porcentajes en tablas con Statgraphics	38	39	6	2
Estudio descriptivo (tablas y resúmenes estadísticos) con Statgraphics	16	34		6
Intensivos				
Simetría y asimetría; Simetría en la distribución Normal	52	46		
Moda, Unimodalidad en la distribución normal	48	44		2
Coeficientes de asimetría y curtosis	4	46		
Propiedad de los intervalos centrales en la distribución normal	26	35	2	4
Validativos				
Aplicación y comprobación de propiedades (p.1)	52	46		
Aplicación y comprobación de propiedades (p 2 y 3)	38	44	2	2
Análisis y síntesis	8	16		

Elementos Validativos

Análisis y síntesis: Como los ítems de los cuatro problemas de esta práctica están relacionados con el fin de integrar los resultados obtenidos, consideramos que la argumentación "ideal" sería aquella *en la que se integren todos los elementos utilizados* en los tres primeros problemas, como el siguiente caso:

"Viendo ambas gráficas se podría decir que tanto el polígono como la función de densidad son aproximadamente simétricos ya que los valores más frecuentes tienen posiciones centrales. Tiene una moda en el intervalo aproximado (22-27) porque en este intervalo se encuentra la frecuencia más alta con el valor 74. Además, la distribución de la puntuación total es aproximadamente normal debido a que sus frecuencias y el histograma así lo muestran, dejando los valores más frecuentes en las posiciones centrales".

Aplicación y comprobación de propiedades: en el ítem 1, se pueden aplicar propiedades tales como simetría y unimodalidad que pueden inferirse a partir de los gráficos. En el ítem 2, también se pueden aplicar y comprobar estas dos propiedades por medio del estudio del coeficiente de asimetría y por el cálculo de la moda, otra propiedad que se puede analizar en este ítem es el apuntamiento. En el ítem 3, se aplica y comprueba la propiedad de los intervalos centrales en una distribución normal. Por lo tanto, se considerarán correctas aquellas argumentaciones en las que se justifique la aproximación de la distribución empírica a la normal utilizando los resultados en parte de los ítems. Serán incorrectas las que se utilicen propiedades inadecuadas para el problema planteado o aquellas que se basan en cálculos erróneos.

Se presentan más dificultades cuando justifican los resultados obtenidos. Generalmente se realizan justificaciones parciales, basadas en comprobación de resultados y, en pocos casos, llegan a una síntesis de los tres problemas planteados.

No hay diferencias apreciables entre los cursos aunque en el segundo aumenta ligeramente el número de alumnos que realizan análisis o síntesis, debido a que en el apunte se indica más claramente la necesidad de realizar una síntesis para evaluar la normalidad de una distribución.

6.4. SEGUNDA SESIÓN DESARROLLADA EN EL AULA TRADICIONAL

En esta clase se desarrolló desde la actividad 3 hasta la 7 (Anexo II). A los alumnos se les pidió que entregaran por escrito la resolución de las actividades 5, 6 y 7; el resto de actividades se resolvieron en clase, mediante la discusión de los alumnos y la participación de la profesora. En esta sesión entregaron sus trabajos 21 alumnos en el año 1999 y 36 alumnos en el año 2000.

Cuadro 6.4.1. Síntesis de la observación de la segunda clase teórica (parte 1)

Simetría y parámetros de la distribución normal

En ambos cursos, la profesora comienza la sesión repasando lo estudiado en las clases anteriores. Comenta a los alumnos que al finalizar esta unidad les pasará un cuestionario sobre la distribución normal y les explica brevemente en qué consistirá. Recuerda la diferencia entre variable estadística y aleatoria, relacionándola con lo realizado en la actividad 1 de la primera sesión teórica, recordando que habían trabajado con los coeficientes de asimetría y curtosis para llegar luego al estudio de la distribución normal y de los elementos de la curva que la representa.

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en ambos cursos

I-1: La profesora continúa con las propiedades de la distribución normal, para lo cual:

- Dibuja en la pizarra la curva de densidad, sobre ella indica el eje de simetría y resalta que su posición coincide con la de la media de la distribución.
- Escribe la fórmula de la función de densidad normal en la pizarra, destacando que en la fórmula hay dos valores importantes, que son la media y la desviación típica, a los que se llama parámetros de la distribución y que la definen completamente, por lo que se puede expresar la distribución normal como: $N(\mu, \sigma)$.

La distribución normal como modelo que aproxima distribuciones empíricas: ejemplos

I-2: A continuación la profesora explica en ambos cursos que:

- Se puede determinar la desviación típica, si se recorre la gráfica y se busca el punto donde la curvatura cambia de sentido.
- La desviación típica es la distancia de dicho punto al eje de simetría. Muestra en un dibujo sobre la pizarra la forma de determinar ese punto y aclara que ése es sólo el significado geométrico pero que también se le dará otro significado más adelante.
- Explica por qué la curva es simétrica en función de los valores de x -propiedad de simetría con respecto a la media- y que de la simetría se puede deducir que la media, mediana y moda coinciden en una distribución normal.
- Propone la actividad 3 y pide a los alumnos un ejemplo de función de densidad simétrica, diferente de la normal.

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en el curso '98-'99

I-3: Como respuesta a la petición de la profesora, un alumno da como ejemplo la función seno.

- La profesora responde que ése no es un ejemplo válido, porque las ordenadas toman valores negativos y esto no es posible en una función de densidad;
- El alumno sugiere que podría tomar el valor absoluto del seno.

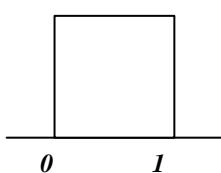
Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en el curso '99-2000

I-4: Un alumno sugiere que se podría dibujar una curva con la misma forma de la normal pero más puntaaguda.

- La profesora explica que en ese caso estaría representando otra distribución normal que tuviera distinta desviación típica, pero lo que ella pide es un ejemplo de distribución simétrica que no sea normal.

I-5: Ante la falta de respuesta, la profesora propone la distribución triangular, la dibuja en la pizarra y explica lo que podría representar y luego muestra la distribución del problema complementario 1 de la Pág. 21 del apunte (Anexo I), que transcribimos a continuación:

La figura muestra la curva de densidad de una distribución uniforme. La curva toma el valor constante 1 sobre el intervalo (0,1) y toma el valor 0 fuera de dicho intervalo. Esto significa que los datos descritos por la distribución toman valores que se extienden uniformemente entre 0 y 1.



Utilice las áreas bajo esta curva de densidad para responder a las siguientes cuestiones:

1. *¿Qué porcentaje de las observaciones cae por encima de 0,8?*
2. *¿Qué porcentaje de las observaciones cae por debajo de 0,6?*
3. *¿Qué porcentaje de las observaciones cae entre 0,25 y 0,75?*

I-6: Los alumnos discuten con la profesora las preguntas planteadas, concluyendo que pueden existir funciones de densidad simétricas no necesariamente normales.

Ejemplos de datos con distribución aproximadamente normal

En ambos cursos se continúa la actividad 4, y se pide a los alumnos dar ejemplos de variables de la vida real que pudieran aproximarse por una distribución normal y otras que no se pudieran aproximar.

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en el curso '98-'99

I-7: Los alumnos no se mostraron muy cooperativos y sólo dieron como ejemplo la edad en que se comienza a fumar, indicando que el rango iría de 15 a 55 años aproximadamente;

- No surgieron ejemplos de variables no normales;
- La profesora debió mostrarles algunos.

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en el curso '99-2000

I-8: La profesora propone imaginar que van a realizar una encuesta a alumnos de la facultad y pensar qué cosas les podrían preguntar y cuáles de las variables serían normales.

- Un alumno propone el número de hermanos.

I-9: La profesora:

- Pregunta a cada alumno de la clase su número de hermanos.
- Hace un recuento de los valores obtenidos, y realiza un gráfico de barras en la pizarra,
- Pregunta sobre si la distribución obtenida sería o no normal.
- Los alumnos concluyen que no es normal, porque la variable es cuantitativa discreta y por la forma de la distribución.

I-10: La profesora pide otro ejemplo de variable normal. Ante la falta de respuestas, pregunta si el recuento de glóbulos rojos podría ser normal. Se realiza una discusión sobre las características de esta variable y se concluye que es aproximadamente normal.

Propiedades relacionadas con la media y desviación típica

I-11: Para explicar las propiedades relacionadas con la media y la desviación típica, la profesora:

- Dibuja dos distribuciones normales con distintas desviaciones típicas;
- Pregunta cuál de ellas tiene mayor dispersión;
- Algunos alumnos contestan que la que tiene mayor dispersión es la más aplastada.
- La profesora explica la regla de los intervalos centrales para las distribuciones normales, y recuerda que ya vieron esto en la clase de práctica.

Aunque en la planificación de la enseñanza no se había previsto, en *ambos cursos*, la profesora debe comenzar repasando los coeficientes de asimetría y curtosis, debido a las dificultades observadas en la interpretación de éstos en la primera sesión práctica (I-1) (relación entre elementos intensivos y validativos).

El análisis de las interacciones recogidas en los bloques I-3 a I-5 nos indica que, en *los dos cursos*, los alumnos no logran enunciar ejemplos propios de distribuciones simétricas, y cuando lo hacen, en principio se trata de una función que no es admisible como función de densidad (Elemento intensivo), por lo que aquí se detecta una diferencia entre el significado personal de los alumnos y el significado institucional local previsto.

Se observa que los alumnos del *primer año* manifiestan dificultades para encontrar por sí solos ejemplos de variables normales y no normales (I-7), lo cual sugiere que *no relacionan los*

conocimientos adquiridos sobre elementos intensivos, como unimodalidad o simetría con un contexto determinado (Elemento extensivo).

Como consecuencia de la dificultad mencionada en el párrafo anterior, *el segundo año*, la profesora decide proponer un ejemplo que no estaba previsto para ayudar a los alumnos a realizar conclusiones sobre la normalidad o no de una distribución (elemento intensivo, I-4 a I-6). Igualmente idea un ejemplo en un contexto familiar a los alumnos, que siguen presentando problemas en el análisis de datos y en la toma de decisiones (bloques I-8 a I-10).

Cuadro 6.4.2. Síntesis de la observación de la segunda clase teórica (parte 2)

Cálculo de probabilidades utilizando propiedades de la curva normal

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en los dos cursos

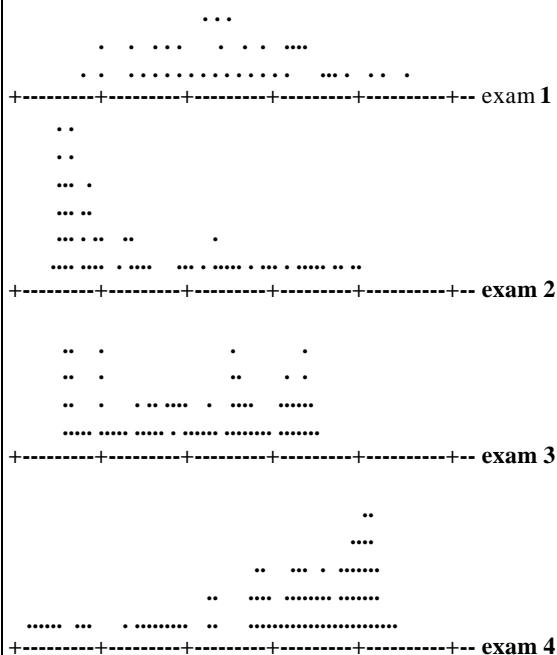
I-12: La profesora indica que van a trabajar con el cálculo de probabilidades de que la distribución normal tome ciertos valores. Para ello:

- Recuerda el cálculo de frecuencias y la estimación de probabilidades a partir del histograma;
- Razona que, puesto que la curva normal aproxima al histograma, cuando se quiera calcular la probabilidad entre dos valores a y b , lo que deben hacer es obtener el área bajo la curva entre tales valores;
- Propone realizar por escrito las actividades 5, 6 y 7, que transcribimos a continuación y les indica que, cuando se tiene un conjunto de datos empírico, la curva teórica les servirá para hacer predicciones.
- Los alumnos trabajan en parejas y discuten entre ellos y son pocos los que realizan preguntas a la profesora.

Actividad 5. Las puntuaciones obtenidas en un test de inteligencia por un grupo de alumnos siguen una distribución normal con media 110 y desviación típica 25. A) ¿Qué proporción de alumnos puntúa por encima de 110? B) Obtener los valores de las puntuaciones tales que el 95% central de los casos comprendido entre dichos valores.

Actividad 6. La temperatura media en Noviembre en Nueva York sigue una distribución normal con 8 grados de media y 3 grados de desviación típica. ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura esté un día comprendida entre 5 y 11 grados? ¿Y entre 2 y 5 grados? ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura sea menor que 2 grados?

Actividad 7. Los siguientes gráficos muestran las distribuciones de las puntuaciones de 5 exámenes. Dos de estas muestras han sido extraídas de poblaciones normalmente distribuidas. Identifica las tres muestras que no proceden de una distribución normal, indicando en qué te basas



.....
..... .
...
.....
+-----+-----+-----+-----+ exam 5

I-13: Debido a que se presentaron dificultades en la visualización de los gráficos, la profesora explica la forma de interpretar los gráficos de puntos .

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en el curso '98-'99

I-14: Debido a que en la segunda pregunta de la actividad 6 se presentaron algunos problemas, la profesora pide a uno de los alumnos que explique con más detalle cómo la resolvió.

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en el curso '99-2000

Ajuste de una distribución normal: propiedades que debe seguir la distribución empírica

I-15: En este curso se desarrolla el ejemplo de la página 13 (Anexo II), indicando que servirá de guía para la próxima clase práctica. En el desarrollo del ejemplo, la profesora:

- Utiliza el archivo COEF_INT, toma la variable con 1000 datos y construye el histograma de frecuencias, cambiando el número de intervalos a 15 y el límite inferior.
- Muestra el histograma destacando que la forma se redondea.
- Pregunta cómo pueden obtener el polígono y los alumnos contestan que por medio de la opción PANE OPTIONS.
- Traza luego, la curva de densidad y la compara con la forma del histograma y del polígono.
- Indica a los alumnos que se deben fijar en la cantidad de modas que presenta la distribución y también hacer un análisis numérico para ir cerciorándose de las distintas condiciones necesarias para la normalidad de la distribución.
- Muestra en pantalla el resumen numérico, quita las opciones por defecto y coloca la media, la mediana, la moda y los coeficientes de asimetría y curtosis y los tipificados.
- Compara los valores de la media, mediana y moda, les aclara que esta es una condición necesaria pero no suficiente para la normalidad.
- Construye la tabla de frecuencias, y propone calcular el porcentaje de datos en el intervalo central ($x - 2.s; x + 2.s$), indicando que deberán observar si hay aproximadamente un 95 % de casos dentro del intervalo y que para comprobarlo, deberán cambiar los intervalos de la tabla de tal manera de obtener unos extremos de intervalo próximos a los que buscan.
- Toma 14 intervalos, con lo cual las frecuencias relativas de casos dentro del intervalo pedido es el 95,9%.
- Finalmente, recuerda el uso del nuevo programa que utilizarán en la próxima clase práctica: DISTRIBUTION FITTING, explicando que servirá para realizar un ajuste gráfico de la curva con el histograma de frecuencias.
- Muestra en pantalla las opciones que deberán utilizar y así termina la clase.

Al analizar esta parte de la secuencia vemos que en *ambos cursos*, se presentan problemas en la interpretación de gráficos de puntos (I-13), puesto que los alumnos no conocían los convenios de lectura (Elemento intensivo) en este tipo específico de gráficos (Elemento ostensivo), ya que se ha trabajado poco con ellos. La profesora pensaba que ellos espontáneamente serían capaces de interpretarlos, pero sólo una parte de los alumnos logró hacerlo sin ayuda. También aquí puede observarse un desajuste entre el significado institucional local y el significado personal.

El segundo año, debido a la disponibilidad del proyector, se desarrolló un ejemplo que no estaba previsto el cual permitió explicar y adelantar algunos de los conceptos que se utilizarían en la clase práctica siguiente.

Elementos de significado personal identificados en las respuestas escritas a las tareas

A continuación realizamos el análisis de los elementos de significado aplicados en las actividades que los alumnos resolvieron y entregaron por escrito (actividades 5, 6 y 7), resumiendo los resultados en la Tabla 6.4.1.

Elementos Extensivos

Las actividades desarrolladas en esta sesión están relacionadas con el problema de aproximación de distribuciones discretas a una distribución normal y ajuste de un modelo a distribuciones de datos reales.

Elementos Ostensivos

Los elementos ostensivos que han utilizado parte de los alumnos en las actividades 5 y 6, han sido la gráfica de la función de densidad normal, la representación sobre esta curva de los intervalos centrales cuya probabilidad debían calcular y todos ellos han usado la representación simbólica de los intervalos centrales utilizando algunas de las notaciones siguientes: $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$, $P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma)$ o $\mu \pm k\sigma$.

En la actividad 7 se han utilizado solamente los gráficos de puntos proporcionados por el profesor y los alumnos sólo debían interpretar esos gráficos y en ningún caso han agregado elementos ostensivos adicionales en sus respuestas.

Es de destacar que los dos primeros elementos han sido aplicados correctamente en mayor porcentaje el *primer año*. Los errores se debieron a representación de intervalos inadecuados y fueron muy escasos.

Elementos Actuativos

Las prácticas más comunes realizadas por los alumnos han sido la obtención de extremos en intervalos centrales (casi siempre correctamente en ambos cursos), el cálculo de la proporción de casos incluidos en un intervalo (aplicado correctamente en pocos casos para ambos cursos) y el cálculo de probabilidades en intervalos centrales (con un porcentaje de aplicación correcta mayor en el primer año).

En la actividad 7, los alumnos sólo han realizado comparaciones visuales de gráficos para sacar sus conclusiones, observándose un porcentaje mucho mayor de aplicaciones correctas en el *segundo año*.

Hemos encontrado algunos errores de cálculo, tanto al obtener los límites de los intervalos como en el cálculo de la probabilidad. También, en el primer año, se han observado algunos errores al comparar visualmente los gráficos de la actividad 7, debido a que algunos alumnos no conocían tales representaciones.

Elementos Intensivos

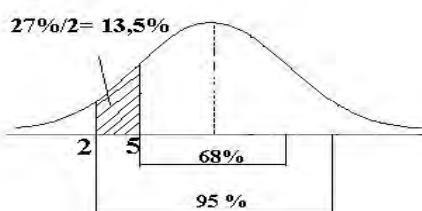
Simetría y asimetría (ítem 5.a y 7): se aplica dicha propiedad para calcular la proporción de alumnos que puntúa sobre la media, como en la resolución que realiza el siguiente alumno:

"Como la distribución es normal, si la media es 110, entonces habrá un 50 % por encima de la media y otro 50 % por debajo".

También se aplica al analizar la forma gráfica de cada representación de la actividad 7. El *segundo año*, la mayoría de los alumnos han usado correctamente uno de estos conceptos o ambos, observándose una mejora notable con respecto a los alumnos del primer curso.

Propiedad de los intervalos centrales (ítem 5.b y act. 6): Para obtener los valores de los extremos del intervalo correspondiente al 95 %, se ha utilizado esta propiedad realizando el cálculo de los extremos del intervalo $\mu \pm 2\sigma$. También se aplica en la actividad 6, donde además los alumnos deben realizar operaciones con los intervalos centrales para poder obtener su respuesta, como en el siguiente ejemplo de solución presentada por un alumno:

"Actividad 6.b: (ver figura 6.4.1) (entre 2 y 5) ($\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma$) = (8 - 2 \cdot 3, 8 + 2 \cdot 3) = (2, 14) = 95\%. La probabilidad buscada es del 13,5%."



En general, hay un porcentaje alto de alumnos que aplican correctamente este elemento en ambos años (aunque el mayor porcentaje se presenta el primer año). Generalmente, los errores

cometidos conducen a obtener valores incorrectos y valores atípicos.

Tabla 6.4.1. Elementos de significado personal correctos e incorrectos utilizados por los alumnos en las actividades 5, 6 y 7

Elementos de significado	Aplicados correctamente		Aplicados incorrectamente	
	1999 (n =21)	2000 (n =36)	1999 (n =21)	2000 (n = 36)
Ostensivos (actividades 5 y 6)				
Representaciones gráficas				
Gráfica de la función de densidad normal	16	17		
Representación de los intervalos centrales sobre la curva normal	16	22	5	3
Representaciones simbólicas				
P($\mu - k \cdot \sigma \leq X \leq \mu + k \cdot \sigma$), ($\mu - k \cdot \sigma, \mu + k \cdot \sigma$), $\mu \pm k \cdot \sigma$	21	35		
Actuativos				
Obtención de los límites en intervalos centrales	20	34	1	2
Cálculo de la proporción correspondiente a un intervalo central	8	7		
Cálculo de la probabilidad correspondiente a un intervalo central	20	16	3	3
Comparación visual (act. 7)	12	36	5	
Intensivos				
Propiedad de simetría con respecto a la media (act. 5 y 6)	16	25		
Propiedad de los intervalos centrales (act. 5 y 6)	19	28	2	5
Asimetría (act. 7)	6	29		
Unimodalidad (act. 7)	7	8		
Posición relativa de media, mediana y moda (act. 7)		10		
Valores atípicos (act. 7)	3		1	
Validativos				
Aplicación de propiedades	19	28	2	5
Representación gráfica (act. 5 y 6)	12	29		2

Unimodalidad, valores atípicos, posición de media, mediana y moda: en la actividad 7, aproximadamente la mitad de los alumnos de cada curso, aplican estos conceptos para poder determinar qué gráfico está representando a una distribución que puede ajustarse por la normal y siempre correctamente.

Elementos Validativos

Son pocos los elementos validativos empleados, ya que la mitad de los alumnos del primer año y un tercio del segundo se han limitado a realizar el cálculo solicitado sin dar justificaciones sobre la resolución o los resultados. El resto justifica los resultados sólo por medio de la representación gráfica de las situaciones que se les pedía resolver, como en el ejemplo transcritto en el Cuadro 6.4.1. Dos alumnos realizan una justificación incorrecta por representación gráfica deficiente. En general, la mayoría de los alumnos aplican correctamente alguna de las propiedades mencionadas en los elementos intensivos.

6.5. TERCERA SESIÓN DESARROLLADA EN EL AULA TRADICIONAL

En el año 2000, se hizo una clase teórica adicional en el día que, en realidad correspondía dar la segunda clase práctica, que hubo de ser retrasada a la siguiente semana por problemas en la sala de informática. La clase se desarrolló en el seminario de matemáticas, utilizando el ordenador con el cañón proyector. Se trabajó con el fichero COEF_INT (Anexo IV).

Cuadro 6.5.1. Síntesis de la observación de la tercera sesión teórica (Año 2000)

Uso de las opciones del programa Distribution fitting

I-1: La profesora comienza la clase retomando el ejemplo de la página 13 (Anexo II), que se había comenzado a desarrollar la clase anterior y realiza lo siguiente:

- Recuerda cómo utilizar la opción DISTRIBUTION FITTING y propone explorar la variable con los coeficientes intelectuales de 1000 personas.
- Destaca que la media y la desviación típica no son exactamente las mismas que en la variable que tiene los datos de 10000 personas.
- Ingresa en las opciones gráficas, marca la opción DENSITY TRACE y explica que representa la curva de densidad.
- Repite el proceso con el histograma de frecuencias (que tiene la curva de densidad superpuesta), y pregunta cuál es la diferencia entre este histograma y el que se construye con la opción DESCRIBE – NUMERIC DATA – ONE VARIABLE ANALYSIS. Un alumno responde que para este caso se observa que la curva de densidad y el histograma están superpuestos.
- La profesora explica que también en esta opción se puede modificar el número de intervalos y los extremos del recorrido.
- Muestra el gráfico SYMMETRY PLOT, explica que es una recta con puntos que sirve para ver si hay o no simetría. Explica que el punto que aparece alejado de la recta es un valor atípico.
- Muestra el gráfico NORMAL PROBABILITY PLOT, y explica que si la distribución fuera normal, los puntos deberían estar muy próximos a la recta.
- Ingresa a las opciones numéricas, indicando que las más importantes serán TAIL AREAS y CRITICAL VALUES, porque ellas facilitan el cálculo de probabilidades y reemplazan las tablas de la distribución normal tipificada.

Cálculo de probabilidades mediante Statgraphics

I-2: Continúa explicando que con la opción TAIL AREAS se calcula el área por debajo de un punto, muestra este caso gráficamente en la ventana que aparece la curva de densidad marcando con el ratón cuál sería el área que se obtendría para un determinado valor.

- Como el programa entrega algunos valores por defecto, la profesora utiliza dichos valores para realizar la interpretación del primero y luego hace que los alumnos interpreten los siguientes.
- Propone el cálculo de otras probabilidades que no salen en forma directa sino realizando operaciones entre los valores que aparecen en la pantalla, los alumnos participan activamente en esta actividad y en general, responden correctamente.
- Propone el cálculo de un área entre dos valores que no aparecen en la pantalla, y pregunta cómo pueden hacer para obtener esos valores. Ante la falta de respuesta, explica que por medio del botón derecho del ratón y PANE OPTIONS se pueden cambiar los valores por defecto para obtener el área que se deseé.
- Ingresa a la opción CRITICAL VALUES, y les explica que se trata del problema inverso al anterior y propone el siguiente ejemplo: si quisieramos hacer un programa educativo para niños especiales (que sean más avanzados de lo normal: el 10% superior de la distribución), podemos utilizar esta opción para determinar a partir de qué puntuación un niño debe ir al programa. Es decir, conocemos el porcentaje de casos pero necesitamos saber a partir de qué valor de la variable se consideraría dicho porcentaje.
- Explica que en este caso se deberían introducir los valores de la probabilidad, obteniendo por medio del programa el valor de x, es decir, el valor de la variable.
- Discute con los alumnos la interpretación de algunos de los valores que aparecen en pantalla y explica que también en este caso se pueden cambiar los valores por defecto por medio de PANE OPTIONS.
- Para finalizar, solicita que resuelvan el problema complementario 2 que aparece en la Pág. 21 del apunte (Anexo II).

I-3: Algunos alumnos tuvieron ciertas dificultades al resolver el ítem b del problema, la profesora pasa por los grupos despejando dudas, pero de todos modos algunos alumnos no entienden por completo esa pregunta y queda sin aclararla completamente por falta de tiempo, lo cual se realizó luego en la siguiente sesión teórica.

Debido a que esta sesión se tuvo que desarrollar sobre la marcha como consecuencia de los problemas con los ordenadores, se dedicó la clase a explicar el funcionamiento de los procedimientos informáticos y a preparar la próxima clase práctica. También se hizo un resumen de lo que se había trabajado en la práctica anterior.

Por medio de un nuevo ejemplo, se realizan colectivamente, actividades semejantes a las que luego se les pedirá en las sesiones prácticas 2 y 3. En particular se vuelve a explicar criterios de reconocimiento de gráficos de distribuciones normales a partir de SYMETRY PLOT y NORMAL PROBABILITY PLOT. No estaba previsto en la secuencia de enseñanza el trabajo con estos gráficos, pero debido a que se disponía de este tiempo adicional, la profesora consideró conveniente que los alumnos conocieran otras posibilidades de análisis de una variable (I-1). También se explica el cálculo (elemento actuario) de probabilidades y valores críticos (elemento intensivo) con STATGRAPHICS y se propone a los alumnos trabajar el cálculo de probabilidades con papel y lápiz en un ejemplo práctico que tampoco había sido previsto (I-2). Se presentan algunas dificultades que la profesora no logra resolver (I-3).

6.6. SEGUNDA SESIÓN DESARROLLADA EN EL AULA DE INFORMÁTICA

En esta sesión se trabaja con la variable NIVELPROBA del fichero TESTP (Anexo IV). En esta ocasión fueron 58 los alumnos que entregaron sus trabajos en el primer año y 43 en el segundo.

El segundo año se planteó el problema que había muchos ordenadores que no funcionaban. Como en la sala de informática sólo se disponía de 10 ordenadores, se tuvo que dividir al curso en dos grupos, algunos trabajaron en la sala de informática y otros en el ordenador del seminario, además los grupos se formaron de a 3 o 4 alumnos.

Cuadro 6.6.1. Síntesis de la observación de la segunda sesión práctica

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en el curso '98-'99

I-1: La distribución de la variable trabajada en esta clase (nivel probabilístico) no era totalmente simétrica, sin embargo el coeficiente de asimetría era prácticamente nulo;

- Los alumnos se sintieron confundidos;
- Igualmente ocurrió con el hecho de que sólo tuviese una moda, incluso cuando ésta no coincidiese con el centro de simetría.

I-2: Pudieron observarse las siguientes dificultades:

- Algun alumno seguía trabajando con la variable de la clase anterior, no se daban cuenta que estaban trabajando en otro problema cuyos datos pertenecían a otra variable.
- No recordaban con qué opciones debían realizar los gráficos.
- No recordaban cómo calcular el coeficiente de asimetría y el de curtosis.

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en el curso '99-2000

Como consecuencia de los problemas observados el primer año se revisaron los datos de esta variable para que la asimetría fuese más manifiesta. Se pudieron determinar las siguientes dificultades y dudas en la resolución de las actividades:

I-3: Con algunos intervalos, la gráfica de la función de densidad era más parecida a la normal;

- Algunos alumnos tuvieron dificultad para tomar una decisión a partir de lo visual.

I-4: La función de densidad era casi simétrica (pero bimodal);

- Algunos alumnos preguntaron si por el hecho de ser simétrica sería normal;
- La profesora les pidió que revisasen los apuntes y decidieran si la forma era o no parecida a la normal.

I-5: Debido a que aparecían dos “picos” en la función de densidad pero no igualmente altos, algunos alumnos no sabían si había una o dos modas.

I-6: El coeficiente de curtosis tipificado era -2,4 por lo que un grupo de alumnos consideró que se podía tomar como normal puesto que era próximo a -2.

I-7: En el cálculo de intervalos centrales varios alumnos no recordaban lo que se había explicado la clase anterior.

- La profesora tuvo que recordar en la pizarra que el objetivo era comparar el modelo con los datos y tuvo que volver a explicar cómo se hacía.
- Incluso algun alumno no recordaba cómo utilizar las frecuencias de la tabla para calcular el

porcentaje de casos.

I-8: Algunos alumnos no recordaban cómo calcular la probabilidad (opción tail areas).

I-9: Varios alumnos no entendían lo que se pedía en el punto 4 (identificación de parámetros); pensaban que era la gráfica;

- La profesora preguntó a todo el curso cuáles eran los parámetros de una distribución normal;
- Un alumno contestó que eran 0 y 1 refiriéndose a la distribución normal típica;
- La profesora tuvo que aclararlo.

I-10: En los problemas 4, 5 y 6, el software del aula se había cambiado el día anterior y era una versión diferente al del seminario, por lo que, aunque en la clase teórica se había explicado el manejo de la opción FITTING DISTRIBUTION, los alumnos no encontraban el programa. Había varias opciones y la profesora tampoco las conocía por lo que tuvo que explorarlo antes de poder explicarles.

A pesar de los problemas mencionados todos los alumnos acabaron la actividad; es posible que esto se debiera a que se había dictado una clase teórica más y también al apoyo del apunte sobre Statgraphics que se había entregado el segundo año.

En los dos cursos aparecen problemas cuando no se reconoce ni interpreta la finalidad de las actividades, con lo que en casos, se realiza la actividad de una manera mecánica sin llegar a conclusiones consistentes (dificultades en la aplicación correcta de elementos validativos). En ciertos casos se ignoran los modelos sugeridos por las representaciones gráficas y numéricas (bloques I-1, I-3a I-9).

En esta síntesis nuevamente se pone de manifiesto la complejidad de una clase en la que se utilizan ordenadores. Esto se ve en toda la sesión, pero principalmente por el hecho de que se debe estar preparado para imprevistos como el que se describe en I-10, lo cual puede influir negativamente en el desarrollo de la clase.

En *el primer año* del análisis del bloque I2, se desprende que nuevamente se observa la dificultad de manejo del software (Elementos actuatorios) y el olvido de algunos conceptos explicados en las clases previas. Las preguntas planteadas en las actividades resultaron también difíciles de comprender, pues se trata de tareas no habituales para los alumnos al tratarse de situaciones abiertas de análisis exploratorio de datos.

Los alumnos se ven confundidos por el hecho de que la simetría (elemento intensivo) que es una condición necesaria para la normalidad no sea suficiente (I-1).

Aunque esta práctica fue más sencilla en el segundo año, debido a la preparación que se realizó en la clase teórica anterior y a que debían utilizar algunos de los programas que ya habían aplicado en la primera sesión práctica, todavía hubo dificultades. Así:

- Lo expresado en I-3 denota que no se reconocen claramente las características de la función de densidad (Elementos intensivos) lo cual conduce, en determinados casos, a la elección errónea de una variable como aproximada a la distribución normal (elemento extensivo).
- En ocasiones, el análisis de datos se restringe al análisis de una sola propiedad de las requeridas para cumplir la condición de normalidad (Elementos intensivos), cayendo en el error de considerar una condición que es necesaria, como necesaria y suficiente (I-4). Esto coincide con los resultados encontrados en la tesis de Recio (1999). Como por ejemplo, la simetría, con lo cual se la considera prácticamente como sinónimo de normal.
- Se presentan problemas en la determinación de la unimodalidad (Elemento intensivo) cuando la distribución empírica presenta una forma atípica (elemento ostensivo. Bloque I- 5).
- Se interpreta en forma incorrecta el coeficiente de curtosis (Elemento intensivo. Bloque I- 6).
- Aunque el procedimiento (elemento actuario) empleado para aplicar la propiedad de los intervalos centrales (elemento intensivo) y su objetivo, había sido explicado en tres ocasiones anteriores a esta sesión, los alumnos siguen presentando problemas con los elementos que deben aplicar en dicha propiedad (I-7). De esta forma, se observa que muchos alumnos no comprenden la finalidad de la aplicación de esta propiedad y tampoco recuerdan las acciones y procedimientos que deben aplicar para realizar los cálculos, es decir no *logran poner en relación los diferentes elementos de significado requeridos*.
- No se reconoce la propiedad de los parámetros de una distribución normal (I-9), ni se diferencian con los estadísticos (Elementos intensivos).

Elementos de significado identificados en las respuestas escritas a las tareas

A continuación, se realiza el análisis de los elementos de significado que hemos podido identificar en las respuestas escritas de los alumnos a las actividades. En el Cuadro 6.6.2 se reproducen las actividades planteadas y en la Tabla 6.6.1 presentamos los elementos de significado identificados en las respuestas de los alumnos a las actividades de la segunda sesión práctica. Sólo describimos los nuevos elementos que se añaden a los de la práctica 1.

Cuadro 6.6.2. Actividades planteadas en la segunda sesión práctica

- Abre el programa STATGRAPHICS y carga de la unidad U (carpeta DATOS) el fichero TESTP.
 - En esta práctica vamos a analizar el nivel probabilístico, para ver si la distribución normal sería una aproximación aceptable para esta variable. Estudiaremos, primeramente la forma de la distribución, para comparar con la esperada en una curva normal.
1. Con ayuda del programa DESCRIBE; NUMERIC DATA, ONE VARIABLE ANALYSIS, prepara una tabla de frecuencias y un polígono de frecuencias relativas del nivel probabilístico. a) ¿Son el polígono y la función de densidad aproximadamente simétricos? b) ¿Tiene una o varias modas?
 2. Mediante SUMMARY STATISTICS calcula los valores del coeficiente de asimetría y de curtosis y valores tipificados (si hace falta, usa PANE OPTIONS). ¿Son los valores obtenidos aceptables para una distribución normal?
 3. Has estudiado en clase teórica la regla de los intervalos $\mu \pm \sigma$, $\mu \pm 2\sigma$, $\mu \pm 3\sigma$ en una distribución normal. Utilizando la tabla de frecuencias, calcula el porcentaje de niños cuyo nivel probabilístico está incluido en el intervalo $x \pm \sigma$, $x \pm 2\sigma$, $x \pm 3\sigma$. a) ¿Se cumple la regla 68- 95- 99?. b) Teniendo en cuenta los puntos 1, 2 y 3, ¿Crees que la distribución de esta variable es aproximadamente normal?
 4. Usa ahora la opción DISTRIBUTION FITTING, dentro de DESCRIBE - NUMERIC DATA - ONE VARIABLE ANALYSIS ajusta una curva normal a los datos. ¿Cuáles son los parámetros de la curva normal ajustada?
 5. Utilizando la opción TAIL AREAS en este programa, que proporciona probabilidades para la curva normal ajustada ¿Cuál es la probabilidad de que, en esta curva teórica ajustada a los datos se obtenga un nivel igual o menor a 2?
 6. Usando de nuevo la opción ONE VARIABLE ANALYSIS, y la tabla de frecuencias, calcula la proporción de niños en la muestra con nivel igual o menor a 2. ¿Crees que la curva normal da un ajuste aceptable de los datos?

Elementos Extensivos

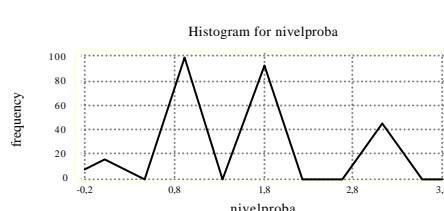
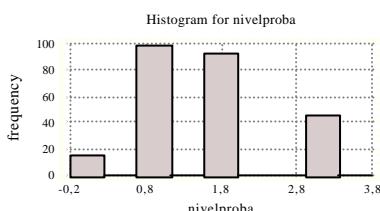
En las actividades de esta sesión, los alumnos han aplicado el problema de aproximación de distribuciones discretas, utilizando un contraejemplo en el que no puede realizarse la aproximación de la normal a la distribución empírica.

Elementos Ostensivos

Las representaciones gráficas aplicadas en esta sesión son las mismas que para la primera práctica. Nuevamente hacemos notar el uso predominantemente correcto de la curva de densidad, especialmente el *segundo año*, y en esta ocasión mejora el número de alumnos que usan el polígono de frecuencias correctamente, debido a que se hizo una preparación de la sesión en la tercera clase teórica.

Sin embargo, también se volvieron a repetir los errores relacionados con histogramas y polígonos de frecuencias descritos en la primera sesión práctica. En el siguiente ejemplo, el alumno es inconsistente en la interpretación de estos gráficos.

"...Los gráficos no son simétricos, pero tienen un coeficiente de asimetría cercano a cero (0,0745488). De todos modos en el gráfico se puede ver que parece simétrico. Tiene una sola moda (1,0), pero en la



gráfica se ve que tiene otro punto cercano a la moda"

Un grupo numeroso de alumnos utiliza en forma incorrecta el polígono de frecuencias, usando frecuencias absolutas, aunque ha disminuido el error en la interpretación de histogramas con respecto a la primera sesión. Por otra parte, aunque no se pidió expresamente el SYMMETRY PLOT, ni se previó su uso en lo planificado algunos alumnos lo han aplicado correctamente.

Representaciones numéricas: en las primeras actividades se aplicaron las mismas representaciones que en la primera práctica y tampoco hay grandes diferencias en cuanto al número de errores. En las últimas actividades hemos considerado las siguientes representaciones numéricas:

DISTRIBUTION FITTING (ANALYSIS SUMMARY): se utilizó en el cálculo de los parámetros de la distribución normal teórica. Se considera incorrecta la utilización de este elemento en aquellos casos que en vez de calcular los parámetros solicitados se muestre solamente el histograma con la curva normal ajustada superpuestos, ya que en este caso no se responde a lo pedido. También en aquellos casos en que se muestre confusión entre la distribución empírica y la teórica o en los que se haya calculado los estadísticos desde SUMMARY STATISTICS o la tabla de frecuencias. Sólo aparecen unos pocos errores el *segundo año*, aunque es bastante mayor el número de alumnos de este curso que aplican este elemento correctamente, debido a la mejora del texto y preparación de la clase.

TAIL AREAS: aplicada en el cálculo de probabilidades en la curva normal ajustada. Se considera incorrecta cuando no se cambian los valores por defecto o se introducen valores incorrectos, lo que ocurre los dos años en muy pocos casos.

Elementos Actuativos

Respecto a los elementos actuativos usados en la práctica anterior, de nuevo aparecen correctamente empleados en la mayoría de los casos, aunque en el *segundo año*, algunos alumnos cometen errores en el estudio descriptivo de la variable. Los elementos actuativos nuevos que los alumnos han utilizado en estas actividades son el cálculo de probabilidades con DISTRIBUTION FITTING, en general éste ha sido correcto, aunque se han presentado algunas dificultades al cambiar el valor crítico por defecto para calcular la probabilidad.

Mientras que en el segundo año son más los alumnos que calculan bien los extremos de los intervalos, disminuye el número de los que llegan a calcular las probabilidades en las tablas, modificando los extremos. En el segundo año, hubo muchos alumnos que no llegaron a realizar el cálculo de la probabilidad con la opción DISTRIBUTION FITTING ni el cálculo de la proporción (ítems 5 y 6) debido a fallos en los ordenadores.

Elementos Intensivos

Los alumnos han utilizado los siguientes elementos intensivos nuevos:

Parámetros de la distribución normal: se considera correcta la aplicación de este elemento cuando se identifica la media y desviación típica como parámetros y se diferencia la distribución teórica de la distribución empírica. Consideramos importante que el alumno realice esta distinción que influirá en la interpretación de otras actividades como por ejemplo, la comparación entre la probabilidad en un intervalo de la curva ajustada y el porcentaje correspondiente al mismo intervalo en la tabla de frecuencias de la distribución empírica.

Probabilidad en la curva normal ajustada: se considerarán correctas aquellas respuestas en las que la probabilidad haya sido correctamente calculada en función de la distribución normal ajustada y la diferencien de la distribución empírica. También deben dar los valores correctos en las opciones del programa.

En el segundo año disminuyó el porcentaje de alumnos que aplican correctamente la propiedad de los intervalos centrales, así como la probabilidad en la curva normal y la proporción en la distribución real, a pesar de que pensábamos que los resultados serían mejores en el segundo curso debido a la implementación de una clase teórica más en la que se explicaron estos conceptos y los procedimientos informáticos que se debían utilizar en su aplicación. Creemos que esto pudo deberse a los problemas surgidos con los ordenadores y el software en el transcurso de la sesión, por lo que en algunos casos hubo alumnos que no pudieron terminar la práctica y otros que la habían realizado y se les borró. Otro problema pudo ser que al ser menor el número de ordenadores, los alumnos debieron agruparse en grupos más numerosos con lo que, en algunos casos, no se lograba comprender el sentido de la actividad.

Tabla 6.6.1. Frecuencias de los elementos de significado personal identificados en las respuestas de los alumnos a la práctica 2

Elementos de significado	Aplicados correctamente		Aplicados incorrectamente	
	1999 (n = 58)	2000 (n = 43)	1999 (n = 58)	2000 (n = 43)
Ostensivos				
Representaciones gráficas				
Curva de densidad	32	43	2	
Histograma		2	6	
Curva de densidad e histograma superpuestos	14	15		
Polígono de frecuencias relativas	8	22	18	20
Symmetry plot	6	4		
Representaciones numéricas				
SUMMARY STATISTICS	42	32	2	11
Tabla de frecuencias	36	36		6
DISTRIBUTION FITTING	16	34		5
Áreas de cola (TAIL AREAS)	40	32	2	4
Actuativos				
Obtención de los límites en el intervalo solicitado	22	32	2	6
Cálculo de los porcentajes en tablas con Statgraphics, modificando los intervalos de clase	52	29	6	9
Comparación visual	14	15		
Estudio descriptivo (tablas y resúmenes estadísticos) con Statgraphics	20	26	2	12
Cálculo de probabilidad con DISTRIBUTION FITTING	52	25	4	2
Intensivos				
Simetría y asimetría; Simetría en la distribución Normal	34	35	12	4
Moda, Unimodalidad en la distribución normal	18	19	26	19
Coeficientes de asimetría y curtosis	16	31	8	3
Proporción de casos en los intervalos centrales de la distribución Normal	52	29	4	10
Parámetros de la distribución normal	16	34	2	5
Probabilidad en la curva normal ajustada	52	27	4	
Proporción de casos en la distribución real	52	20	4	5
Validativos				
Comprobación de propiedades (p.1)	34	35	12	4
Comprobación de propiedades (p 2 y 3)	16	28	8	9
Comprobación de propiedades (p 5 y 6)	52	16	4	11
Representación gráfica	32	43		
Síntesis		4		

Proporción en la distribución real: se consideran correctas aquellas respuestas en las que la proporción solicitada ha sido calculada e interpretada en función de la distribución de datos empíricos y de su tabla de frecuencias.

En el *segundo año* hubo más alumnos que realizaron la identificación e interpretación de parámetros de la distribución normal, debido a que se varió ligeramente la redacción de este ejercicio, lo que influyó en que los alumnos entendieran mejor lo que se pedía.

Comparando los resultados presentados en las Tablas 6.3.1 y 6.6.1, podemos ver que en la primera práctica ha habido un mayor número de alumnos que interpretan correctamente la simetría, moda y los coeficientes de asimetría y curtosis. Esto puede deberse a las características de las variables presentadas en cada sesión.

Elementos Validativos

Al igual que en la práctica 1, se ha considerado que los alumnos pueden realizar argumentaciones en relación con un solo problema, con dos o integrando los resultados en una síntesis final en el que se incluyan todos los elementos utilizados. Pero también aquí se presentan casos en los que no se dan validaciones de los resultados obtenidos.

En otros casos la validación es parcialmente correcta, como el ejemplo que se cita luego, en que el alumno interpreta correctamente la simetría y la moda, e incorrectamente la regla de los intervalos centrales, confundiéndolos con el intervalo en el que es aceptable el coeficiente de

asimetría tipificado.

Son pocos los alumnos que logran realizar una *síntesis de los resultados y datos* obtenidos, especialmente en los tres primeros ítems en los que se pedía expresamente. Sólo se limitan a la comprobación de propiedades y en este caso hay un gran número de alumnos que lo hacen incorrectamente. También se presentan muchos casos en los que validan sus resultados por medio de la representación gráfica solamente.

“¿Son el polígono y la función de densidad aproximadamente simétricos?

Aproximadamente si son simétricas, ya que si las partimos por la mitad mas o menos coinciden.

¿Tiene una o varias modas? Tanto la función de densidad como el polígono de frecuencias tiene varias modas, no tiene ningún parecido con la curva de la normal.

¿Se cumple la regla 68-95-99? ¿Crees que la distribución de esta variable es aproximadamente normal?

$$X+S=2.507401 \quad X-S=0.828599$$

Como la distribución normal está comprendida entre -2 y 2, entonces la distribución de esta variable no es una normal ya que a la derecha se pasa del intervalo, en 0,507401.”

6.7. CUARTA SESIÓN DESARROLLADA EN EL AULA TRADICIONAL

Esta sesión correspondería a la tercera sesión a desarrollar en el aula tradicional planificada y que efectivamente se desarrolló como tercera sesión en el año 1999. Se dedicó al estudio de la distribución normal tipificada, que se introdujo presentando el ejemplo sobre la comparación de puntuaciones de dos alumnos que aparece en los apuntes (Anexos I y II). En el primer año, fueron 16 los alumnos que entregaron sus trabajos y 31 en el segundo año.

Cuadro 6.7.1. Síntesis de la observación de la cuarta sesión teórica (parte 1)

Cálculo de probabilidades. Relación entre probabilidad y área bajo la curva

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en el curso 99-2000

I-1: Al comenzar la sesión, la profesora decide retomar el problema complementario 2, aclarando las dudas que habían quedado sin contestar en la clase anterior. Con este fin, primero repasa los diferentes casos de cálculo de probabilidades en la distribución normal, planteando la siguiente pregunta relacionada con la actividad 6 (distribución normal N (8,3) de temperaturas en la ciudad de Nueva York): ¿cuál sería la probabilidad de que un día la temperatura sea menor o igual que 5°?, y en general, ¿cuál sería la probabilidad de que $x \leq a$? Les recuerda la relación entre probabilidad y área y que el área a calcular es la siguiente (Figura 6.7.1).

I-2: Puesto que están trabajando con una variable continua, destaca que es lo mismo que calculen $P(x < a)$

o $P(x \leq a)$, ya que $P(x = a) = 0$, y lo justifica gráficamente. (recuerda que en la Pág. 18 del apunte (Anexo II) está explicado el cálculo de probabilidades en la distribución normal utilizando Stagraphics).



Figura 6.7.1. Probabilidad de $x \leq a$

Probabilidad en un punto. Área total bajo la curva

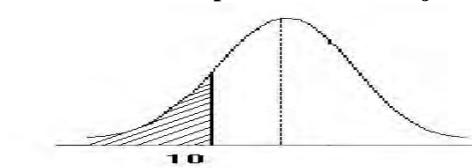


Figura 6.7.2. $P(x < 10)$

I-3: Propone calcular $P(x > 10)$, preguntando de qué forma se debería calcular esa probabilidad, y en general, la probabilidad por encima de un determinado valor. Ante la falta de respuestas, recuerda la propiedad de que el área total bajo la curva es igual a 1. Por lo que, para calcular el área por encima de 10 se debería hacer: $P(x > 10) = 1 - P(x < 10)$. Aclara lo expresado antes representando el área de la Figura 6.7.2.

I-4: Propone el cálculo de la probabilidad de que la temperatura esté entre 10° y 12°, y explica que en este caso, deberían separar el problema en dos partes de la siguiente manera: (realiza los gráficos 6.7.3 y 6.7.4. en la pizarra)

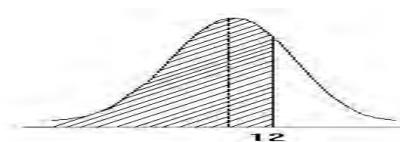


Figura 6.7.3. $P(x \leq 12)$

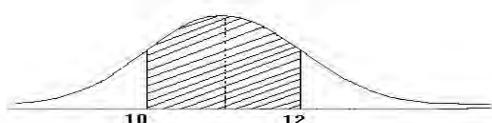


Figura 6.7.4. $P(10 \leq x \leq 12)$

I-5: Explica que se debe calcular cada una de las probabilidades: $P(x \leq 12)$ y $P(x \leq 10)$ y para obtener el valor buscado se deben restar estas dos áreas: $P(10 \leq x \leq 12) = P(x \leq 12) - P(x \leq 10)$.

I-6: Una vez resuelta esta actividad, la profesora aclara que esto sirve para resolver las preguntas planteadas en el problema 2, el cual transcribimos a continuación (Pág. 21 del apunte, Anexo I):

Problema 2. La distribución de las alturas de hombres adultos es aproximadamente normal con una media de 69 pulgadas y una desviación típica de 2,5 pulgadas.

B. Usa la regla del 69-95-99,7 para responder: ¿Qué porcentaje de hombres tiene una altura mayor que 74 pulgadas?

I-7: Explicación de la profesora sobre lo siguiente: “Como pide calcular la probabilidad para los mayores que 74, y vemos que la media es 69 y que $2\sigma = 5$, podríamos plantear: $P(x > 74) = P(x > 69+5) = P(x > 69 + 2.s)$ y de esta manera, buscar el resultado”.

I-8: A la pregunta anterior algunos alumnos responden (correctamente) que es el 2,5%.

I-9: Debido a que algunos alumnos no comprenden de donde sale ese valor, la profesora aclara la situación realizando la Figura 6.7.5. Explica que como están trabajando con el intervalo $\mu \pm 2\sigma$, es decir el del 95%, correspondería al intervalo (64, 74), y el área de las colas que quedan por fuera sería el 5%. Para conocer el porcentaje de casos mayores que 74, utilizarían sólo la cola superior cuya área es la mitad, por eso obtienen el 2,5%.

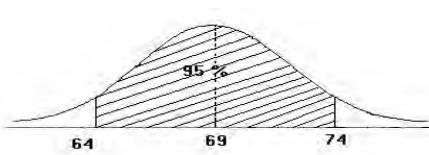


Figura 6.7.5. $P(64 \leq x \leq 74)$

Todo lo anterior se desarrolló en el segundo curso debido a que en la clase teórica anterior había quedado planteada la actividad y varios alumnos habían manifestado sus dudas al respecto. De I-8 e I-9, podemos concluir que aunque algunos alumnos han comprendido la situación y logran llegar al resultado correcto, hay otros que no logran comprender de qué manera plantear el problema para poder llegar a la solución.

En el Cuadro 6.7.2, se describe la parte de esta sesión que ha sido común a los dos cursos. En el primer año se comenzó esta sesión directamente con la actividad que se desarrolla a continuación, mientras que en el segundo año se planteó después de desarrollar las actividades mencionadas anteriormente.

Cuadro 6.7.2. Síntesis de la observación de la cuarta sesión teórica (parte 2)

Distribución normal tipificada

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en los dos cursos

Para introducir el estudio de la distribución normal típica, la profesora explica la necesidad de trabajar con escalas comunes cuando se tienen diversas variables medidas en escalas distintas, que se desean comparar. Plantea la primera pregunta del ejemplo de la página 22 del apunte (Anexo II):

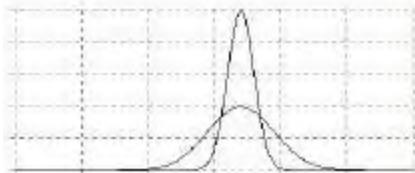
Ángel posee las siguientes calificaciones en un conjunto de asignaturas: 195 puntos en Inglés, 20 en Economía, 39 en Informática, 139 en Matemáticas y 41 en Física. ¿Es este estudiante mejor en Inglés que en Economía?. ¿Será igualmente bueno en todas las asignaturas?.

I-10: La profesora sugiere observar que en la información que proporciona el problema, los profesores no están calificando de 0 a 10, por lo que necesitan más datos para responder a la pregunta, como por ejemplo saber en qué escala se puntúa.

I-11: Propone estudiar la tabla 6.7.1 del ejemplo, donde aparecen otros datos como la media de la clase. Pregunta si con esa información adicional pueden responder a la pregunta inicial.

Tabla 6.7.1. Calificaciones en 5 asignaturas

(1) Examen	(2) Media de la clase	(3) Desviación típica de la clase	(4) Puntuaciones (X)		(5) Desviaciones a la media (x)		(6) Puntuaciones tipificadas (Z)	
			Ángel	Carlos	Ángel	Carlos	Ángel	Carlos
Inglés	155,7	26,4	195	162	+39,3	+6,3	+1,49	+0,24
Economía	33,7	8,2	20	54	-13,7	+20,3	-1,67	+2,48
Informática	54,5	9,3	39	72	-15,5	+17,5	-1,67	+1,88
Matemáticas	87,1	25,8	139	84	+51,9	-3,1	+2,01	-0,12
Física	24,8	6,8	41	25	+16,2	+0,2	+2,38	+0,03
Totales			434	397			+2,54	+4,51
Medias			86,8	79,4			+0,51	+0,90

Significado de la desviación típica*Interacciones más significativas en el curso 99-2000*

I-12: Un alumno responde que Ángel es mejor en Inglés porque está por encima de la media de la clase.

I-13: La profesora sugiere que si se compara solamente con la media puede pasar que la distribución tenga mayor o menor dispersión y las conclusiones no serían acertadas, y muestra como ejemplo las curvas de la Figura 6.7.6.

Figura 6.7.6. Curvas de densidad normales con distinta desviación típica

I-14: Sugiere estudiar la columna de desviaciones a la media que aparece en la tabla 6.7.1. Teniendo en cuenta estos datos, Ángel está 39,3 puntos por encima de la media en inglés y 13,7 por debajo en economía. Pregunta si con esa nueva información ya se puede decir que es mejor, por ejemplo en Matemáticas que en Inglés.

I-15: Ante la falta de respuestas, la profesora aclara que además de toda esa información se debería saber cuántos alumnos hay por encima o debajo de la media.

Comparación de distribuciones normales. Puntuaciones tipificadas*Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en los dos cursos*

I-16: La profesora propone que se comparan los dos alumnos y respondan a las cuestiones que aparecen en la Pág. 22 (Anexo II).

- La profesora plantea la pregunta 1 y los alumnos discuten y concluyen en qué asignatura está mejor Ángel o Carlos.
 - La profesora plantea la cuestión 2:
2. Ángel está 39,3 puntos por encima de la media en inglés y 16,2 puntos por encima de la media en informática (ver columna 5). ¿Es este estudiante mejor en Inglés que en informática?

I-17: Vuelve a preguntar si con la información de la pregunta pueden afirmar que Ángel es mejor en Inglés que en Informática.

- Algunos alumnos responden que no porque deberían tener en cuenta la desviación típica.
- La profesora asiente y explica cómo se ha calculado la columna 6, realizando los siguientes pasos en la pizarra:

$$\frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{195 - 155,7}{26,4} = 1,49$$

- Propone comprobar el valor tipificado de las puntuaciones en inglés:

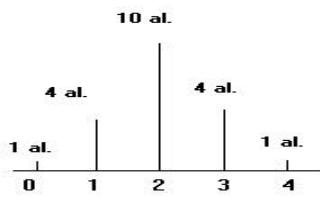
$$P(x > 195) = P(x - 155,7 > 195 - 155,7) = P\left(\frac{x - 155,7}{26,4} > \frac{195 - 155,7}{26,4}\right) \text{ si llamamos}$$

$$\frac{x - 155,7}{26,4} = Z, \text{ obtenemos las mismas probabilidades al calcular } P(x > 195) \text{ o } P(Z > 1,49)$$

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en el curso 99-2000

I-18: Para mostrar que la distribución normal típica tiene media 0 y desviación típica 1, la profesora propone lo siguiente:

“si en una clase el número medio de pesetas de los alumnos es 155 Ptas. y le quitan a cada alumno 30 Ptas. cuál sería la nueva media”.



- Un alumno contesta que es 125;
- la profesora le pregunta qué ocurriría si vuelve a quitar 125 Ptas. a cada alumno. Debido a que se observa que los alumnos no comprenden la pregunta, la profesora dibuja la situación planteada (Figura 6.7.7) como supuesta distribución del dinero de los alumnos (billetes de 1000 Ptas.).

Figura 6.7.7. Gráfico de barras de la distribución del ejemplo

- Explica que la media viene dada por el siguiente cálculo:

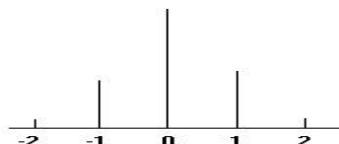
$$\bar{x} = \frac{1.0 + 4.1 + 10.2 + 4.3 + 1.4}{20} = \frac{24 + 12 + 4}{20} = \frac{40}{20} = 2$$

Entonces si se calculan las puntuaciones tipificadas de una nueva distribución z (que figura en la Tabla 6.7.2 y cuya gráfica se representa en la Figura 6.7.8), la nueva gráfica de los valores de z, será igual que la anterior pero la media es $z = 0$, lo cual ocurrirá siempre que se le reste a los valores de una distribución la media original. Luego continúa la explicación para obtener la desviación típica igual a 1.

Tabla 6.7.2

x	f	z
0	1	-2
1	4	-1
2	10	0
3	4	1
4	1	2

Figura 6.7.8. Puntuaciones tipificadas



Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en los dos cursos

I-19: Propone continuar con el ejemplo planteado como introducción:

Carlos está 20,3 puntos por encima de la media en economía y 17,5 en informática. ¿Es este estudiante igualmente bueno en las dos materias? ¿Cómo podríamos comparar a los dos estudiantes?. Ángel parece superior en tres materias y Carlos en las otras dos. Pero, suponiendo que los dos están compitiendo para una beca en la universidad; ¿cuál la merece más?. La suma de todas las puntuaciones son 434 y 397, y favorece a Ángel. ¿Sería justo dar la beca a Ángel, ya que tiene mayor suma de puntuaciones?.

- Plantea que se analice si en Inglés es mejor Carlos o Ángel, para lo cual realiza los siguientes cálculos en la pizarra:

$$\text{Ángel} = 195 \quad z = \frac{195 - 155}{26} = 1,49$$

$$\text{Carlos} = 162 \quad z = \frac{162 - 155}{26} = 0,27$$

- Explica que al realizar estos cálculos, se ha pasado a una distribución normal con media 0 y desviación típica 1, porque resulta más fácil realizar la comparación. Continúa explicando que si toman el intervalo central ($\mu - \sigma$; $\mu + \sigma$), pueden ver que Ángel está por encima del 68% central mientras que Carlos está en la mitad de dicho intervalo, por lo que Ángel es mejor que Carlos en Inglés.

I-20: Propone pensar qué pasa con ambos alumnos en Economía. Algunos alumnos dan respuestas acertadas y así continúan el análisis para todas las asignaturas. Luego la profesora les pregunta en qué asignatura es mejor Ángel. Un alumno contesta que en Física.

I-21: La profesora concluye explicando que con la distribución normal típica, como ya saben que su media es 0 y su desviación es 1, pueden interpretar los datos más fácil y rápidamente porque ya saben que siempre los intervalos centrales del 68%, 95% y 99,7% corresponderán a (1;1), (2; 2) y (3; 3)

respectivamente.

I-22: Pregunta que si tienen que darle una beca a Ángel o a Carlos, a cuál de los dos le correspondería. Algunos alumnos contestan que a Carlos.

En toda la introducción de la distribución normal tipificada se observa que resulta un tema que presenta muchas dificultades de comprensión para los alumnos. La profesora trata de guiarlos al descubrimiento de la solución al problema propuesto, pero aunque los alumnos resuelven correctamente algunos pasos intermedios, necesitan ayuda y a veces no llegan a comprender las respuestas planteadas (I-10, I-12, I-15, I-20, I-22).

Los alumnos logran prever de una manera intuitiva el efecto de cambio de escala sobre los valores aislados de los datos, pero no sobre la distribución y sus parámetros o estadísticos (elementos intensivos. Bloque I-18), posiblemente porque la idea de distribución (elemento intensivo) lleva consigo la *puesta en relación de diversos elementos de significado* y en consecuencia, tiene mayor *complejidad semiótica* y es precisamente, la que contiene la esencia del razonamiento estocástico, según Konold y cols. (1997).

La profesora debe improvisar un ejemplo más sencillo (que no estaba previsto) para que los alumnos logren visualizar y comprendan el efecto de los cambios de escala sobre la distribución en correspondencia con el valor de la media y desviación típica (I-18, I-19). Una vez analizado este ejemplo, los alumnos parecen seguir mejor el resto de las explicaciones y algunos logran obtener la solución del problema planteado.

Elementos de significado personal identificados en las respuestas escritas a las tareas

Luego de introducir la idea de tipificación, los alumnos resuelven algunas actividades relacionadas con dicho elemento. A continuación transcribimos la observación de los aspectos más relevantes y las actividades planteadas.

Cuadro 6.7.3. Síntesis de la observación de la cuarta sesión teórica (parte 3)

Para culminar la sesión, la profesora pide que resuelvan las actividades, 8, 9 y 10 y que las entreguen por escrito. A continuación presentamos las actividades planteadas:

Actividad 8. Para comparar entre sí diferentes distribuciones normales, conviene tipificar la variable, restándole la media y dividiendo por su desviación típica, obteniendo de este modo las puntuaciones Z o puntuaciones tipificadas. Para la distribución de la actividad 1 (altura de las chicas), tomando la $\mu=165$ y $\sigma=5$. A) ¿Cuáles serían las puntuaciones tipificadas para las alturas 164, 178, 150? B) ¿Qué alturas corresponden a las puntuaciones tipificadas $Z=0$, $Z=1$, $Z=-2$?

Actividad 9. La puntuación total en probabilidad en el fichero TESTP toma un valor medio de 25 puntos con una desviación típica 6. ¿Qué puntuación del test corresponde a un alumno que tenga una puntuación tipificada de 1,2 y -1,5?

Actividad 10. ¿Cuál será la media y desviación típica de las puntuaciones tipificadas?

Aspectos problemáticos más destacados relacionados con los elementos de significado surgidos en el aula durante los dos cursos

Interacciones más destacadas relacionadas con los elementos de significado en los dos cursos

En la resolución de estas actividades surgieron algunas cuestiones y dificultades de interpretación que comentamos a continuación:

I-23: Calculan correctamente las puntuaciones tipificadas, pero se presentan dudas cuando deben calcular los valores inversos. En la actividad 9 no se detectaba de qué manera se podían comparar las notas, se pensaba que hacía falta más información.

I-24: Aunque se había explicado durante la clase que los parámetros de la distribución normal típica son 0 y 1, hubo muchas dificultades para resolver la actividad 10 porque se argumentaba que faltaba información.

Del análisis de los aspectos problemáticos podemos determinar que se observa cierta

dificultad en el cálculo de valores inversos (relación entre elementos actuativo e intensivo. Bloque I-23). También, en el bloque I-23, se pone de manifiesto la dificultad de la tarea debido a que requería de un razonamiento algo más abstracto.

Además de las dudas mencionadas antes, hemos clasificado los elementos de significado aplicados por los alumnos en la resolución de estas actividades. En lo que sigue presentamos las conclusiones y los resultados del análisis de las tareas (Tabla 6.7.3).

Elementos Ostensivos

Los elementos ostensivos que se utilizaron en estas actividades fueron la fórmula de tipificación siempre correctamente y su inversa. Algunos alumnos del *segundo año*, usaron una fórmula incorrecta para la tipificación inversa puesto que les resultó complicado despejar correctamente la variable.

Elementos Actuativos

Las acciones realizadas por los alumnos han sido, el cálculo de valores tipificados y de sus inversos. El cálculo de los valores tipificados fue correcto, mientras que hubo algunos errores al despejar las incógnitas y errores de cálculo. La totalidad de los alumnos trabajaron de forma similar a la resolución transcrita en el cuadro siguiente:

$\text{Actividad 8.a: } z_1 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{164 - 165}{5} = \frac{-1}{5} = -0,2$ $z_2 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{178 - 165}{5} = \frac{13}{5} = 2,6$ $z_3 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{150 - 165}{5} = \frac{-15}{5} = -3$
$\text{Actividad 8.b: } 0 = \frac{x - 165}{5} \rightarrow 0 = X - 165 \rightarrow X = 165$ $1 = \frac{x - 165}{5} \rightarrow 5 = X - 165 \rightarrow X = 170$ $-2 = \frac{x - 165}{5} \rightarrow -10 = X - 165 \rightarrow X = 155$

Elementos Intensivos

En estas actividades el elemento intensivo central que aplicaron correctamente los alumnos para resolverlas fue el concepto de distribución normal tipificada y el de media y desviación típica de la distribución tipificada.

Tabla 6.7.3. Elementos de significado utilizados por los alumnos en las actividades 8, 9 y 10

Elementos de significado	Aplicados correctamente		Aplicados incorrectamente	
	1999 (n=16)	2000 (n=31)	1999 (n=16)	2000 (n=31)
Ostensivos				
Fórmula de tipificación: $Z = (x - \mu) / \sigma$	16	31		
Fórmula inversa: $x = Z \cdot \sigma + \mu$	16	23		8
Actuativos				
Cálculo de valores tipificados	16	31		
Cálculo de valores inversos	16	26		5
Intensivos				
Distribución normal tipificada	16	31		
Media y desviación típica de la distribución tipificada	16	26		5
Validativos				
Aplicación de una propiedad		3		

Elementos Validativos

No se pedían explícitamente. Sólo tres alumnos del *segundo curso*, realizaron validación de los resultados obtenidos en las actividades utilizando la siguiente justificación: “*Los valores*

negativos están por debajo de la media y los positivos por encima” lo que correspondería a la aplicación de una propiedad.

En resumen, estas actividades resultaron mucho más sencillas que las anteriores, apenas se producen errores como consecuencia de que tienen una menor complejidad semiótica.

6.8. TERCERA SESIÓN DESARROLLADA EN EL AULA DE INFORMÁTICA

En esta sesión los alumnos ya conocían la mayoría de las opciones del programa DESCRIBE, por lo tanto, se incluyeron otros problemas. Además, se agrega el aprendizaje de un nuevo programa: PLOT - PROBABILITY DISTRIBUTIONS, cuya finalidad es trabajar directamente con una distribución teórica que tenga la misma media y desviación típica que la distribución empírica. Es decir, en este caso no se pedía observar si se podía realizar el ajuste, directamente se utilizaba una distribución que ya se conocía que era aproximadamente normal. En esta sesión entregaron sus trabajos 54 alumnos el primer año y 45 el segundo.

Cuadro 6.8.1. Síntesis de la observación de la tercera sesión práctica

Interacciones más destacadas relacionados con los elementos de significado el curso '98-'99

I-1: El primer año, al principio de la sesión, se copió el fichero de datos a los alumnos,

- La profesora les explicó, por primera vez, la opción PLOT.
- Se presentaron algunos problemas porque hubo alumnos que llegaron con retraso y no escucharon toda la explicación.

Interacciones más destacadas relacionados con los elementos de significado el curso '99-2000

I-2 : El segundo año se hizo una preparación de esta práctica usando el cañón en la clase teórica, con lo cual sólo uno o dos alumnos mostraron los problemas mencionados.

- La profesora explica cómo se entra a la opción DISTRIBUTION FITTING porque el programa del aula de informática era una versión algo diferente de la que se había trabajado en las sesiones teóricas.

Interacciones más destacados relacionadas con los elementos de significado en los dos cursos

I-3: Se repitieron los problemas con el manejo del programa

- Muchos alumnos no recordaban la utilidad del programa PLOT o cómo modificar las opciones por defecto para calcular las proporciones (Elementos actuatorios);
- En otros casos se pensaba que el programa calcularía directamente todos los resultados, incluidas las proporciones correspondientes a los intervalos.

I-4: En otros casos, los alumnos no cambian los parámetros por defecto que corresponden a la distribución normal tipificada, con lo que todas las probabilidades les dan valores de cero o uno. Esto es debido, por un lado, a que estos parámetros se cambian en una opción secundaria del menú que, además, no aparece en los otros programas que se utilizan anteriormente.

I-5: En el problema 4, no lograban interpretar el significado de los percentiles y cuartiles en función de la distribución de datos.

- Otros alumnos recordaban la definición, pero hubo que explicarles la nueva opción del programa.

I-6: En los problemas 5 y 6 no recordaban la opción que debían utilizar para realizar las gráficas.

- Algunos alumnos se fueron a la opción DISTRIBUTION FITTING o incluso a la de DESCRIBE NUMERICAL VARIABLE.

I-7: Los alumnos tienen algunos problemas a la hora de interpretar el efecto de la media y de la desviación típica sobre la forma de la función de densidad, a pesar de que ya se había hablado de esto en las clases teóricas y de que podían observar los gráficos superpuestos de las funciones de densidad;

- Fueron pocos los que pudieron contestar la pregunta previo a ver el gráfico.

Del análisis de lo ocurrido en el transcurso de esta sesión podemos concluir que:

- Los alumnos presentan problemas importantes cuando deben modificar (elemento actuativo) las opciones por defecto, no recordando generalmente qué menú deben utilizar (bloques I-3 a I-6).
- En ciertos casos, utilizan el software de una forma acrítica, aceptando los resultados que

- entrega el programa y no relacionándolos con lo que se pregunta en el problema (I-4, I-6), al igual que ocurrió en las sesiones anteriores;
- No logran realizar un análisis previo (elemento validativo) para hacer conjeturas que luego deberán verificar o refutar por medio de una gráfica (I-7), la unión de sus conclusiones con lo puramente visual o gráfico es muy fuerte.

Elementos de significado personal identificados a partir de las respuestas escritas a las tareas

En el Cuadro 6.8.2 se presentan las actividades planteadas en esta sesión, y en la Tabla 6.8.1, se muestran los elementos de significado empleados por los alumnos en ellas y la cantidad de elementos que han sido aplicados correcta o incorrectamente.

Cuadro 6.8.2. Actividades planteadas en la tercera sesión práctica

- *Abre el programa STATGRAPHICS y carga el fichero altu1000 del disco U (carpeta datos). Este fichero contiene datos sobre la altura de 1000 chicas de entre 18 y 20 años.*
- 1. *Usando la opción Describe. Numeric Data, representa el histograma y polígono de frecuencias de la altura de 1000 chicas en el fichero ALTU1000. ¿Podemos admitir que la distribución es aproximadamente normal? ¿Por qué?*
- 2. *¿Cuál sería la media y desviación típica de la distribución normal que aproximaría las alturas de las 1000 chicas?*
- *El programa Plot sirve para representar gráficamente y calcular probabilidades de diversas distribuciones. Consulta en los apuntes la descripción de este programa. Ábrelo y selecciona la distribución normal. Cambia ANALYSIS OPTIONS para que el programa realice cálculos con una distribución normal ajustada a los datos de la muestra, es decir, con la media y desviación típica halladas en el punto 2.*
- 3. *Usando la opción Tail areas del programa PLOT, calcula la proporción de chicas con más y menos de 150, 160 y 170 cm de altura en la curva normal ajustada. ¿Qué proporción de chicas se encuentra en los siguientes intervalos (160-170) (150-170)?*
- 4. *Halla los valores de las alturas que corresponden a los cuartiles y a los percentiles del 10 y 90 por ciento en la curva normal ajustada.*
- 5. *Representa gráficamente la función de densidad y función de distribución (acumulativa) de la distribución normal ajustada a la altura de las chicas de la muestra. ¿Cómo piensas que cambiarían estas gráficas si, conservando la misma desviación típica aumentamos la media en 10 cm? ¿Y si disminuimos la media en 20 cm? Comprueba si has acertado en tu pronóstico, representando gráficamente las nuevas distribuciones y explica las diferencias encontradas.*
- 6. *¿Cómo piensas que cambia la distribución normal si, conservando la misma media aumentamos o disminuimos la desviación típica? Comprueba tus pronósticos representando gráficamente 3 distribuciones normales de igual media y diferente desviación típica y explica las diferencias encontradas.*

Elementos extensivos

En esta práctica se aplica el problema de ajuste de un modelo a una distribución empírica.

Elementos ostensivos

Representaciones gráficas: en esta práctica consideramos dos elementos dentro de esta categoría:

Curvas de densidad superpuestas (DENSITY MASS): se considera que se ha aplicado correctamente cuando se utilicen dos o más gráficas superpuestas con diferentes medias y/o desviaciones típicas e incorrecto cuando se representan por separado o no se proporcionan los valores adecuados de los parámetros. Aproximadamente la mitad de los alumnos cometen errores el primer año, y sólo una séptima parte el segundo, debido a la preparación en la clase teórica.

Curvas de función de distribución superpuestas (INVERSE CDF): al igual que el caso anterior, se considerarán correctas aquellas en las que se hayan cambiado la media y desviación típica e incorrectas cuando se representan por separado o no se proporcionan los valores adecuados de los parámetros. Se vuelven a repetir los resultados anteriores.

En la tabla 6.8.1 puede verse que los problemas principales se han presentado en la representación de las curvas de densidad y de distribución superpuestas, ya que algunos alumnos no recordaban cómo representar las curvas en un mismo sistema de ejes. Se ha mejorado en el segundo año, como consecuencia de que se pudo utilizar el cañón proyector en las clases teóricas, para preparar y recordar las opciones a usar en las clases prácticas.

Representaciones numéricas: consideramos los siguientes elementos:

DISTRIBUTION FITTING: se considera correcto cuando se obtiene la media y desviación típica desde el programa DESCRIBE - DISTRIBUTION FITTING - ANALYSIS SUMMARY, ya que lo que se pide es el cálculo de los parámetros de la distribución normal teórica que se approxima a la distribución empírica. Los errores se produjeron principalmente el primer año y se debieron al empleo de la distribución empírica, en lugar de la teórica.

TAIL AREAS: este elemento sirve para calcular las proporciones solicitadas. Se considerará correcta su aplicación cuando se modifiquen los valores por defecto que entrega el programa colocándose los valores solicitados. Los errores se presentan cuando no se cambian los valores por defecto o se toma la distribución empírica y sólo aparecen el segundo año.

CRITICAL VALUES: Consideramos que su aplicación es correcta cuando se introducen los valores correspondientes a los cuartiles y a los percentiles del 10 y 90 por ciento, modificando las opciones por defecto que entrega el programa y utilizando los parámetros de la distribución normal ajustada a la distribución de alturas e incorrecto como en los casos anteriores. Aparecen algunos errores en los dos años.

Elementos Actuativos

Cálculo de proporciones con DISTRIBUTION FITTING: serán correctos aquellos casos en los que se haya realizado el cálculo de las proporciones pedidas en los intervalos correspondientes, ingresando los valores correctos de los datos (pregunta 2). Los errores son muy escasos y se producen el segundo año, por considerar intervalos inadecuados u operar incorrectamente con las probabilidades en intervalos.

Cálculo de probabilidad de valores en intervalos (pregunta 2). Se considera correcto cuando se usan los datos adecuados en el programa que da las probabilidades. Es incorrecto si confunden el valor crítico que hay que introducir como dato en el programa. Se presentan muy pocos errores.

Cálculo de valores críticos: (pregunta 3). Se considera correcto si el alumno ingresa los datos necesarios para el cálculo de cuartiles y percentiles (0,25; 0,75; 0,1 y 0,9). En caso contrario se considerará incorrecto.

Representaciones gráficas usando Statgraphics: se consideran correctas aquellas representaciones en las que se den datos correctos de los parámetros y se presenten las curvas de densidad o de distribución superpuestas, de tal manera que puedan realizarse comparaciones visuales de ellas e incorrecto si falla uno de estos puntos. Este es el único punto en que hubo un número apreciable de errores, especialmente en el primer año.

Elementos Intensivos

Identificación de parámetros: Consideramos correctos aquellos casos en los que se han identificado los parámetros correspondientes a la distribución normal ajustada a la distribución de alturas en la pregunta 1.

Proporción y probabilidad en la distribución normal ajustada: se considerarán correctas aquellas respuestas en las que se haya interpretado adecuadamente cada una de las áreas correspondientes a las probabilidades solicitadas. Es casi siempre correcto.

Cuartiles y percentiles: se considera una interpretación adecuada cuando identifican el cuartil o percentil con el valor crítico que corresponde a un cierto porcentaje del área bajo la curva. El caso que sigue ha dado una interpretación adecuada de los percentiles, pero no identifica los cuartiles, siendo éste uno de los pocos errores producidos.

"El valor de la altura que corresponde al percentil 10 es igual a 157'59 cm. El valor de la altura que corresponde al percentil 90 es igual a 170'41 cm."

Media y Desviación típica (como parámetros): hemos considerado la interpretación de estos parámetros tanto en el cálculo solicitado en el ítem 1, como en las gráficas de los ítems 4 y 5. Por ejemplo, a continuación transcribimos dos casos. En uno se hace una interpretación correcta de la media y en el otro, de la desviación típica:

"Pienso que la "cima" de la función densidad se desplazaría 10 cm a derecha y 20 cm a la izquierda. El punto de inflexión de la distribución acumulativa haría lo propio. Todo ello sin que la forma de las gráficas cambie en absoluto. En efecto eso es lo que sucede cuando hago la nueva representación gráfica; el programa me muestra exactamente las mismas gráficas en apariencia, pero los valores de eje

"en el que se refleja la media son diferentes con respecto a los distintos puntos de la gráfica".

"Cuando disminuimos la desviación típica, la gráfica está menos dispersa, porque los datos están más concentrados en torno a la media. Ocurre lo contrario cuando aumentamos la desviación típica".

Formas de la Función de densidad y Función de distribución en función de los parámetros: se consideran correctas aquellas respuestas en las que se analice la forma en que varían estas curvas cuando se modifican los valores de los parámetros. Incorrectas cuando hay algún de error de interpretación.

Distribución Empírica – Distribución teórica: Se han presentado algunos errores al utilizar el resumen numérico DISTRIBUTION FITTING, para el cálculo de parámetros. En el caso de los cuartiles y percentiles (CRITICAL VALUES) los alumnos calculan los de la distribución empírica en lugar de los de la distribución teórica normal, lo que puede ser debido a confusión entre las dos distribuciones o entre los elementos ostensivos que deben utilizar.

En resumen, en esta práctica la aplicación de elementos intensivos es predominantemente correcta.

Tabla 6.8.1. Frecuencias de los elementos de significado identificados en las respuestas de los alumnos a la práctica 3

Elementos de significado	Aplicados correctamente		Aplicados incorrectamente	
	1999 (n = 54)	2000 (n = 45)	1999 (n = 54)	2000 (n=45)
Ostensivos				
Resúmenes gráficos				
Curvas de densidad superpuestas (DENSITY MASS)	24	36	24	6
Curvas de función de distribución superpuestas (INVERSE CDF)	20	34	16	6
Resúmenes numéricos				
DISTRIBUTION FITTING (media y d. Típica)	40	39	12	6
Áreas de cola (TAIL AREAS)	50	43		2
Valores críticos (CRITICAL VALUES)	48	41	6	4
Actuativos				
Cálculo de probabilidad de valores en intervalos	48	41	2	4
Cambio de los parámetros de la distribución normal	50	40		2
Cálculo de proporciones de valores en intervalos	54	41		2
Cálculo de valores críticos	48	41	6	4
Representaciones gráficas usando Statgraphics	24	36	24	6
Intensivos				
Identificación de parámetros	42	41	12	6
Proporción y probabilidad en la curva normal ajustada	54	41		2
Cuartiles y percentiles	40	43	2	
Media (como parámetro)	48	38		2
Desviación típica (como parámetro)	44	37	2	2
Forma de la f. densidad en función de los parámetros	44	38	4	2
Forma de la función de distribución en base a los parámetros	40	38	4	2
Validativos				
Aplicación de propiedades (p.2 y 3)	48	38		2
Comprobación de propiedades (p 4)	40	38	8	2
Comprobación de propiedades (p 5)	36	37	4	2
Generalización de propiedades(p. 4 y 5)		12		

Elementos Validativos

Análisis: se podía aplicar este elemento validativo en los problemas 5 y 6, previo a realizar las gráficas, aunque ninguno de los alumnos lo aplicaron.

Generalización de propiedades: en los problemas 4 y 5, en los que se debía hacer conjeturas sobre la forma de las gráficas en función de distintos valores de los parámetros, algunos alumnos han realizado generalizaciones bastante consistentes como la que se transcribe a

continuación:

"Si aumentamos la media la curva es igual, los datos se desplazan hacia la derecha. Si la disminuimos la curva se desplaza hacia la izquierda. A medida que aumenta la desviación típica la curva se hace mas baja, mas aplanada".

Representación gráfica: También en esta ocasión, algunos alumnos han validado sus argumentaciones por medio de la representación gráfica, sin utilizar ninguna otra propiedad.

En esta práctica, la mayoría de los alumnos han realizado aplicación y comprobación de propiedades tales como comprobar gráficamente que la curva de densidad se desplaza a lo largo del eje x cuando varía la media. Pero, son pocos los alumnos que llegan a realizar una generalización de las propiedades de los parámetros de una distribución normal y siempre en el segundo año.

6.9. CONCLUSIONES

En este capítulo hemos analizado la observación de la secuencia de enseñanza llevada a cabo, destacando las dificultades surgidas durante las clases y la forma en que la profesora ha tratado de resolverlas.

Especialmente, hemos analizado con detalle los elementos de significado que están explícitos o implícitos en las respuestas escritas de los alumnos a las actividades planteadas en las clases teóricas y prácticas, de esta forma hemos descrito la evolución del significado personal construido por los alumnos, de acuerdo con nuestro cuarto objetivo específico (Sección 3.3).

A continuación resaltamos las principales conclusiones obtenidas, que describiremos en función de los objetivos que nos habíamos planteado al comenzar este capítulo: en primer lugar en relación con la comparación entre la secuencia de enseñanza planificada y la efectivamente observada y luego, en relación con el análisis de las dificultades mostradas por los alumnos en el desarrollo del tema y los elementos de significado aplicados por ellos en las actividades desarrolladas en dicha secuencia. En las tablas 6.9.1, 6.9.2 y 6.9.3, se detallan los elementos de significado tal como fueron aplicados en cada una de las sesiones de la secuencia de enseñanza.

6.9.1. CONCLUSIONES SOBRE EL SIGNIFICADO INSTITUCIONAL LOCAL OBSERVADO

Conclusiones relacionadas con las actividades desarrolladas en el aula tradicional

Nuestra observación nos ha permitido determinar la forma en que se presentan y articulan los diferentes elementos del significado institucional local a lo largo de la enseñanza. Se han introducido todos los elementos previstos, pero no con la misma intensidad, ni siempre en la secuencia planificada, lo cual se puede apreciar si comparamos las tablas 5.5.1, 5.5.2 con 6.9.1 y 6.9.2, en las que se describen los elementos de significado que se preveía aplicar en cada sesión y los efectivamente observados.

La secuencia de enseñanza ha variado en algunos puntos, respecto a lo planificado, especialmente en *el segundo curso*, agregándose en algunos casos elementos que no estaban previstos, como por ejemplo en la cuarta clase teórica (que correspondería a la tercera diseñada) se trabajó la probabilidad en una distribución. Además de agregarse una clase teórica, se analizaron problemas o ejemplos que estaban propuestos en el apunte pero que no se había previsto desarrollarlos en las clases.

Resaltamos la dificultad de las tareas propuestas en la primera sesión, *en ambos cursos*, aunque la mayoría debieran haberlas conocido los alumnos, puesto que se referían a conceptos anteriores. En los dos cursos ha sido preciso insistir en algunos puntos, y recordar conceptos previos, como la simetría, el significado del área en los histogramas o de los coeficientes de asimetría y curtosis, la determinación del intervalo donde cae la mediana en una tabla de frecuencias, propiedad de la mediana como centro de simetría de una distribución o la identificación e interpretación de distintos tipos de frecuencias. Todos estos son conceptos o propiedades que los alumnos deberían haber tenido adquiridos al comenzar el tema de la distribución normal.

Tabla 6.9.1. Elementos de significado institucional local específicos de la distribución normal observados en la secuencia de enseñanza

Elementos de significado	Sesiones en que se usan						
Extensivos	T1	P1	T2	T3	P2	T4	P3
Ajuste de un modelo (aproximación al histograma)	X	X	X			X	X
Aproximación de distribuciones discretas		X	X	X	X		
Ostensivos							
Representaciones gráficas							
Gráfica de la función de densidad normal	X	X	X	X	X	X	X
Histograma y función de densidad superpuestos	X	X	X	X	X	X	X
Gráfica de la función de distribución							X
Gráficas superpuestas de funciones de densidad o de distribución				X			X
NORMAL PROBABILITY PLOT			X				
Gráfico de puntos		X					
Representación de áreas o de intervalos bajo la curva normal	X	X	X	X	X		
Representaciones numéricas							
Áreas de cola			X	X			X
Valores críticos			X	X			X
DISTRIBUTION FITTING	X		X	X	X		X
Representaciones simbólicas							
Z, X, N(μ , σ), N(x; μ , σ)	X		X				X
$z = (X - \mu) / \sigma$, $X = z\sigma + \mu$	X	X	X		X		
$\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma$, $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$, $\mu \pm k\sigma$	X	X	X		X	X	
$x \pm k.s$, $(x - k.s, x + k.s)$	X	X	X		X	X	
$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma)$			X			X	
$P(x_1 < X < x_2)$			X			X	
$P(x_i) \geq 0$ para todo x_i o $f(x) \geq 0$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$			X				
$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(x - \mu)^2]}$, $-\infty < x < \infty$	X						
Actuativos							
Estimación de probabilidades a partir de tablas de frecuencia	X	X					
Ajuste de una curva y estudio descriptivo de datos	X	X	X	X	X		
Cálculo de áreas, probabilidades y valores críticos (con lápiz y papel)	X		X	X		X	
Cálculo de áreas o probabilidades en la curva normal y de valores críticos (con ordenador)		X		X	X		X
Contraste de ajuste visual	X	X	X	X	X		X
Obtención de límites en intervalos centrales	X	X	X	X	X	X	
Representación gráfica de datos	X	X	X	X	X	X	X
Tipificación: cálculo de valores tipificados o sus inversos					X		
Intensivos	T1	P1	T2	T3	P2	T4	P3
Área bajo la curva normal, áreas de cola, valores críticos	X		X	X	X	X	X
Desviación típica (como parámetro)			X	X		X	X
Distribución normal tipificada, d. original y transformada	X	X	X	X	X		X
Función de densidad normal, función de distribución			X	X	X	X	X
Media como parámetro	X		X	X			X
Parámetros de la distribución normal	X		X	X	X		X
Posición relativa de media, mediana y moda en la d. normal	X		X	X	X		
Probabilidad de valores en un intervalo en la d. normal			X	X	X	X	X

Propiedad de los intervalos centrales en la distribución normal	X	X	X	X	X	X
Simetría en la distribución normal			X	X	X	X
Curtosis en la distribución normal	X				X	
Unimodalidad de la distribución normal	X		X		X	

Validativos						
Análisis	X	X	X	X	X	X
Aplicación de una propiedad	X	X	X	X	X	X
Comprobación de casos particulares o de propiedades	X	X	X	X	X	X
Generalización de una propiedad	X				X	X
Representación gráfica	X	X	X	X	X	X
Síntesis	X	X	X	X	X	X
Simulación con ordenador	X	X	X	X	X	X

Esto sugiere que una parte importante de la dificultad de comprensión de la distribución normal se encuentra no sólo en el mismo concepto, sino en la cantidad de conceptos previos que el alumno precisa recordar y dominar. Asimismo, la dificultad de las tareas disminuye notablemente en las siguientes sesiones, no sólo porque el alumno aplica y relaciona de mejor forma los conceptos previos (como el histograma) sino porque demuestra un dominio básico de los nuevos conceptos y propiedades, como el cálculo de áreas y las propiedades de una distribución normal. Deducimos de ello una progresión en el aprendizaje.

La posibilidad de uso del ordenador con un proyector en las clases teóricas hizo que en el segundo curso se modificara la presentación de algunas actividades o ejemplos, como la aplicación del programa DISTRIBUTION FITTING que implica el uso del histograma y la curva de densidad normal superpuestos. Consideramos que esta posibilidad ayudó a clarificar algunos puntos, especialmente aquellos como el estudio descriptivo de una variable y la comparación visual, ya que se tuvieron más oportunidades de realizar simulaciones con el ordenador antes de llegar a la clase práctica, estableciendo una relación más estrecha entre ambos tipos de sesiones.

Conclusiones sobre las clases en la sala de informática

Nuestra impresión es que la disposición de la clase de informática y el hecho de que un grupo de alumnos fuera numeroso hizo muy complicada la gestión de la clase y, en particular, la institucionalización. Aunque la profesora responde a las dudas individualmente, no logra atender a todos los alumnos, incluso cuando alguno de ellos colabora con el profesor para explicar a sus compañeros lo que la profesora previamente le ha explicado a él.

Cuando la profesora observa que una duda se repite, trata de hacer una discusión colectiva y tiene éxito en conseguir que los alumnos dejen su tarea, guarden silencio y atiendan a la cuestión. Pero ello es sólo por un espacio breve de tiempo (no más de 10 minutos), pues los alumnos están ansiosos de volver al ordenador y tratar de comprobar lo antes posible por sí mismo lo que dice la profesora, perdiendo, a veces, parte de la explicación.

En relación con el trabajo de los alumnos, también en las sesiones prácticas surgen muchas dudas y dificultades. Una dificultad repetida es que los alumnos no encuentran las opciones incluidas en los menús secundarios (PANE OPTIONS y ANALYSIS OPTIONS) porque están ocultas a la vista. Esto les lleva con frecuencia a tomar las opciones por defecto que no son siempre apropiadas. Sería necesario disponer de un software más sencillo para trabajar en la enseñanza de la estadística.

Queremos resaltar, también, la complejidad de organizar y gestionar una clase en la que el uso de ordenadores sea una parte importante. En el *segundo curso* hubo una gran cantidad de problemas en la sala de informática, debido a que el centro de cálculo estuvo haciendo cambios en los sistemas operativos a lo largo de todo el segundo cuatrimestre. Nos encontramos con situaciones diversas: desde todos los ordenadores funcionando, de 2 a 10 ordenadores que no funcionaban (de un total de 20) e incluso un día en que, sin previo aviso, el aula estaba clausurada. Asimismo, se cambió la versión del programa Statgraphics y el sistema operativo sin previo aviso a los profesores. Todo ello hizo necesaria la improvisación, desde incluir una clase teórica adicional en la hora destinada a clase práctica, retrasar la clase una semana, hasta

usar una de las clases prácticas para realizar una evaluación. Un punto a nuestro favor fue que los alumnos se mostraron muy comprensivos con los problemas y el esfuerzo que se hizo en solucionarlos y su actitud hacia la asignatura no se resintió con estos problemas.

Sin embargo, el *segundo año* disminuyeron las dificultades de los alumnos como consecuencia de que se preparó el apunte sobre Statgraphics y se mejoraron los ejemplos incluidos en el apunte teórico. También el hecho de contar con el cañón de proyección en la clase teórica y el preparar la práctica con anterioridad sirvió para mejorar.

Tabla 6.9.2. Elementos de significado institucional local relacionados con otros conceptos observados en la experiencia de enseñanza

Elementos de significado	Sesiones en que se usan						
	T1	P1	T2	T3	P2	T4	P3
Extensivos							
Obtención de distribuciones en el muestreo de la media y otros parámetros		Estos elementos fueron desarrollados después del tema de la distribución normal					
Estimación por intervalos de confianza							
Ostensivos							
Representaciones gráficas							
Histograma	X	X	X		X	X	
SYMMETRY PLOT				X			
Gráficos de barras					X		
Polígono de frecuencias	X	X	X		X		X
Representaciones numéricas							
SUMMARY STATISTICS	X	X	X		X	X	
Tablas de datos	X	X	X		X	X	
Tablas de frecuencias	X	X	X		X	X	X
Representaciones simbólicas							
$\mu, \sigma, \sigma^2, x, s$	X	X	X			X	
Actuativos							
Estudio descriptivo de una variable	X	X	X	X	X	X	
Cálculo de áreas en histograma o polígono de frecuencias a partir de la tabla de frecuencias	X						
Cálculo de porcentajes o proporciones en tablas de frecuencias con ordenador		X	X		X		
Representación gráfica de datos	X	X	X	X	X	X	X
Intensivos							
Ajuste, bondad de ajuste	X	X	X	X	X		
Coeficientes: de asimetría, de curtosis	X	X	X	X	X		
Desviación típica muestral y poblacional. Dispersión	X	X	X	X	X	X	X
Distribución empírica	X	X	X	X	X		
Ejes: de simetría, vertical y horizontal	X		X				
Estadísticos de orden: cuartiles, percentiles				X			X
Experimento aleatorio y estadístico	X				X	X	
Frecuencias: absolutas, relativas, acumuladas, acumuladas relativas	X	X	X		X	X	
Convenio de lectura de gráficos: histograma, polígono de frecuencias, gráficos de puntos	X	X	X	X	X	X	X
Intervalos centrales. Intervalos de clases, límites de intervalos	X	X	X		X	X	
Media muestral y poblacional		X	X	X	X	X	X
Medidas de tendencia central: media, mediana, moda.	X	X	X		X		
Posiciones relativas					X		
Unimodalidad, multimodalidad	X	X	X		X		

Muestra aleatoria, Población	X	X	X	X	X	X	
Probabilidad, reglas de cálculo de probabilidades			X	X	X	X	X
Proporción, porcentaje	X	X	X	X	X		
Simetría – Asimetría ,Valores atípicos	X	X	X	X	X		
Variables estadísticas y aleatorias. Tipos de variables	X	X	X	X			X
Validativos							
Comparación de resultados por distintos métodos	X	X	X	X	X		X
Demostraciones informales	X	X	X	X	X	X	X
Representación gráfica	X	X	X	X	X	X	X

Al contrario que en las sesiones teóricas, no se ve claramente una progresión en el aprendizaje. En la segunda práctica hubo mayor dificultad que en la primera al interpretar los coeficientes de asimetría y curtosis, posiblemente porque la variable con la que se trabaja es cuantitativa discreta con pocos valores, y la forma de la distribución se visualiza con más dificultad, aunque en realidad, la dificultad de interpretación de estos dos elementos intensivos ha sido constante en todas las sesiones tanto prácticas como teóricas. En la práctica 3 se introducen nuevas opciones, lo que hace de nuevo que haya una dificultad considerable en las tareas, aunque el número de errores es pequeño, en comparación con las prácticas anteriores. Ello implica un aprendizaje del uso del software por parte de los alumnos.

6.9.2. CONCLUSIONES SOBRE LOS ELEMENTOS DE SIGNIFICADO PERSONAL PUESTOS EN JUEGO POR LOS ALUMNOS EN LAS ACTIVIDADES

En esta sección describiremos las principales conclusiones sobre la aplicación de los diversos elementos de significado que hemos encontrado en la resolución de las tareas planteadas a los alumnos. Esto nos servirá de base en la próxima fase (Capítulos VII y VIII) para analizar el significado personal construido por los alumnos del grupo y evaluado al finalizar el curso. Las conclusiones que expresamos a continuación están basadas en la observación de las clases y en los resultados que hemos recogido en las Tablas 6.2.1, 6.3.1, 6.4.1, 6.6.1, 6.7.3 y 6.8.1 correspondiente a las resoluciones de las actividades propuestas a los alumnos.

Elementos extensivos

En general, se han aplicado los dos campos de problemas que se había previsto en la planificación de la enseñanza: ajuste de un modelo y aproximación de distribuciones discretas, mostrándose en este último caso, un ejemplo de una distribución discreta con pocos valores (variable trabajada en la segunda sesión práctica) que no podía ser aproximada por medio de una distribución normal. No hay diferencias entre los cursos, puesto que estos elementos los introduce la profesora.

Elementos Ostensivos

La mayoría de los alumnos han aplicado las representaciones previstas para las actividades propuestas, agregándose en algunos casos, elementos que no estaban previstos como por ejemplo, la representación gráfica aproximada del histograma y polígono de frecuencias en la primera actividad teórica, realizados a mano, o la utilización del gráfico SYMMETRY PLOT en algunas de las actividades prácticas.

Se observaron dificultades cuando debían encontrar extremos de intervalos aproximados a los correspondientes a los intervalos centrales o cuando debían calcular valores críticos o áreas de cola. En estos dos últimos casos, algunos alumnos tomaron los parámetros de la distribución normal típica que aparece por defecto y no cambiaron el valor de dichos parámetros, por lo que los valores obtenidos en el resumen numérico TAIL AREAS o CRITICAL VALUES no correspondían a los cálculos solicitados.

Con respecto a las *diferencias entre ambos cursos*, podemos decir que en general, los alumnos del segundo año han tenido un mejor rendimiento, aplicando correctamente en mayor número, diversos elementos de significado. Solamente, en algunos casos como en el cálculo y comparación de probabilidades y porcentajes en la curva normal y en la distribución empírica, hay una disminución en los alumnos del segundo curso. Esto se debió, como ya hemos

comentado, a que se presentaron muchos problemas con el funcionamiento de los ordenadores y muchos de los alumnos no lograron terminar la práctica o perdieron sus trabajos.

Elementos Actuativos

En *ambos cursos*, se presentaron dificultades especialmente en la comparación visual en la distribución utilizada para la segunda práctica. En este caso, algunos alumnos realizaron un estudio descriptivo incorrecto debido a que se basaron exclusivamente en la forma de la función de densidad sin analizar ningún otro elemento y a que no se tuvieron en cuenta los datos de donde provenía la distribución, como sucedió en la práctica 2, en la que se trabajó con una variable discreta con pocos valores.

También hubo alumnos que realizaron cálculos incorrectos de valores críticos o representaron incorrectamente las gráficas de funciones de densidad o de distribución como consecuencia de no modificar las opciones por defecto. Por ello, hubo dificultades en la determinación de los porcentajes correspondientes a la propiedad de los intervalos centrales. Puesto que el procedimiento de cálculo correspondiente a la comprobación de dicha propiedad es algo complicado, debido a que se requiere integrar acciones manuales y acciones con el ordenador, aparecen errores tanto de cálculo como de aproximación exagerada. También sucede que los alumnos olvidan las opciones del programa por lo que muchas veces no encuentran la manera de modificar los intervalos de la tabla de frecuencias y en consecuencia, realizan cálculos poco aproximados, obteniendo valores que no se ajustan a los expresados en dicha propiedad.

De todos modos, debemos destacar que la mayoría de los alumnos logran realizar acciones correctas y adecuadas en función de lo que se les pide en cada actividad. Esto implica que se ha logrado un aprendizaje aceptable del programa, considerando que presenta una gran diversidad de menús y opciones que pueden presentar dificultad para los alumnos. No sólo representa una complejidad semiótica distinta a la que generalmente se presenta en una clase tradicional, sino que también requiere el aprendizaje de nuevas acciones ligadas a otros elementos y a los objetivos que se persiguen con ellas.

No hay grandes diferencias entre los cursos aunque los del segundo muestran mayor conocimiento del estudio descriptivo de datos en la sesión práctica 1, de la obtención de límites en intervalos y comparación visual en la segunda sesión teórica. Por el contrario presentan más errores en la realización de gráficas en la tercera práctica, debido a los problemas surgidos con los ordenadores.

Elementos Intensivos

Una de las primeras dificultades que aparecieron dentro de estos elementos y, que se mantuvo en casi todas las sesiones, fue con la interpretación de los coeficientes de asimetría y de curtosis, a pesar de que estos eran elementos que los alumnos conocían previamente. También se observaron dificultades en la interpretación de los cuartiles y percentiles. En muchos casos no se comprendía cuál era la información que proporcionaban estos valores y tampoco se recordaba cuáles eran los valores críticos que representaban a cada uno de ellos.

Aunque en la enseñanza se hizo énfasis en el análisis del rango y valores de la variable para determinar su tipo, y tener así una pauta más para evaluar la aproximación por medio de la distribución normal, en general, no se tuvo en cuenta esta propiedad, lo cual condujo a errores o dificultades en determinadas actividades como las de la segunda práctica.

En relación con los elementos específicos de la distribución normal, se observó que resultó algo complicada la propiedad de los intervalos centrales ya que en muchos casos sólo se ha realizado el procedimiento de cálculo sin llegar a interpretar los resultados, aunque se ha observado una evolución en el aprendizaje de ésta.

También se observa que la interpretación de probabilidades como áreas bajo la curva resulta complicada, especialmente en aquellos casos en los que los intervalos que se debe calcular son el resultado de una operación entre intervalos. En este caso, para comprender la situación es necesario el apoyo gráfico que no se puede obtener por medio del ordenador sino con lápiz y papel. Han habido alumnos en los que no entienden cómo se representa la situación y en consecuencia, no logran interpretar lo que están buscando, proporcionando respuestas erróneas o dejando la actividad sin resolver.

Por último, se observaron dificultades en la identificación y comprensión de la distribución

normal como un modelo que aproxima a determinados tipos de variables. Esto condujo a errores a la hora de diferenciar la distribución empírica de la teórica y también, cuando se debía distinguir entre parámetros y estadísticos.

En el segundo año se muestra más dominio del significado del coeficiente de asimetría y curtosis (práctica 1 y 2).

Elementos Validativos

Se ha observado que se aplica principalmente la representación gráfica como elemento validativo, utilizando aspectos obvios de dichas representaciones y también la aplicación o comprobación de propiedades. Generalmente estos elementos se presentan de manera aislada, sin llegar a una síntesis en la que se pudieran integrar los elementos aplicados en cada problema.

Aunque se les han presentado actividades en las que podría realizarse un análisis previo de la situación, como por ejemplo las actividades 5 y 6 de la práctica 3, antes de realizar ninguna acción, en la mayoría de los casos, no se produce este análisis recurriendo primero a la visualización por medio de las gráficas para poder realizar afirmaciones basadas en ellas. También en este caso, ha sucedido que la mayoría de los alumnos realizan afirmaciones basadas en los valores ingresados pero no logran llegar a una generalización de una propiedad de la distribución normal.

Cuando se les pide una conclusión, en general, los alumnos se quedan con las referentes a un solo análisis. Por ejemplo, observan que el coeficiente de asimetría es muy pequeño con lo cual concluyen que la distribución es simétrica y no observan los gráficos en los cuales se ve claramente que además de ser una distribución discreta presenta dos modas ni analizan la posición de la media respecto a la mediana y a la moda. Coinciendo con lo que concluyen Ben-Zvi y Friedlander (1997), ciertos alumnos presentan dificultades para realizar una síntesis y se limitan a validaciones parciales no formalizadas.

No se observan diferencias apreciables en los dos cursos.

CAPÍTULO VII

SIGNIFICADO PERSONAL PUESTO EN JUEGO POR LOS ALUMNOS EN LA RESOLUCIÓN DEL CUESTIONARIO

7.1. INTRODUCCIÓN

Una vez finalizada la experiencia de enseñanza, se llevó a cabo una doble evaluación de los conocimientos adquiridos por los alumnos de la muestra con el fin de describir las características generales (tendencias y variabilidad) del significado personal, en relación con la distribución normal y con algunos conceptos relacionados. Con ello queremos cumplir nuestro objetivo específico O6 que se describe en el Capítulo III y que forma parte del cuarto objetivo general (Sección 1.5).

En nuestro marco teórico la evaluación de la comprensión de un sujeto se concibe como el estudio de la correspondencia entre el significado institucional efectivamente presentado en la enseñanza y el significado personal construido por él, identificando los puntos en que hay acuerdo y aquellos en que el alumno presenta dificultades o errores. Es importante entonces que, la evaluación cubra una muestra representativa de los diversos elementos de significado presentados a los alumnos en la enseñanza recibida.

La evaluación es, en consecuencia, en este marco teórico, una tarea compleja, que puede realizarse a diferentes niveles de profundidad, con distinta intensidad y empleando diversos instrumentos. Una posibilidad sería realizar una evaluación profunda y completa del significado personal de un estudiante, lo que requeriría realizar entrevistas al estudiante, observar su trabajo y forma de resolver problemas, en una variedad de circunstancias, es decir, en más de una sesión de evaluación. Otra opción, que es la que hemos adoptado porque pensamos que es una información previa necesaria que puede fundamentar la investigación futura sobre el tema es, realizar una evaluación de las características de la comprensión personal de los grupos de alumnos pertenecientes a los cursos participantes. De este modo incorporamos en nuestro estudio la noción de evaluación considerada en Godino (1996), aunque centrándonos en describir las características y variabilidad en la comprensión personal de los alumnos participantes.

Con este fin, en este capítulo, describimos la primera parte de una evaluación realizada al grupo de alumnos participante, utilizando dos tipos de instrumentos, cuya construcción se basa en nuestro marco teórico y que tienen en cuenta los dos tipos de cuestiones sugeridas por Gal (1997) para la evaluación en estadística:

a) Cuestiones sobre lectura directa de datos, definiciones o reconocimiento de propiedades, en que las respuestas pueden ser clasificadas como correctas o incorrectas. Este tipo de cuestiones se recogen en un cuestionario, que permite evaluar simultáneamente el conocimiento de una muestra representativa de los diferentes elementos de significado considerados en la enseñanza. En la sección 7.2 describimos la construcción y contenido del cuestionario y en la sección 7.3 los resultados obtenidos al aplicarlo a los alumnos de la muestra.

b) Por el contrario, para evaluar las cuestiones dirigidas a mostrar las ideas de los estudiantes sobre los patrones que emergen en los datos necesitamos información sobre sus juicios, sus procesos de razonamiento y las estrategias que utilizan para relacionar todos los elementos. Para tener en cuenta este tipo de cuestiones, diseñamos una prueba de ensayo para

ser resuelta con apoyo del ordenador, que permite evaluar la capacidad de análisis y síntesis y de aplicación de los conocimientos teóricos a una situación real de análisis de un nuevo conjunto de datos. En el Capítulo VIII describimos la construcción y contenido de la prueba de ensayo y los resultados obtenidos.

7.2. DESCRIPCIÓN DEL CUESTIONARIO

7.2.1. OBJETIVOS Y PROCESO DE CONSTRUCCIÓN

Objetivos

El objetivo principal al construir el cuestionario fue disponer de un instrumento en el que en un corto espacio de tiempo (sobre una hora y media) pudiéramos recoger datos que nos permitan aproximarnos a la comprensión que muestra el grupo de alumnos en relación con la mayor cantidad posible de elementos de significado incluidos en la enseñanza.

De este objetivo principal se deducen otros objetivos. El primero de ellos consiste en estimar la proporción de alumnos en el grupo que muestran una comprensión mínima de un cierto número de elementos de significado incluidos en la enseñanza. Asimismo, deseamos comparar la dificultad entre diversos elementos de significado, identificando los distintos índices de dificultad observados en los alumnos en cuestión, y mostrando tanto las características en la comprensión en el grupo de alumnos, como su variabilidad.

Por otro lado, en esta investigación han participado alumnos de dos cursos sucesivos, en el segundo de los cuales la enseñanza había sido revisada ligeramente, en el sentido de proporcionar a los alumnos unos apuntes complementarios sobre el uso de Statgraphics y otros cambios que se describen en el capítulo 6. En consecuencia, un tercer objetivo es analizar las posibles diferencias de comprensión entre los alumnos del primero y segundo año y, en particular, analizar si se encuentra una mejora significativa en el segundo año, respecto al primero.

Finalmente, puesto que en nuestra muestra han participado dos tipos de alumnos de características claramente diferenciadas, deseamos analizar las posibles diferencias finales en las características de comprensión en estos dos grupos de alumnos (con y sin conocimientos previos de estadística).

En lo que sigue, describimos el proceso de construcción del cuestionario y analizamos su contenido, para pasar en las secciones 7.3 a analizar nuestros resultados, de acuerdo con los objetivos que acabamos de exponer.

Proceso de construcción del instrumento

En el proceso de elaboración se han seguido una serie de recomendaciones tomadas de Scott (1988), Osterlind (1989) y Thorndike (1989):

- En primer lugar, se delimitó el contenido a evaluar con este instrumento. Esto se realizó a partir del análisis de los diversos elementos del significado institucional local previsto realizado en el Capítulo V, en el que se identificaron los distintos elementos de significado que interesaba diferenciar en la comprensión de la distribución normal;
- Se especificó el formato de los ítems, decidiendo que la mayoría fuese simplemente ítems de verdadero/ falso, pidiendo sólo la justificación en una parte de los ítems. Esta decisión se tomó teniendo en cuenta que el tiempo disponible sería el correspondiente a una sesión de clase, y que se deseaba incluir un número relativamente amplio de ítems para cubrir el máximo de elementos de significado;
- Se procedió a la elaboración de una colección de ítems inicial a partir de los cuales se seleccionaron, posteriormente, los que habrían de constituir el cuestionario, con el proceso que describimos a continuación.

Selección y depuración de ítems

Para formar el conjunto inicial de ítems se partió de los contenidos en Cruise y cols. (1984), seleccionándose un banco inicial de 195 ítems, traduciendo sus enunciados y elaborando una tabla de contenidos, para analizar los diferentes elementos de significado que cubrían cada uno de los ítems previamente seleccionados. En una serie de revisiones sucesivas se completaron y modificaron los ítems, añadiendo algunos de invención propia y otros elaborados

a partir de preguntas o ejercicios de los libros de texto analizados en el Capítulo IV.

Una vez que se llegó a un cuestionario que parecía cubrir el contenido pretendido, se procedió a homogeneizar la redacción y a cambiar el contexto cuando éste no fuese familiar al alumno. Las cuestiones que se referían a propiedades o conceptos relacionados, se agruparon en ítems compuestos de varios subítems, tratando de tener un número aproximadamente igual de subítems en cada uno. Se hicieron pruebas de legibilidad y comprensión del enunciado, con algunos alumnos voluntarios modificando la redacción en los casos que fue necesario. Estos alumnos cursaban otras asignaturas, también en la Facultad de Educación y sus características eran semejantes a las de los alumnos de la muestra.

En la redacción de los enunciados se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos indicados por Brent (1989): Evitar detalles innecesarios, relevancia de las preguntas formuladas para el estudio, nivel de lectura adecuado, brevedad, evitar las cuestiones negativas, evitar cuestiones sesgadas o interdependientes, claridad y falta de ambigüedad, que la respuesta sea razonable para el sujeto y pueda darla, evitar hipótesis implícitas, nivel apropiado de abstracción, asegurar que las preguntas tienen el mismo significado para todos los sujetos.

En cuanto a la ordenación de los ítems también se han seguido las indicaciones de Brent (1989):

- a. Instrucciones generales al sujeto. Además de las que se exponen por escrito en el cuestionario, se dieron explicaciones adicionales a los alumnos sobre los objetivos de la prueba y el modo de realizarla, terminando con una petición encarecida de que la hicieran con el máximo interés y atención.
- b. Las primeras cuestiones deben ser interesantes, fáciles y atractivas para el usuario y deben estimularle a continuar. Es por eso que se comienza con una pregunta de índole personal y se sigue por una pregunta referida a la exemplificación de los tipos de variables, que es un concepto que se maneja desde el comienzo del curso.
- c. Se sugiere que entre las primeras cuestiones haya pocas "abiertas" ya que requieren mayor esfuerzo del sujeto y éste puede pensar que le faltará tiempo para responder a todo el cuestionario. Es por esto que las preguntas que requerían algún tipo de justificación se ubicaron al final del cuestionario.
- d. Las primeras cuestiones deberían referirse a hechos ya que son más fáciles de responder y menos comprometidas.
- e. A lo largo del cuestionario las preguntas deben mostrar alguna variedad y no ser demasiado monótonas. Las cuestiones de un formato o contenido similar deben alternarse para reducir la monotonía.
- f. Cuando se produzca un cambio significativo del formato, cuando las cuestiones sean apropiadas sólo para un subgrupo, o cuando cambien alguna otra circunstancia en el cuestionario que pueda confundir al sujeto, se deben proporcionar instrucciones adecuadas. Esto se tuvo en cuenta cuando se comenzó con las preguntas que requerían justificación.
- g. Se deben agrupar las cuestiones que tengan un formato similar a menos que se tengan razones de peso para no hacerlo así.

Una vez preparado el cuestionario, se dio a revisar a otros investigadores y profesores de estadística, quienes también sugirieron mejoras en la redacción.

7.2.2. ESTRUCTURA DEL CUESTIONARIO

El cuestionario diseñado no es específico del tipo de enseñanza realizada en la secuencia que se ha mostrado en nuestra investigación, puesto que no requiere el conocimiento del software estadístico o el uso del mismo para realizarla, aspectos que serán considerados en el segundo instrumento de evaluación. En este sentido, este instrumento puede ser aplicado en un curso introductorio típico de estadística, puesto que su contenido está incluido en el significado de referencia que hemos identificado en el análisis de los libros de texto en el capítulo IV. Es decir, no se incluyen elementos del significado local pretendido que no estén en el significado de referencia.

Por otro lado, ya que introducimos un gran número de preguntas, para ser contestadas en un tiempo limitado (aproximadamente una hora y media), sólo se considera el conocimiento de hechos, la capacidad de aplicación, justificación y lectura de datos de nivel elemental. En general, son preguntas que requieren algún tipo de razonamiento del alumno, pues no se limitan

a la memorización de propiedades estudiadas o incluidas en sus apuntes. Además, se evalúa la capacidad de argumentación de los alumnos en las preguntas en que se pide justificar.

El cuestionario utilizado se muestra en el Anexo V. Este instrumento se pasó a los alumnos al finalizar el curso, en la última clase y en semanas previas a la prueba con ordenador.

Clases de ítems incluidos y estructura general del cuestionario

Como producto del proceso iterativo indicado anteriormente, se seleccionaron 65 ítems y por último, se llegó al cuestionario actual que está formado por cuatro tipos de preguntas:

- Ítems de verdadero/falso, los cuales nos parecen más apropiados para valorar la habilidad del estudiante para reconocer hechos o relaciones, para discriminar, para analizar, para hacer inferencias o para aplicar propiedades. Estaban constituidos por varios subítems.
- Ítems compuesto de Verdadero/Falso y de una parte de ensayo. Esta última parte está destinada a valorar la comprensión y aplicación de los conceptos permitiendo al alumno explicar por qué responde de una determinada manera, interpretar un enunciado y aplicar una propiedad. Creemos que así podremos valorar habilidades de pensamiento de más alto nivel (Gal, 1997).
- Un ítem de ensayo (Muñiz, 1994), en el que se pide la ejemplificación de conceptos.
- Un ítem de cálculo que nos permite evaluar la capacidad de aplicación de definiciones.

El instrumento consta de 20 ítems, alguno de los cuales agrupan varios subítems que comienzan con el mismo enunciado, resultando un total de 60 cuestiones, a las que debemos agregar las justificaciones de 5 de ellas, con lo que resultaría un total de 65 subítems a evaluar.

Los ítems 4 a 10 y 12 a 15, todos ellos, se componen de cuatro subítems, cada uno de los cuales comienza con la misma frase inicial. En ellos, el alumno puede seleccionar una o más opciones, ya que cada uno de los subítems puede ser verdadero o falso, por lo que en algunos casos hay más de una respuesta correcta. Lo mismo sucede para los ítems 3 y 11, sólo que estos tienen tres subítems, resultando un total de 61 preguntas, 5 de las cuales requieren justificación. El contenido general del cuestionario se podría englobar en los siguientes bloques:

- a. Conocimiento sobre diversos tipos de variables y capacidad de clasificar variables estadísticas en un tipo apropiado (ítem 2).
- b. Interpretación de elementos de un histograma y de una curva de densidad, como por ejemplo de qué manera leer la frecuencia (ítems 3 y 13).
- c. Interpretación de modelos matemáticos y de la curva normal como un modelo particular (ítems 4, 5 y 6).
- d. Interpretación de los parámetros de la distribución normal (ítems 9, 11 y 14).
- e. Interpretación y justificación de las propiedades de la distribución normal (ítems 15, 17, 18, 19, 20 y 21).
- f. Cálculo e interpretación de valores normales tipificados (ítem 16).

7.2.3. ANÁLISIS A PRIORI DE LOS ÍTEMES

En esta sección realizamos un análisis detallado, ítem a ítem, de todos los contenidos incluidos en nuestro estudio. Se analizan, también, los posibles errores que, a priori, es previsible que encontraremos en las resoluciones de nuestros alumnos. Entre paréntesis aparecen los elementos de significado a que se refieren y en el enunciado también se marca la opción u opciones correctas entre paréntesis.

En primer lugar se incluyó un ítem que estaba dirigido a recabar información sobre si los alumnos habían realizado algún curso previo de estadística y la carrera que estaban cursando. A continuación, se colocaron los ítems de evaluación propiamente dicha.

Item 2. Escribe un ejemplo de cada uno de los siguientes tipos de variables:

- a. Variable cuantitativa continua
- b. Variable cuantitativa discreta
- c. Variable cualitativa

Este es un ítem de ensayo (Muñiz, 1994), en el que se pide dar ejemplos de los diferentes tipos de variables estadísticas, con objeto de observar si el alumno diferencia estos tipos de variable y en el caso de que no lo hiciera, determinar los tipos de errores cometidos en relación con la tipología de variables. El alumno debe conocer la definición de variable continua, discreta y cualitativa (elementos intensivos) y aplicar esta definición para buscar un ejemplo

adecuado (elemento extensivo) de cada una de ellas. Creemos que uno de los errores más comunes que podremos encontrar será el de confundir entre variable cuantitativa continua y discreta.

Ítem 3. En un histograma, la frecuencia con que aparecen los valores de un intervalo está dada por:

- a. La altura de cada rectángulo.
- b. La amplitud o ancho del intervalo.
- c. El área comprendida entre el histograma y el eje, en el intervalo (**correcta**).

En este ítem se recoge información sobre el conocimiento del histograma (en este caso como elemento ostensivo) y el significado de los diferentes elementos del histograma y convenios para representar datos en el mismo (elemento intensivo). En concreto, se trata de reconocer que la frecuencia de un intervalo está representada por el área del histograma correspondiente a dicho intervalo.

Una confusión muy frecuente es pensar que la frecuencia viene dada por la altura del rectángulo, debido a que se confunde histograma y gráfico de barras. Esta confusión puede ser agravada por el software estadístico que no da la posibilidad de confeccionar histogramas con intervalos de diferente amplitud, aunque en nuestra enseñanza los alumnos tuvieron oportunidad de realizar a mano este tipo de gráfico.

Ítem 4. El propósito de un modelo matemático aplicado a cualquier ciencia es que:

- a. Nos permite visualizar la naturaleza de nuestros datos. (**correcta**)
- b. Nos permite hacer predicciones sobre datos futuros. (**correcta**)
- c. Nos proporciona la aproximación a los datos. (**correcta**)
- d. Usar una ecuación. (**correcta**)

En este caso se pretende indagar sobre la capacidad de reconocer que los modelos matemáticos se usan para aproximar datos empíricos, para predecir el valor de datos futuros y para visualizar las características generales de un conjunto de datos (elementos intensivos).

Ítem 5. La curva normal es un modelo que:

- a. Se encuentra raramente o nunca cuando se dibuja una distribución de frecuencias de datos empíricos.
- b. Está definida en términos de datos empíricos.
- c. Está definida en términos de una ecuación matemática. (**correcta**)
- d. Sirve para hacer inferencias sobre una población. (**correcta**)

Se estudia el reconocimiento de las características de la distribución normal como modelo (elemento intensivo) y su utilidad en la realización de inferencias (elemento extensivo), así como el reconocer que el modelo normal está definido por una ecuación (elemento ostensivo) y no en términos empíricos. Además se estudia la capacidad de diferenciar entre una distribución empírica y una teórica (elementos intensivos).

Ítem 6. La curva normal es:

- a. Una curva que se aproxima indefinidamente al eje horizontal pero sin cortarlo nunca. (**correcta**)
- b. Una distribución matemática o teórica. (**correcta**)
- c. Una curva con forma de campana. (**correcta**)
- d. Puede tomar valores negativos. (**correcta**)

Se trata de reconocer características específicas de la curva normal, tales como tener como asíntota al eje x, que puede tomar valores negativos, su forma de campana, así como su carácter de modelo teórico (elementos intensivos).

En estos tres últimos ítems se recogen datos relacionados con la capacidad de identificar la aplicación de un modelo matemático (elemento intensivo) cuando a través de él se hace referencia a datos empíricos. Un problema que, a priori, pensamos podría ocurrir a los alumnos sería confundir el modelo teórico con el conjunto de datos reales.

Ítem 7. ¿Cuáles de las siguientes distribuciones se aproxima mejor a una curva normal?

- a. Edades de los estudiantes de un instituto.
- b. Pesos de los alumnos varones de un instituto. (**correcta**)

- c. Número de libros publicados por los profesores de la Universidad de Granada.
- d. El coeficiente intelectual de una población de aspirantes para cubrir diversos puestos de una fábrica. (**correcta**).

Aquí, interesa analizar el conocimiento de los distintos tipos de distribuciones de variables (elemento intensivo) y la posibilidad de aproximarlas por medio de una distribución normal (elemento extensivo). En concreto, se pretende observar si el alumno comprende que el modelo de la distribución normal es aplicable a distribuciones continuas, y que podría ser también una buena aproximación en distribuciones cuantitativas discretas con un número grande de valores (elemento intensivo) y, reconocer situaciones prácticas en que la distribución normal podría ser aplicable y otras en que no (elemento extensivo).

En este caso, aparece como distractor el hecho de que se haya elegido una variable: edad, que en muchos casos, tanto en clase como en los libros, se la toma como continua, pero para el caso particular de este ítem, es posible que el alumno no tome en cuenta el contexto en el que se aplica.

Ítem 8. La distribución normal tiene muchos datos acumulados en:

- a. Los valores medios. (**correcta**)
- b. Los valores más altos.
- c. Los valores más bajos.
- d. Depende de la variable medida

Con este ítem se pretende indagar sobre el conocimiento de la idea de moda (elemento intensivo) y de la posición de los valores de la distribución con respecto a la moda en la curva normal (elemento intensivo). También se pretende que el alumno establezca relaciones entre la forma gráfica de la curva normal (elemento ostensivo) y las características de sus elementos (elementos intensivos).

Ítem 9. Para que una distribución normal quede completamente definida, basta con conocer:

- a. Mediana.
- b. Media. (**correcta**)
- c. Moda.
- d. Desviación típica. (**correcta**)

En este caso se pretende observar si se reconocen los parámetros que definen a una distribución normal (elementos intensivos). Sucede a veces, que no queda completamente claro que para definir una distribución normal sólo se necesita conocer la media y la desviación típica, en muchos casos se tiene la creencia de que es necesaria más información.

Ítem 10. La distribución normal es una distribución aplicable a:

- a. Poblaciones de datos continuos. (**correcta**)
- b. Poblaciones de datos discretos con pocos valores diferentes.
- c. Poblaciones de datos cualitativos.
- d. Poblaciones de datos ordinales

Aquí se quiere analizar si se reconoce que una distribución normal puede servir de aproximación a distribuciones de datos continuos y también, reconocer en qué casos se puede aplicar a poblaciones de datos discretos con un número grande de valores (elemento extensivo). En relación con esto último, se presenta un distractor relacionado con la variable discreta, ya que puede indicarnos una confusión entre los distintos tipos de aproximación que se puede realizar por medio de una distribución normal (elemento extensivo).

Ítem 11. La distribución normal tipificada se diferencia de una distribución normal cualquiera porque:

- a. Tiene distinta media y distinta desviación típica.
- b. Tiene siempre media 0 y desviación típica 1. (**correcta**)
- c. La distribución normal tipificada representa datos ideales mientras que la distribución normal representa datos reales.
- d. Se puede determinar a partir del cálculo de los percentiles.

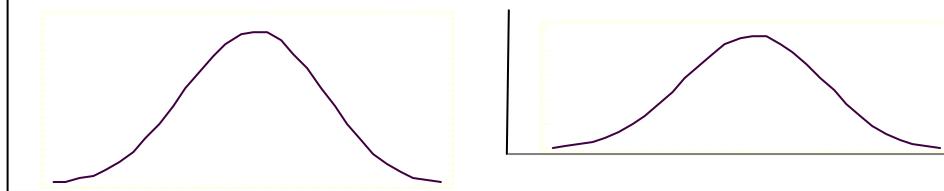
En este ítem se pretende observar si el alumno logra diferenciar entre las propiedades de una distribución normal y una distribución normal tipificada y, si comprende el concepto de distribución tipificada, así como el valor de sus parámetros (elementos intensivos) y la utilidad de la distribución normal típica.

Podría ser difícil comprender que, por lo general, la distribución normal típica sólo sirve como un instrumento "mediador" cuando se desean realizar comparaciones entre diversas observaciones de una misma población, mientras que una distribución normal cualquiera tiene otras aplicaciones, tales como aproximar a diversas distribuciones de datos reales, calcular probabilidades en tales distribuciones, ser modelo para distribuciones en el muestreo, etc.

Ítem 12. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones sobre las siguientes curvas son ciertas?

- Sólo la curva izquierda es normal
- Las dos curvas son normales pero las desviaciones típicas son diferentes (correcta)
- Las dos curvas son normales pero las medias son distintas
- El 50 % de los datos está comprendido en el intervalo ($\mu\sigma$, $\mu + \sigma$)

a -



Se observa la capacidad de reconocer la forma característica de la curva normal (elemento ostensivo), e interpretar el significado gráfico de los parámetros de la distribución normal (elementos intensivos). Además, se observa si se aplica correctamente la propiedad de los intervalos centrales (elemento intensivo). En este caso, dicha propiedad funciona como un distractor, ya que aunque se da un enunciado que está relacionado con ella, el valor del porcentaje es incorrecto.

Ítem 13. Una distribución de probabilidad establece que:

- La frecuencia acumulada está sobre la ordenada (eje vertical) y el resultado probable está sobre el eje horizontal.
- El área de la curva está sobre el eje horizontal y todo los resultados posibles están sobre la ordenada (eje vertical).
- Los límites inferior y superior de los sucesos están sobre el eje horizontal y la frecuencia está sobre la ordenada (eje vertical).
- La probabilidad viene dada por el área bajo la curva y todos los valores posibles están sobre el eje horizontal. (correcta)

Se desea observar si se reconoce el significado de los ejes en la representación gráfica de una distribución de probabilidad (elementos intensivos), ya que de acuerdo con Wainer (1992), un aspecto primordial para lograr una buena interpretación de un gráfico es identificar correctamente cada uno de sus elementos constitutivos y lo que cada uno de ellos representa. También se pretende observar el conocimiento de la gráfica de la función de densidad (elemento ostensivo) y del convenio para representar los datos en la misma (elemento intensivo).

Los datos recogidos con este ítem están íntimamente ligados a los del ítem 3, con la diferencia de que en ése ítem se considera el conocimiento del histograma y en este caso, el conocimiento de la gráfica de la función de densidad. Además, se aplica la propiedad del área bajo la curva en una distribución de probabilidad (elemento intensivo).

Ítem 14. Juan ha determinado que sus datos están normalmente distribuidos con una media de 16 y una desviación estándar de 4,2. ¿Qué más debería hacer antes de publicar los resultados de su investigación?

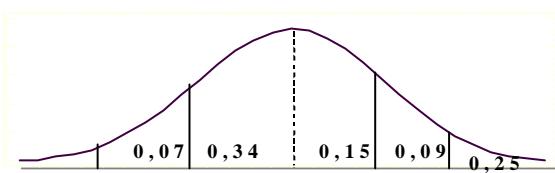
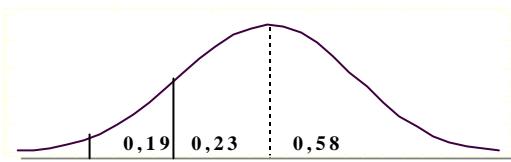
- Calcular el primer y tercer cuartil.
- Determinar todos los deciles.
- Todo lo anterior serviría como información adicional a su informe. (correcta)
- Nada, él tiene información suficiente. (correcta)

Los datos recogidos con este ítem se pueden agrupar con los del ítem 9, ya que la finalidad es la misma, porque se quiere analizar el conocimiento de los parámetros de la distribución normal (elementos intensivos) y también el conocimiento sobre estadísticos de orden tales como, los cuartiles o deciles (elementos intensivos).

Item 15. ¿Cuáles de las siguientes distribuciones es una posible distribución de probabilidad?

A -

b -



- a. La primera curva
- b. La segunda curva
- c. Ninguna (correcta)
- d. Las dos.

En este caso se aplica la propiedad del área total bajo una distribución de probabilidad (elemento intensivo), la interpretación de la representación gráfica de áreas parciales bajo la curva de densidad (elemento ostensivo), el cálculo del área total en una distribución de probabilidad (elemento actuario) y por último, la comprobación de propiedades (elemento validativo).

Item 16. El error cometido al medir una cantidad tiene una distribución normal con media 0 y desviación típica 3 cm.

- a. ¿Cuál es el valor tipificado de un error de 6 cm? (Rta. correcta: $z = 2$)
- b. Si el valor tipificado es 1, ¿cuál es el error cometido? (Rta. correcta: $e = 3$)

Con este ítem se pretende observar la capacidad de cálculo de puntuaciones tipificadas directas e inversas (elementos actuarios), el concepto de distribución normal tipificada (elemento intensivo) y las posibles representaciones simbólicas y/o numéricas que se utilicen para realizar el cálculo (elementos ostensivos), tales como la fórmula de tipificación.

Desde el ítem 17 al 21, se pide optar entre verdadero o falso y luego justificar la elección, con el fin de evaluar la capacidad de argumentación. En los cinco ítems, lo correcto era optar por Verdadero.

Item 17. En una distribución normal, el 50 % de las medidas caen por encima de la media. V/F Justifica tu respuesta.

En este caso se debe recordar la propiedad de simetría con respecto a la media de la distribución normal y la posición relativa de media y mediana en distribuciones simétricas (elementos intensivos).

Item 18. En la curva normal, la media es igual a la moda. V/F Justifica tu respuesta.

En este caso se debería reconocer la propiedad de que en una distribución normal, media, mediana y moda coinciden debido a la condición de simetría que debe cumplir una distribución normal (elementos intensivos). Además se pretende observar la capacidad de argumentación que muestre cada alumno, considerando las relaciones que pueda realizar entre las diferentes propiedades.

Item 19. La curva normal representa una distribución que se distribuye en forma simétrica con respecto a la media. V/F Justifica tu respuesta.

Se trata de reconocer y justificar la propiedad de simetría (elementos intensivo y validativo).

En estos tres ítems se pretende observar el conocimiento relacionado con las propiedades de simetría de la distribución normal (elementos intensivos) y la capacidad de argumentación

(elemento validativo) en relación con la afirmación dada.

Item 20. *Si una variable está distribuida normalmente, los casos extremos son poco frecuentes. V/F Justifica tu respuesta.*

En este caso se analizará de qué forma se reconoce el hecho de que el mayor porcentaje de datos se concentra en el intervalo modal (elemento intensivo) y también, que aunque la curva normal represente el intervalo $(-\infty, +\infty)$ (elemento ostensivo), los casos extremos son poco frecuentes. Además, se evalúa la capacidad de argumentación (elemento validativo).

También se pretende observar si el alumno reconoce que alrededor de la moda se concentra el mayor porcentaje de los datos (elemento intensivo) y que en una distribución normal los valores muy apartados de la media son escasos (elemento intensivo).

Item 21. *"Entre $\bar{x} - 3.s$ y $\bar{x} + 3.s$, en una distribución normal, se puede encontrar casi el 100 % de los datos" (\bar{x} es la media y s es la desviación estándar) V/F Justifica tu respuesta.*

Con este ítem se pretende analizar el conocimiento de la propiedad de los intervalos centrales (elemento intensivo) y reconocer que en cualquier distribución normal, aunque varíe el valor de los parámetros, la proporción de datos centrales no varía. Como en los ítems anteriores, también se recogen datos sobre la capacidad de argumentación (elemento validativo).

7.2.4. ELEMENTOS DE SIGNIFICADO EVALUADOS CON EL CUESTIONARIO. VALIDEZ DE CONTENIDO DEL CUESTIONARIO

Como indican Carmines y Zeller (1979), toda investigación en la que se recogen datos empíricos tiene un componente aleatorio. En la investigación educativa no todos los alumnos responden igual a la misma prueba ni a preguntas semejantes en las que se varíe alguna variable del enunciado. Las lógicas limitaciones de tiempo y recursos hacen necesario en el trabajo experimental sobre un cierto contenido matemático, un proceso de muestreo, intencional o aleatorio de las posibles situaciones y contextos mediante los que puede enseñarse este contenido, de los tiempos, profesores y alumnos.

Las fuentes de error en la investigación pueden ser de naturaleza determinista y aleatoria. Los sesgos, de naturaleza determinista, aunque de magnitud desconocida, se derivan de nuestros procedimientos de investigación, tanto en la selección de la muestra, como en la elaboración de los instrumentos y en la toma de datos. Suelen afectar al valor de las variables siempre en la misma dirección, no disminuyen, en general, al aumentar el tamaño de la muestra y pueden ser evitados cambiando los métodos utilizados. La ausencia de sesgo se conoce como *validez*.

Los errores aleatorios son debidos a la variabilidad del material experimental y suelen afectar al valor de las variables, unas veces por exceso y otras por defecto, por lo que, al aumentar el tamaño de la muestra pueden disminuirse y también mediante la precisión o *fiabilidad* del instrumento.

Cuando es necesario construir un instrumento para la recogida de datos, se requiere que el autor proporcione información sobre la validez y fiabilidad del instrumento. Esto significa que se brinda información sobre si el instrumento realmente mide lo que se pretende, es decir, sobre la ausencia de sesgo sistemático. En este apartado informaremos sobre la validez y en el 7.3.2 sobre la fiabilidad del cuestionario.

Hay diferentes definiciones de validez. La acepción de validez que mejor se adapta a nuestra investigación es la de validez de contenido y es una cuestión de grado, puesto que no puede reducirse a cero o uno. Para estudiar la validez de contenido el investigador debe comprobar que el instrumento constituye una muestra adecuada y representativa de los contenidos que se pretenden evaluar con él (Muñiz, 1994). Este ha sido el propósito del análisis conceptual previo basado en la determinación de los diversos elementos del significado institucional local previsto que se presenta en el capítulo V, que se tuvo en cuenta en la elaboración del instrumento. Asimismo, el análisis a priori de los ítems nos ha permitido mostrar los elementos de significado sobre los que se recoge información con cada uno de los ítems del cuestionario. Es respecto a este conjunto de elementos de significado que podemos asegurar una validez de contenido de la prueba, la que se complementará también con el contenido cubierto por la prueba de ensayo con ordenador.

Para mostrar con mayor claridad el contenido cubierto en el cuestionario, y la validez de

contenido respecto al mismo, presentamos las tablas 7.2.4.1 y 7.2.4.2, en las que describimos los elementos de significado que deberán ser aplicados en la resolución de cada uno de los ítems del cuestionario, dichos elementos forman parte del significado institucional local previsto considerado en el Capítulo V. Estas tablas se han construido teniendo en cuenta dicho significado (Capítulo V) y el análisis que hemos realizado del cuestionario en el apartado anterior.

Al comparar con las Tablas 5.3.6.1, 5.3.6.2 y 5.3.6.3, podemos ver que evaluamos los cinco tipos básicos de elementos de significado (intensivos, extensivos, ostensivos, validativos y actuativos) no sólo respecto a la distribución normal, sino también respecto a conceptos relacionados con ella.

Prácticamente todos los elementos intensivos están cubiertos con la prueba, aunque somos conscientes que con el cuestionario no alcanzamos a evaluar todos los contenidos que se desarrollaron en la secuencia de enseñanza. En particular, los elementos actuativos, validativos y ostensivos se hallan poco representados. Es por esto que con la prueba con ordenador se complementa la evaluación, de tal forma que se evalúen otros elementos tales como los actuativos que se introducen con el uso del ordenador o distintas representaciones, cuya diversidad no se puede cubrir con las preguntas del cuestionario.

También hemos tenido en cuenta controlar las principales causas que producen problemas con la validez de contenido y que, según Cook y Campbell (1979) son:

- Inadecuada explicación o definición pre-operacional de los constructos. En nuestro caso, el constructo "significado personal de la distribución normal" ha sido suficientemente explicado y definido a partir del desglose de los componentes básicos de este constructo o elementos de significado que han sido descritos en los capítulos IV, V y VI.
- Sesgo de operación única. Utilizar un solo ejemplar o medida de la variable. Nuestro cuestionario contiene una variedad de preguntas cada una de las cuales puede considerarse un indicador del significado personal de los estudiantes.
- Sesgo de un solo método: Se generalizan indebidamente resultados basados en un único método de evaluación, cuando estos resultados podrían cambiar al variar el método (por ejemplo: al hacer un examen oral en lugar de escrito). Por ello nosotros complementamos el cuestionario con la prueba realizada usando el ordenador.
- Adivinanza de las hipótesis dentro de las condiciones experimentales, por parte de los sujetos, que intentan imitar el comportamiento que se espera de ellos. Esto es difícil en nuestro caso, puesto que las preguntas son diferentes a cualquiera de las tareas realizadas en las clases teóricas y prácticas. Respecto a la prueba con ordenador, aunque la tarea es similar a las realizadas en las sesiones prácticas, el fichero de datos nunca había sido trabajado por los alumnos y la pregunta planteada induce una actividad abierta, mientras que en las actividades de las sesiones prácticas se planteaba la aplicación específica de determinados conceptos o procedimientos.
- Aprendizaje ante la evaluación. Los sujetos no desean ser evaluados realmente por el investigador, por considerar que se entromete en su intimidad, o quieren aparentar ciertas cualidades (competencia, etc) que no poseen. En nuestro caso sucede todo lo contrario, pues se motivó a los alumnos a colaborar.
- Expectativas del investigador quien puede, sin quererlo, falsear las conclusiones. Hemos tratado de disminuir este riesgo, ateniéndonos a los resultados objetivos obtenidos.
- Interacción de diversas variables independientes. Es por ello que analizamos las posibles diferencias entre cursos y tipos de alumnos, que son las principales variables independientes en nuestro estudio;
- Generalización restringida, al no haber considerado adecuadamente aspectos relevantes del problema. Para evitar este sesgo, nos limitamos a generalizar a alumnos similares a los participantes en el curso.

Tabla 7.2.4.1. Elementos de significado específicos de la distribución normal que se evalúan en el cuestionario

7.7.2.4.2. Elementos de significado específicos de la distribución normal que se evalúan en el cuestionario

7.7.24.3. Elementos de significado de conceptos relacionados con la distribución normal que se evalúan en el cuestionario

7.2.4.4. Elementos de significado de conceptos relacionados con la distribución normal que se evalúan en el cuestionario

7.3. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS SOBRE DIFICULTAD, DISCRIMINACIÓN Y FIABILIDAD

Una vez recogidos los datos, se procedió a su codificación y grabación en un fichero de datos para su posterior tratamiento estadístico con el programa SPSS. Para cada uno de los alumnos se consideró como variable el grupo (primer o segundo curso) y tipo de alumno. Respecto a éste último, se agruparon los alumnos en dos tipos diferentes:

- Alumnos de segundo, tercero o cuarto curso de empresariales o económicas, que ya habían cursado estadística al menos en una asignatura obligatoria en sus estudios previos (alumnos del tipo 1);
- Alumnos de magisterio o pedagogía o alumnos de primer curso de económicas y empresariales. Ninguno de estos alumnos había estudiado estadística con anterioridad (alumnos del tipo 2).

Nos pareció importante diferenciar estos dos tipos de alumnos que, lógicamente debieran tener diferentes resultados en la evaluación ya que como indica Garfield (1995), cuando comienza la enseñanza, los nuevos conocimientos no se construyen en el vacío, sino se asientan sobre lo que el alumno ya conoce.

Además, se consideró una variable para cada una de las respuestas a los subítems, diferenciando entre respuesta correcta e incorrecta. Para los ítems con justificación se consideraron dos variables: respuesta y justificación al ítem. Con este criterio se obtuvieron 65 variables, de modo que cada alumno podría oscilar entre 0 y 65 respuestas correctas en la prueba.

7.3.1. ÍNDICES DE DIFICULTAD Y DISCRIMINACIÓN

En primer lugar hemos estudiado los resultados en cada uno de los ítems para analizar su dificultad y discriminación. Siguiendo a Muñiz (1994), entenderemos por índice de dificultad de un ítem (ID) la proporción de sujetos que lo aciertan de aquellos que han intentado resolverlo. Es decir, si A es el número de sujetos que aciertan el ítem y N el número de sujetos que han intentado resolverlo, diremos que:

En consecuencia, cuanto mayor es el índice de dificultad significa que el ítem es más fácil para los alumnos y ha sido adquirido por una mayor proporción de los mismos.

A continuación, analizamos los resultados que se presentan en la tabla 7.3.1.1, en relación

$$ID = \frac{A}{N}$$

con el índice de dificultad que presentó cada ítem. Dicho índice varió de un 11% de respuestas correctas para el ítem 6d a un 100 % para el ítem 12 a, lo cual nos permite observar una gran variabilidad en la dificultad de los ítems y también podemos observar cómo algunos elementos de significado fueron alcanzados por todos los alumnos de la muestra.

Como hemos dicho, el ítem que resultó más difícil fue el 6d (Propiedad que afirma que la curva normal también puede tomar valores negativos. Elemento intensivo), por lo que la mayoría de los estudiantes no llegó a percibir que la distribución normal puede tomar tanto valores positivos como negativos.

Esta propiedad es mencionada en el significado institucional local previsto, en que sin embargo, este error no fue suficientemente previsto porque en las actividades no se hizo suficiente énfasis en los ejemplos de valores negativos en la distribución normal. Sólo habíamos previsto una actividad, correspondiente a la distribución normal tipificada, en la que la distribución presentaba valores positivos y negativos. Efectivamente, sólo hemos puesto en práctica esta propiedad en la actividad mencionada y luego hemos realizado actividades en las que hemos trabajado con distribuciones normales sin tipificar, pero sin incluir ejemplos de distribuciones que presentasen valores negativos.

El siguiente ítem, en orden de dificultad, es el 4d (*relación entre un modelo matemático y la ecuación que lo representa*), con un 16% de respuestas correctas.

En la planificación de nuestra secuencia de enseñanza, sólo la hemos mencionado esta propiedad sin darle demasiado énfasis. Al desarrollar la secuencia, debido al enfoque poco formal por el que hemos optado, no nos centramos en la utilización y desarrollo de fórmulas. En consecuencia, creemos que la dificultad que se presenta en este ítem se ha debido al escaso

énfasis hecho en la ecuación de la distribución normal y por lo tanto, los alumnos no han llegado a identificar el modelo con la ecuación.

En el ítem 15c (Propiedad que afirma que el área total bajo la curva de densidad es uno y que en una distribución normal el área superior e inferior a la media es el 50%. Elemento intensivo) se obtuvo solamente un 24% de respuestas correctas.

En el significado institucional local que hemos adoptado en nuestra enseñanza, se les da un especial énfasis a estas propiedades de la distribución normal. También en el desarrollo de nuestra enseñanza se ha dedicado un buen tiempo en desarrollarlas y se han planteado problemas en los que los alumnos debían aplicarlas en varias ocasiones.

Creemos que el problema en este ítem pudo haberse planteado porque los alumnos han considerado más la forma gráfica de la distribución normal y no tanto a la propiedad del área total bajo la curva. Si observamos el porcentaje de respuestas obtenido para los otros ítems de este apartado, podemos ver que el 84% da como respuesta correcta el ítem 15 a, es decir, comprueban que la suma de probabilidades es uno pero no observan la equidistribución de valores respecto a la media en una distribución simétrica. Por ello creemos que la propiedad fue bien comprendida, pero los alumnos se fijaron sólo en la gráfica dibujada sin llegar a comprobar los valores presentados de la probabilidad, con lo cual produce una respuesta incorrecta.

En los ítems 5b y 6b (*Relación entre los datos empíricos y el modelo normal. Elemento intensivo*) se ha obtenido un 29% de respuestas correctas.

Tabla 7.3.1.1. Índices de dificultad y discriminación por ítem

Ítem	Índice de dificultad	Índice de discriminación	Desviación típica	Ítem	Índice de dificultad	Índice de discriminación	Desviación típica
2a	,7778	,441	,42	10d	,9798	-,045	,14
2b	,8081	,385	,40	11a	,9394	,050	,24
2c	,9091	,379	,29	11b	,6566	,577	,48
3a	,3434	-,102	,47	11c	,5758	,198	,50
3b	,8485	,285	,36	12a	1,00	,000	,00
3c	,3030	,306	,46	12b	,8990	,250	,30
4a	,1515	,079	,36	12c	,7778	,097	,42
4b	,7475	,323	,44	12d	,7576	,116	,43
4c	,4747	,139	,50	13a	,9091	,022	,29
4d	,1616	,206	,37	13b	,9394	,187	,24
5a	,9394	,174	,24	13c	,7374	-,071	,44
5b	,2929	-,007	,46	13d	,6768	,464	,47
5c	,4848	,411	,50	14a	,9091	,319	,29
5d	,6667	,096	,47	14b	,9798	-,045	,14
6a	,5354	,162	,50	14c	,7172	,168	,45
6b	,2929	,300	,46	14d	,3131	,187	,47
6c	,8788	,174	,33	15a	,8081	,093	,40
6d	,1111	,059	,32	15b	,8485	,181	,36
7a	,5556	,194	,50	15c	,2424	,345	,43
7b	,5455	-,039	,50	15d	,7475	-,199	,44
7c	,9697	,040	,17	16 a	,4747	,662	,50
7d	,4949	,493	,50	16 b	,4141	,531	,50
8a	,8081	,314	,40	17	,7273	,476	,45
8b	,8687	,013	,34	17J	,6263	,472	,49
8c	,9798	,253	,14	18	,7475	,556	,44
8d	,8788	,359	,33	18J	,6566	,564	,48
9a	,9293	,171	,26	19	,9293	,244	,26
9b	,9394	,187	,24	19J	,7273	,357	,45
9c	,8788	,364	,33	20	,8384	,360	,37
9d	,8788	,388	,33	20J	,6162	,413	,49
10a	,7172	,648	,45	21	,8586	,265	,35
10b	,6566	,051	,48	21J	,7374	,522	,44
10c	,8687	,285	,34				

En la planificación de nuestra secuencia de enseñanza hemos considerado que es un punto importante, de allí que en la mayoría de las prácticas previstas se ha trabajado con datos empíricos y se han planteado actividades con el fin de que el alumno tenga la oportunidad de observar las diferencias entre uno y otro.

Del porcentaje de respuestas obtenido se pone de manifiesto la dificultad de diferenciar entre distribución teórica y empírica, por lo que observamos que aunque ha sido un punto en el que se ha insistido en las clases, aún sigue presentando problemas. Este hecho viene a reforzar nuestra idea sobre la dificultad en esta diferenciación que ya habíamos observado en la resolución de las actividades prácticas.

Para el ítem 3c (*Relación entre el histograma y los convenios de lectura de gráficos. Relación entre elementos ostensivos e intensivos*), ha habido un 30% de respuestas correctas. Este es uno de los problemas descritos en las investigaciones revisadas (Li y Shen, 1992). En nuestro análisis (Capítulo V) habíamos previsto que se podrían presentar problemas debido a que los alumnos generalmente no relacionan la frecuencia en un histograma con el área comprendida en el intervalo correspondiente. Y aunque en la enseñanza se hizo énfasis en esto, parece que no fue suficiente para superar la dificultad.

Dentro de los ítems que presentaron menor dificultad encontramos el ítem 12 a con un 100% de respuestas correctas, además, para los demás ítems del apartado 12 (Variación de la curva normal (elemento ostensivo) en función del valor de sus parámetros. Elementos intensivos), la tasa de respuestas correctas ha sido elevada, lo cual implica una comprensión significativa del significado de los parámetros en una curva normal.

En nuestra enseñanza habíamos previsto aplicar esta propiedad de las distribuciones normales, y efectivamente se la puso en práctica por medio de una actividad en la que se debían hacer conjeturas sobre la variación de la curva en función de sus parámetros (Actividades 5 y 6 de la tercera sesión práctica).

Con un 97 % de respuestas correctas encontramos los ítems 8c (*Relación entre la forma de la distribución normal y la frecuencia de los valores más alejados*), 10d (Reconocimiento de distribuciones que no se pueden aproximar por medio de la distribución normal) y 14 b (Reconocimiento de los estadísticos de orden).

En el primer caso se demuestra un buen conocimiento de *la relación entre la forma de la distribución normal y sus elementos constitutivos*. Esto se reafirma si observamos que los demás ítems del apartado 8 tienen una tasa de respuestas correctas elevada y que un 83% ha contestado correctamente al ítem 20 que está muy relacionado con lo que se plantea en el apartado 8.

También podemos decir que los alumnos han comprendido de forma correcta que una distribución normal no puede representar datos ordinales, lo cual se observa en el porcentaje obtenido para el ítem 10d y se puede ratificar si observamos que en el ítem 2c, en el que debían dar ejemplos de variables cualitativas, el porcentaje de respuesta ha sido del 90%.

Consideramos que en estos casos, nuestra enseñanza ha resultado efectiva, debido a que son puntos que habíamos previsto en nuestra secuencia y que efectivamente implementamos en diversas actividades.

El porcentaje de respuesta correcta para el ítem 7c (Ejemplo de variable cuantitativa discreta con pocos valores) ha sido de 96 %, lo cual parece indicar que los alumnos demuestran conocer que una distribución normal no puede aproximarse a una distribución cuya variable sea discreta con pocos valores. En nuestra enseñanza hemos destinado diversas actividades a la discriminación de variables que pueden o no逼近arse a una distribución normal.

En el desarrollo de estas actividades (segunda sesión teórica y segunda sesión práctica) se observaron muchas dificultades por parte de los alumnos cuando debían discriminar entre una variable u otra, lo cual nos hacía pensar que este ítem podría llegar a ser difícil para nuestros alumnos, pero parecía que, al menos en esta oportunidad, han salvado dicha dificultad. Esto deberá ser corroborado con el segundo instrumento de nuestra evaluación.

Los ítems 5 a (*Relación entre el modelo normal y una distribución empírica. Elementos intensivos*), 9b (Reconocimiento de la *media como parámetro* de una distribución normal. Elemento intensivo), 11 a (Parámetros de la distribución normal típica. Elementos intensivos) y 13 b (Significado de la representación gráfica de una distribución de probabilidad. Elemento intensivo) presentan un índice de dificultad de 0,93, o lo que es lo mismo el porcentaje de respuestas correctas es del 93 %. De esto, la conclusión más importante que podemos extraer es que parece que se identifican claramente los parámetros de una distribución normal,

especialmente la media.

Tanto en el significado institucional local previsto como en el observado, se ha destacado el significado de los parámetros de una distribución normal. De hecho, se ha mencionado y explicado en diversas oportunidades en la secuencia de enseñanza. También se ha explicitado este concepto en muchas de las actividades, tanto teóricas como prácticas.

En consecuencia, pareciera que los alumnos identifican correctamente a la media como uno de los parámetros con que queda definida una distribución normal (ítem 9b), lo mismo ocurre para la desviación típica (ítem 9d) aunque en un porcentaje un poco menor. Relacionado con esto, también queda claro que identifican en forma correcta que la mediana no define a una distribución normal, lo cual se ve en el hecho de que el 92 % de alumnos ha contestado correctamente a la opción 9 a.

También con un 92 % de respuestas correctas encontramos el ítem 19 (propiedad de simetría de la distribución normal con respecto a la media. Elemento intensivo). Ya hemos mencionado antes que se ha dado un especial énfasis en nuestra enseñanza a la explicación y aplicación de esta propiedad, con lo que deducimos que las actividades trabajadas en clase han servido de apoyo para que los alumnos apliquen en forma adecuada esta propiedad.

En relación con los ítems en los que se debe optar por Verdadero o Falso, vemos que a excepción del ítem 19 que ya ha sido comentado, los demás varían entre un 72 % para el ítem 17 (Propiedad de simetría con respecto a la media. Elemento intensivo) y un 85 % para el ítem 21 (Propiedad de los intervalos centrales en una distribución normal), con lo cual podríamos afirmar que los alumnos tienen un nivel más o menos adecuado de conocimiento de las propiedades geométricas y estadísticas de la distribución normal. Aunque debemos destacar que el porcentaje de respuesta es aproximadamente un 10% menor en las justificaciones de este ítem, lo cual pone de manifiesto la dificultad a la hora de brindar argumentaciones (elementos validativos).

En el caso de la propiedad de intervalos centrales podríamos decir que se percibe un cierto nivel de aprendizaje en relación con lo observado en las actividades prácticas, ya que en esas ocasiones se pudieron observar diversas dificultades en su aplicación. También debemos tener en cuenta que en este caso es una mera aplicación de la propiedad, mientras que en las actividades prácticas se requería de *la integración de diversos elementos de significado*. Este punto deberá ser revisado y tenido en cuenta en el análisis del segundo instrumento de evaluación.

En cuanto a la disminución en el porcentaje de respuestas en las justificaciones, debemos tener en cuenta que en nuestra planificación de la enseñanza no hemos previsto demasiadas actividades en las que los alumnos debieran realizar una argumentación abierta como se pide en este caso. Esto fue consecuencia de haber optado por un enfoque intuitivo y sería un punto a tener en cuenta en nuevos trabajos o en una nueva implementación de la enseñanza.

Índices de discriminación

El índice de discriminación de un ítem en una prueba es el grado en que diferencia a los examinados respecto al carácter que se pretende medir, en este caso, el grado en que el ítem discrimina respecto al conocimiento de la distribución normal. Se mide mediante el coeficiente de correlación de la puntuación de cada ítem con la puntuación total de la prueba. Un ítem discrimina mejor el nivel de comprensión de los alumnos con respecto a los conceptos relacionados con la distribución normal, cuando su correlación con respecto a la puntuación total en la prueba sea mayor. En la tabla 7.3.1.1 se presentan los índices de discriminación.

En nuestro caso, los ítems presentan una discriminación muy variable, siendo los ítems que no discriminan bien los siguientes: 3 a (*Relación entre el histograma y los convenios de lectura de gráficos. Relación entre elementos ostensivos e intensivos*), 4 a y c (*Relación entre un modelo matemático y los datos empíricos. Elementos intensivos*), 5 a, b y d (*Relación entre el modelo normal y una distribución empírica. Elementos intensivos*), 6 a, c y d (*Propiedades geométricas de la curva normal. Elementos intensivos*), 7 a, b y c (*Ejemplos de variables que no se aproximan a una distribución normal*), 8b (*Relación entre la forma de la distribución normal y los máximos valores del recorrido de la variable. Elementos intensivos*), 9 a y b (*Reconocimiento de los parámetros de la distribución normal. Elementos intensivos*), 10b y d (*Tipos de variables que no se pueden aproximar a una distribución normal. Elementos extensivos*), 11 a y c (*Diferencia entre una distribución normal y la distribución normal típica*).

Elementos intensivos), 12 a, c y d (*Relación entre la forma de la curva normal y la variación de la media y Propiedad de los intervalos centrales. Elementos intensivos*), 13 a, b y c (Significado de los ejes coordenados en la representación gráfica de una distribución de probabilidad. Elemento intensivo), 14 b, c y d (Reconocimiento de la utilidad de los parámetros de una distribución normal), 15 a, b y d (Propiedad del área total bajo la curva en una distribución de probabilidad. Elemento intensivo). Son justamente los ítems que no discriminan, en los que ha habido un mayor grado de acuerdo en la respuesta y que resultan igualmente fáciles o difíciles a todos los alumnos.

Por otro lado, los 34 ítems restantes discriminan bien. Si nos centramos en los elementos de significado a que estos ítems pertenecen, los podemos agrupar de la siguiente forma:

- *Elementos Extensivos*: Ajuste de un modelo (ítems 2, 7 y 10). Uso en inferencia (ítem 5). Aproximación de distribuciones discretas (ítems 7 y 9)
- *Elementos Ostensivos*: Gráfica de la distribución normal (ítems 5 y 13). Ecuación (ítem 5). Representaciones simbólicas: $Z = (X-\mu)/\sigma$ (ítem 16); μ , σ , x , s y $(x \pm k.s)$ (ítem 21)
- *Elementos Actuativos*: tipificación (ítems 11 y 16)
- *Elementos Intensivos*: Distribución como modelo (ítem 5). Distribución empírica o teórica (ítem 5). Modelo matemático y su utilidad (ítem 5). Tipos de variables (ítems 2, 7 y 10). Parámetros en la distribución normal (ítem 9). Distribución normal tipificada (ítems 11 y 16). Parámetros de la distribución normal (ítem 11). Función de densidad (ítem 13). Probabilidad en un intervalo (ítem 20). Área bajo la curva (ítem 13). Ejes coordinados (ítem 13). Simetría en la distribución normal (ítem 17). Posición de media, mediana y moda (ítem 18). Propiedad de los intervalos centrales (ítems 20 y 21).
- *Elementos Validativos*: Aplicación de una propiedad (ítems 16, 17, 18, 20 y 21)

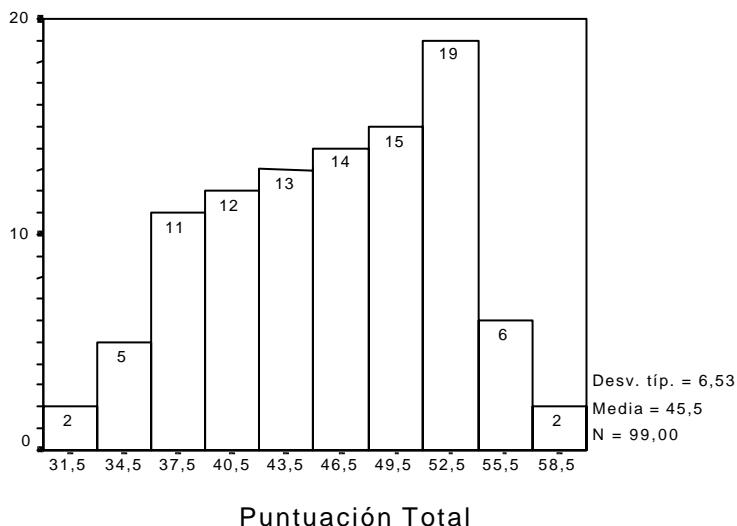
Puntuación total

Además de estudiar la puntuación en cada ítem, es interesante estudiar el número de respuestas correctas de cada estudiante, que nos da una idea de la proporción de elementos de significado adquiridos en relación con los elementos pretendidos por la institución al elaborar el instrumento de evaluación. Para estudiar esto, se puntuó con 1 cada respuesta correcta, sumando todas estas puntuaciones, con lo que cada alumno obtuvo una puntuación total que podría variar entre 0 y 65 respuestas correctas. A continuación, en la Figura 7.3.1.1, se presenta un histograma de frecuencias de alumnos con las distintas puntuaciones totales obtenidas.

Observamos que las puntuaciones efectivamente obtenidas por los alumnos varían de 30 a 57 puntos (aunque a efectos de mejor visualización del histograma hemos tomado un rango que va de 30 a 60 puntos), siendo el total de alumnos igual a 99. Este resultado es bastante bueno, teniendo en cuenta que 32 es la mitad de los ítems, lo que quiere decir que prácticamente todos los alumnos han resuelto correctamente al menos la mitad de la prueba. La media de la puntuación ha sido 45.5, lo que significa que el alumno típico resuelve correctamente alrededor del 70 % de las preguntas planteadas, aunque ninguno llegó a resolver correctamente toda la prueba. La moda es 52.5 y corresponde a una frecuencia de 19 alumnos, que representa el 20% de los que resolvieron el cuestionario.

Creemos, en consecuencia que podemos decir que la enseñanza se puede valorar positivamente, al menos para el rango de elementos de significado evaluados en el cuestionario, considerados globalmente y para un nivel intermedio de lectura de datos. Teniendo en cuenta que 48 alumnos (aproximadamente la mitad) estudiaban estadística por primera vez, y también la gran cantidad de conceptos previos referidos a la estadística descriptiva univariante que hay que dominar para poder alcanzar el significado pretendido de la distribución normal, pensamos que los resultados son bastante razonables.

Figura 7.3.1.1. Distribución del número de respuestas correctas en la prueba



7.3.2. FIABILIDAD DE LA PRUEBA

Según Thorndike (1989), el proceso de medida se propone ligar ciertos conceptos abstractos a indicadores empíricos, en nuestro caso, relacionar el significado personal de los alumnos participantes con las respuestas proporcionadas en el cuestionario. El análisis de datos se hace sobre las respuestas, ya que son observables. El interés teórico, sin embargo, es el concepto subyacente (significado personal) que no podemos observar directamente, pero que tratamos de inferir a partir de las respuestas.

Cuando la relación entre los indicadores empíricos (respuestas) y los conceptos subyacentes (significado personal) es fuerte, el análisis de los indicadores nos permite hacer inferencias útiles sobre los conceptos teóricos y evaluar nuestras hipótesis previas sobre los mismos. Para permitir este proceso, un indicador ha de ser fiable. Llamamos fiabilidad a la extensión por la cual un experimento, test u otro procedimiento de medida produce los mismos resultados en ensayos repetidos. La medida siempre produce un cierto error aleatorio, pero dos medidas del mismo fenómeno sobre un mismo individuo suelen ser consistentes. La fiabilidad es esta tendencia a la consistencia o precisión del instrumento en la población medida (Bisquerra, 1989).

Entre los diversos métodos de estimar la fiabilidad de un cuestionario, hemos tomado, en primer lugar, el método de *consistencia interna*. Su cálculo se basa en el análisis relativo de la varianza de la puntuación total del cuestionario y de las varianzas de los ítems particulares y el coeficiente que lo mide es el alfa de Cronbach. El coeficiente alfa para un test de N ítems es igual al valor medio de todos los coeficientes de fiabilidad que se obtendrían con el método de las dos mitades si se utilizasen todas las combinaciones de ítems. También es una cota inferior de la que se obtendría por el método de la prueba repetida si se comparase el test dado y otro cualquiera paralelo de igual cantidad de ítems (Carmines y Zeller, 1979).

Hemos obtenido un valor $\alpha = 0,7663$ para el coeficiente de Cronbach (Valor tipificado = 0,7552), por lo que consideramos que este valor es suficientemente elevado para nuestro propósito, teniendo en cuenta que la dificultad de los ítems es bastante variable, pero que esta variabilidad mejora la validez global del cuestionario. Una prueba muy homogénea mide la misma habilidad en todas sus partes y tiene una alta coherencia interna, pero si, como en nuestro caso, la prueba es heterogénea no hay que esperar un índice de consistencia interna muy alto.

Adicionalmente hemos calculado dos coeficientes de generalizabilidad para el cuestionario. La teoría de la generalizabilidad extiende la teoría clásica de la medición, según Feldt y Brennan (1991) y permite, por medio del análisis de varianza, analizar diferentes fuentes de error en un proceso de medida. Para Santisteban (1990) el núcleo de esta teoría es el considerar diferentes fuentes de error en las puntuaciones observadas, que pueden ser los mismos sujetos, las preguntas o las condiciones que se aplican.

El coeficiente de generalizabilidad se define con el cociente (1), es decir como cociente entre la varianza verdadera en las puntuaciones de la prueba y la varianza observada que es

$$(1) \quad G = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2 + \sigma_e^2}$$

suma de la varianza verdadera más la varianza debida al error aleatorio. Según Thorndike (1989), la varianza de error depende de cómo definimos el universo de puntuaciones verdaderas y en el análisis de generalizabilidad se consideran ciertas fuentes como parte de la varianza de error en unas condiciones y otras fuentes en otras.

En nuestro caso diferenciaremos dos fuentes para el error aleatorio y calcularemos, por tanto, dos coeficientes de generalizabilidad: la generalizabilidad a otros alumnos de la misma prueba y la generalizabilidad de otros problemas similares a los incluidos en la prueba a los mismos alumnos.

Para realizar este cálculo, hemos obtenido, en primer lugar a partir del análisis de escalas del programa SPSS y del modelo de estimación de Dunn y Clarck (1987) para el análisis de varianza de medida repetida, los siguientes componentes de la varianza:

Varianza dentro de los sujetos $\sigma_s^2 = 0.0071892$

Varianza dentro de los ítems $\sigma_i^2 = 0.06413$

Varianza residual $\sigma_e^2 = 0.1430$

Sustituyendo ahora estos componentes de varianza en la fórmula (1) y teniendo en cuenta los tamaños de muestra (65 problemas y 99 alumnos), según si consideramos como fuente de variación los problemas o los alumnos, obtenemos las siguientes estimaciones:

- *Generalizabilidad respecto a otros ítems:*

$$G_i = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_e^2 / 65} = 0.7656$$

Obtenemos un valor próximo al del coeficiente Alfa, lo cual es lógico, puesto que el coeficiente de generalizabilidad a otros ítems coincide con él, ya que se considera los alumnos fijos y la única fuente de variación es la debida a variabilidad entre ítems. Las pequeñas diferencias son debidas a redondeos en los cálculos. Esta es la generalizabilidad de nuestros resultados si a los mismos alumnos les pasáramos otra prueba del mismo número de ítems,

$$G_s = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \sigma_e^2 / 99} = 0.9764$$

variando el enunciado de los mismos. Puesto que la prueba evalúa contenidos heterogéneos, consideramos que el valor es suficiente.

- *Generalizabilidad a otros alumnos:*

Obtenemos un valor muy alto, para la generalizabilidad a otros alumnos de la misma prueba, lo que indica una muy alta posibilidad de generalizar nuestros resultados a otros alumnos, conservando el mismo cuestionario. Por supuesto, en la hipótesis de que se conserva el tipo de alumno y la enseñanza recibida.

7.3.3. DIFERENCIAS ENTRE CURSOS

Una vez estudiados los resultados globales, hemos analizado la diferencia entre los alumnos que participaron en el curso, el primero y segundo año. Puesto que en el segundo año se hicieron ligeros cambios en la enseñanza y se proporcionó a los alumnos un apunte escrito de Statgraphics, era de esperar alguna variación en los resultados y, en general, algo de mejora. Para estudiar este punto, en las tablas 7.3.3.1 a 7.3.3.6, se muestra el porcentaje de respuestas correctas dadas a cada uno de los ítems en el curso '98-'99 y en el '99-2000.

En la mayoría de los ítems no hay grandes variaciones entre ambos cursos, a excepción de 9 ítems en los que se aplican los siguientes elementos de significado:

- *Ostensivos:* Ecuación como representación de un modelo (ítem 4d). Gráfica de la función normal (ítems 5b, 6b, 6d, 13d).
- *Actuativos:* Tipificación (ítem 11b). Cálculo de áreas o probabilidades (ítems 13d, 15 a).

- *Intensivos:* Variables estadísticas y aleatorias, tipos de variables (ítem 2b). Distribución teórica o empírica (ítems 4d, 5b, 6b, 6d). Modelo matemático y su utilidad (ítems 4d, 5b, 6b, 6d). La distribución normal como modelo (ítems 5b, 6b, 6d). Simetría en la distribución normal (ítems 6d, 15 a). Valores de la distribución normal (ítem 6d). Distribución normal tipificada (ítem 11b). Parámetros de la distribución normal (ítems 11b, 14c). Probabilidad de valores en una distribución de probabilidad (ítem 13d). Áreas o intervalos por debajo de la media en una distribución simétrica (ítem 15 a). Probabilidad de valores en un intervalo de la distribución normal (ítems 15 a, 20).
- *Validativos:* Aplicación de propiedades (ítems 15 a). Comprobación de propiedades (ítems 15 a).

Tabla 7.3.3.1. Diferencias entre cursos en el porcentaje de respuestas correctas dadas a los ítems 2, 3 y 4

Curso	Parámetros	Ítem									
		2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b	4c	4d
1	Media	,78	,70	,87	,35	,81	,24	,19	,69	,48	,093
	Desv. típ.	,42	,46	,34	,48	,39	,43	,39	,47	,50	,29
2	Media	,78	,93	,96	,31	,89	,38	,11	,82	,47	,24
	Desv. típ.	,42	,25	,21	,47	,32	,49	,32	,39	,50	,43

Tabla 7.3.3.2. Diferencias entre cursos en el porcentaje de respuestas correctas dadas a los ítems 5, 6 y 7

Curso	Parámetros	Ítem											
		5a	5b	5c	5d	6a	6b	6c	6d	7a	7b	7c	7d
1	Media	,93	,19	,50	,67	,54	,20	,87	,0741	,63	,48	,98	,44
	Desv. típ.	,26	,39	,50	,48	,50	,41	,34	,26	,49	,50	,14	,50
2	Media	,96	,42	,47	,67	,53	,40	,89	,16	,47	,62	,96	,56
	Desv. típ.	,21	,50	,50	,48	,50	,50	,32	,37	,50	,49	,21	,50

Tabla 7.3.3.3. Diferencias entre cursos en el porcentaje de respuestas correctas dadas a los ítems 8, 9 y 10

Curso	Parámetros	Ítem											
		8a	8b	8c	8d	9a	9b	9c	9d	10a	10b	10c	10d
1	Media	,85	,96	,83	,94	,91	,91	,91	,67	,72	,81	,96	,85
	Desv. típ.	,36	,19	,38	,23	,29	,29	,29	,48	,45	,39	,19	,36
2	Media	,89	1,00	,93	,91	,98	,84	,84	,78	,58	,93	1,00	,89
	Desv. típ.	,32	,00	,25	,29	,15	,37	,37	,42	,50	,25	,00	,32

En los ítems mencionados se presenta alguna variación mostrando que para estos elementos siempre ha habido alguna mejoría en el segundo curso, aunque pequeña. Pensamos que la mejoría se debe a la reelaboración de los apuntes, el disponer de un cañón de proyección para las clases teóricas y nuestra mayor experiencia en el tema.

Tabla 7.3.3.4. Diferencias entre cursos en el porcentaje de respuestas correctas dadas a los ítems 11, 12 y 13

Curso	Parámetros	Ítem											
		11a	11b	11c	12a	12b	12c	12d	13a	13b	13c	13d	
1	Media	,91	,57	,61	1,00	,85	,74	,70	,93	,93	,78	,61	
	Desv. típ.	,29	,50	,49	,00	,36	,44	,46	,26	,26	,42	,49	
2	Media	,98	,76	,53	1,00	,96	,82	,82	,89	,96	,69	,76	
	Desv. típ.	,15	,43	,50	,00	,21	,39	,39	,32	,21	,47	,43	

Como contrapartida, ha habido ítems en los que el porcentaje de respuestas correctas ha disminuido. En ellos se contemplan los siguientes elementos de significado:

- *Extensivos:* Aproximación a la distribución normal de distribuciones discretas (ítem 7 a). Ajuste de un modelo (ítem 10 a).
- *Ostensivos:* Área total en la curva de densidad (ítems 15b y d). Curva de densidad (ítems 15

- b y d).
- *Actuativos*: Cálculo de áreas o probabilidades (ítems 15b y d).
 - *Intensivos*: Tipos de variables que se aproximan a la distribución normal (ítems 7 a, 10 a). Parámetros de la distribución normal (ítem 14d). Probabilidad de valores en un intervalo de una distribución de probabilidad (ítems 15 b y d). Área total en una curva de densidad (ítems 15 b y d)
 - *Validativos*: Aplicación de propiedades (ítems 15 b y d, 17J). Comprobación de propiedades (ítems 15b y d)

En conclusión, no podríamos afirmar que se haya producido una mejoría notable en el segundo curso porque como hemos descrito antes, los alumnos de éste curso han presentado un mejor rendimiento en algunos elementos, mientras que en otros se han mantenido igual o incluso han disminuido con respecto al primero, aunque en general, ha habido más ítems donde mejoran. Esto puede ser consecuencia de que, aunque se trató de mejorar la redacción del apunte y de las actividades sobre la distribución normal y se agregó un apunte sobre el manejo del programa STATGRAPHICS, se produjeron muchos inconvenientes con la utilización de los ordenadores de la sala de informática, lo cual influyó negativamente en el desarrollo de la secuencia que se había planificado.

Tabla 7.3.3.5. Diferencias entre cursos en el porcentaje de respuestas correctas dadas a los ítems 14, 15 y 16

Curso	Parámetros	Ítem									
		14a	14b	14c	14d	15a	15b	15c	15d	16a	16b
1	Media	,91	1,00	,63	,43	,74	,91	,28	,83	,44	,39
	Desv. típ.	,29	,00	,49	,50	,44	,29	,45	,38	,50	,49
2	Media	,91	,96	,82	,18	,89	,78	,20	,64	,51	,44
	Desv. típ.	,29	,21	,39	,39	,32	,42	,40	,48	,51	,50

Tabla 7.3.3.6. Diferencias entre cursos en el porcentaje de respuestas correctas dadas a los ítems 17, 18, 19, 20 y 21

Curso	Parámetros	Ítem									
		17	17j	18	18j	19	19j	20	20j	21	21j
1	Media	,74	,69	,72	,63	,89	,70	,76	,59	,83	,69
	Desv. típ.	,44	,47	,45	,49	,32	,46	,43	,50	,38	,47
2	Media	,71	,56	,78	,69	,98	,76	,93	,64	,89	,80
	Desv. típ.	,46	,50	,42	,47	,15	,43	,25	,48	,32	,40

Diferencias en puntuaciones totales

Parece, en consecuencia, que no hay una diferencia clara cuando analizamos los ítems uno a uno, pero sería necesario dar un índice global de la diferencia entre los cursos. Por ello hemos considerado conveniente comparar formalmente la puntuación total en el cuestionario en el primer y segundo año para aportar una medida del número de elementos de significado correctamente comprendidos por los estudiantes en los dos cursos.

Por tanto hemos calculado los estadísticos correspondientes a la puntuación total obtenida en el cuestionario por cada curso ('98-'99 y '99-2000). Como podemos apreciar en la tabla 7.3.3.7, el promedio de respuestas correctas ha mejorado levemente en el segundo año, como consecuencia de algunas mejoras que hemos introducido en nuestra secuencia de enseñanza (ver Capítulo VI), siendo las desviaciones típicas en los dos grupos muy similares.

Tabla 7.3.3.7. Estadísticos de la puntuación total de cada curso

Puntuación Total	Curso	N	Media	Desviación típica	Error típico de la media
	1	54	44,37	6,77	,92
	2	45	46,76	6,05	,90

También podemos observar en el gráfico múltiple de caja (Figura 7.3.3.1) que la puntuación total del curso 1 (curso '98-99) varía de 30 a 57 puntos, mientras que para el curso 2

(curso '99-2000), el recorrido va de 35 a 57 puntos, con lo cual vemos que el segundo año aumenta el número mínimo de preguntas correctamente contestadas. También vemos que el 50% central de la distribución de la puntuación total y la mediana del segundo curso es algo superior al mismo intervalo del curso 1.

Figura 7.3.3.1. Diagrama de caja múltiple

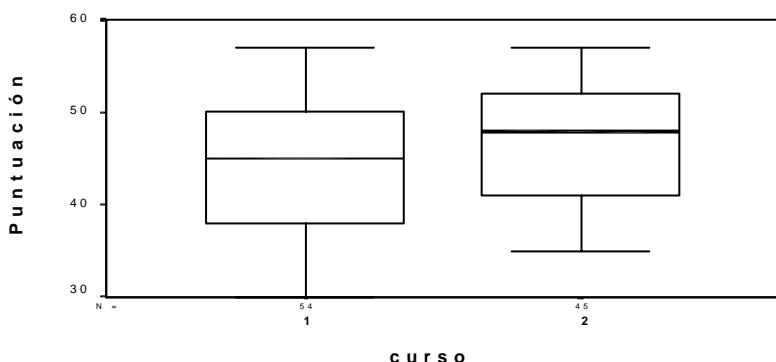


Tabla 7.3.3.8. Prueba de muestras independientes

Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias						
F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típico de la diferencia	Intervalo de confianza para la diferencia	
							Inferior	Superior
,267	,607	-1,830	97	,070	-2,39	1,30	-4,97	,20

Estos resultados nos han sugerido realizar un contraste T de diferencia de medias en muestras independientes, cuyos resultados se muestran en la tabla 7.3.3.8. Puesto que el contraste de igualdad de varianzas (Prueba de Levene) no es estadísticamente significativo, asumimos que las varianzas de las poblaciones son semejantes. Con esta hipótesis hemos realizado la prueba T, cuya significación es 0,07, calculando también el intervalo de confianza del 95% de confianza para la diferencia de medias.

Observamos que sin llegar a ser estadísticamente significativo, el valor p (0,07) y el intervalo de confianza (muy dentro de los valores negativos) sugiere una ligera mejora de la instrucción el segundo año, sin ser tal que obligue a un análisis separado de los datos en el resto del trabajo. Estos resultados también contribuyen a aumentar la generalizabilidad de nuestro estudio al sugerir que los resultados se repiten y mejoran levemente de un año a otro y por ello hace más plausible que vuelvan a mantenerse en futuras repeticiones del experimento.

7.3.4. DIFERENCIAS ENTRE TIPOS DE ALUMNOS

Para cumplir con el último objetivo que nos hemos propuesto al construir el cuestionario, estudiaremos en esta sección las diferencias entre los dos tipos de alumnos que componen la muestra, entre los que, a priori, cabía esperar una mayor diferencia de resultados. En las tablas 7.3.4.1 a 7.3.4.6 se muestra la diferencia en el porcentaje de respuestas correctas dadas a cada uno de los ítems por cada tipo de alumno.

Tabla 7.3.4.1. Diferencias entre tipo de alumnos en el porcentaje de respuestas correctas dadas a los ítems 2, 3 y 4

Tipo	Parámetros	Ítem									
		2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b	4c	4d
1	Media	,90	,82	,98	,25	,92	,33	,14	,84	,49	,24
	Desv. típ.	,30	,39	,14	,44	,27	,48	,35	,37	,50	,43
2	Media	,65	,79	,83	,42	,77	,27	,17	,65	,46	,083
	Desv. típ.	,48	,41	,38	,50	,42	,45	,38	,48	,50	,28

Tabla 7.3.4.2. Diferencias entre tipo de alumnos en el porcentaje de respuestas correctas dadas a los ítems 5, 6 y 7

Tipo	Parámetros	Ítem											
		5a	5b	5c	5d	6a	6b	6c	6d	7a	7b	7c	7d
1	Media	,94	,25	,59	,71	,61	,35	,96	,098	,51	,59	,96	,55
	Desv. típ.	,24	,44	,50	,46	,49	,48	,20	,30	,50	,50	,20	,50
2	Media	,94	,33	,38	,63	,46	,23	,79	,13	,60	,50	,98	,44
	Desv. típ.	,24	,48	,49	,49	,50	,42	,41	,33	,49	,51	,14	,50

Tabla 7.3.4.3. Diferencias entre tipo de alumnos en el porcentaje de respuestas correctas dadas a los ítems 8, 9 y 10

Tipo	Parámetros	Ítem											
		8a	8b	8c	8d	9a	9b	9c	9d	10a	10b	10c	10d
1	Media	,84	,86	,98	,96	,92	,98	,90	,92	,80	,65	,94	1,00
	Desv. típ.	,37	,35	,14	,20	,27	,14	,30	,27	,40	,48	,24	,00
2	Media	,77	,87	,98	,79	,94	,90	,85	,83	,62	,67	,79	,96
	Desv. típ.	,42	,33	,14	,41	,24	,31	,36	,38	,49	,48	,41	,20

Tabla 7.3.4.4. Diferencias entre tipo de alumnos en el porcentaje de respuestas correctas dadas a los ítems 11, 12 y 13

Tipo	Parámetros	Ítem											
		11a	11b	11c	12a	12b	12c	12d	13a	13b	13c	13d	
1	Media	,94	,82	,59	1,00	,92	,73	,75	,94	,96	,76	,78	
	Desv. típ.	,24	,39	,50	,00	,27	,45	,44	,24	,20	,43	,42	
2	Media	,94	,48	,56	1,00	,87	,83	,77	,87	,92	,71	,56	
	Desv. típ.	,24	,50	,50	,00	,33	,38	,42	,33	,28	,46	,50	

Tabla 7.3.4.5. Diferencias entre tipo de alumnos en el porcentaje de respuestas correctas dadas a los ítems 14, 15 y 16

Tipo	Parámetros	Ítem									
		14a	14b	14c	14d	15a	15b	15c	15d	16a	16b
1	Media	,96	,96	,73	,37	,76	,88	,24	,69	,71	,61
	Desv. típ.	,20	,20	,45	,49	,43	,33	,43	,47	,46	,49
2	Media	,85	1,00	,71	,25	,85	,81	,25	,81	,23	,21
	Desv. típ.	,36	,00	,46	,44	,36	,39	,44	,39	,42	,41

Observando los resultados, podemos decir que en general, los alumnos que habían estudiado estadística con anterioridad han tenido un mejor rendimiento que aquellos alumnos que no lo habían hecho previamente, como era de esperar. Los alumnos que han estudiado antes estadística sobresalen específicamente en aquellos ítems donde deben realizar argumentaciones para validar sus afirmaciones, en los 5 ítems en los que debían proporcionar justificaciones los alumnos del tipo 1 han tenido un rendimiento mejor.

Tabla 7.3.4.6. Diferencias entre tipo de alumnos en el porcentaje de respuestas correctas dadas a los ítems 17, 18, 19, 20 y 21

Tipo	Parámetros	Ítem									
		17	17j	18	18j	19	19j	20	20j	21	21j
1	Media	,84	,75	,78	,75	,94	,82	,90	,71	,90	,86
	Desv. típ.	,37	,44	,42	,44	,24	,39	,30	,46	,30	,35
2	Media	,60	,50	,71	,56	,92	,62	,77	,52	,81	,60
	Desv. típ.	,49	,51	,46	,50	,28	,49	,42	,50	,39	,49

Además de estos ítems, se destacan otros, en los que se aplican los siguientes elementos de significado:

- *Extensivos*: Aproximación de la distribución normal a distribuciones de variables continuas (ítem 10 a). Explicamos la diferencia por la mayor experiencia de estos alumnos en el trabajo con ejemplos de distribución normal.
- *Ostensivos*: Histograma (ítem 3 b). Ecuación representativa de la función de densidad

- normal (ítem 5 c). Igualmente los alumnos con conocimientos previos estaban familiarizados con la representación en histogramas y el uso de la ecuación de la distribución normal es frecuente en los cursos tradicionales como los hechos por estos alumnos previamente (mientras que en nuestra enseñanza el uso de la ecuación fue escaso).
- *Actuativos:* Tipificación (ítems 16 a y 16 b). Como ya hemos señalado en los cursos tradicionales seguidos por los alumnos en años anteriores la tipificación se ejercita bastante como parte de la lectura de las tablas de la distribución. En nuestro caso sólo se usa la tipificación en la tercera sesión teórica.
 - *Intensivos:* Tipos de variables que no pueden ser aproximadas por una distribución normal (ítem 10 c). Convenio de lectura de gráficos (ítem 3 b). Propiedades de un modelo matemático (ítem 4 b). Parámetros de la distribución normal tipificada (ítem 11 b). Todos ellos son puntos bastante abstractos, en los que los alumnos con estudio previo habían tenido ya un entrenamiento.
 - *Validativos:* Justificación de las propiedades geométricas y estadísticas de las distribuciones normales (ítems 17J, 18J, 19J, 20J y 21J). Este punto también se relaciona con la capacidad de argumentación que fue mayor en los alumnos con conocimientos previos.

Podemos ver que los ítems en los que han tenido mejor rendimiento los alumnos con estudios previos de estadística, han sido aquellos en los que se requería de un mayor nivel de formalización o de argumentación. Un ejemplo de esto son los ítems en los que se debían justificar las respuestas, o aquellos en los que se trabajaba con elementos correspondientes a la distribución normal tipificada, los cuales no sólo requieren de otro nivel de trabajo sino que además, en nuestra enseñanza no se había hecho énfasis debido al carácter intuitivo que quisimos darle.

Por otra parte, aún con la diferencia en formación y capacidad inicial, hay una serie de ítems en los que los resultados son muy similares. Esta similitud entre los resultados se puede apreciar especialmente en los siguientes elementos de significado:

- *Extensivos:* Aproximación de distribuciones discretas (ítems 4c, 7c, 10b). Uso en inferencia (ítems 4 a, 5 a). Ajuste de un modelo (ítem 4 c). Estos son tipos de problemas ampliamente usados en nuestra secuencia de enseñanza.
- *Ostensivos:* Histograma (ítems 3c). Representación del área en un histograma (ítem 3c). Gráfica de la función de densidad (ítems 5 a, 6d, 8b, 8c, 12 a, 12d, 15c). Expresión simbólica: $(\mu-k.\sigma; \mu+k.\sigma)$ (ítem 12d). Curva de densidad (ítems 12 a, 12d, 15c, 19).
- *Actuativos:* tipificación (ítems 11 a, 11c). Comparación visual (ítems 12 a). Cálculo de áreas o probabilidades (ítem 15c).
- *Intensivos:* Tipos de variables (ítems 2b, 7c, 10b, 10d). Tipos de frecuencias (ítem 3c). Convenios de lectura de los elementos de un gráfico (ítem 3c, 15c, 19). Distribución empírica o teórica (ítems 4 a, 4c, 5 a, 6d). Modelo matemático y su utilidad (ítems 4 a, 4c, 5 a, 6d). La distribución normal como modelo (ítems 5 a, 6d). Función de densidad normal, función de distribución (ítems 6d, 8b, 8c, 12 a, 12d, 15c, 19). Simetría en la distribución normal (ítems 6d, 19). Valores y tipos de variables en la distribución normal (ítems 6d, 7c, 10b, 10d). Unimodalidad y posición de la moda en la distribución normal (ítems 8b, 8c). Parámetros de la distribución normal (ítems 9 a, 11 a, 11c, 12d, 14c). Distribución normal tipificada (ítems 11 a, 11c). Propiedad de los intervalos centrales en la distribución normal (ítem 12d). Estadísticos de orden (ítem 14b). Probabilidad de un valor en una distribución de probabilidad (ítem 15c). Área total en una curva de densidad (ítem 15c).
- *Validativos:* Aplicación de una propiedad (ítem 15c). Comprobación de una propiedad (ítem 15c).

Destacamos el problema, que aparece por igual en los dos grupos, cuando llega el momento de decidir cuáles de estos tipos de variables puede aproximarse por medio de una distribución normal (elemento extensivo). Esto se puede apreciar si observamos que el porcentaje de respuestas correctas para las distintas opciones del ítem 7 (Identificación de variables que se aproximan a una distribución normal) disminuye considerablemente con respecto a los del ítem 2.

Los alumnos no comprenden que un modelo continuo pueda usarse para trabajar con distribuciones de variables discretas con pocos valores diferentes. En este caso, parecen enfrentarse a sus concepciones o conocimientos previos y se produce un conflicto entre los que

ellos han estudiado sobre la clasificación entre distribuciones de variables continuas o discretas. Aquí, podríamos afirmar que, en un número bastante elevado de casos (aproximadamente el 50% de los alumnos), parecieran no distinguir la utilidad del modelo para aproximar datos discretos. Lo anterior coincidiría con algunas conclusiones expresadas por Hawkins, Jolliffe y Glickman (1992).

Finalmente, hubo algunos ítems, aunque en menor cantidad, en que los resultados son ligeramente mejores (con muy poca diferencia) en el grupo 2:

- ◆ *Elementos extensivos*: Uso en inferencia (ítem 5b), aproximación de distribuciones discretas, valores y tipos de variables en la distribución normal (ítem 7 a).
- ◆ *Elementos ostensivos*: Área en un histograma, frecuencias y convenios de interpretación de gráficos (ítem 3 a); gráfica de la función de densidad normal, comparación visual (ítem 12c).
- ◆ *Elementos intensivos*: distribución normal como modelo, distribución empírica o teórica (ítem 5b), probabilidad total en una función de densidad (ítems 15a y 15d).

Es satisfactorio que muchos de los elementos de significado contemplados en la prueba hayan sido alcanzados por un porcentaje amplio de alumnos sin instrucción previa en estadística y con una base matemática e informática muy débil. Esto puede apreciarse en el hecho de que en más de la mitad de los ítems (34 de un total de 65) se ha obtenido un promedio de respuestas correctas mayor del 70% para los alumnos del tipo 2. Aunque, debemos acotar que, a pesar de que el porcentaje de respuestas ha sido superior al 70%, creemos que los alumnos sólo han recordado las propiedades debido a que demuestran tener problemas cuando se pide justificar.

En este sentido, coincidimos con los resultados obtenidos en la investigación de Méndez (1991), en la cual también se trabaja con dos tipologías de alumnos de características similares a los nuestros y en el que tampoco se encontraron diferencias muy marcadas. En dicho trabajo, el autor encontró en algunos ítems una mayor comprensión en los alumnos con conocimientos previos de estadística, pero esta comprensión no era demasiado profunda, excesivamente formal y con poca intuición. Las mismas conclusiones fueron obtenidas por Wilensky (1997).

Creemos, en consecuencia, que el uso de los ordenadores y la aproximación intuitiva a los conceptos permite realizar el paso del análisis de datos a la inferencia, a alumnos con capacidades muy variables, y dotarles, al menos, de una comprensión intuitiva de los conceptos estadísticos. Por supuesto, esta comprensión no será suficiente para hacerlos autónomos en el uso de la estadística, pero sí para poder acudir a un consultor y trabajar en colaboración con los estadísticos en sus futuros proyectos y trabajos profesionales.

Diferencia en puntuación total

En esta ocasión, el análisis separado de los ítems parece indicar una diferencia en el aprendizaje de los dos tipos de alumnos. Para poder estudiar formalmente esta hipótesis, de nuevo hemos analizado la puntuación total en la prueba, separándola ahora según el tipo de alumno. En la tabla 7.3.4.7 y en la figura 7.3.4.1, se resumen los estadísticos y medidas de posición correspondientes a la puntuación total de los dos tipos de alumnos. Podemos ver que aquellos que han realizado cursos previos de estadística han tenido un mejor rendimiento, lo cual se manifiesta en el hecho de que la media del tipo 1 es mayor, también el recorrido de la puntuación total del tipo 1 va de 37 a 57, mientras que para el tipo 2 varía de 30 a 54.

Tabla 7.3.4.7. Estadísticos de la puntuación total de cada tipo de alumno

Puntuación Total	Tipo de alumnos	N	Media	Desviación típica	Error típico de la media
	1	51	48,16	5,45	,76
	2	48	42,58	6,41	,92

También la mediana del tipo 1 es visiblemente superior y el 50 % central de la puntuación total de este grupo está comprendido en el intervalo (44; 51), y el intervalo correspondiente para el tipo 2 es (38; 47).

Finalmente, hemos realizado un contraste de la diferencia entre puntuaciones. Como en el caso anterior, la prueba F de diferencias de varianza no da un resultado estadísticamente significativo y, en consecuencia, asumimos varianzas iguales en las poblaciones. A

continuación se realiza la prueba T de diferencia de medias en muestras independientes que da un resultado altamente significativo ($p < 0,001$). El intervalo de confianza para la diferencia de medias tiene unos límites comprendidos entre 3,21 y 7,94, lo que sugiere que en la prueba realizada hay que esperar que los alumnos con conocimientos previos contesten correctamente entre 3 y 8 preguntas más que sus compañeros.

Aunque estadísticamente significativo y esperado, este resultado, es sin embargo sorprendente en cuanto a que la diferencia esperada por nosotros era incluso mayor, teniendo en cuenta que la prueba contiene 65 preguntas.

Figura 7.3.4.1. Diagrama múltiple de caja para el tipo de alumnos

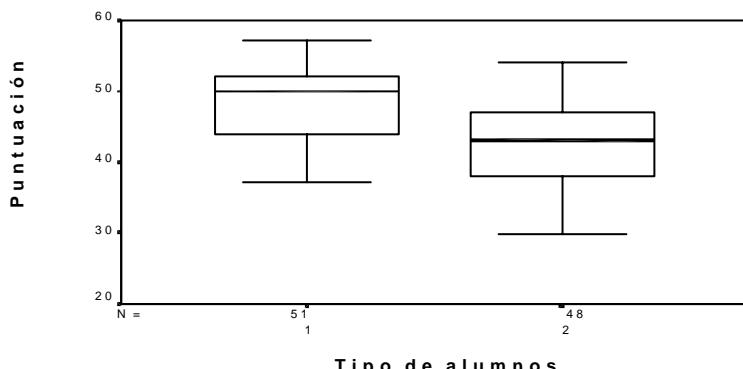


Tabla 7.3.4.8. Prueba de muestras independientes

Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias					
F	Sig.	T	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típico de la diferencia	Intervalo de confianza para la diferencia
1,956	,165	4,671	97	,000	5,57	1,19	3,21 7,94

Por un lado, los resultados sugieren la dificultad del tema, incluso para los alumnos con conocimientos previos, puesto que como se ha dicho, la prueba sólo incluye preguntas de tipo intermedio o elemental.

Por otro, los resultados nuevamente confirman la posibilidad de un aprendizaje razonable, dado el escaso tiempo dedicado, en alumnos con conocimientos y nivel mínimo de partida. Es por ello que pensamos que el enfoque dado a nuestra enseñanza abre una vía de solución a la problemática de introducción de conceptos de inferencia a alumnos universitarios en carreras de tipo muy diverso. Será, no obstante, necesaria mucha investigación para llegar a resultados más fundamentados.

Nuestros resultados indican, asimismo, los elementos de significado en los que se debería incidir en cada tipo de alumnos. Como hemos mencionado, los alumnos con conocimientos previos sobresalen en aquellos elementos que requieren de mayor formalismo y en la capacidad de argumentación. No obstante, presentan los mismos problemas que sus compañeros cuando se requiere una interpretación y no una pura aplicación memorística.

El segundo grupo de alumnos a veces tienen mayor éxito en tareas en que se requiere de un planteo más intuitivo, por lo que pensamos que este es el enfoque preferente de la enseñanza con alumnos sin conocimientos estadísticos previos.

7.3.5. RELACIÓN ENTRE RESPUESTAS A DIFERENTES PREGUNTAS

Un último estudio realizado es el de posibles interrelaciones en las contestaciones a preguntas. Puesto que el número de variables es demasiado grande para realizar un estudio de significación de los coeficientes de correlación (y caer con ello en el problema de las comparaciones múltiples), es necesario, aplicar un estudio de tipo multivariante que permite visualizar la estructura de interrelaciones entre las cuestiones.

Por otro lado, el tamaño de la muestra, en relación al número de cuestiones incluidas no aconsejan el empleo del análisis factorial. Por ello, y con una finalidad puramente exploratoria, ya que somos conscientes del elevado número de preguntas en relación al tamaño de la muestra,

hemos realizado un análisis cluster o por conglomerados, con el fin de observar las posibles relaciones existentes entre los ítems presentados en el cuestionario. Nuestro marco teórico supone, a priori, que los diversos elementos de significado suponen conocimientos de tipo diverso y en principio, no se debe esperar una estructura homogénea de las respuestas.

Hemos realizado el análisis con SPSS usando como medida de la similaridad entre cuestiones la correlación entre las puntuaciones (0,1) en las mismas. Sólo hemos utilizado en el análisis aquellos ítems que resultaron discriminantes. Con ello, por un lado, disminuimos el número de variables en el análisis. Por otro, descartamos aquellos ítems que por ser excesivamente fáciles o difíciles no se relacionan con los demás. Si observamos el dendograma de la figura 7.3.1, podemos determinar cuatro grandes grupos o “clusters”:

Primer grupo: elementos actuativos, Curva normal, sus parámetros y tipos de variables estadísticas

Este grupo está integrado por cinco subgrupos, de los cuales, describiremos los ítems que se encuentran a una distancia menor. En conjunto evalúan la comprensión de elementos actuativos íntimamente relacionados con una gran parte de elementos intensivos.

G1.1. Tipificación. En primer lugar, encontramos los ítems 16 a y 16 b, referidos a la distribución normal típica (elemento intensivo) y al cálculo de valores tipificados y sus inversos (elementos actuativos). Los cuales están relacionados, a una distancia mayor con el ítem 11 b, que se refiere a los parámetros de la distribución normal típica (elementos intensivos).

G1.2. Tipos de variables estadísticas. Un segundo subgrupo, está formado por los ítems 2 b y 2 c, referidos a los tipos de variables (elementos intensivos); éstos a su vez se relacionan con los ítems 2 a y 10 a, referidos ambos a variables estadísticas y aleatorias y sus tipos (elementos intensivos).

G1.3. Parámetros. En el tercer subgrupo, encontramos los ítems 9 b y 9 d relativos a los parámetros de una distribución normal (elementos intensivos).

G1.4. Curva normal. A una distancia mayor, en el tercer subgrupo, se relacionan los ítems 6 b y 13 d, referido el primero a lo que representa un modelo matemático y a la diferenciación entre distribución teórica y empírica y, el segundo a la representación de valores de la variable y a la relación entre probabilidad y área bajo la curva (elementos intensivos).

G1.5. Utilidad de un modelo matemático. El quinto subgrupo está formado por un solo ítem, que es el 4b, relativo a la utilidad de un modelo matemático.

G1.6. Proporción de casos centrales. Y en el último subgrupo observamos los ítems 21 y 21J, los cuales se refieren a la proporción de casos en los intervalos centrales y su justificación (elemento intensivo y validativo), que se unen con el 14 a, relativo a los cuartiles de la distribución.

Segundo grupo: elementos validativos y propiedades geométricas de la curva normal

En este grupo, se pueden apreciar tres subgrupos, siendo una característica importante que casi todos los ítems en que se pide una justificación (elementos validativos) caen dentro de este grupo.

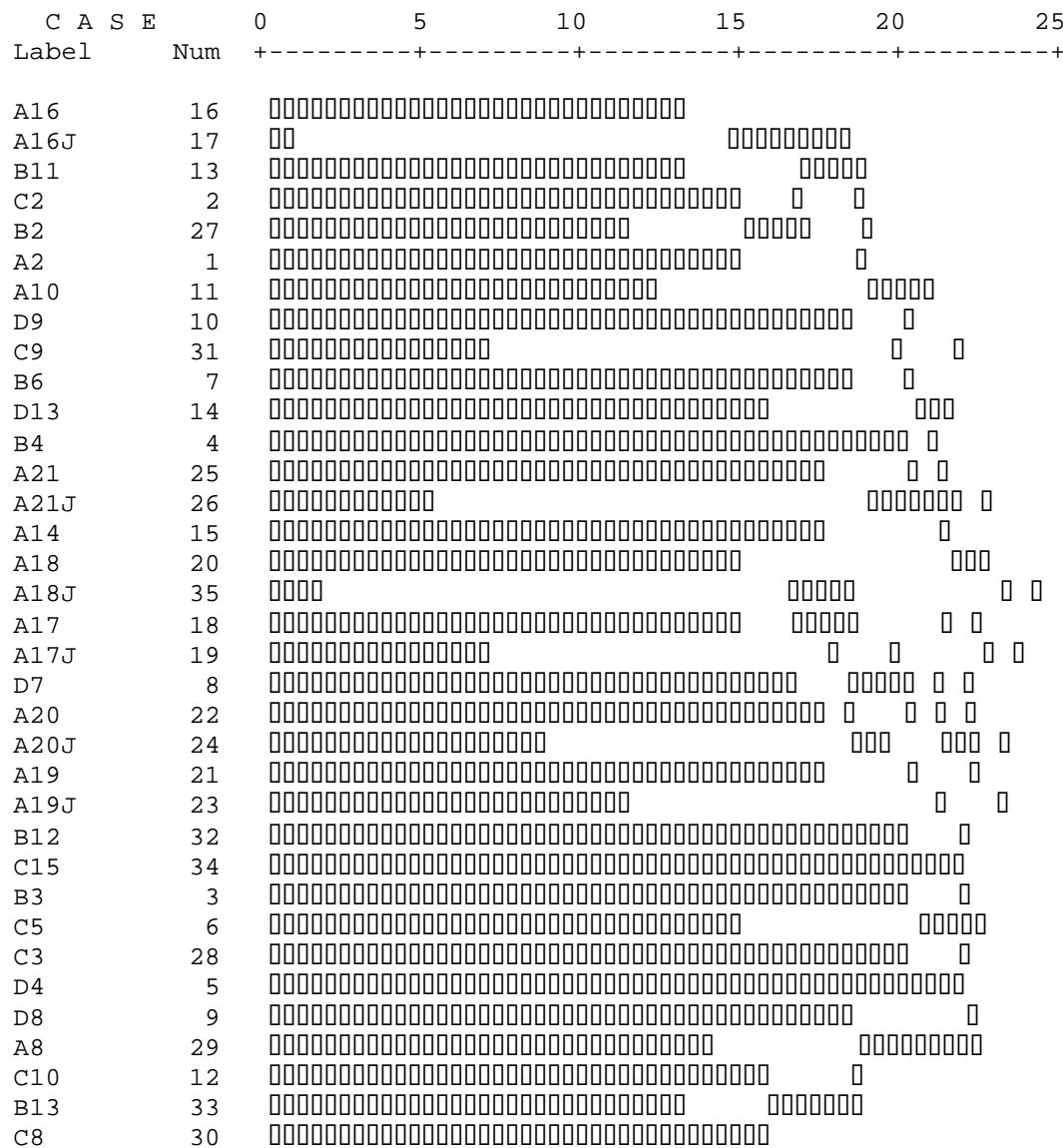
G2.1. Distribución de casos y posición de media, mediana y moda en la curva normal. En el primer subgrupo encontramos, por un lado, los ítems 18 y 18J y por el otro, los ítems 17 y 17J. Todos ellos referidos a la distribución de casos en el modelo normal y sus respectivas justificaciones (elementos intensivos y validativos). Se unen a una distancia mayor con el 7 d sobre tipos de variables que pueden ajustarse por medio de una distribución normal.

G2.2. Casos atípicos en la distribución normal. En el segundo subgrupo encontramos los ítems 20 y 20J que se relacionan luego con los ítems 19 y 19J. También en este caso, se refieren a la distribución de casos atípicos y casos frecuentes en la distribución normal y sus justificaciones (elementos intensivos y validativos).

G2.3. Propiedades geométricas. Los grupos anteriores están relacionados a una mayor distancia con el ítem 12 b que se refiere a la gráfica de la curva de densidad normal (elemento ostensivo) y a la desviación típica como parámetro (elemento intensivo).

En definitiva, este grupo de variables evalúa preferentemente los elementos validativos, así como el conocimiento de las propiedades geométricas de la curva normal (elementos intensivos).

Figura 7.3.5. 1. Dendograma correspondiente al análisis por conglomerados de los ítems del cuestionario
Escala de distancia entre grupos



Tercer grupo: histogramas y ecuación de la normal

En el cuarto grupo se relacionan a una distancia bastante grande los ítems 3 b y 5 c. El primero relativo a la representación de la frecuencia en un histograma (elemento ostensivo) y el segundo a la representación simbólica de la curva normal por medio de una ecuación matemática (elemento ostensivo). A su vez, éstos se relacionan aunque a distancia muy grande con el ítem 3 c, que se refiere también a la representación de frecuencias en un histograma (elemento ostensivo) y el ítem 4d, que trata de la utilidad de un modelo matemático (elemento intensivo).

En consecuencia, hay aquí un grupo de ítems que evalúan la comprensión del papel de las ecuaciones en los modelos matemáticos y la comprensión y convenios de lectura de gráficos (elementos intensivos).

Cuarto grupo: valores representativos, representación gráfica y tipos de datos

En el cuarto grupo encontramos relacionados a la misma distancia, por un lado, los ítems 8c: posición de la moda en una distribución normal, 13 b: interpretación de la gráfica de la función de densidad y 10c: tipos de variables en la distribución normal (elementos intensivos). Por otro lado, los ítems 8 a y 8 d: posición de la moda en una distribución normal. Estos ítems

se refieren a los valores representativos de una distribución normal y a los tipos de datos que no pueden aplicarse a una distribución normal.

De acuerdo a los resultados de este análisis podemos ver *que se producen relaciones entre los diversos elementos de significado*, siendo algunas de ellas más fuertes o visibles que otras. Por ejemplo, observamos que los elementos validativos han tendido a agruparse (grupo 2), mostrándose como una capacidad diferenciada del resto de los elementos de significado. Lo mismo ocurre con los elementos actuativos, que se agrupan en el primer grupo.

Por su parte los elementos intensivos se agrupan en diferentes clusters, correspondientes a diferentes propiedades de la distribución normal. De ello podemos concluir que, los elementos intensivos se presentan en forma transversal en todos los grupos, relacionándose con todos los otros tipos de elementos de significado. Lo cual es lógico, debido a que ellos representan los conceptos y propiedades en los que, para aplicarlos o demostrarlos, siempre debemos hacer uso de representaciones (elementos ostensivos), debemos manipular los diversos elementos (actuativos) y por último, debemos justificar nuestros resultados (elementos validativos).

Además de la *relación entre los elementos intensivos y los otros elementos*, también se producen *diversas interrelaciones entre los mismos elementos intensivos* haciendo también que estos puedan agruparse en diversos conglomerados. Por ejemplo, todos aquellos elementos que corresponden a propiedades de la distribución normal se han agrupado en un mismo conglomerado estando estrechamente relacionados con los elementos validativos. *Aquellos elementos intensivos relativos a la distribución normal tipificada están en estrecha relación con los correspondientes elementos actuativos.*

Los elementos relativos a la comprensión y aplicación de los convenios de lectura de gráficos se agrupan formando otro conglomerado *relacionando estos elementos intensivos con elementos principalmente ostensivos*. Además, estos elementos no son exclusivos de la distribución normal sino que son transversales a la mayoría de los conceptos estadísticos.

En conclusión, pensamos que cuando se planifica una secuencia de enseñanza sobre el tema que nos ocupa, se deberían tener en cuenta *todos estos elementos de significado y las relaciones que se establecen entre ellos*. Creemos que considerar estos puntos más relevantes en una secuencia de enseñanza, podrá ser muy productivo en el posterior aprendizaje de los alumnos. Además, antes de la planificación se debería considerar la prioridad que se le daría a cada grupo de elementos y a sus interrelaciones de acuerdo con el enfoque que se pretenda dar a la enseñanza y con los conocimientos previos de los alumnos.

Para concluir, podemos observar *la diversidad de relaciones entre los diferentes elementos de significado* que intervienen en la construcción del significado de la distribución normal, lo cual concuerda con lo que hemos afirmado en los primeros capítulos, en relación con la complejidad sistémica de este concepto.

7.4. CONCLUSIONES

En este capítulo hemos descrito la construcción, contenido y resultados de un cuestionario elaborado con el fin de realizar una primera evaluación (a nivel elemental y medio) de las características en la comprensión de los alumnos participantes respecto a un número elevado de elementos de significado incluidos en la enseñanza.

Pensamos que, en general, hemos cumplido el objetivo principal planteado al construir el cuestionario, puesto que hemos justificado suficientemente la validez de contenido, respecto al significado institucional local previsto y la fiabilidad del instrumento, así como su posible generalizabilidad a cuestionarios con un mismo contenido y a otros grupos de alumnos similares a los que participaron en el estudio.

El instrumento de evaluación elaborado sobre la distribución normal y los elementos de significado implícitos en ella, es también una aportación de nuestro trabajo, pues permite obtener información relacionada con el conocimiento de los alumnos acerca de un gran número de elementos, en un lapso breve de tiempo. Este instrumento además, puede ser aplicado en alumnos que asisten a cursos tradicionales de estadística debido a que no presenta características especiales relacionadas con la utilización del ordenador.

7.4.1. CONCLUSIONES RESPECTO A LAS CARACTERÍSTICAS GENERALES EN EL SIGNIFICADO PERSONAL DE LOS ALUMNOS DEL GRUPO

Al comparar las características detectadas en el significado personal construido por los

alumnos participantes con el significado institucional local previsto (Capítulo V) y el efectivamente observado en la enseñanza (Capítulo VI), podemos decir que los resultados obtenidos con el cuestionario han sido satisfactorios.

En promedio, cada alumno ha resuelto correctamente alrededor del 70% de las preguntas y todos resuelven más de la mitad correctamente. En consecuencia, podemos concluir que a un nivel elemental o medio de lectura se han adquirido una buena diversidad de elementos de significado, en particular, los elementos intensivos como consecuencia de que son éstos los elementos que predominantemente se analizan en este cuestionario.

Por lo tanto, creemos que es posible realizar una aproximación poco formal a la enseñanza de la distribución normal con alumnos con diversas capacidades y conocimientos. Somos conscientes que esta aproximación no es suficiente para lograr personas autónomas en el uso de la estadística, pero sí es posible capacitarlos para comprender los resultados y los procedimientos que se deben aplicar en sus futuros proyectos o trabajos profesionales.

Concordancia entre el significado institucional local previsto y las características en el significado personal de los alumnos del grupo

De los diversos elementos de significado que han sido considerados en la construcción del cuestionario, una gran variedad de ellos ha sido aplicada en forma correcta por los alumnos. A continuación analizamos los elementos sobre los que los estudiantes demuestran una mejor comprensión.

Elementos extensivos

- Un gran número de alumnos han aplicado correctamente los tres elementos extensivos que se habían previsto en la construcción del cuestionario, destacando especialmente la aproximación de distribuciones discretas y el uso en inferencia.
- Se identifica que no se puede aplicar la aproximación por medio de la distribución normal (elemento extensivo) a variables cualitativas (elementos intensivos). En nuestra enseñanza se ha tratado este punto y también se han realizado actividades en las que no observaron dificultades. De todos modos, pretendemos corroborarlo por medio de la prueba de ensayo con ordenador.

Elementos ostensivos

- Los alumnos han reconocido los términos verbales asociados a los diferentes conceptos, como distribución, parámetro, media, etc., mostrando un dominio adecuado de los ostensivos verbales y simbólicos;
- De los elementos ostensivos gráficos aplicados en este instrumento, ha destacado principalmente el reconocimiento correcto de la gráfica de la función de densidad normal.
- También se pone en relación esta representación gráfica con otros elementos de significado, principalmente intensivos tales como el concepto de función de densidad, las propiedades de simetría de la distribución normal, la variación de la forma gráfica en función de los parámetros de la distribución normal, área en un intervalo bajo la curva de densidad y frecuencia de valores más alejados. Pensamos que las posibilidades gráficas brindadas por el ordenador y la exploración dinámica de la función de densidad en la tercera clase práctica ha ayudado a los alumnos a adquirir este elemento de significado.

Elementos actuativos

- Los elementos actuativos que se han aplicado correctamente han sido el cálculo de valores tipificados y de sus inversos. No ha habido mucha variedad en la aplicación de estos elementos como consecuencia del formato del cuestionario, en el que prácticamente no se solicitaba realizar acciones. Estos elementos serán evaluados de manera más extensa en la prueba con ordenador.

Elementos intensivos

El cuestionario evalúa mayor diversidad de elementos intensivos, tanto específicos como relacionados con la distribución normal. Los que han tenido un mayor porcentaje de aplicación correcta han sido:

- Los diferentes tipos de variables estadísticas: este es un concepto trabajado desde el

comienzo del curso y no sólo en este tema específico;

- Se ha mostrado una comprensión significativa de los parámetros en una curva normal, estableciendo relaciones correctas entre la forma gráfica de la curva de densidad normal (elemento ostensivo) y el significado geométrico de los parámetros (elemento intensivo). También parece haber un conocimiento claro de los parámetros de la distribución normal como elementos que brindan la información esencial acerca de dicha distribución. En la enseñanza se ha trabajado en varias oportunidades con estos elementos, poniendo de manifiesto, tanto teórica como prácticamente, cuál es su significado. Si observamos los resultados de la tercera sesión práctica (Tabla 6.8.1) podemos ver que la mayoría de los alumnos han aplicado en forma correcta este concepto, por lo que los resultados obtenidos con el cuestionario vienen a reafirmar lo observado en clase.
- Se observa un buen conocimiento de la propiedad de unimodalidad de la distribución normal y de la posición de la moda en dicha distribución (elementos intensivos). Estos elementos habían sido trabajados en diversas oportunidades en la secuencia de enseñanza y, solamente se presentaron dificultades en la segunda sesión práctica (Sección 6.6) debido a las características del fichero de datos, siendo los resultados muy aceptables en el resto de las actividades desarrolladas.
- Se aplica en forma adecuada la propiedad de simetría de la distribución normal con respecto a la media (elemento intensivo). Ésta ha sido una de las propiedades que más se ha trabajado en las actividades realizadas, especialmente en las clases teóricas, en las que hemos podido observar (por ejemplo, en la Tabla 6.4.1) que los alumnos han realizado diversas aplicaciones correctas de dicha propiedad.
- Se observa un nivel adecuado de conocimiento de las propiedades geométricas y estadísticas de la distribución normal, especialmente de la propiedad de los intervalos centrales (elementos intensivos). Ésta ha sido una de las propiedades con la que más se ha trabajado, tanto en las sesiones teóricas como en las prácticas. Aunque en las actividades realizadas a lo largo de la secuencia de enseñanza, hemos podido observar que los alumnos presentaban diversas dificultades al aplicar dicha propiedad. Por lo que podemos deducir un cierto grado de aprendizaje, al menos en un nivel intermedio, ya que las actividades planteadas en clase requerían de la integración de un mayor número de elementos que la que se plantea en el cuestionario. El aprendizaje a un mayor nivel se deberá corroborar con la prueba de ensayo, ya que en ella se plantea una actividad similar a la de las sesiones de clase.

Elementos validativos

En este caso sucede lo mismo que con los elementos actuativos, es decir, no ha habido mucha diversidad de aplicación de elementos debido a que sólo había cinco ítems en los que se pedía justificar.

- En general, los alumnos han realizado aplicación y comprobación de propiedades, así como en algunos casos, se han apoyado en la representación gráfica para justificar sus afirmaciones.

Diferencias entre el significado institucional local previsto y las características en el significado personal de los alumnos del grupo

Por otro lado, no todos los elementos de significado han sido aplicados con la misma frecuencia ni todos resultaron igualmente sencillos, habiendo una gama de dificultad, desde preguntas acertadas por todo el grupo hasta otras con un porcentaje de aciertos muy bajo. Dentro de las características generales que hemos podido determinar en las resoluciones de los alumnos, observamos que los errores más comunes han sido los siguientes:

Elementos extensivos

- No se llegó a percibir que la distribución normal puede tomar tanto valores positivos como negativos (elemento intensivo), por lo que no se aprecia la aplicabilidad de la distribución normal a variables con este tipo de valores. Aunque en el significado de referencia se considera el tratamiento de esta propiedad, en nuestra secuencia de enseñanza no se ha trabajado demasiado, por lo que la dificultad mostrada por los alumnos pudo ser consecuencia del escaso número de ejemplos de este tipo.

Elementos ostensivos

- No se identifica el modelo normal con una ecuación (relación entre elemento intensivo y ostensivo), solamente se realiza esta traslación entre modelo y curva de densidad. También esto puede ser consecuencia del tratamiento poco formal que hemos dado a nuestra enseñanza y el poco uso que se hizo de la ecuación.
- No se identifica la frecuencia en un histograma con la altura de las barras y resulta bastante difícil observar la correspondencia entre frecuencia y área (Relación entre elementos ostensivo e intensivo). Aunque en nuestra enseñanza se hizo énfasis en este convenio de representación, que es importante para comprender posteriormente el cálculo de probabilidades mediante el cálculo de áreas en la función de densidad, parece que no fue suficiente para superar esta dificultad.

Sería adecuado presentar tareas en las que los alumnos debieran trabajar con histogramas que tuvieran amplitud de intervalos no homogénea, ya que pensamos que el error proviene del hecho que los libros siempre se presentan tareas con histogramas cuyos intervalos tienen una amplitud uniforme. El error se reafirma con la utilización del ordenador que no proporciona la posibilidad de trabajar con histogramas de intervalos desiguales. En una de las sesiones teóricas anteriores al tema de la distribución normal, más precisamente cuando se trabajan los histogramas, propusimos una tarea de este tipo a los estudiantes.

Elementos actuativos

- No se presentan dificultades, pero han sido escasos los elementos evaluados.

Elementos intensivos

- Han habido dificultades cuando se debe diferenciar entre distribución teórica y empírica (relación entre elementos intensivos). En este caso, se ha resaltado esta diferenciación en nuestro significado institucional local, especialmente en el segundo curso. Como consecuencia, pensamos que este es un tema complicado en el sentido que *se requiere de la integración de diversos elementos de significado* y a que otros autores han encontrado esta problemática en sus estudios (Vallecillos, 1996; Schuyten, 1991). Esta dificultad había sido observada, en ambos cursos, cuando los alumnos resolvieron tareas en las que se debía realizar esta diferenciación, como por ejemplo en las actividades de la tercera sesión práctica (Capítulo VI).

Elementos validativos

- No se hicieron justificaciones adecuadas en los que ítems en que se pedía validación. Como hemos mencionado en secciones anteriores, es evidente la dificultad que se plantea a los alumnos cuando deben realizar sus propias argumentaciones para justificar una afirmación. Además, debemos decir que en nuestra secuencia se han previsto pocas actividades en las que se pedía justificar. Asimismo, en dichas actividades se pudo observar este tipo de dificultad.

Conclusiones respecto a las diferencias en el significado personal de los alumnos participantes en los dos cursos

Respecto al tercer objetivo planteado al realizar el cuestionario, no hemos encontrado diferencias demasiado marcadas entre los alumnos de los dos cursos participantes, aunque, en cualquier caso el resultado es mejor el segundo año. Ello indica que el análisis y revisión de la enseñanza al finalizar la primera experiencia contribuyó a mejorar la enseñanza el segundo año.

En particular los alumnos del segundo curso han mostrado un mejor conocimiento de las propiedades de un modelo matemático, diferenciando más claramente entre distribución empírica y teórica, que era uno de los puntos particularmente difíciles.

Lo anterior puede ser consecuencia de haber introducido en el desarrollo de las clases teóricas, la utilización del ordenador para simular la aproximación de una distribución empírica a la curva normal, cuando se aumenta el número de observaciones y se disminuye la amplitud de los intervalos. Esto también sirvió para que se pudieran mostrar las diferencias entre uno y otro tipo de distribución, lo cual parece haber influido positivamente en los alumnos.

Por otra parte, parecen mejorar en el segundo curso cuando dan ejemplos de variables

discretas, aunque muestran más errores cuando deben decidir si esas variables pueden o no aproximarse por medio de una distribución normal.

Conclusiones respecto a las diferencias en el significado personal en alumnos con y sin instrucción previa

En relación con los resultados obtenidos por las dos tipologías de alumnos (con y sin estudios previos de estadística), hemos podido apreciar que los conocimientos previos de los alumnos influyen en su rendimiento, aunque la diferencia entre los dos tipos de alumnos no ha sido tan grande en el cuestionario como podría esperarse.

Por un lado, los alumnos con conocimientos previos de estadística tienen mayor capacidad para la argumentación y justificación de sus tareas, comprenden y aplican mejor la idea de tipificación, comprensión de las diferencias entre variable cuantitativa y cualitativa, continua y discreta, idea de parámetro, propiedad de la proporción de casos alrededor de la normal, todas ellas ideas bastante abstractas que los alumnos con conocimientos previos han trabajado anteriormente, sobre todo en relación al manejo de las tablas de la distribución normal.

Los conocimientos previos de estadística han influido de manera positiva cuando deben relacionar el modelo normal con su ecuación, los tipos de variables que pueden aproximarse por una distribución normal o cuando deben reconocer la utilidad de un modelo matemático.

Por otro lado, en otros ítems los alumnos aplican los conocimientos en casos que no son pertinentes, como por ejemplo, cuando deben rechazar una variable que es discreta, confirmando con este hecho, una vez más, la dificultad que presenta la diferenciación entre lo continuo y lo discreto.

En otros ítems no hay una gran diferencia, como por ejemplo, cuando deben realizar comparaciones visuales para determinar la variación de la curva normal en función de alguno de sus parámetros. En consecuencia, creemos que la enseñanza de la estadística excesivamente formalizada y alejada de las aplicaciones no proporciona un aprendizaje estable y los alumnos fallan al aplicar los conceptos adquiridos previamente a las nuevas actividades más interpretativas propuestas en nuestro cuestionario.

Conclusiones sobre las interrelaciones entre elementos del significado personal de los alumnos del grupo

El análisis cluster realizado muestra que, en general, no hay una correlación muy fuerte entre las respuestas correctas a las preguntas del cuestionario, que tiene un carácter multidimensional, apareciendo sólo agrupaciones de un número pequeño de cuestiones, generalmente relacionadas con elementos de significado muy próximos.

Los elementos validativos *tienden a agruparse*, mostrándose como una capacidad diferenciada, y que por tanto, debe ejercitarse específicamente, si queremos que los alumnos lleguen a adquirirla. Es por ello que creemos que el tipo de enseñanza diseñada, donde los alumnos deben preparar informes sobre el análisis de dato es potencialmente útil para mejorar la capacidad de validación de los alumnos universitarios.

Los elementos intensivos aparecen divididos en varios grupos y *también se relacionan con otros tipos de elementos*, mostrando el apoyo semiótico de lo ostensivo para la comprensión de los mismos, así como el recurso a lo intensivo dentro de la validación y la acción.

La variedad de grupos formados apoya nuestra idea de la complejidad sistémica del constructo "*distribución normal*", cuyos elementos de significado deben ser adquiridos uno a uno y *puestos en relación* por los alumnos, mediante actividades significativas de análisis de datos.

CAPÍTULO VIII

SIGNIFICADO PERSONAL PUESTO EN JUEGO POR LOS ALUMNOS DEL GRUPO EN LA RESOLUCIÓN DE LA PRUEBA CON ORDENADOR

8.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo VII hemos analizado los resultados de un primer instrumento de evaluación (cuestionario) que los alumnos cumplimentaron individualmente al finalizar la enseñanza. Con ello ampliamos una parte de nuestro cuarto objetivo general (Capítulo I) y del objetivo específico O6 descrito en la Sección 3.3.

Para completar dicha evaluación y alcanzar de una forma más completa dichos objetivos, elaboramos un segundo instrumento de evaluación. Este instrumento se centraría en el análisis más detallado del uso de elementos validativos, los cuales fueron escasamente incluidos en el cuestionario y que, como hemos visto en los resultados del cuestionario, constituye un tipo de conocimiento específico. Los consideramos muy importantes porque generalmente en la enseñanza tradicional, no se presta atención específica al desarrollo de esta capacidad, mientras que en nuestro caso, se ha tratado de apoyarla en las actividades de análisis de datos.

Asimismo queríamos analizar la capacidad de los estudiantes para poner en relación los diversos elementos de significado en tareas de análisis de datos de alto nivel y su dominio de la herramienta informática. Para ello se preparó una prueba de ensayo para ser resuelta con el ordenador, que estuvo incluida en el examen final del curso, y que contenía cuatro cuestiones sobre la distribución normal.

En lo que sigue describimos esta prueba y los resultados obtenidos al aplicarla. En la sección 8.2.1 describimos los objetivos de esta prueba y metodología usada en su construcción, en la sección 8.2.2 detallamos la estructura del fichero de datos que pusimos a punto para utilizar en esta prueba y del instrumento empleado, en la sección 8.2.3 se realiza un análisis previo de las preguntas incluidas en la prueba, con especial énfasis en los diferentes elementos de significado que los alumnos podrían usar en su resolución, justificando la validez de contenido de la prueba en la sección 8.2.4. En la sección 8.3 se analizan los resultados obtenidos, tanto globalmente, como comparando los cursos y tipos de alumnos y se finaliza con una sección de conclusiones.

8.2. ANÁLISIS DE LA PRUEBA DE ENSAYO USANDO EL ORDENADOR

8.2.1. OBJETIVOS Y PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DE LA PRUEBA DE ENSAYO CON ORDENADOR

Objetivos

El objetivo principal de haber aplicado este nuevo instrumento ha sido el deseo de complementar los resultados obtenidos en el cuestionario con datos obtenidos de sus respuestas a tareas más abiertas y creativas, en que las posibles respuestas no se limitan a dos opciones (correctas/incorrectas) sino que se pidió a los estudiantes que justificaran sus respuestas por escrito. Los alumnos tendrían libertad para emplear los diferentes elementos de significado adquiridos en la enseñanza y ponerlos en relación.

Al ser resuelta la prueba con ayuda del ordenador, nos proporciona también datos sobre la capacidad de manejo y el conocimiento del software, que no había sido evaluada en el

cuestionario. En otras palabras, con esta nueva evaluación pretendemos completar el estudio del significado personal construido por los alumnos de la muestra (objetivo específico O6), lo cual nos mostrará las características generales de dicho significado y la variabilidad en la comprensión de nuestros alumnos sobre la distribución normal.

Por otro lado, en esta investigación han participado alumnos de dos cursos sucesivos, lo que nos conduce a plantear otro objetivo general que es, analizar las posibles diferencias en la prueba entre los alumnos del primero y segundo año y, en particular, analizar si se encuentra una mejora significativa en el segundo año, respecto al primero.

Asimismo, puesto que en nuestra muestra han participado dos tipos de alumnos de características claramente diferenciadas, deseamos analizar las posibles diferencias finales en esta prueba en estos dos grupos de alumnos (alumnos con y sin conocimientos previos de estadística).

Una vez planteados los objetivos generales de la prueba, pasamos a detallar los siguientes objetivos específicos:

- Describir y analizar los elementos de significado que usan los alumnos correcta e incorrectamente en tareas abiertas de análisis de datos y la forma en que los relacionan.
- Observar y describir qué elementos de significado utilizados por los estudiantes se agregan específicamente con el uso del recurso informático, así como el conocimiento que el alumno ha adquirido de las distintas opciones del programa Statgraphics y del manejo de la herramienta informática: Gestión de ficheros y variables, ventanas de entrada de datos y grabación de resultados en el procesador de textos,
- Evaluar la capacidad que el alumno ha adquirido para analizar problemas (elementos extensivos) relacionados con nuevos ficheros de datos. Es por esto que se le han planteado preguntas abiertas, en las que no se les especifica en concreto cuál es el procedimiento o método que deben usar, teniendo de esta manera, un abanico de posibilidades de análisis a su alcance.
- Analizar los tipos de argumentación (elementos validativos) planteadas por los alumnos para justificar sus soluciones.

Cada alumno realizaría la prueba individualmente, usando el ordenador y grabando sus soluciones en un fichero Word e incorporando en el mismo las tablas, cálculos o resúmenes estadísticos y gráficos que considerasen pertinentes para justificar sus respuestas. El alumno tendría libertad para usar cualquiera de los programas y opciones que había estudiado durante las prácticas y para consultar sus apuntes y notas recogidas durante las clases teóricas y prácticas.

Se pretende que el alumno asocie las preguntas con los problemas estudiados durante el curso, los conceptos y métodos pertinentes para la resolución de estos problemas, seleccione las opciones adecuadas del programa que permiten utilizar estos conceptos y métodos, los opere convenientemente, interprete y justifique los resultados. Se indicaría a los alumnos que razonasen con detalle sus respuestas. En lo que sigue describimos el proceso de construcción de la prueba y analizamos su contenido.

Proceso de construcción del instrumento

En el proceso de elaboración se han seguido una serie de recomendaciones tomadas de Scott (1988), Osterlind (1989) y Thorndike (1989), que son las siguientes:

- Se delimitó el contenido a evaluar con este instrumento. Este instrumento se centra preferentemente en los elementos de significado y el conocimiento del uso del recurso informático.
- Se especificó el formato de los ítems, decidiendo que la prueba constase de preguntas abiertas.
- Se preparó un fichero de datos sobre el cual se basarían las preguntas, cuya estructura se describe en el apartado 7.4.3.
- Se procedió a la elaboración de las preguntas con el proceso que describimos a continuación.

Selección y depuración de ítems

Para formar el conjunto inicial de preguntas se partió de las pruebas de evaluación finales

que se habían pasado en la misma asignatura en los años anteriores, de las tareas realizadas en las clases prácticas y de la prueba de evaluación usada en Estepa (1994). Una vez que se llegó a un conjunto de preguntas que parecía cubrir el contenido previsto, se procedió a revisar la redacción. Se hicieron pruebas de legibilidad y comprensión del enunciado con algunos alumnos voluntarios, de características similares a los que participan en el estudio, modificando la redacción en los casos que fue necesario.

En la redacción de los enunciados se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos indicados por Osterlind (1989): Evitar detalles innecesarios, relevancia de las preguntas formuladas para el estudio, nivel de lectura adecuado, brevedad, evitar las cuestiones negativas, evitar cuestiones sesgadas o interdependientes, claridad y falta de ambigüedad, nivel apropiado de abstracción, asegurar que las preguntas tienen el mismo significado para todos los sujetos.

En cuanto a la ordenación de los ítems también se han seguido las indicaciones del mismo autor:

- a. Instrucciones generales al sujeto. Además de las que se exponen por escrito en la prueba se dieron explicaciones adicionales a los alumnos sobre los objetivos de la prueba y el modo de realizarla, terminando con una petición encarecida de que la hicieran con el máximo interés y atención.
- b. Las primeras cuestiones deberían referirse a hechos ya que son más fáciles de responder y menos comprometidas. Por eso la primera pregunta se refiere a la simetría.

Una vez preparadas las cuestiones, se dio a revisar a otros investigadores y profesores de estadística, quienes también sugirieron mejoras en la redacción.

8.2.2. ESTRUCTURA DEL FICHERO DE DATOS

Esta prueba está basada en un conjunto de datos asociados. En el curso '98-'99 se utilizó un solo fichero de datos que contenía 9 variables que detallaremos a continuación. En el curso '99-2000, se utilizó este mismo fichero y nos vimos obligados a elaborar otro equivalente, debido a que disponíamos de un número menor de ordenadores que de alumnos, por lo que debimos formar dos grupos para que realizaran el examen en distintos días. Preparamos por tanto dos versiones equivalentes de la prueba con objeto de evitar el corrimiento de información.

El fichero DEPORTE.SF contiene un conjunto de datos reales sobre el rendimiento de las clases de educación física tomados en un grupo de 96 alumnos de ESO. Las variables incluidas son las siguientes:

SEXO: Variable cualitativa dicotómica con dos valores (1=varón;2=mujer)

DEPORTE o GRUPO: Variable cualitativa con dos modalidades (1= Sí practica; 2 = No practica)

PULS_REPOSO: (Número de pulsaciones por minuto en reposo) o TENSIONMIN (Tensión arterial mínima). Variables cuantitativas discretas, su mínimo es 48 y su máximo 96.

PULS_DESPUES (Número de pulsaciones por minuto después de hacer 30 flexiones) o TENSIONMAX: (Tensión arterial máxima). Variables cuantitativas discretas. Siendo su mínimo 78 y su máximo 162.

TIEMPO_SEP o TIEMPO_MAYO: (Tiempo que tarda en recorrer 30 metros en Septiembre o en Mayo para el segundo grupo). Variable cuantitativa continua. Los datos se daban con una cifra decimal. Su valor mínimo es de 3,3 segundos y el máximo de 9,9 segundos.

TIEMPO_DIC o TIEMPO_AGO: (Tiempo que tarda en recorrer 30 metros en Diciembre o en Agosto para el segundo grupo, medido en segundos). Variable cuantitativa continua. Los datos se dan con dos cifras decimales. El rango de esta variable va de 2,41 a 6,9 segundos.

PESO (Peso del alumno en Kg.) u HOMBROS (Anchura de hombros en cm.) Variable cuantitativa continua, aunque los datos se daban en valores enteros. Su rango va de 30 cm. a 98 cm.

TALLA (Altura en cm.) o BRAZOS (Longitud de brazos extendidos en cm.). Variable cuantitativa continua, aunque los datos se daban en valores enteros.

EDAD: (12, 13, o 14 años) Variable cuantitativa discreta con sólo tres valores.

En la Tabla 8.2.1.1, se reproduce el fichero de datos con todas las variables mencionadas anteriormente. Este fichero contiene datos reales que fueron obtenidos en una clase de educación física de niños de 14 años. Un problema con el que nos encontramos fue que, ninguna de las variables en realidad se ajustaba perfectamente a la distribución normal ya que

los contrastes de bondad de ajuste nos llevaban a rechazar el modelo.

A pesar de ello había una variable (TIEMPO_DIC o TIEMPOAGO) cuyo coeficiente de simetría, curtosis y forma gráfica se aproximaban suficientemente a una distribución normal. Tomando la media y desviación típica de los datos de esta variable, simulamos una muestra de datos de una distribución normal con los mismos parámetros, comprobando que los datos se ajustaban a la curva teórica y que el ajuste se apreciaba también en los diferentes gráficos (histograma, función de densidad, normal probability plot y symmetry plot).

Tabla 8.2.1.1. Valores de las variables del fichero DEPORTE.SF

SEXO	DEPORTE (GRUPO)	PULS REP (TENSION_ MIN)	PULS DES (TENSION_ MAX)	TIEMPO_ SEP (TIEMPO_ MAYO)	TIEMPO_ DIC (TIEMPO_ AGO)	PESO (HOMBROS)	TALLA (BRAZOS)	EDAD
1	1	72	108	9,9	6,55	46	159	12
2	2	84	148	3,3	5,37	42	153	14
2	1	60	162	5,5	6,36	44	154	12
2	1	72	78	5,7	4,43	98	165	14
1	2	78	156	4,8	4,56	39	155	13
2	1	66	159	5,2	3,96	56	156	12
1	1	72	132	5	3,32	45	156	12
2	1	72	126	5,9	5,29	49	154	12
2	2	90	144	4,7	3,60	42	155	13
1	1	72	138	4	6,85	35	150	12
2	2	78	138	5	6,04	44	161	13
1	1	72	132	4,5	3,85	60	171	14
2	1	60	150	4,9	5,58	48	155	14
1	2	78	108	4,7	5,97	45	155	13
1	1	72	132	4,5	4,22	39	140	14
2	1	54	132	5	2,55	46	149	14
1	1	60	120	6	4,93	41	146	13
2	1	66	102	5,3	5,58	72	162	13
2	2	84	132	6	3,80	50	153	14
1	1	66	90	5,6	2,75	52	154	13
2	2	84	120	5,2	5,57	50	159	13
2	2	96	120	5,6	2,66	43	152	13
1	2	90	124	5	4,50	57	165	13
2	2	90	114	4,8	6,90	51	160	13
2	1	60	108	4,8	4,69	49	158	13
1	1	60	128	4,9	4,42	45	158	13
2	2	84	150	6	2,41	46	152	13
1	1	48	108	5,2	3,11	30	138	13
2	1	60	120	6	5,60	56	162	13
1	1	78	120	5,8	3,01	59	182	13
2	2	78	126	5,8	4,62	50	157	12
2	1	60	120	5,9	4,17	49	157	13
2	2	72	132	5,7	3,41	45	150	13
1	1	60	96	5,2	4,85	51	167	13
2	1	66	108	6	4,30	45	157	13
2	2	72	114	5	4,28	60	147	14
2	2	78	138	5	3,70	50	150	13
1	2	96	108	6,5	4,44	36	145	14
2	2	78	102	5,1	5,57	44	152	14
1	1	54	120	5,4	4,51	38	150	13
2	1	60	108	5,2	4,32	39	140	12
2	2	76	126	5,5	4,83	50	157	13
1	1	67	105	5,5	5,73	55	147	13
2	1	54	132	5,8	5,64	46	160	12
1	1	60	150	4,5	4,82	46	164	13
1	1	72	120	5	6,01	45	160	13
2	2	72	126	6,3	3,93	53	185	13
1	2	78	96	4,5	4,47	52	162	12
1	1	72	108	9,9	4,39	46	159	12
2	2	84	148	3,3	5,36	42	153	14
2	1	60	162	5,5	4,05	44	154	12
2	1	72	78	5,7	6,44	98	165	14
1	2	78	156	4,8	4,67	39	155	13
2	1	66	159	5,2	5,29	56	156	12
1	1	72	132	5	5,35	45	156	12
2	1	72	126	5,9	5,00	49	154	12

2	2	90	144	4,7	3,88	42	155	13
1	1	72	138	4	4,71	35	150	12
2	2	78	138	5	3,75	44	161	13
1	1	72	132	4,5	5,57	60	171	14
2	1	60	150	4,9	3,77	48	155	14
1	2	78	108	4,7	2,95	45	155	13
1	1	72	132	4,5	3,75	39	140	14
2	1	54	132	5	3,00	46	149	14
1	1	60	120	6	3,37	41	146	13
2	1	66	102	5,3	4,05	72	162	13
2	2	84	132	6	4,16	50	153	14
1	1	66	90	5,6	3,93	52	154	13
2	2	84	120	5,2	4,26	50	159	13
2	2	96	120	5,6	4,19	43	152	13
1	2	90	124	5	5,92	57	165	13
2	2	90	114	4,8	4,47	51	160	13
2	1	60	108	4,8	3,86	49	158	13
1	1	60	128	4,9	4,75	45	158	13
2	2	84	150	6	3,24	46	152	13
1	1	48	108	5,2	3,76	30	138	13
2	1	60	120	6	3,61	56	162	13
1	1	78	120	5,8	5,14	59	182	13
2	2	78	126	5,8	4,92	50	157	12
2	1	60	120	5,9	2,91	49	157	13
2	2	72	132	5,7	3,96	45	150	13
1	1	60	96	5,2	3,94	51	167	13
2	1	66	108	6	4,35	45	157	13
2	2	72	114	5	4,24	60	147	14
2	2	78	138	5	5,24	50	150	13
1	2	96	108	6,5	4,92	36	145	14
2	2	78	102	5,1	3,49	44	152	14
1	1	54	120	5,4	4,96	38	150	13
2	1	60	108	5,2	5,44	39	140	12
2	2	76	126	5,5	3,57	50	157	13
1	1	67	105	5,5	6,07	55	147	13
2	1	54	132	5,8	3,30	46	160	12
1	1	60	150	4,5	3,29	46	164	13
1	1	72	120	5	4,08	45	160	13
2	2	72	126	6,3	4,93	53	185	13
1	2	78	96	4,5	2,87	52	162	12

También realizamos un test de normalidad para comprobar que los datos se ajustaban formalmente obteniendo un valor 16.64 ($p=0.73$) en el test Chi cuadrado de bondad de ajuste, lo que supone un buen ajuste a la distribución normal. En consecuencia, esperábamos que los alumnos eligieran esta variable como la que más se aproximaba a la distribución normal.

Ninguna de las otras variables se ajustaba completamente a la distribución normal en el test de bondad de ajuste, aunque la variable PULS_DESP (o TENSION_MAX) se acercaba bastante y podía ser admitida como solución válida.

En la Tabla 8.2.1.2 presentamos los estadísticos de estas variables y en la tabla 8.2.1.3, resumimos las características generales de las variables y si su ajuste por medio de la distribución normal es o no aceptable.

Las variables SEXO y DEPORTE (o GRUPO) debían rechazarse por ser cualitativas.

Las variables PULS_REP (o TENSION_MIN) y PULS_DESP (o TENSION_MAX) son discretas. Debido a que tienen muchos valores diferentes podrían aproximarse por una distribución normal. Los coeficientes de asimetría y curtosis son próximos a cero. En el caso de PULS_DESP (o TENSION_MAX), tanto el NORMAL PROBABILITY PLOT como la curva de densidad se aproximan al patrón normal, aunque no el gráfico SYMMETRY PLOT. Podemos considerar aceptable si el alumno elige esta variable.

La variable TALLA (o BRAZOS) tiene un coeficiente de asimetría y curtosis muy altos. En este caso sólo la curva de densidad tiene una forma ligeramente parecida a la normal, pero claramente no se ajustan el NORMAL PROBABILITY PLOT, el SYMMETRY PLOT, así como el histograma se separa de la curva de densidad teórica, además de ser multimodal. Además presentaba tres modas aunque esto sólo podía observarse desde el gráfico de tronco o desde el histograma pero sólo si se cambiaba el ancho de los intervalos, las demás variables eran

unimodales y en ninguna de ellas hay una diferencia grande entre media, mediana y moda.

Tabla 8.2.1.2. Estadísticos de todas las variables cuantitativas del fichero DEPORTE.SF

Estadísticos	PESO u HOMBROS	PULS_DESP o TENSION_MAX	PULS_REP o TENSION_MIN	TIEMPO_DIC o TIEMPOAGO	TIEMPO_SEP o TIEMPO_MAYO	EDAD	TALLA o BRAZOS
Media	48,6	123,5	71,5	4,5	5,3	13	156,2
Mediana	46,0	122,0	72,0	4,4	5,2	13	155,5
Moda	45,0	120,0	72,0	5,6	5,0	13	(**)
Asimetría tipificado	9,6	0,04	0,8	0,9	9,8	0,0	3,4
Curtosis tipificada	19,5	-0,4	-0,9	-0,8	24,5	-1,1	4,4
Asimetría	2,4	0,01	0,2	0,2	2,4	0,0	0,8
Curtosis	9,8	-0,2	-0,5	-0,4	12,2	-0,5	2,2

** Presenta tres modas: 150, 155 y 157 cm respectivamente.

La variable PESO (u HOMBROS) tiene un coeficiente de asimetría y curtosis muy altos y la asimetría a la derecha se percibe fácilmente en los diferentes gráficos. Ninguno de los gráficos se ajusta a los esperados en la distribución normal.

La variable EDAD es discreta con sólo 3 valores. Los coeficientes de asimetría y curtosis son exactamente igual a los normales. Asimismo media, mediana y moda coinciden exactamente. Esto puede confundir al alumno, pero no las representaciones gráficas que son muy diferentes de la normal.

Tabla 8.2.1.3. Características generales de las variables

Variable	Tipo	Características
PESO u HOMBROS	Cuantitativa Continua	
PULS_DESP o TENSION_MAX	Cuantitativa Discreta	Se admite como normal
PULS_REP o TENSION_MIN	Cuantitativa Discreta	
TIEMPO_DIC o TIEMPOAGO	Cuantitativa Continua	Prácticamente normal
TIEMPO_SEP o TIEMPO_MAYO	Cuantitativa Continua	
EDAD	Cuantitativa Discreta, con pocos valores diferentes	
TALLA o BRAZOS	Cuantitativa Continua	
DEPORTE o GRUPO	Cualitativa	
SEXO	Cualitativa	

La función de densidad en TIEMPO_SEP (o TIEMPO_MAYO) no tiene la forma característica de campana de Gauss y los coeficientes de asimetría y curtosis son muy altos.

8.2.3. ANÁLISIS DE LAS TAREAS PROPUESTAS EN LA EVALUACIÓN CON ORDENADOR

En esta sección realizaremos un análisis a priori de las tareas planteadas en la prueba con ordenador en las cuales el alumno debería justificar sus respuestas. Por medio de este análisis pretendemos mostrar los diversos elementos de significado que pensamos que podrían aplicar los alumnos para resolver cada cuestión. Esto nos permitirá fijar el significado institucional local previsto para la resolución de este instrumento, justificando en la sección 8.2.4 la validez de contenido de la prueba y luego, comparar con el significado personal que presenten los alumnos en sus resoluciones.

Pregunta 1. ¿Se puede considerar que la distribución de frecuencias de la variable PESO es simétrica? ¿Existen valores atípicos en la variable PESO?

Con esta cuestión pretendemos evaluar la comprensión de algunos prerequisitos que son importantes por estar implícitos en el concepto de distribución normal y han sido trabajados en las clases teóricas T1 y T2, y en las clases prácticas P1 y P2.

Los alumnos disponen de varias herramientas gráficas y numéricas para utilizar como apoyo en la resolución de esta cuestión. Los elementos de significado que sería posible aplicar son los

siguientes:

Elementos ostensivos:

Resúmenes numéricos: Se podrían aplicar los siguientes:

- *El SUMMARY STATISTICS.* La utilización de éste será correcta si se cambian las opciones por defecto, seleccionando los coeficientes de asimetría o de asimetría tipificado y la media, mediana y moda. Si el alumno utiliza este resumen podrá aplicar la propiedad de la posición relativa de media, mediana y moda para analizar si la variable es o no simétrica. Como podemos observar en la figura 8.2.3.1, los valores de estas tres medidas de posición no son muy aproximados, con lo cual, este hecho nos da una pauta para decir que la distribución no es simétrica y que además, por la posición de estas medidas se puede observar que la asimetría es a derecha. Otra posibilidad de análisis nos la dan el coeficiente de asimetría y el coeficiente de asimetría tipificado. En ambos casos, los valores de dichos coeficientes son mayores que cero, en consecuencia, podemos afirmar que la variable PESO es asimétrica a derecha, con lo cual se puede confirmar lo que se observó al analizar la posición de la media, mediana y moda.
- *El diagrama de tronco (STEM AND LEAF).* Por medio de él también puede analizarse la posición de media, mediana y moda, observar si hay o no valores atípicos y estudiar la forma de la distribución. (Ver figura 8.2.3.2)

Tabla 8.2.3.1. Distribución de frecuencias para la variable PESO

Figura 8.2.3.1.

Summary Statistics para PESO

Average = 48,6042
Median = 46,0
Mode = 45,0
Skewness = 2,38966
Stnd. skewness = 9,55865

Figura 8.2.3.2. Stem-and-Leaf Display para PESO:

unit = 1,0 1/2 represents 12,0

LO	/	30,0	30,0
2		3	
14		3	556688999999
28		4	11222233444444
(30)		4	55555555555566666666688999999
38		5	00000000001111222233
18		5	556667799
8		6	0000
		H	72,0 72,0 98,0 98,0

Class	Lower Limit	Upper Limit	Midpoint	Frequency	Relative Frequency	Cumulative Frequency	Cum. Rel. Frequency
at or below	30,0			2	0,0208	2	0,0208
1	30,0	37,0	33,5	4	0,0417	6	0,0625
2	37,0	44,0	40,5	22	0,2292	28	0,2917
3	44,0	51,0	47,5	44	0,4583	72	0,7500
4	51,0	58,0	54,5	14	0,1458	86	0,8958
5	58,0	65,0	61,5	6	0,0625	92	0,9583
6	65,0	72,0	68,5	2	0,0208	94	0,9792
7	72,0	79,0	75,5	0	0,0000	94	0,9792
8	79,0	86,0	82,5	0	0,0000	94	0,9792
9	86,0	93,0	89,5	0	0,0000	94	0,9792
10	93,0	100,0	96,5	2	0,0208	96	1,0000
above	100,0			0	0,0000	96	1,0000
Mean = 48,6042 Standard deviation = 10,3329							

- *La tabla de frecuencias.* Observando las frecuencias absolutas de la tabla 8.2.3.1, también podría determinarse si la distribución es o no simétrica. En este caso también es necesario que el alumno cambie las opciones por defecto para definir el máximo y mínimo valor de la variable y la cantidad de intervalos que desea obtener.

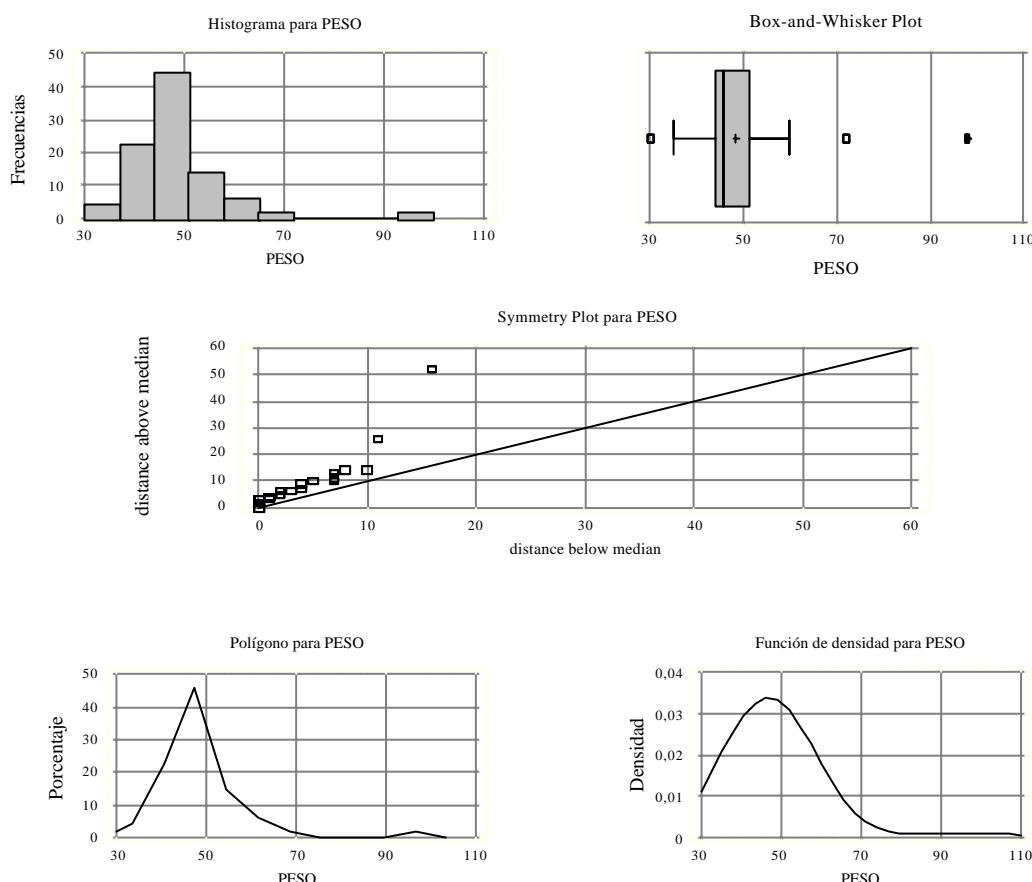
Resúmenes gráficos: Otra posibilidad de resolución se puede plantear a través de los resúmenes gráficos, o en su defecto, éstos pueden servir de apoyo visual a las conclusiones extraídas de los cálculos. Consideramos que la resolución será correcta si se utiliza algunos de los gráficos mostrados en la figura 8.3.2.3, donde además de presentar el gráfico se debe realizar una interpretación de éste en la que *se relacionen* algunos de los elementos que se describen a continuación:

- En el gráfico de la caja (BOX AND WHISKER PLOT). El alumno puede observar que la distribución posee valores atípicos, en este caso, si quisiera determinar exactamente cuáles son dichos valores podría ayudarse con el diagrama de tronco. También por medio del gráfico de la caja puede comparar la posición de media y mediana.
- El histograma. Este gráfico también puede dar una visión general de la forma de la distribución, en este caso, tomando, por ejemplo, 10 intervalos, se puede observar la asimetría a la derecha y también que hay algunos valores atípicos. En el caso de que el alumno utilice el histograma, sería conveniente que acompañara su argumentación con algún otro gráfico o cálculo para validar completamente su solución.
- El SYMMETRY PLOT. Es otro gráfico que se podría utilizar para comprobar que los datos no se ajustan a la recta y que además hay valores atípicos.
- El polígono de frecuencias relativas. También se puede relacionar la forma de este gráfico con la asimetría de la variable y la existencia de valores atípicos.
- La curva de densidad (DENSITY TRACE). Por medio de ella también se puede determinar la existencia de asimetría y su tipo.

Elementos Actuativos

Cálculo de valores atípicos. Este cálculo se puede realizar directamente si se utiliza el diagrama de tronco, o también si se selecciona en cada uno de los puntos que los representan en el diagrama de la caja, sólo que de esta manera, no suelen encontrarse todos los valores atípicos. En nuestro caso, sucede esto ya que los valores atípicos se presentan dos veces cada uno, por lo que si el alumno no se percata de esto, dirá que sólo hay tres valores atípicos, cuando en realidad son seis.

Figura 8.2.3.3. Resúmenes gráficos para la variable PESO.



Estudio descriptivo de datos con Statgraphics. En otras palabras, construcción de tablas, gráficos y resúmenes numéricos para el estudio de la variable, y su adecuación al problema. Evaluaremos también los casos en los que los alumnos deben ingresar opciones distintas a las que el programa entrega por defecto, como por ejemplo: la modificación del número de intervalos en las tablas de frecuencias o en los gráficos, la selección de los coeficientes o

medidas de tendencia central necesarias para realizar un buen análisis del problema, etc.

Comparación visual. Es probable que algunos estudiantes utilicen este tipo de elemento actuario para determinar la simetría y los valores atípicos. Es decir, si observamos directamente cualquiera de los gráficos presentados en la figura 8.3.2.3, se puede determinar visualmente la asimetría de la distribución y también la existencia de valores atípicos. También se puede realizar este contraste observando el diagrama de tronco o las frecuencias absolutas en la tabla de frecuencias.

Elementos Intensivos

El concepto de simetría o asimetría de una distribución, tipo de asimetría, propiedad de la posición relativa de media, mediana y moda, propiedad de los coeficientes de asimetría y asimetría tipificado, concepto de valor atípico.

Elementos Validativos

Aplicación y comprobación de propiedades, representación gráfica como una forma de validar las afirmaciones o argumentaciones, análisis y síntesis.

Pregunta 2. *Indica una variable de este fichero de datos que se ajuste, aproximadamente, a la distribución normal, indicando en qué te has basado para elegirla.*

El objetivo perseguido con este ítem es evaluar los elementos de significado que utilizan los alumnos para determinar qué distribuciones pueden ser adecuadamente ajustadas mediante la distribución normal y las propiedades que asignan a ésta, al finalizar la enseñanza. En particular el alumno debe *relacionar* las propiedades de continuidad (o aproximación a una distribución discreta con suficientes valores), simetría, unimodalidad, valor de la curtosis, y las proporciones de valores que se incluyen en los intervalos centrales de la distribución.

Un tipo de actividad similar se ha considerado en nuestro significado institucional local, implementándose en las sesiones prácticas P1 y P2. La principal diferencia entre las actividades planteadas en dichas sesiones y la presente es que, ahora se debe decidir entre diversas variables mientras que en las actividades anteriores se hacía el estudio de una variable determinada por la profesora. Existen diversas posibilidades para resolver esta tarea, a continuación, consideraremos algunas de las formas posibles que pueden tener los alumnos de resolverla.

Una primera selección podría basarse en la observación del carácter de cada variable. En consecuencia, dejaremos de lado las variables SEXO y DEPORTE (GRUPO) por ser cualitativas. También desecharmos la variable EDAD porque a pesar de ser cuantitativa, en este caso, es discreta con pocos valores, por lo tanto no cumple una de las condiciones que se exige para que una distribución pueda aproximarse a la normal.

Luego de esta primer selección nos quedan las siguientes variables: PULS_REPOSO (TENSION_MIN), PULS_DESP (TENSION_MAX), TIEMPO_SEP (TIEMPO_MAYO), TIEMPO_DIC (TIEMPOAGO), TALLA (BRAZOS) y PESO (HOMBROS). Para continuar con la selección, una primera posibilidad, y la que consideramos que tiene un mayor alcance exploratorio, sería realizar un resumen estadístico (SUMMARY STATISTICS) múltiple, es decir, seleccionando todas las variables que hemos mencionado y considerando los siguientes coeficientes o medidas: media, mediana, moda, coeficientes de asimetría y curtosis y los tipificados. En la tabla 8.2.1.2 se presentan los valores que aparecen en dicho resumen estadístico.

De esta manera, podremos analizar la simetría por medio de los coeficientes y por medio de la posición relativa de media, mediana y moda. También podemos analizar la curtosis por medio de los coeficientes correspondientes y si la distribución es unimodal. Así podremos realizar una segunda selección que nos llevará a dejar sólo aquéllas distribuciones que sean aproximadamente simétricas, unimodales y con una curtosis próxima a cero. Es decir, que luego de este análisis desecharíamos las siguientes variables:

PESO (HOMBROS): porque media, mediana y moda no coinciden ni son aproximadas, los coeficientes de asimetría y curtosis son mucho mayor que cero y los tipificados están fuera del intervalo [-2; 2]. Además, pose valores atípicos.

TIEMPO_SEP (TIEMPO_MAYO): también se desecha por los mismos motivos que la

anterior.

TALLA (BRAZOS): posee más de una moda y también los valores de los coeficientes de asimetría y curtosis tipificados son mayores que 2.

En consecuencia, resultan tres variables que han pasado esta primer selección: PULS_DESP (TENSION_MAX), PULS_REP (TENSION_MIN) y TIEMPO_DIC (TIEMPO_AGO).

En lo que sigue, describiremos los distintos análisis que podemos realizar sobre estas tres variables para determinar cuál se ajusta mejor a una distribución normal. Para ello debemos considerar cuáles son los puntos más importantes que podrán ayudarnos en nuestra decisión, es decir, debemos tener en cuenta lo siguiente:

- 1) *Análisis de la simetría*: lo cual podemos realizarlo por medio de la posición relativa de media, mediana y moda (1a), del coeficiente de asimetría o de asimetría tipificado (1b), o realizando una comparación visual (1c).
- 2) *Analizar curtosis*: por medio de los valores de los coeficientes.
- 3) *Analizar unimodalidad*
- 4) *Analizar la existencia de valores atípicos*
- 5) *Analizar porcentaje de casos en los intervalos centrales*
- 6) *Realizar una comparación visual de normalidad*: lo cual puede realizarse observando si los puntos de la distribución se ajustan a la recta normal o si el polígono de frecuencias o histograma se aproximan a la curva de densidad normal teórica.

Estos análisis los podemos realizar utilizando otros resúmenes numéricos distintos al que hemos realizado antes (SUMMARY STATISTICS múltiple) y también, utilizando algunos gráficos. A continuación mencionamos los resúmenes numéricos y gráficos que podrían utilizarse. Los números entre paréntesis corresponden a alguno de los análisis mencionados anteriormente que podemos realizar con cada uno de estos elementos ostensivos.

- *Diagrama de árbol*: (1c, 3 y 4)
- *Tabla de frecuencias*: (1c, 3, 4 y 5)
- *Gráfico de la caja*: (1a, 1c y 4)
- *Histograma*: (1c, 3 y 4)
- *Polígono de frecuencias*: (1c, 3)
- *Normal probability Plot*: (1c, 4 y 6)
- *Density Trace*: (1c, 2, 3 y 6)
- *Symmetry Plot*: (1c y 4)
- *Histograma y curva de densidad superpuestos*: (1c, 3 y 4)

Seguramente los alumnos no utilicen todas estas posibilidades pero es probable que empleen más de uno. Por lo tanto, consideraremos que la respuesta será más completa cuanto más elementos de análisis *relacionen* en sus informes. Consideraremos correctas aquellas respuestas en las que se haya seleccionado la variable TIEMPO_DIC (TIEMPO_AGO) o PULS_DESP (TENSION_MAX). A continuación, resumimos los elementos de significado que, desde lo institucional, prevemos que podrán ponerse en juego para la resolución de esta tarea.

Elementos ostensivos

Todos los resúmenes, tanto gráficos como numéricos que hemos descrito podrán realizarse por medio de Statgraphics.

Representaciones numéricas: puede utilizarse el resumen estadístico (SUMMARY STATISTICS) en el cual se puede seleccionar media, mediana y moda, coeficientes de asimetría y curtosis y los tipificados y la desviación típica. Otros resúmenes que podrían utilizar los alumnos pueden ser: la tabla de frecuencias, el diagrama del tronco; las áreas de cola (TAIL AREAS).

Representaciones gráficas: se considerará correcto el uso del gráfico de la caja (BOX-AND-WHISKER PLOT), el histograma de frecuencias, la curva de densidad (DENSITY TRACE), el NORMAL PROBABILITY PLOT, el SYMMETRY PLOT, el polígono de frecuencias o el histograma de frecuencias con la curva de densidad superpuestos.

Elementos actuativos

Estudio descriptivo de datos para ajustar una curva. Consideraremos los casos en los que los alumnos deben ingresar opciones distintas a las que el programa entrega por defecto, como

por ejemplo: la modificación del número de intervalos en las tablas de frecuencias o en los gráficos, la selección de los coeficientes o medidas de tendencia central necesarias para realizar un buen análisis del problema, o la selección del polígono de frecuencias.

Cálculo de probabilidades y valores críticos. Es posible que algún alumno realice esta acción para aplicar la propiedad de los intervalos centrales.

Cálculo de los límites del intervalo central que contiene una proporción dada de observaciones. Este elemento actuativo también se podrá evaluar cuando los alumnos apliquen la regla de los intervalos centrales para observar si la variable se ajusta o no por medio de la distribución normal.

Cálculo de porcentajes o proporciones en tablas de frecuencias modificando los intervalos (con ordenador). También este elemento será visible cuando se aplique la regla mencionada anteriormente.

Comparación visual. Este elemento aparecerá en aquellos casos que se realice una comparación visual del histograma o del polígono de frecuencias con la curva de densidad teórica de una distribución normal ajustada con la misma media y varianza que la distribución empírica de los datos.

Elementos intensivos

Carácter cualitativo / discreto / continuo de la variable seleccionada. Sólo las variables continuas o aquellas discretas con un número suficiente de valores podrían aproximarse a una distribución normal, estas últimas como modelo aproximado debido a los teoremas de límite.

Simetría / asimetría de la distribución. Los alumnos pueden estudiar esta propiedad mediante el examen de diferentes gráficos, como por ejemplo, el symmetry plot y el cálculo de los coeficientes de asimetría y asimetría tipificado, así como por la aplicación de la *propiedad de la posición relativa de media, mediana y moda*.

Unimodalidad. Es otra de las propiedades necesarias pero no suficiente para decidir si una distribución puede aproximarse a una distribución normal.

Otras propiedades o conceptos que los alumnos *deben relacionar* en esta actividad serán: *Propiedad de la proporción de casos en los intervalos centrales de la distribución normal, Propiedades estadísticas de la distribución normal, Propiedad de la posición relativa de media, mediana y moda, Coeficientes de asimetría y curtosis y coeficientes tipificados, interpretación correcta de tales coeficientes, Valores atípicos.*

Elementos validativos

En general, evaluaremos elementos validativos tales como: análisis, comprobación o aplicación de propiedades de la distribución normal, representación gráfica como elemento validativo y síntesis, que permiten observar razonamientos de alto nivel y el grado de comprensión de las tareas.

Pregunta 3. Calcula los parámetros de la distribución normal teórica que mejor ajustaría a la variable que has elegido en el apartado 2.

Pregunta 4. Calcula el valor de la mediana y los cuartiles de la distribución normal teórica que has ajustado a los datos.

El objetivo de estas cuestiones es evaluar si los alumnos reconocen los parámetros de una distribución normal que ajustaría a unos datos en un contexto práctico y si saben seleccionar el programa que permite realizar este ajuste. Asimismo queremos comprobar si los alumnos diferencian las distribuciones teóricas de las empíricas. La segunda parte del ítem se incluye con la finalidad de ver si los alumnos manejan la opción de cálculo de valores críticos dentro del programa PLOT o bien con el programa DISTRIBUTION FITTING. Tradicionalmente el cálculo de área ha sido un punto central en la enseñanza de la distribución normal, pero éste queda reducido cuando se usa el ordenador. Sin embargo, el alumno debe ser capaz de identificar el programa que le proporciona unas áreas o valores críticos dados para resolver el problema e interpretar los resultados. Este tipo de actividades han sido planteadas en las sesiones prácticas P2 y P3.

Para la primer parte de la tarea se utilizará la opción ANALYSIS SUMMARY del programa DISTRIBUTION FITTING, con la que se obtiene directamente la media y desviación típica de la distribución normal teórica ajustada. Para el cálculo de la mediana, todo lo que tienen que hacer los alumnos es *relacionar las posiciones de mediaç y, mediana* en la distribución normal, o bien *relacionar* la idea de mediana como percentil del 50% o como punto para el cual la función de distribución es igual a 0.5.

En la segunda parte de la tarea se pueden utilizar dos programas diferentes con los cuales se pueden obtener los mismos resultados, que son: PROBABILITY DISTRIBUTIONS y DISTRIBUTION FITTING. En el primer caso se dispone de distintas distribuciones teóricas, de las cuales se deberá seleccionar la opción NORMAL. Luego se deberá cambiar la opción por defecto (ya que aparece por defecto los parámetros de la normal típica), introduciendo los valores de los parámetros, para ingresar posteriormente a la opción INVERSE CDF, con la que se podrá calcular la mediana y los cuartiles. Éstos también pueden calcularse por medio de la opción CRITICAL VALUES de DISTRIBUTION FITTING. Estas opciones sustituyen, en el trabajo con ordenador, el cálculo manual de probabilidades a partir de las tablas de la distribución normal.

La complejidad semiótica de las tareas planteadas en esta prueba se pone de manifiesto por el hecho de que *cada uno de estos elementos está íntimamente relacionado con los demás* y, en ciertos casos, deben comprobarse con diferentes procedimientos, que además, se encuentran en diferentes opciones del programa. Por otro lado, algunas veces hay que trabajar con los datos empíricos, mientras que otras, hay que trabajar con la distribución teórica. En lo que sigue resumimos los elementos de significado que se evalúan por medio de esta actividad.

Elementos ostensivos

Resúmenes numéricos: valores de los parámetros de la distribución normal que se ajusta a la distribución empírica, calculados mediante ANALYSIS SUMMARY de DISTRIBUTION FITTING, mediana y cuartiles calculados con CRITICAL VALUES o INVERSE CDF.

Elementos actuativos

Cálculo de los parámetros de la distribución normal, cambio de los parámetros normales en el caso que se utilice el menú PLOT- PROBABILITY DISTRIBUTIONS, cálculo de valores críticos, correspondiendo éstos a la mediana y los cuartiles.

Elementos intensivos

Identificación de los parámetros de una distribución normal, cuartiles, mediana, percentiles, distribución teórica y distribución empírica.

Elementos validativos: Análisis y síntesis.

8.2.4. VALIDEZ DE CONTENIDO DEL INSTRUMENTO

En las Tablas 8.2.4.1 y 8.2.4.2 presentamos como resumen los elementos de significado evaluados con la prueba, que definen el contenido del instrumento. En ellas se detallan los elementos de significado específicos de la distribución normal y también, aquellos elementos de significado relacionados con otros conceptos que pueden intervenir en la resolución de las actividades planteadas en la prueba de ensayo.

Al comparar dichas tablas con las que se presentan en el Capítulo VII (Tablas 7.2.4.1, 7.2.4.2, 7.2.4.3 y 7.2.4.4), vemos que en este caso hay una representación mucho mayor de los elementos validativos, así como también dentro de los elementos ostensivos, se debe aplicar una mayor cantidad de representaciones gráficas y numéricas y desaparecen las representaciones simbólicas.

El rango de elementos actuativos es más amplio y complementa los que aparecían en el cuestionario. Los elementos intensivos son poco más o menos los mismos, con la diferencia en que deben aplicarse conjuntamente, sobre todo en las preguntas 1 y 2, lo cual entraña una tarea de mayor nivel. La pregunta 2 es sin duda la de mayor complejidad semiótica y *donde se relacionan mayor número de elementos*.

En resumen, pensamos que nuestro análisis muestra que, el cuestionario complementado con la prueba de ensayo cubren de una forma adecuada los elementos de significado fijados en

la enseñanza del tema y efectivamente observados, de acuerdo a las implicaciones de nuestro marco teórico sobre la evaluación.

Tabla 8.2.4.1. Elementos de significado específicos de la distribución normal evaluados en la prueba con ordenador

Elementos de significado	Preguntas en que se evalúa			
	P1	P2	P3	P4
Extensivos				
Ajuste de un modelo (aproximación al histograma)		X	X	X
Ostensivos				
	Representaciones gráficas			
Gráfica de la función de densidad normal		X	X	X
Histograma y curva de densidad superpuestos		X	X	X
NORMAL PROBABILITY PLOT		X		
Representación de áreas o de intervalos bajo la curva normal		X		
	Representaciones numéricas			
Áreas de cola (TAIL AREAS)		X		X
Valores críticos (CRITICAL VALUES)		X	X	X
DISTRIBUTION FITTING				
Actuativos				
Estimación de probabilidades a partir de tablas de frecuencia		X		
Estudio descriptivo de datos para ajustar una curva		X	X	
Cálculo de áreas o probabilidades en la curva normal y de valores críticos (con ordenador)		X	X	X
Cálculo de parámetros en la distribución normal			X	
Cambio de parámetros de la distribución normal			X	X
Comparación visual		X		
Obtención de límites en intervalos centrales		X		
Intensivos				
Área bajo la curva normal, áreas de cola, valores críticos		X		X
Parámetros de la distribución normal		X	X	X
Posición relativa de media, mediana y moda en la d. normal		X		
Probabilidad de valores en un intervalo en la d. normal		X		
Propiedad de los intervalos centrales en la distribución normal		X		
Simetría en la distribución normal		X		
Curtosis en la distribución normal		X		
Unimodalidad de la distribución normal		X		
Validativos				
Análisis		X	X	
Aplicación de una propiedad		X	X	X
Comprobación de casos particulares o de propiedades		X		
Representación gráfica		X	X	
Síntesis		X	X	X

Tabla 8.2.4.2. Elementos de significado relacionados con otros conceptos evaluados en la prueba con ordenador

Elementos de significado	Preguntas en que se evalúan			
	P1	P2	P3	P4
Ostensivos				
Representaciones gráficas				
Histograma	X	X		
Curva de densidad	X	X		
Polígono de frecuencias	X	X		
Gráfico de la caja	X	X		
SYMMETRY PLOT	X	X		
Representaciones numéricas				
Diagrama del tronco	X	X		
Tabla de frecuencias	X	X		
SUMMARY STATISTICS	X	X	X	
Representaciones simbólicas				
μ, σ, \bar{x}, s		X	X	
Actuativos				
Estudio descriptivo de una variable	X	X		X
Cálculo de valores atípicos	X	X		
Obtención de límites en intervalos		X		
Cálculo de porcentajes o proporciones en tablas de frecuencias con ordenador		X		
Representación gráfica de datos	X	X	X	
Intensivos				
Ajuste, bondad de ajuste	X	X	X	X
Coeficientes: de asimetría, de curtosis y tipificados		X	X	
Desviación típica muestral y poblacional		X	X	
Distribución empírica y distribución teórica		X	X	X
Estadísticos de orden: cuartiles, percentiles		X	X	X
Frecuencias: absolutas, relativas, acumuladas, acumuladas relativas	X	X		
Gráficos: histograma, polígono de frecuencias, diagrama de tronco, gráfico de caja	X	X		
Intervalos centrales. Intervalos de clases, límites de intervalos		X		
Media muestral y poblacional		X	X	
Medidas de tendencia central: media, mediana, moda. Posiciones relativas	X	X		
Unimodalidad, multimodalidad	X	X		
Muestra aleatoria, Población		X	X	
Probabilidad, reglas de cálculo de probabilidades		X	X	
Proporción, porcentaje		X	X	
Simetría – Asimetría. Tipos de asimetría	X	X		
Valores atípicos	X	X		
Variables estadísticas y variables aleatorias. Tipos de variables	X	X		
Validativos				
Comparación de resultados por distintos métodos	X	X		
Demostraciones informales	X	X		
Representación gráfica	X	X	X	
Análisis	X	X	X	X
Aplicación o comprobación de una propiedad	X	X	X	
Síntesis	X	X	X	X

8.3. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

La prueba fue realizada individualmente por los alumnos, a cada uno de los cuales se proporcionó un ordenador, la hoja con las tareas y el fichero de datos. Los alumnos pudieron consultar sus notas de clase y apuntes, pero no hablar entre sí. Se indicó a los alumnos que grabasen sus respuestas a las tareas en un fichero Word, incluyendo los gráficos y cálculos de Statgraphics que consideraran convenientes para justificarlas y entregando el fichero grabado a

la profesora. Dispusieron de tres horas para realizar la prueba, aunque la mayoría acabaron en unas dos horas y media. En total recogimos los resultados de 117 alumnos (56 del curso 1998-99 y 61 del curso 1999-2000).

Una vez recogidos los archivos grabados por los alumnos, se imprimieron. Se realizó un análisis de contenido de los informes escritos por los alumnos, para lo cual primero definimos los elementos de significado que podían aparecer en la resolución de las tareas planteadas, discriminando los correspondientes a la pregunta sobre simetría (pregunta 1) y a las preguntas sobre la distribución normal (preguntas 2, 3 y 4). En estas últimas, diferenciamos además, los elementos específicos de la distribución normal y los relacionados con otros conceptos que están implícitos cuando se aplica la distribución normal, del mismo modo que lo hicimos en el análisis de las tareas en el capítulo VI.

Para cada alumno y cada pregunta, analizamos si en su resolución el alumno había usado correcta o incorrectamente dicho elemento de significado, asignando un código a una variable definida para tener en cuenta dicho elemento. Una vez que realizamos la clasificación de elementos de significado, procedimos a la codificación de las respuestas de la siguiente manera:

- 0 si el alumno no aplicó el elemento correspondiente;
- 1 si el alumno lo aplicó de forma correcta;
- 2 si el alumno lo aplicó de forma incorrecta.

De esta forma, resultaron 23 variables (una por cada elemento de significado) correspondientes a la pregunta sobre simetría y valores atípicos (ver tabla 8.3.1.2) y 56 correspondientes a las preguntas sobre la distribución normal. Entre éstos tenemos, 31 que son específicos de la distribución normal (ver tabla 8.3.1.7) y 25 relacionados con otros conceptos (ver tabla 8.3.1.9). Se grabaron tres ficheros de datos, uno correspondiente a la pregunta sobre simetría, otro correspondiente a los elementos específicos de la distribución normal y un tercero que incluye los elementos de significado relacionados con otros conceptos.

En las tablas 8.3.1.2, 8.3.1.7 y 8.3.1.9, se presentan los resultados obtenidos en relación con los elementos de significado correspondientes a las cuatro tareas planteadas en el total de la muestra (117 alumnos). En las tablas 8.3.2.1, 8.3.2.3 y 8.3.2.4, se presentan las frecuencias de aplicación de cada elemento, discriminándolas por curso, con 56 alumnos el curso lectivo '98-'99, y 61 el curso '99-2000. En las tablas 8.3.3.1, 8.3.3.3 y 8.3.3.4, se presentan las frecuencias de aplicación de cada elemento, discriminándolas por tipo de alumnos, teniendo en cuenta que el tipo 1 corresponde al grupo de alumnos que estudiaron estadística previamente (59) y el tipo 2 corresponde al grupo que no había estudiado estadística antes (58).

Analizamos los diversos elementos de significado que han sido puestos en juego por los alumnos en las secciones que aparecen a continuación.

8.3.1. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS GLOBALES

Elementos de significado puestos en juego en la evaluación de la simetría y valores atípicos

Pregunta 1. *¿Se puede considerar que la distribución de frecuencias de la variable PESO es simétrica? ¿Existen valores atípicos en la variable PESO?*

En primer lugar, hemos clasificado las respuestas dadas en relación con la simetría de la distribución, cuyos resultados se presentan en la Tabla 8.3.1.1. Aunque la variable es asimétrica a derecha, la respuesta más común ha sido que la distribución es asimétrica, pero sin especificar qué tipo de asimetría tiene. En consecuencia, el principal problema en esta actividad ha sido la determinación del tipo de asimetría de la distribución.

Consideramos que el hecho de manejar dos sistemas de referencia diferentes hace que se produzca un problema en el alumno, ya que confunde su izquierda con la izquierda de la gráfica y en consecuencia, confunde los dos tipos de asimetría. Se presenta aquí el problema de una ambigüedad del lenguaje que ha sido denunciada por Falk y Greenbaum (1985) respecto a otros conceptos estadísticos. Este problema se ve agravado por la dificultad que presentaron algunos alumnos en la interpretación del coeficiente de asimetría. Esta dificultad pudo observarse también en el desarrollo de las clases teóricas y prácticas.

Tabla 8.3.1.1. Frecuencia y porcentaje de respuestas sobre la simetría de la distribución

Respuesta	Curso 98-99	Curso 99-2000	Total
	n=56	n=61	
Asimétrica a la derecha (Correcta)	12 (21,4)	22 (36,1)	34 (29,1)
Asimétrica a la izquierda	6 (10,7)	3 (4,9)	9 (7,7)
Asimétrica (sin especificar)	28 (50,0)	27 (44,3)	55 (47,0)
Simétrica	10 (17,9)	5 (8,2)	15 (12,8)
No responde	0 (0,0)	4 (6,5)	4 (3,4)
Total	56 (100,0)	61 (100,0)	117 (100,0)

Si consideramos que las respuestas son incorrectas cuando has contestado que la distribución es simétrica a la izquierda, o cuando no dan ninguna respuesta, el porcentaje de respuestas incorrectas ha disminuido el segundo curso (del 28,6% al 19,5%). Considerando las respuestas correctas (asimétrica a la derecha), o parcialmente correcta (asimétrica sin especificar), el porcentaje de respuestas correctas aumenta (de 71,4% a 80,4%). Pensamos que la mejora observada es producto de las modificaciones realizadas en la enseñanza y en el material entregado a los alumnos. (comparar Anexos I y II). La redacción de este tema se modificó en los apuntes y además se puntuó explícitamente el tema del referencial respecto del cuál debía considerarse la asimetría, insistiendo la profesora sobre esto en las clases.

A continuación analizamos los elementos de significado puestos en juego por los alumnos al resolver esta pregunta.

Elementos ostensivos

Como se observa en la tabla 8.3.1.2, los alumnos han aplicado nueve elementos ostensivos, seis de ellos son resúmenes gráficos y tres, resúmenes numéricos. En general, los alumnos han aplicado los diversos elementos ostensivos en forma correcta en sus resoluciones, excepto el gráfico Scatterplot. También se puede apreciar que, la mayoría ha utilizado más de un resumen, siendo los más aplicados el histograma, el SUMMARY STATISTICS y el diagrama de la caja. Algunos alumnos han aplicado el gráfico SYMMETRY PLOT, a pesar de no estar previsto en el significado institucional local previsto.

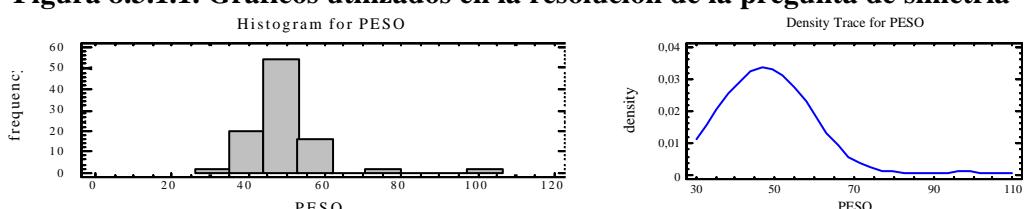
Al comparar con el uso de elementos ostensivos en las sesiones prácticas P1 y P2 en que se pedía al alumno analizar la simetría (Tablas 6.3.1 y 6.6.1), observamos un uso mayor de histogramas, gráficos de tronco y gráfico de la caja, lo que es debido a que la actividad planteada en la evaluación final es mucho más abierta y no se dan instrucciones específicas a los alumnos sobre qué representaciones utilizar. Observamos también mucho menor porcentaje de uso incorrecto, con lo que puede deducirse el proceso de aprendizaje de los alumnos, respecto a dichas sesiones prácticas.

Elementos actuativos

También en este caso los alumnos han aplicado más de un elemento, pero se debe destacar el gran porcentaje que ha realizado una comparación visual, y algunos de ellos sólo han realizado esto, lo cual en algunas ocasiones ha conducido a errores como los de determinación de los valores atípicos o del tipo de simetría.

Se utilizó la comparación visual en las sesiones teóricas T1 y T2 y en las sesiones prácticas P2 y P3, por lo que esto explica que los alumnos hayan utilizado mayoritariamente este elemento ya que se había trabajado bastante en la enseñanza. En relación con este elemento, los errores cometidos se debieron a una comparación incorrecta. Un ejemplo de lo dicho anteriormente lo podemos ver en la resolución presentada por el siguiente alumno, que ha determinado correctamente que la distribución no es simétrica pero es incorrecta la determinación del tipo de asimetría y no calcula los valores atípicos.

“Como puede observar la variable PESO no es simétrica, pues el valor medio no está en la simetría con respecto al eje vertical, las dos áreas que separan ese eje son totalmente desiguales; también para que fuese simétrica la mediana debería de coincidir con la media y en este caso no coinciden. Para observarlo mejor voy a proceder a copiar la gráfica relacionada con la distribución normal. Como se puede observar esta gráfica está inclinada hacia la izquierda”.

Figura 8.3.1.1. Gráficos utilizados en la resolución de la pregunta de simetría

Asimismo, otros alumnos han utilizado la comparación visual determinando de manera correcta la asimetría y la existencia de valores atípicos aunque, en algunos casos, no han calculado los valores exactos como puede verse en el siguiente ejemplo:

“(En este caso el alumno ha utilizado solamente el histograma que se muestra en la figura 8.3.1.1) No, es asimétrica respecto a su centro, además la asimetría es a la derecha. Como podemos observar en la gráfica, sí hay un valor atípico que está más despegado de los demás en el intervalo (95; 105)”.

Respecto al estudio descriptivo de la distribución, el porcentaje de errores es similar al de las clases prácticas (Tablas 6.3.1 y 6.6.1), lo cual denota que no se ha superado la dificultad en este tipo de análisis. Menos de la mitad de los alumnos hacen uso de este elemento, que sería necesario, por ejemplo, para el cálculo del coeficiente de asimetría, lo que indica una inseguridad sobre el significado del coeficiente.

Tabla 8.3.1.2. Elementos de significado puestos en juego por los alumnos en la resolución de la pregunta sobre simetría (Pregunta 1)

Elementos de significado	Correcto		Incorrecto	
	Frec	Porc	Frec	Porc
Ostensivos				
Representaciones gráficas				
Histograma	57	48,7	0	0,0
Polígono de frecuencias	30	25,6	0	0,0
Gráfico de la caja	43	36,8	0	0,0
Symmetry plot	5	4,3	0	0,0
Curva de densidad	37	31,6	0	0,0
Scatterplot	0	0,0	3	2,6
Representaciones numéricas				
Diagrama de tronco	42	35,9	0	0,0
Tabla de frecuencias	26	22,2	0	0,0
SUMMARY STATISTICS	47	40,2	0	0,0
Actuativos				
Cálculo de valores atípicos	53	45,3	27	23,1
Estudio descriptivo de una variable	59	50,4	6	5,1
Comparación visual	90	76,9	15	12,8
Intensivos				
Simetría y asimetría	89	76,1	24	20,5
Tipo de asimetría	34	29,1	9	7,7
Propiedad de la posición relativa de media, moda y mediana	30	25,6	7	6,0
Coeficiente de asimetría	37	31,6	2	1,7
Coeficiente de asimetría tipificado	25	21,4	2	1,7
Valores atípicos	85	72,6	14	12,0
Validativos				
Comprobación de propiedades	23	19,7	0	0,0
Aplicación de propiedades	38	32,5	7	6,0
Análisis	61	52,1	4	3,4
Representación gráfica	90	76,9	15	12,8
Síntesis	87	74,4	15	12,8

Elementos intensivos

En la pregunta no se pide expresamente por el tipo de asimetría, pero en todas las actividades realizadas anteriormente en relación con la simetría el alumno debía interpretar el tipo de asimetría, en caso de que la distribución fuese asimétrica. Además al comenzar la prueba se indicó a los alumnos que justificase todas sus respuestas.

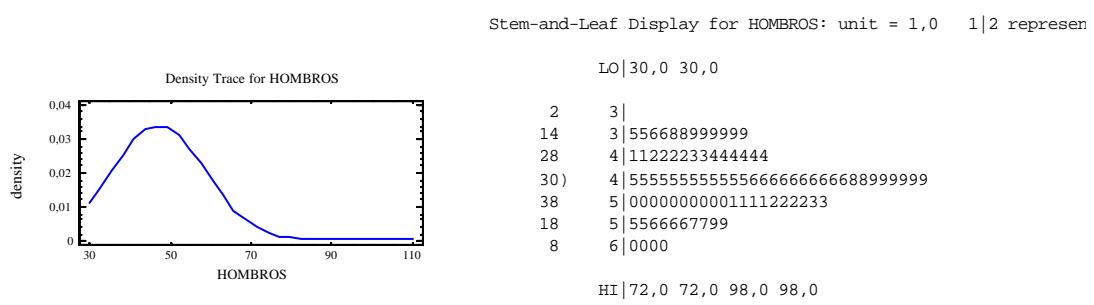
Los alumnos han aplicado seis elementos intensivos diferentes que se detallan en la tabla 8.3.1.2. Lo más sobresaliente en este caso es la diferencia entre el porcentaje de alumnos que usan correctamente la idea de simetría/asimetría y los que determinan correctamente el tipo de asimetría. Esto puede ser consecuencia de que muchos alumnos sólo realizan una comparación visual (y en muchos casos utilizando el histograma solamente) y muy pocos utilizan los valores

de los coeficientes de asimetría o la propiedad de la posición relativa entre media, mediana y moda.

El porcentaje de los que determinan correctamente el tipo de asimetría disminuye respecto a las clases prácticas P1 y P2, por lo que los alumnos parecen no haber realizado un aprendizaje significativo de este elemento. Nuevamente observamos la dificultad que mencionamos para los elementos actuativos en relación con la determinación del tipo de asimetría.

A continuación damos un ejemplo de respuesta correcta de un alumno que realiza una comparación visual utilizando elementos ostensivos:

- *No es simétrica.*
- *La existencia de valores atípicos ya nos indica que no, aunque por la apariencia del gráfico del tronco pudiera significar lo contrario.*
- *Los valores de los coeficientes tipificados de simetría y curtosis también nos confirman esta asimetría, muy fuerte (Stnd. skewness = 9,55865) y positiva, hacia la derecha y además muy apuntada hacia arriba, leptocúrtica (Stnd. kurtosis = 19,5368).*
- *También podemos observar la asimetría con la curva de densidad (opciones gráficas).*



- *SI tiene valores atípicos.*
- *El gráfico del tronco muestra varios valores atípicos: los inferiores a 30 (2) y los superiores a 70 (4). Esto mismo se podría haber observado desde el gráfico de la caja.*

Otro punto notable es la diferencia entre el número de alumnos que han interpretado correctamente que la distribución posee valores atípicos y aquellos que *ponen en relación la idea de valor atípico con su determinación* (Cálculo de valores atípicos. Elemento actuativo). Esto puede verse si comparamos el porcentaje de alumnos que ha dado una respuesta correcta en relación con los valores atípicos (72,6 %) y aquellos que han calculado y determinado correctamente todos los valores atípicos (45,3 %). Un ejemplo de lo expresado antes, puede observarse si comparamos los ejemplos de los Cuadros 8.3.1.1 y 8.3.1.2.

Elementos validativos

Los alumnos han utilizado diversos elementos de significado correctamente y también usan diferentes tipos de validaciones. Un porcentaje bastante alto de alumnos (74,4%) llega a realizar una síntesis, *poniendo en relación diferentes elementos de significado*. Asimismo se puede apreciar que ha habido un incremento, tanto en el número de alumnos como en la diversidad de validaciones, con respecto a los elementos validativos aplicados en las tareas prácticas desarrolladas durante el curso. Aunque es destacable que la mayoría de los alumnos (76,9%) ha apoyado sus argumentaciones en las representaciones gráficas, siendo mucho menor el porcentaje (32,5%) de alumnos que han aplicado propiedades.

Un ejemplo es el siguiente alumno que además de utilizar el coeficiente de asimetría *los relaciona* con los siguientes gráficos: el gráfico de tronco, el gráfico de caja, el polígono de frecuencias y la función de densidad, para realizar su argumentación. El alumno ha realizado un análisis basado en diversos elementos, utilizando la representación gráfica como validación pero también aplica propiedades tales como la de la posición relativa de la media y mediana, y por último realiza una síntesis *relacionando* todos los resultados obtenidos.

"A la vista de estos datos y gráficos, podemos observar cómo la distribución de frecuencias de la variable peso no es simétrica por lo siguiente:

- *El coeficiente de asimetría es muy alto (mayor que 2), además de ser positivo, lo que indica que la distribución es asimétrica a la derecha.*
- *En el polígono de frecuencias y en el diagrama de densidad observamos como la distribución tiene una larga cola a la derecha, por lo que los datos se concentran al principio de la distribución.*

- También podemos observar que la media y la mediana no coinciden (gráficamente se muestra en el gráfico de la caja), lo que es otra señal más de su asimetría. (Media=48,6042; Mediana=46,0)".

También ha habido alumnos que no utilizan ningún tipo de análisis previo en su argumentación, utilizando sólo la representación gráfica como apoyo, como el siguiente:

"Como podemos comprobar en el histograma de frecuencias, la variable PESO no es simétrica, puesto que los valores se acumulan a la derecha, por lo tanto tiene asimetría hacia la derecha".

Su validación está basada sólo en el histograma. Además responde parcialmente a la pregunta ya que no dice si la distribución tiene valores atípicos y en consecuencia no los calcula. Creemos que esto puede ser consecuencia de que al utilizar solamente el histograma, éste le da una cierta información que puede ser válida para determinar si la distribución es o no simétrica, pero falla cuando es preciso determinar otros resultados tales como los valores atípicos.

Número de elementos de significado utilizados por los alumnos del grupo al resolver la pregunta sobre simetría

Para poder obtener un resumen global de la actividad desarrollada por los alumnos en la resolución de la tarea, se han calculado, para cada alumno el número total de elementos de significado usados correcta e incorrectamente. En la tabla 8.3.1.3 se muestran los valores de los estadísticos que se obtuvieron al realizar una comparación de medias en las puntuaciones totales obtenidas para cada tipo de elemento de significado. En dicha tabla vemos que, cada alumno en promedio, usa más de un elemento de cada tipo en su solución.

También observamos el predominio de los elementos correctamente utilizados sobre los incorrectos. Esto se confirma mediante la prueba T de diferencias de medias entre muestras relacionadas, cuyos resultados se incluyen en la tabla (anteriormente hicimos una prueba de análisis de varianza de medida repetida para estudiar la significación global de la diferencia entre elementos usados correcta e incorrectamente y evitar el problema de las comparaciones múltiples, obteniendo una significación $p < 0,001$). Podemos ver que la prueba T ha resultado altamente significativa en todos los elementos de significado, a favor del uso correcto. Este análisis nos permite reafirmar algunos de los argumentos descritos en la sección anterior. Por ejemplo, podemos ver que los alumnos prácticamente no han aplicado incorrectamente ningún elemento ostensivo y además es posible determinar que los alumnos han aplicado correctamente más de un elemento ostensivo para la resolución de la tarea de simetría. También se puede apreciar que los elementos intensivos y validativos han sido aplicados correctamente en un número similar y que el número menor de elementos empleados son los actuativos, aunque también cada alumno aplica más de uno, además debemos considerar que en este caso es menor el número de elementos implicados.

Tabla 8.3.1.3. Números de elementos usados por los alumnos en la determinación de la simetría (Pregunta 1)

Elementos de significado	Media		Desviación típica		T	Significación
	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto		
Ostensivos	2,48	0,00	1,35	0,00	19,870	0,000
Actuativos	1,73	0,41	1,09	0,68	8,776	0,000
Intensivos	2,62	0,42	1,70	0,81	10,549	0,000
Validativos	2,56	0,35	1,64	0,80	10,769	0,000

Elementos de significado específicos de la distribución normal puestos en juego por los alumnos en la resolución de las tareas 2, 3 y 4

En este apartado analizaremos los resultados relacionados con los elementos de significado específicos de la distribución normal que los alumnos han aplicado en la resolución de las tareas 2, 3 y 4. Los resultados se muestran en las Tablas 8.3.1.4, 8.3.1.5, 8.3.1.6 y 8.3.1.7. Las preguntas específicamente relacionadas con la distribución normal fueron las siguientes:

Pregunta 2. Indica una variable de este fichero de datos que se ajuste, aproximadamente, a la distribución normal, indicando en qué te has basado para elegirla.

Pregunta 3. Calcula los parámetros de la distribución normal teórica que mejor ajustaría a la variable que has elegido en el apartado

Pregunta 4. Calcula el valor de la mediana y los cuartiles de la distribución normal teórica que has ajustado a los datos.

En la Tabla 8.3.1.4 presentamos las características de las variables contenidas en el fichero de datos, así como también la frecuencia y el porcentaje de estudiantes que seleccionaron cada una de ellas, considerándola como normal y nos da, en consecuencia, información del significado personal global de la distribución normal para estos alumnos y cómo se diferencia respecto al significado institucional local observado en la enseñanza. Las variables marcadas con el asterisco (*) son las que se consideraron correctas.

Los resultados de la tabla 8.3.1.4, muestran alrededor de un 45% de estudiantes que seleccionaron una de las dos variables que más se podían ajustar por medio de la distribución normal. En otros casos (TALLA), una proporción alta de estudiantes (alrededor del 20%) seleccionaron una variable con curtosis alta y hasta una variable discreta (alrededor del 20 % de alumnos) con sólo 3 valores distintos (EDAD). No obstante, los alumnos se han guiado por el análisis de los datos, ya que entre los dos pares de variables semejantes (pulsaciones en reposo y después, y tiempo en Septiembre y Diciembre) eligen en mayor proporción la que se aproxima bien a la distribución normal (31% para PULS_DESP y 10% para TIEMPO_DIC).

Además podemos ver que el elemento distractor en la variable EDAD ha sido una característica muy potente. Por un lado, los alumnos han tratado dicha variable como una variable continua, porque habitualmente la edad es una variable continua, sin tener en cuenta la forma en que ha sido codificada. Por otro lado, en esta variable coinciden la media, mediana y moda. Aunque ésta es una condición necesaria para la simetría perfecta y para la normalidad, no es una condición suficiente para ésta última.

Un solo alumno elige una variable cualitativa (DEPORTE) y ningún alumno elige la otra variable cualitativa (SEXO), de lo que deducimos que el ser cuantitativa es una propiedad que han adquirido bien la mayoría de los alumnos de la muestra.

Tabla 8.3.1.4. Variables seleccionadas por los alumnos como normales (pregunta 2)

Variable	Características de las variables					Estudiantes que seleccionaron esta variable	
	Tipo	Asimetría	Curtosis	Media, Mediana, Moda	98-99 n = 56	99-00 n = 61	
PULS_REP	Discreta; muchos valores diferentes	0.2	-0.48	71.4, 72, 72	3 (5,36)	3 (4,92)	
*PULS_DESP	Discreta; muchos valores diferentes	0.01	-0.19	123.45, 122, 122	12 (21,43)	25 (40,98)	
TIEMPO_SEP	Continua	2.4	12.2	5.3,5.2, 5	1 (1,79)	3 (4,92)	
*TIEMPO_DIC	Continua	0.23	-0.42	4.4, 4.4, 5.5	6 (10,71)	6 (9,84)	
PESO	Continua Valores atípicos	2.38	9.76	48.6, 46, 45	2 (3,57)	2 (3,28)	
TALLA	Continua Multimodal	0.85	2.23	156,1, 155,5	16 (28,57)	10 (16,39)	
SEXO	Cualitativa						
DEPORTE	Cualitativa				0 (0,00)	1 (1,64)	
EDAD	Discreta; 3 valores diferentes	0	-0.56	13,13,13	16 (28,57)	11 (18,03)	

Por otro lado en las tablas 8.3.1.5 y 8.3.1.6 presentamos las distribuciones usadas en el cálculo de parámetros y cuartiles en las preguntas 3 y 4, así como si el cálculo ha sido o no correcto.

Tabla 8.3.1.5. Frecuencia de distribución usada y parámetros calculados (pregunta 3)

	Distribución usada							
	Teórica		Empírica		Ninguna		Total	
	Curso		Curso		Curso		Curso	
	1999 n=56	2000 n=61	1999 n=56	2000 n=61	1999 n=56	2000 n=61	1999 n=56	2000 n=61
Parámetros correctos	7 (12,5)	28 (45,9)	20 (35,7)	5 (8,2)			27 (48,2)	33 (54,1)
Añade estadísticos incorrectos	2 (3,6)		4 (7,1)	12 (19,7)			6 (10,7)	12 (19,7)
No responde					23 (41,1)	16 (26,2)	23 (41,1)	16 (26,2)
Total	9 (16,1)	28 (45,9)	24 (42,8)	17 (27,9)	23 (41,1)	16 (26,2)	56 (100)	61 (100)

Observamos en primer lugar, que sólo la mitad de los alumnos han logrado calcular los parámetros correctos y de ellos, la mitad realiza el cálculo a partir de la distribución empírica. En consecuencia, aparentemente se observa una confusión entre la distribución teórica y la empírica. En otros casos se añaden datos innecesarios. Al comparar con los resultados del cuestionario, en que la idea de parámetro parecía clara, observamos que al aplicarlo a un caso práctico no llegan a relacionar un elemento intensivo (*idea de parámetro*) con su cálculo (*elemento actuativo*) ni con las ideas de distribución teórica y empírica (*elementos intensivos*). Dificultades similares observamos en el cálculo de la mediana y los cuartiles.

Tabla 8.3.1.6. Respuestas dadas en relación con el cálculo de mediana y cuartiles (pregunta 4)

	Distribución usada							
	Teórica		Empírica		No especifica		Total	
	Curso		Curso		Curso		Curso	
	1999 n=56	2000 n=61	1999 n=56	2000 n=61	1999 n=56	2000 n=61	1999 n=56	2000 n=61
Correctos	8 (14,3)	14 (22,9)	17 (30,3)	11 (18,0)			25 (44,6)	25 (40,9)
Parcialmente correctos		9 (14,7)	4 (7,1)	10 (16,4)	1 (1,8)		5 (8,9)	19 (31,1)
Incorrectos	3 (5,3)	1 (1,6)	8 (14,3)	7 (11,5)	4 (7,1)		15 (26,8)	8 (13,1)
No resuelve					11 (19,6)	9 (14,7)	11 (19,6)	9 (14,8)
Total	11 (19,6)	24 (39,2)	29 (51,7)	28 (45,9)	16 (28,5)	9 (14,7)	56 (100)	61 (100)

A continuación, basándonos en los resultados expresados en la Tabla 8.3.1.7, analizamos los elementos de significado puestos en juego por los alumnos para resolver las tareas 2, 3 y 4.

Elementos ostensivos

También en este caso los alumnos han aplicado diferentes elementos ostensivos pero, puede verse una predominancia en la utilización de la curva de densidad. Todos los elementos fueron utilizados por los alumnos en una de las prácticas P1, P2 o P3 (Tablas 6.3.1, 6.6.1 y 6.8.1). Es de destacar el alto porcentaje de aplicación correcta de estos elementos, que es mayor que al que se observó en las clases prácticas. Otros elementos muy usados son los valores críticos (CRITICAL VALUES) y la media y desviación típica a partir de DISTRIBUTION FITTING. Todos estos elementos han sido usados correctamente en un gran porcentaje y fueron previstos en el análisis de la tarea. Aparecen también algunos elementos no previstos como la curva de densidad acumulada y el resumen numérico GOODNESS OF FIT TESTS.

En general, podríamos afirmar que se ha producido un aprendizaje bastante significativo de los diversos elementos ostensivos, especialmente de las representaciones gráficas, observándose

un menor dominio en las representaciones numéricas. Esto puede ser consecuencia de que, generalmente *estas representaciones requieren de la relación con otros elementos, como los actuativos o intensivos, para ser aplicados en forma correcta*. Además se requiere de interpretaciones que no siempre son tan intuitivas como las necesarias para interpretar un gráfico. Por ejemplo, para aplicar correctamente la opción TAIL AREAS, se requiere que se modifiquen las opciones por defecto que entrega el programa (elemento actuativo), además de la posterior interpretación de los resultados que entrega.

Elementos actuativos

En la Tabla 8.3.1.7 puede verse que el elemento actuativo más utilizado ha sido la comparación visual. Ha sido bastante intuitivo para ellos, pero aunque que un buen porcentaje de alumnos ha logrado realizar correctamente la comparación de la distribución empírica con la normal teórica, aproximadamente la mitad de los alumnos la usa incorrectamente. Esto puede ser debido a que en muchos casos sólo utilizan la gráfica de la función de densidad normal en vez de utilizar dicha curva superpuesta al histograma de frecuencias, lo cual puede conducir a una confusión ya que en éste último caso se puede observar si el ajuste es o no aproximado mientras que en el primero se puede confundir la curva empírica con la curva normal.

La mitad de los alumnos llega a calcular correctamente los parámetros, habiendo un porcentaje importante de errores y aún mucho mayor en el cálculo de valores críticos de la distribución normal (cuartiles y mediana), lo que explica el escaso número de alumnos que llegaron a una solución correcta en la pregunta 4. Aunque el ordenador suprime la necesidad de aprender el uso de las tablas de la distribución normal, vemos que no resuelve completamente el problema de cálculo, ya que los alumnos tienen dificultades en el cálculo de valores críticos con las opciones del programa.

Un hecho bastante significativo que podemos extraer de estos resultados es que a pesar de que en el desarrollo de la secuencia de enseñanza se ha hecho especial énfasis en el cálculo de proporciones en intervalos de la distribución normal, han sido pocos los alumnos que han llegado a aplicar este elemento. Las posibles causas de este bajo porcentaje las explicaremos luego, en los elementos intensivos.

Elementos intensivos

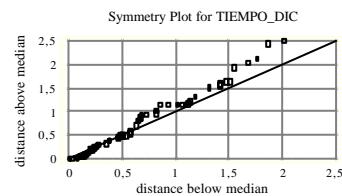
Un alto porcentaje de alumnos han utilizado correctamente los diversos elementos intensivos que son específicos de la distribución normal. El mayor problema se produce cuando debían distinguir entre la distribución empírica y la teórica, en que más de un 40% de alumnos comete errores, debido al alto nivel de abstracción requerido para diferenciar estos dos planos: modelo y realidad, y los diferentes niveles en que usamos un mismo concepto. Schuyten (1991) y Vallecillos (1994) entre otros autores nos advierten que aquí encontramos uno de los puntos críticos en la enseñanza de la inferencia.

Un hecho bastante significativo que podemos extraer de estos resultados es que a pesar de que en el desarrollo de la secuencia de enseñanza se ha hecho especial énfasis en la propiedad de los intervalos centrales en una distribución normal, han sido pocos los alumnos que han llegado a aplicar este elemento actuativo. Esto queda reflejado también en la diferencia entre el porcentaje de aplicación correcta de este elemento en las clases prácticas P1 (58,6%) y P2 (80,2%) y en la prueba (11,1%).

En las sesiones en las que se trabajó esta propiedad habíamos detectado dificultades en su aplicación y pensamos que pudo deberse a que, en la mayoría de los casos, los alumnos lograban aplicar este elemento gracias a la guía de la profesora que salvaba las dudas en el momento. Asimismo, pensamos que esta propiedad es una de las más complicadas debido a que *requiere de la integración y relación de diversos elementos: ostensivos, actuativos, intensivos y validativos*, por lo que su aplicación correcta requiere de un nivel de razonamiento mucho más complejo que el puramente intuitivo.

La escasa aplicación de esta propiedad podría ser consecuencia de que muchos alumnos se han conformado con observar que se cumpliese una sola propiedad, generalmente la simetría o el ajuste visual de los gráficos SYMMETRY PLOT o NORMAL PROBABILITY PLOT, o también el ajuste de la curva de densidad al histograma. Es decir, confunden una condición necesaria con una condición suficiente para la normalidad. En el ejemplo siguiente se puede ver lo que afirmamos antes.

"De forma gráfica podemos corroborar la simetría de la variable TIEMPO_DIC con el gráfico symmetry plot, vemos que los puntos se ajustan aproximadamente a la recta, por lo tanto la distribución se ajustará a una normal".



También se puede apreciar la dificultad de los alumnos para interpretar la curtosis, lo cual ya había sucedido en el desarrollo de la enseñanza, así como también es notable el bajo porcentaje (12%) de aplicación correcta de la unimodalidad.

Elementos validativos

En este caso vemos que los alumnos han aplicado más validaciones en las argumentaciones expresadas en las resoluciones correspondientes a las actividades 2, 3 y 4, si las comparamos con las dadas en la actividad 1 y comparado con las sesiones prácticas, habiéndose llegado al análisis y a la síntesis, casi siempre aplicados en forma correcta.

Tabla 8.3.1.7. Elementos de significado específicos de la distribución normal puestos en juego por los alumnos en la resolución de las preguntas 2, 3 y 4

Elementos de significado	Correcto		Incorrecto	
	Frec	Porc	Frec	Porc
Ostensivos				
Representaciones gráficas				
Gráfica de la función de densidad normal	75	64,1	1	0,9
Curva de densidad e histograma superpuestos	30	25,6	0	0,0
Normal Probability Plot	6	5,1	0	0,0
CDF (Curva de densidad acumulada)	2	1,7	0	0,0
Representaciones numéricas				
CRITICAL VALUES	26	22,2	1	0,9
INVERSE CDF	3	2,6	2	1,7
TAIL AREAS	3	2,6	5	4,3
DISTRIBUTION FITTING (Media y desviación típica)	48	41,0	3	2,6
GOODNESS OF FIT TESTS	2	1,7	2	1,7
Actuativos				
Cálculo de parámetros de la distribución normal	50	42,7	18	15,4
Cambio de parámetros de la distribución normal	10	8,5	2	1,7
Comparación visual	56	47,9	49	41,9
Cálculo de probabilidades de valores en intervalos de la distribución normal	13	11,1	1	0,9
Cálculo de valores críticos en la distribución normal (cuartiles y mediana)	28	23,9	68	58,1
Estudio descriptivo de datos para ajustar una curva	39	33,3	8	6,8
Intensivos				
Simetría en la distribución normal	40	34,2	15	12,8
Unimodalidad en la distribución normal	12	10,3	5	4,3
Parámetros de la distribución normal	51	43,6	16	13,7
Propiedades estadísticas de la d. normal	27	23,1	3	2,6
Media (como parámetro)	51	43,6	16	13,7
Desviación típica (como parámetro)	51	43,6	16	13,7
Propiedad de los intervalos centrales en la distribución normal	13	11,1	1	0,9
Distribución teórica	48	41,0	50	42,7
Curtosis en la distribución normal	27	23,1	1	0,9
Validativos				
Comprobación de propiedades	18	15,4	3	2,6
Aplicación de propiedades	38	32,5	7	6,0
Ánalysis	32	27,4	5	4,3
Representación gráfica	58	49,6	36	30,8
Síntesis	26	22,2	4	3,4

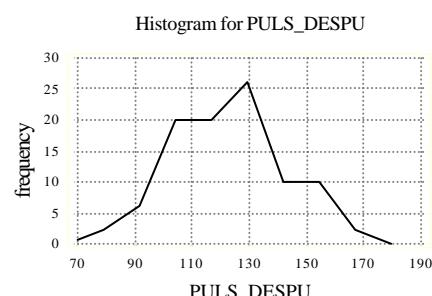
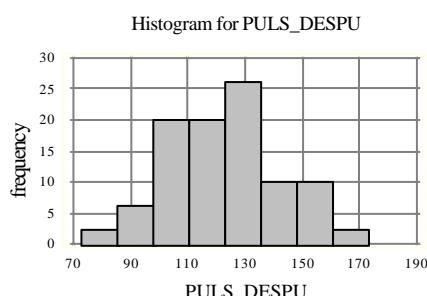
De todos modos, sigue siendo predominante la utilización de la representación gráfica como parte importante de las validaciones. Esto concuerda con el enfoque intuitivo que se ha desarrollado en las clases pero también demuestra la dificultad de nuestros alumnos a la hora de dar argumentaciones de alto nivel (análisis y síntesis) para validar o justificar el por qué aplican uno u otro elemento ya sea intensivo, ostensivo o actuativo. También hacemos notar que es la representación gráfica donde más errores se han producido.

Aunque la mayoría de los alumnos hayan aplicado la representación gráfica como una manera de validar sus argumentaciones, hemos podido encontrar casos en los que *relacionan diversos elementos de significado*, realizando un análisis de cada propiedad y llegando a una conclusión final correcta por medio de la síntesis de todos los elementos puestos en juego, como el ejemplo que transcribimos a continuación:

"Para evaluar la normalidad de una variable, me fijo en los siguientes aspectos:

- la variable tiene que ser numérica; la variable tiene que ser simétrica; Se tiene que cumplir la regla 68,95,99.7

Considero la variable "Puls_despues" como una variable que se ajusta aproximadamente a una distribución normal. Se trata de una variable numérica. La variable es simétrica. Para ello observamos que tanto el histograma como el polígono de frecuencia son aproximadamente simétricos.



Para ver si es simétrica también podemos observar los siguientes coeficientes:

Count = 96
 Average = 123,45
 Median = 122,0
 Mode = 120,0
 Skewness = 0,0109784
 Stnd. skewness = 0,0439137
 Kurtosis = -0,197793
 Stnd. kurtosis = -0,395585
 Sum = 11852,0

Vemos que el coeficiente de asimetría es cercano a cero (0.0109) y que el coeficiente de asimetría tipificado está dentro del intervalo +2 (es 0.0439): con estos dos coeficientes vemos que es simétrica. También observamos que el coeficiente de Kurtosis es próximo a cero (es -0.1977) lo que indica que la curva se aproxima a una distribución normal. Y que el coeficiente de kurtosis tipificado está comprendido en el intervalo +2 (es -0.39).

También sabemos que una propiedad de una distribución normal es que coincidan la Media, la Mediana y la Moda. En este caso los tres valores son muy aproximados (Media=123.4; Moda=120; Mediana=122). También vemos que cuenta con una sola moda.

En cuanto a la regla 68,95,99.7 vemos si se cumple: (utiliza dos tablas de frecuencias)

El 68% corresponde al intervalo ($\mu \pm 1\sigma$) = [105.08, 141.82]. En este intervalo estarán el 68.75% (0.8333-0.1458)

El 95% corresponde al intervalo ($\mu \pm 2\sigma$) = [86.81, 160.19]. En este intervalo estarán el 95.84% (0.9792-0.0208)

El 99,7% corresponde al intervalo ($\mu \pm 3\sigma$) = [68.34, 178.56]. En este intervalo estarán el 100% (1-0) de los datos. Por lo que vemos que también cumple esta regla.

Por lo que vemos que esta variable se puede ajustar a una distribución normal.

Los parámetros de la distribución normal teórica que se ajusta a la variable anterior serían:

Data variable: PULS_DESPU

96 values ranging from 78,0 to 162,0

Fitted normal distribution:

mean = 123,458

standard deviation = 18,3761

Los cuartiles de la distribución normal teórica son:
Critical Values for PULS_DESPU

$$\text{area below } 111,064 = 0,25$$

$$\text{area below } 123,458 = 0,5$$

$$\text{area below } 135,853 = 0,75$$

El valor de la mediana es: 123.458 (igual que el valor de la Media, porque en una distribución normal la Media y la Mediana coinciden) (También se podría haber calculado, mirando el valor del cuartil 0.5).

Este alumno *relaciona* diversos elementos ostensivos específicos y no específicos de la distribución normal, haciendo interpretación correcta de cada uno de ellos y además selecciona una de las variables que hemos considerado correctas.

Número de elementos de significado específicos de la distribución normal puestos en juego en la resolución de las preguntas 2, 3 y 4

En la tabla 8.3.1.8 se presentan los estadísticos de la puntuación total obtenida por los alumnos de la muestra para cada uno de los elementos de significado. Podemos apreciar que en esta ocasión, han sido los elementos intensivos y ostensivos los que más han sido aplicados de manera correcta en promedio. En caso de los elementos actuativos se iguala el uso de elementos incorrectos y correctos lo que indica la dificultad de uso de la herramienta informática para los alumnos.

Tabla 8.3.1.8. Número de elementos de significado para determinar la normalidad

Elementos de significado	Media		Desviación típica		T	Significación
	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto		
Ostensivos	1,7	0,12	1,36	0,61	10,36	0,000
Actuativos	1,34	1,18	1,34	0,91	0,858	0,393
Intensivos	2,31	0,62	2,43	1,10	6,044	0,000
Validativos	1,47	0,47	1,73	0,75	4,977	0,000

Estos resultados se confirman mediante la prueba T de diferencias de medias entre muestras relacionadas (anteriormente hicimos una prueba de análisis de varianza de medida repetida para estudiar la significación global de la diferencia entre elementos usados correcta e incorrectamente y evitar el problema de las comparaciones múltiples, obteniendo una significación $p < 0,001$).

Elementos de significado relacionados con otros conceptos puestos en juego por los alumnos del grupo en las tareas 2, 3 y 4

Además de los elementos de significado descritos en el apartado anterior, los alumnos también han utilizado 8 elementos ostensivos (4 son resúmenes gráficos y 4 numéricos), 3 elementos actuativos, 8 elementos intensivos y 5 validativos, relacionados con otros conceptos, cuyos porcentajes de aplicación correcta o incorrecta, se pueden observar en la tabla 8.3.1.9, los cuales analizamos a continuación.

Elementos ostensivos

Dentro de las representaciones gráficas la más utilizada ha sido el histograma y luego el polígono de frecuencias. Pensamos que algunos de los errores cometidos por los alumnos a la hora de decidir qué variable debían seleccionar, pueden estar basados en el uso exclusivo del histograma, ya que la forma de éste varía de acuerdo a la cantidad y a la amplitud de los intervalos. Por lo que si no se hace una elección correcta de dichos elementos, se puede obtener una forma que parece aproximarse a la de la distribución normal aunque en la realidad no sea así. Un ejemplo de esta dificultad puede verse en la resolución realizada por el siguiente alumno:

“Para ver la variable que se ajusta más a la distribución normal me he basado en comparar los coeficientes de asimetría de todas las variables de este fichero. Esto lo he hecho a través de describir, numeric-data, multiple variable análisis y seleccionando dentro de sumary statistics los coeficientes de asimetría.

Vemos que la variable que tiene un coeficiente de asimetría igual a cero es la EDAD. Asimismo, si observamos la forma del histograma de frecuencias (con 5 intervalos) vemos que tiene una forma completamente simétrica. También vemos, como media, mediana y moda coinciden; característica de las distribuciones simétricas, y por tanto de la distribución normal:

Summary Statistics for EDAD

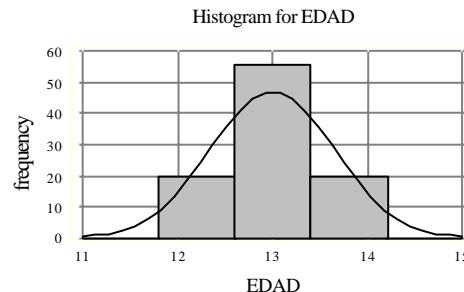
Count = 96

Average = 13,0

Median = 13,0

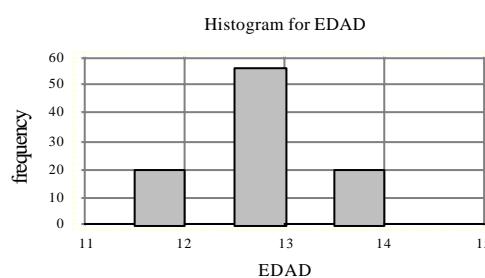
Mode = 13,0

En conclusión, la variable EDAD es la que mejor se ajusta a una normal".



El alumno ha seleccionado una variable incorrecta ya que es discreta con sólo tres valores por lo que el gráfico que representaría correctamente a esta variable sería el adjunto:

En general, se aplicaron muy poco el SYMMETRY PLOT y el gráfico de la caja. El primer gráfico no fue objeto explícito de estudio en la secuencia de enseñanza y el segundo, fue utilizado en sesiones previas a las destinadas para la distribución normal, por lo que es probable que los alumnos no recordaran con claridad la manera de utilizarlos.



Dentro de los elementos ostensivos relacionados se destaca la aplicación correcta del SUMMARY STATISTICS cuando debían aplicarlo para el cálculo de las medidas de posición y de los coeficientes de asimetría y curtosis. Por el contrario, este elemento ha sido aplicado en forma incorrecta en el cálculo de la mediana y los cuartiles, ya que los alumnos usaron la distribución empírica, confundiéndola con la teórica.

La tabla de frecuencias también ha sido aplicada en un 22%, aunque en muchos casos la construían pero no siempre la utilizaron en sus análisis o en sus cálculos. Esto pudo ser consecuencia de que los alumnos recordaban que en las sesiones prácticas se había trabajado con ella cuando se aplicaba la propiedad de los intervalos centrales, pero como ya comentamos en su oportunidad, esta propiedad fue utilizada por muy pocos alumnos (alrededor de un 11%)

En el caso del resumen numérico PERCENTILES, algunos alumnos lo aplicaron incorrectamente para calcular la mediana y los cuartiles, debido a que este resumen calcula mediana y cuartiles de la distribución empírica, mientras que lo que se pedía era que se calcularan dichas medidas correspondientes a la distribución teórica que se ajustaba a la empírica. Hubo un solo alumno que aprovechó las ventajas del STAT ADVISOR que es una ayuda que brinda el programa en el que se dan algunas pautas de análisis, aclarando si los resultados obtenidos pueden provenir o no de una distribución normal. La dificultad para usar esta ayuda se plantea por el hecho de que está escrito en inglés.

A continuación damos un ejemplo de respuesta en la que se utiliza un gran número de elementos ostensivos, aunque la selección de la variable es incorrecta. Además, no realiza ningún análisis ni se *relacionan correctamente* los elementos puestos en juego.

"He escogido esta variable porque la distribución normal sirve para describir variables que surgen en problemas reales, y creo que la distribución de las tallas es un problema biológico que está dentro de ellos (problemas reales). Además, es una variable cuantitativa que son las propias de la distribución normal.

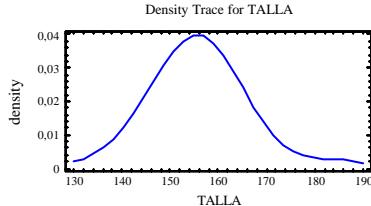
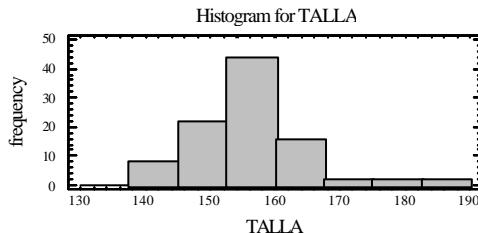
Tabla de frecuencias de la variable TALLA.

Class	Lower Limit	Upper Limit	Midpoint	Frequency	Relative Frequency	Cumulative Frequency	Cum. Rel. Frequency
at or below	130,0			0	0,0000	0	0,0000
1	130,0	137,5	133,75	0	0,0000	0	0,0000
2	137,5	145,0	141,25	8	0,0833	8	0,0833

3	145,0	152,5	148,75	22	0,2292	30	0,3125
4	152,5	160,0	156,25	44	0,4583	74	0,7708
5	160,0	167,5	163,75	16	0,1667	90	0,9375
6	167,5	175,0	171,25	2	0,0208	92	0,9583
7	175,0	182,5	178,75	2	0,0208	94	0,9792
8	182,5	190,0	186,25	2	0,0208	96	1,0000
above	190,0			0	0,0000	96	1,0000

Mean = 156,167 Standard deviation = 8,93564

- Histograma de la variable TALLA.



Actividad 3:

Gráfico de tronco y hojas de la variable TALLA.

- Valores de la mediana y los cuartiles:

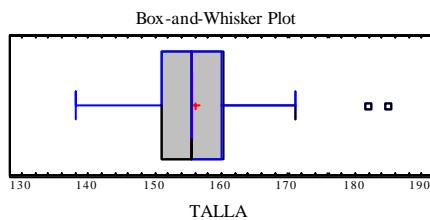
Stem-and-Leaf Display for TALLA: unit = 1

2	13 88
6	14 0000
16	14 5566777799
40	15 00000002222223333444444
(28)	15 555555566667777778888999
28	16 00000012222224
12	16 555577
6	17 11

H | 182,0 182,0 185,0 185,0

Count = 96
Median = 155,5
Lower quartile = 151,0
Upper quartile = 160,0
Stnd. skewness = 3,4341
Stnd. kurtosis = 4,4636

- Gráfico de la caja:



La respuesta es incorrecta porque la variable seleccionada no puede ajustarse por una distribución normal por las características que hemos descrito en la sección 8.2.2. Además, puede observarse que el alumno sabe construir los elementos ostensivos y también sabe seleccionar cuáles son los elementos que le pueden brindar la información que necesita para esta actividad, pero no sabe extraer la información *pertinente ni relacionarla con los elementos intensivos que evocan estos ostensivos*, tampoco realiza validaciones o argumentaciones que *relacionen los elementos ostensivos entre sí y con los otros elementos de significado*.

Elementos actuativos

Destaca el estudio descriptivo de una variable (con un 33%), por medio del cual se han calculado la media, desviación típica, estadísticos de orden y coeficientes.

Son muy pocos los alumnos que obtienen los límites de los intervalos centrales y calculan los porcentajes en dichos intervalos por medio de la tabla de frecuencias. Esto es consecuencia de que, como mencionamos anteriormente, muchos alumnos construyeron la tabla de frecuencias, sin embargo, luego no hicieron uso de ella. Esto puede verse en el hecho de que un 22% de alumnos construyeron la tabla pero sólo el 11% obtienen los porcentajes de los intervalos centrales con el fin de comparar luego con la propiedad de los intervalos centrales en una distribución normal (elemento intensivo).

Ello es debido a que tienen dificultades para cambiar los extremos de los intervalos y no

siempre tienen seguridad sobre cómo redondear los datos. Estas dificultades también se observaron en el desarrollo de las actividades planteadas en la primera sesión teórica y en las sesiones prácticas P1 y P2.

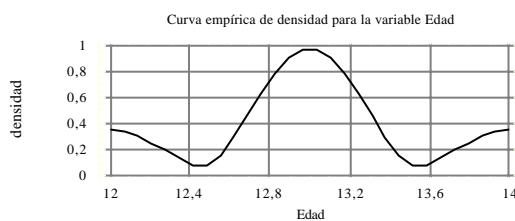
Elementos intensivos

En general, los alumnos han aplicado correctamente un buen número de elementos intensivos relacionados con otros conceptos como podemos apreciar en la tabla 8.3.1.9.

Es de destacar el alto porcentaje de respuestas incorrectas en relación con el tipo de variable seleccionada, ya que en muchos casos se han analizado de forma correcta las propiedades de simetría, unimodalidad, valores de los coeficientes, ajuste gráfico o visual del histograma y la curva de densidad. Pero aún cuando los resultados correspondientes a ellos indicaban que la variable elegida no podía ajustarse por medio de una distribución normal, muchos alumnos seleccionaron igualmente una variable incorrecta, por no ser capaces de hacer una síntesis de los análisis parciales y *relacionar unos elementos con otros*.

Estos errores se producen debido a la confusión entre las distribuciones empírica y teórica. Aproximadamente el 25% de alumnos usaron como representación la curva normal y el histograma superpuestos (Tabla 8.3.1.7), pero mientras que la gráfica se supo representar correctamente (elemento ostensivo correcto en la Tabla 8.3.1.7), la aplicación que se hace en la pregunta 2 es incorrecta, puesto que esta gráfica se obtiene con el programa DISTRIBUTION FITTING. Lo cual significa que la curva de densidad que se representa sobre el histograma es la curva normal teórica que se ajustará a los datos y es, por tanto, simétrica y con la forma de campana característica. La curva de densidad empírica que corresponde a esta variable es, sin embargo, diferente, al tener asíntotas no horizontales (Figura 8.3.1.2).

Figura 8.3.1.2. Curva empírica de densidad para la variable edad



Los alumnos que eligen esta variable, no tienen en cuenta la codificación de los datos y han olvidado el carácter discreto de la variable, guiándose por otras propiedades que se cumplen, las cuales son condiciones necesarias pero no suficientes para realizar el ajuste a una distribución normal.

Es también notorio el número de errores en relación con los estadísticos de orden, bien porque incorrectamente usan los correspondientes a la distribución empírica o porque confunden el concepto. Esto se hace más evidente si observamos el alto porcentaje de alumnos que han utilizado el SUMMARY STATISTICS (ver elementos ostensivos) para calcular dichos estadísticos. Aunque tanto en las clases teóricas como prácticas se destacó esta diferencia, se pudo observar la dificultad para distinguir estas características.

Con menor frecuencia se repiten los errores en el tipo de simetría y la unimodalidad. Por otra parte, un 30% ha aplicado correctamente la propiedad de las posiciones relativas de las medidas de tendencia central. Como ya hemos mencionado, en los casos que se ha aplicado esta propiedad lo han hecho correctamente (en su mayoría), pero en diversas oportunidades esta aplicación correcta ha estado descontextualizada, considerando que el cumplimiento de esta propiedad era condición suficiente para que la distribución fuera normal.

Elementos validativos

Podemos ver que, para el caso de los elementos de significado relacionados con otros conceptos, los alumnos han utilizado en mayor proporción la aplicación de propiedades que la representación gráfica en sus validaciones, a diferencia de lo que ocurría con los elementos específicos de la normal. Esto puede ser consecuencia de que estas propiedades o conceptos relacionados han sido trabajado durante más tiempo que los específicos de la normal, lo cual denota un mayor conocimiento y comprensión. Algunos ejemplos de propiedades que han sido aplicadas pueden ser, las propiedades relacionadas con las medidas de tendencia central, las

relacionadas con los coeficientes de asimetría y curtosis o las propiedades de algunos de los gráficos.

También destacan los pocos casos en que se aplica el análisis y síntesis; las propiedades han sido aplicadas o comprobadas en determinadas situaciones pero se observa una *falta de integración* entre ellas.

Tabla 8.3.1.9. Elementos de significado relacionados con otros conceptos puestos en juego por los alumnos en la resolución de las preguntas 2, 3 y 4

Elementos de significado	Correcto		Incorrecto	
	Frec	Porc	Frec	Porc
Ostensivos				
Representaciones gráficas				
Histograma	37	31,6	0	0,0
Polígono de frecuencias	12	10,3	0	0,0
Gráfico de la caja	2	1,7	0	0,0
Symmetry Plot	1	0,8	0	0,0
Representaciones numéricas				
SUMMARY STATISTICS	59	50,4	2	1,7
SUMMARY STATISTICS (Para el cálculo de la mediana y los cuartiles)	0	0,0	47	40,2
Diagrama de tronco	5	4,3	0	0,0
Tabla de frecuencias	26	22,2	0	0,0
Percentiles	9	7,7	9	7,7
Stat Advisor	1	0,9	0	0,0
Actuativos				
Obtención de los límites en los intervalos centrales	14	12,0	0	0,0
Cálculo de los porcentajes en tablas de frecuencias	12	10,3	1	0,9
Estudio descriptivo de una variable	39	33,3	8	6,8
Intensivos				
Tipo de variable	50	42,7	65	55,6
Simetría y Asimetría	52	44,4	13	11,1
Moda, Unimodalidad, Multimodalidad	20	17,1	13	11,1
Medidas de tendencia central: media, mediana y moda. Posiciones relativas	35	29,9	5	4,3
Coeficiente de Asimetría, coef. de asimetría tipificado	34	29,1	1	0,9
Coeficiente de curtosis, coef. de curtosis tipificado	27	23,1	1	0,9
Valores atípicos	5	4,3	1	0,9
Estadísticos de orden: Cuartiles y Percentiles	32	27,4	63	53,8
Frecuencias: absolutas, relativas, acumuladas, acumuladas relativas	13	11,1	1	0,9
Validativos				
Comprobación de propiedades	13	11,1	3	2,6
Aplicación de propiedades	58	49,6	12	10,3
Ánalisis	39	33,3	11	9,4
Representación gráfica	26	22,2	17	14,5
Síntesis	25	21,4	9	7,7

Número de elementos de significado relacionados con otros conceptos estadísticos usados por los alumnos en la resolución de las preguntas 2, 3 y 4

Observando la tabla 8.3.1.10, en la que se resumen el número de elementos de significado relacionados con otros conceptos que han sido puestos en juego por los alumnos de la muestra participante en la experiencia, podemos concluir que su número es algo inferior a los obtenidos para los elementos específicos de la distribución normal y han sido aplicado en forma correcta preferentemente. Esto se confirma mediante la prueba T de diferencias de medias entre muestras relacionadas, cuyos resultados se incluyen en la tabla (anteriormente hicimos una prueba de análisis de varianza de medida repetida para estudiar la significación global de la diferencia entre elementos usados correcta e incorrectamente y evitar el problema de las comparaciones múltiples, obteniendo una significación $p < 0,001$).

Tabla 8.3.1.10. Número de elementos relacionados con otros conceptos estadísticos

Elementos de significado	Media		Desviación típica		T	Significación
	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto		
Ostensivos	1,29	0,49	0,95	0,27	9,040	0,000
Actuativos	0,56	0,077	0,92	0,27	5,241	0,000
Intensivos	2,29	1,39	2,38	1,22	2,997	0,003
Validativos	1,38	0,44	1,61	0,91	4,818	0,000

El resultado más significativo, en este caso, es que hay una gran diferencia en la cantidad de aplicaciones correctas que se realizan de los elementos intensivos frente a los otros elementos. Esto es consecuencia de que muchas propiedades que no son específicas de la distribución normal forman parte de la construcción de dicho concepto, como por ejemplo, las posiciones relativas de media, mediana y moda o el rango de valores aceptado para los coeficientes de asimetría y curtosis en una distribución normal, con lo cual podemos concluir que los alumnos han recordado y aplicado significativamente dichos elementos en sus análisis.

8.3.2. DIFERENCIAS ENTRE CURSOS

En las tablas 8.3.1.1, 8.3.1.4, 8.3.1.5, 8.3.1.6, 8.3.2.1, 8.3.2.3 y 8.3.2.4 se presentan los resultados de los elementos de significado que han sido puestos en juego por los alumnos en las tareas que analizamos en nuestro trabajo, discriminados de acuerdo al curso. Esto nos permitirá analizar si ha habido o no diferencias entre los dos cursos ('98/'99 y '99/2000) y de qué tipo.

Respuestas correctas a las tareas

En la tabla 8.3.1.1 vemos que el número de respuestas correctas respecto a la simetría aumenta en el segundo curso (de 21,4% en el primer curso a 36,1% en el segundo). Esta mejora puede deberse, como en los otros casos, a las mejoras introducidas, tanto en la secuencia de enseñanza relativa a la distribución normal, como en el material que se entregó a los alumnos. Especialmente al material adicional sobre Statgraphics en el que no sólo se describían los programas sino que se daban ejemplos para resolver problemas en los que se aplicaran los diversos conceptos, como por ejemplo, el análisis de la simetría de una distribución.

Mucho más significativo ha sido el aumento de respuestas correctas a la tarea 2 (Tabla 8.3.1.4) en que la proporción pasa del 32% al 50% de alumnos. Una de las razones para revisar los apuntes y agregar el material sobre Statgraphics, fue justamente el bajo porcentaje de respuestas correctas obtenidas el primer año con respecto a la selección de la variable adecuada y los principales errores, tales como el haber seleccionado una variable discreta con pocos valores (como es la variable EDAD), el cual disminuyó considerablemente en el segundo año (de 28,57% pasó a 18%). Por lo que parece que estas modificaciones han influido de manera positiva en los alumnos del segundo curso.

Son también más los que calculan parámetros correctos usando la distribución teórica el segundo curso en la pregunta 3 (aumentan de 12,5% a 45,9%. Tabla 8.3.1.5), y en general, si consideramos los que calculan los parámetros correctos, ya sea desde la distribución teórica como desde la empírica, el porcentaje sigue siendo mayor en el segundo año (de 48,2% a 54,1%). Por otra parte, en la pregunta 4 en que se debían calcular mediana y cuartiles, los resultados son similares (Tablas 8.3.1.6), aunque sigue habiendo un porcentaje mayor de respuestas correctas en el segundo curso (14,3% en el primero contra 22,9% en el segundo).

En definitiva, se observa una mejora global en esta prueba, especialmente en conceptos exclusivamente relacionados con las preguntas sobre la distribución normal, como por ejemplo, en la selección de una variable adecuada o en la discriminación entre distribución teórica y empírica. Creemos que esto se debe al énfasis puesto en la secuencia de enseñanza y en el material escrito, sobre los diversos pasos que se deben llevar a cabo en el análisis de la normalidad de una variable.

Elementos de significado específicos de la simetría puestos en juego por los alumnos de los cursos en la resolución de la tarea 1

Si observamos los resultados que se muestran en la tabla 8.3.2.1, relacionados con los elementos de significado puestos en juego en la resolución de la tarea sobre simetría

(discriminados por cursos), podemos decir que en general, los alumnos del segundo curso han tenido un mejor rendimiento que los del primero, ya que no sólo hay más alumnos que han aplicado elementos de significado en forma correcta sino que además, ha disminuido el número de alumnos que realizan aplicaciones incorrectas, aunque las diferencias son muy pequeñas.

Elementos ostensivos

En relación con los elementos ostensivos gráficos, es de destacar el aumento en la aplicación del polígono de frecuencia (de 17,8% a 32,8%), lo cual implica un mejor aprendizaje del paquete estadístico ya que el utilizar correctamente este elemento implica reconocer una serie de menús y opciones para realizar las modificaciones pertinentes debido a que no se lo obtiene por defecto. Con lo cual pensamos que el haber agregado el material escrito sobre el programa ha influido significativamente en el aprendizaje.

Tabla 8.3.2.1. Elementos de significado puestos en juego por los alumnos en la resolución de la pregunta de simetría (Pregunta 1) discriminados por curso

Elementos de significado	Correcto		Incorrecto		
	Curso		Curso		
	1999 n=56	2000 n=61	1999 n=56	2000 n=61	
Ostensivos					
Representaciones gráficas					
Histograma	25	32	0	0	
Polígono de frecuencias	10	20	0	0	
Gráfico de la caja	26	17	0	0	
Symmetry plot	4	1	0	0	
Curva de densidad	14	23	0	0	
Scatterplot	0	0	1	2	
Representaciones numéricas					
Diagrama de tronco	13	29	0	0	
Tabla de frecuencias	11	15	0	0	
SUMMARY STATISTICS	20	27	0	0	
Actuativos					
Cálculo de valores atípicos	21	32	15	12	
Estudio descriptivo de una variable	25	34	5	1	
Comparación visual	38	52	9	6	
Intensivos					
Simetría y asimetría	44	52	12	6	
Tipo de asimetría	12	22	5	1	
Medidas de tendencia central: media, moda y mediana.	14	16	2	5	
Posiciones relativas	13	24	2	0	
Coeficiente de asimetría	4	21	2	0	
Coeficiente de asimetría tipificado	42	43	10	4	
Validativos					
Comprobación de propiedades	4	19	0	0	
Aplicación de propiedades	18	20	2	5	
Análisis	27	34	3	1	
Representación gráfica	38	52	9	6	
Síntesis	39	48	10	5	

Por otra parte, en el primer curso destaca el uso del gráfico de caja, el cual sirve tanto para analizar la asimetría como los valores atípicos. Creemos que la disminución observada en el segundo curso en el uso de este gráfico puede deberse a que los alumnos se decantaron por el uso de otros diagramas o resúmenes numéricos que le brindaran una información más exacta, como es el caso del diagrama de tronco. En este caso ha habido un gran aumento en su aplicación (23,2% en el primer curso y 47,5% en el segundo). Es probable que muchos alumnos hayan optado por usar este diagrama ya que no sólo les permitía visualizar el tipo de asimetría

sino que les permitía obtener de un modo directo los valores atípicos.

Todo esto denota un mejor manejo del programa y también es un indicador de que los alumnos del segundo curso *han logrado establecer más relaciones* entre elementos ostensivos y entre éstos y los otros elementos, en sus resoluciones. Asimismo se observa que los alumnos del segundo curso han sido más críticos al momento de decidir qué representación podía entregarles la información que necesitaban en cada ocasión.

Elementos actuativos

También en los elementos actuativos se observa un mayor número de aplicaciones correctas. Destacando el empleo de la comparación visual en la determinación de la asimetría y el cálculo de los valores atípicos, en el cual además ha disminuido el número de errores.

Elementos intensivos

Dentro de estos elementos, destacamos el aumento importante de aplicación correcta del coeficiente de asimetría tipificado (7,1% en el primer año y 34,4% en el segundo). Podemos deducir con esto un aprendizaje significativo de las características de este coeficiente así como del coeficiente de asimetría. Aunque en las sesiones teóricas y prácticas se observaron diversas dificultades en el cálculo e interpretación de dichos coeficientes, parece que los alumnos lograron adquirir estos conceptos aplicándolos en situaciones adecuadas. Como consecuencia de esto, también se produce una mejora en las respuestas correctas sobre la asimetría y su tipo, disminuyendo además el porcentaje de alumnos que responden incorrectamente. Como hemos dicho en otra oportunidad, en la prueba del primer año habíamos observado la dificultad de los alumnos en determinar el tipo de asimetría, por lo que en la secuencia de enseñanza implementada el segundo curso se enfatizó sobre la interpretación de este tema lo que parece haber influido positivamente.

Elementos validativos

Aunque en general los alumnos del segundo curso han aplicado un mayor número de elementos validativos, destaca el aumento significativo en la comprobación de propiedades (de 7,1% pasa a 31,1%). La diferencia en este caso se debe a que por ejemplo, en el primer año hubo alumnos que sólo observaban la asimetría o valores atípicos desde los gráficos como el histograma y de allí obtenían sus conclusiones directamente. En el segundo año aún hay alumnos que sólo extraen información de los gráficos pero muchos corroboran sus conclusiones por medio de las propiedades de los coeficientes de asimetría, por ejemplo.

Como consecuencia de lo expresado antes, vemos que si bien la representación gráfica es el elemento validativo más utilizado, ha aumentado también el porcentaje de aplicación de los demás elementos validativos como el análisis y la síntesis.

Número de elementos de significado específicos de la simetría discriminados por curso

En la tabla 8.3.2.2 se presentan los estadísticos correspondientes a una prueba T de muestras independientes aplicada a los elementos de significado utilizados en la resolución de la pregunta de simetría discriminándolos por curso, donde se ven escasas diferencias, que no siempre son significativas y cuando lo son tienen una significación baja. En general, se puede apreciar que los alumnos del curso '99-2000 muestran un mejor rendimiento en todos los elementos de significado, disminuyendo el promedio de aplicaciones incorrectas.

Tabla 8.3.2.2. Número de elementos de significado puesto en juego para resolver la pregunta 1(simetría) discriminados por cursos

Elementos de significado		Media		Desviación típica		T	Significación
		1999	2000	1999	2000		
Ostensivos	Correctos	2,21	2,72	1,25	1,40	-2,069	0,041
	Incorrectos	0	0	0	0		
Actuativos	Correctos	1,50	1,93	1,08	1,06	-2,192	0,030
	Incorrectos	0,52	0,31	0,81	0,53	1,614	0,110
Intensivos	Correctos	2,30	2,92	1,54	1,79	-1,996	0,048
	Incorrectos	0,59	0,26	1,01	0,54	2,161	0,034
Validativos	Correctos	2,25	2,84	1,63	1,61	-1,950	0,054
	Incorrectos	0,43	0,28	0,91	0,69	0,998	0,321

Elementos de significado específicos de la distribución normal y los relacionados con otros conceptos puestos en juego en las tareas 2, 3 y 4

En los resultados que se presentan en las tablas 8.3.2.3 y 8.3.2.4 se puede observar que, al igual que para la pregunta sobre simetría, ha habido alguna mejora en los elementos relacionados y específicos de la normal. También, aunque en este caso ha sido más variable, encontrando aún muchos elementos aplicados de manera incorrecta. A continuación comentamos las diferencias.

Elementos ostensivos

Dentro de los *elementos ostensivos gráficos* específicos de la distribución normal destacan la utilización de la gráfica de la función de densidad normal y la curva de densidad superpuesta al histograma. En este último caso ha disminuido el porcentaje de aplicación, lo cual puede deberse a que los alumnos del segundo curso han comprendido mejor que lo que se pedía en la pregunta 3 eran los valores de los parámetros de la curva normal ajustada y no la representación gráfica de dicho ajuste.

Por otra parte, en los elementos relacionados, aumenta la aplicación correcta del histograma y polígono de frecuencias, lo cual denota un cierto aprendizaje en el manejo de las opciones gráficas del programa y también un aumento en la interpretación correcta de los gráficos.

En relación con los *elementos ostensivos numéricos* vemos que aumenta predominantemente la aplicación del programa DISTRIBUTION FITTING y especialmente del CRITICAL VALUES. La aplicación correcta de estos programas denota un buen manejo del software y también que los alumnos han logrado relacionar de mejor forma el resumen que entrega el programa con lo que se le pide calcular. En consecuencia, puede observarse que establecen relaciones correctas entre los elementos ostensivos, actuativos e intensivos. Pensamos que esto es consecuencia de las modificaciones realizadas en la enseñanza el segundo curso.

En el segundo curso no se aplica el programa INVERSE CDF debido a que se había trabajado muy poco con él en las sesiones, debido a que se tomó la decisión de trabajar directamente con los programas CRITICAL VALUES y TAIL AREAS, pensando que sería mejor que los alumnos conocieran menos programas pero con mayor profundidad.

En relación con los elementos relacionados con otros conceptos, destaca el aumento en la aplicación correcta del SUMMARY STATISTICS en la pregunta 2(26,8% en el primer curso, 72,1% en el segundo) y de la tabla de frecuencias (10,7% el primer año y 32,8% el segundo). En relación con el SUMMARY STATISTICS debemos destacar que sigue habiendo un porcentaje grande de aplicación incorrecta para el caso de la pregunta 3, en la que se debía realizar el cálculo con la opción CRITICAL VALUES. Aunque en un número muy bajo, también podemos decir que algunos alumnos han utilizado el diagrama de tronco como una forma más de corroborar el ajuste entre la distribución teórica y empírica, lo cual no había sucedido en el primer año.

Elementos actuativos

En relación con los elementos actuativos específicos de la distribución normal destacan principalmente, el estudio descriptivo de los datos para ajustar una curva, el cálculo de la mediana y cuartiles y el cálculo de probabilidades en intervalos de la distribución normal. Siendo el porcentaje de aplicación correcta, superior en el segundo cursos, en los tres casos. También debemos destacar que en el cálculo de la mediana y los cuartiles se siguen produciendo muchos errores que provienen de la no discriminación entre distribución teórica y empírica. Esta falta de discriminación entre ambas distribuciones ha provocado también errores en la comparación visual, los cuales ya han sido descritos en la sección 8.3.1.

Como consecuencia del aumento en la aplicación del cálculo de probabilidades en intervalos de la distribución normal, también ha aumentado el porcentaje de aplicación en la obtención de límites en intervalos centrales y en el cálculo de porcentajes en tablas con Statgraphics (elementos relacionados con otros conceptos).

Elementos intensivos

En general, aumenta el porcentaje de aplicación correcta en todos los elementos intensivos, tanto en los específicos de la distribución normal como en los relacionados con otros conceptos.

Los alumnos del segundo curso han utilizado *y relacionado más propiedades* antes de optar por una de las variables. Así, vemos que se han aplicado más las propiedades de simetría y unimodalidad en una distribución normal, así como también la propiedad de los intervalos centrales. La aplicación correcta de la propiedad de simetría en la distribución normal viene acompañada de la aplicación de la propiedad de las posiciones relativas de las medidas de tendencia central, así como del análisis de las características de los coeficientes de asimetría y curtosis.

Tabla 8.3.2.3. Elementos de significado específicos de la distribución normal puestos en juego por los alumnos en la resolución de las preguntas 2, 3 y 4 discriminados por curso

Elementos de significado	Correcto		Incorrecto	
	Curso		Curso	
	1999 n=56	2000 n=61	1999 n=56	2000 n=61
Ostensivos				
Representaciones gráficas				
Gráfica de la función de densidad normal	35	40	1	0
Curva de densidad e histograma superpuestos	16	14	0	0
Normal Probability Plot	3	3	0	0
CDF (Curva de densidad acumulada)	1	1	0	0
Representaciones numéricas				
CRITICAL VALUES	5	21	1	0
INVERSE CDF	3	0	2	0
TAIL AREAS	0	3	4	1
DISTRIBUTION FITTING (Media y desviación típica)	20	28	2	1
GOODNESS OF FIT TESTS	2	0	0	2
Actuativos				
Cálculo de parámetros de la distribución normal	20	30	8	10
Cambio de parámetros de la distribución normal	7	3	1	1
Comparación visual	26	30	23	26
Cálculo de probabilidades de valores en intervalos de la distribución normal	2	11	1	0
Cálculo de valores críticos en la distribución normal (cuartiles y mediana)	8	20	34	34
Estudio descriptivo de datos para ajusta una curva	7	32	5	3
Intensivos				
Simetría en la distribución normal	13	27	6	9
Unimodalidad en la distribución normal	1	11	2	3
Parámetros de la distribución normal	20	29	7	9
Propiedades estadísticas de la distribución normal	10	17	2	1
Media (como parámetro)	21	30	6	10
Desviación típica (como parámetro)	21	30	6	10
Propiedad de los intervalos centrales en la distribución normal	2	11	1	0
Distribución teórica	20	28	25	25
Curtosis en la distribución normal	4	23	1	0
Validativos				
Comprobación de propiedades	7	11	3	0
Aplicación de propiedades	15	23	3	4
Análisis	8	24	1	4
Representación gráfica	28	30	18	18
Síntesis	4	22	0	4

También se observa una *mayor discriminación entre la distribución teórica y la empírica* aunque siguen presentándose muchos errores. Lo mismo ocurre en la selección del tipo de variable. Todos estos puntos han sido conflictivos en el desarrollo de la enseñanza en ambos cursos, pero parece observarse una mejora sustancial en el segundo curso. Siguen presentándose muchos problemas en la determinación de valores atípicos y en la interpretación de los distintos tipos de frecuencias que se utilizan en una tabla de frecuencias.

Elementos validativos

Dentro de los elementos validativos destaca un aumento el segundo curso de la aplicación de análisis y síntesis, con lo cual corroboramos lo expresado para los elementos intensivos en donde observamos que *ha habido una mayor relación de propiedades y conceptos*. Muchos de estos alumnos realizan un análisis de cada propiedad (*relacionando, generalmente, con elementos ostensivos o actuativos*) y por último, sacan sus conclusiones realizando una síntesis y es notable el incremento en los porcentajes de aplicación de ambos elementos (Análisis: 14,3% y 39,3% para primero y segundo curso respectivamente. Síntesis: 7,1% y 36,1%).

Lo mismo sucede para los elementos validativos relacionados con otros conceptos, en los que además destacamos el mayor porcentaje en la aplicación de propiedades.

Tabla 8.3.2.4. Elementos de significado relacionados con otros conceptos puestos en juego por los alumnos en la resolución de las preguntas 2, 3 y 4 discriminados por curso

Elementos de significado	Correcto		Incorrecto		
	Curso		Curso		
	1999 n=56	2000 n=61	1999 n=56	2000 n=61	
Ostensivos					
Representaciones gráficas					
Histograma	14	23	0	0	
Polígono de frecuencias	2	10	0	0	
Gráfico de la caja	0	2	0	0	
Symmetry Plot	1	0	0	0	
Representaciones numéricas					
SUMMARY STATISTICS	15	44	2	0	
SUMMARY STATISTICS (Para el cálculo de mediana y cuartiles)	0	0	23	24	
Diagrama de tronco	0	5	0	0	
Tabla de frecuencias	6	20	0	0	
Percentiles	9	0	0	9	
Stat Advisor	1	0	0	0	
Actuativos					
Obtención de límites en los intervalos centrales	2	12	0	0	
Cálculo de los porcentajes en tablas con Statgraphics	2	10	1	0	
Estudio descriptivo de una variable	7	32	5	3	
Intensivos					
Tipo de variable	19	31	36	29	
Simetría y Asimetría	17	35	6	7	
Moda, Unimodalidad, Multimodalidad	3	17	3	10	
Medidas de tendencia central: media, mediana y moda.	10	25	2	3	
Posiciones relativas	10	25	2	3	
Coeficiente de Asimetría, coef. de asimetría tipificado	9	25	1	0	
Coeficiente de curtosis, coef. de curtosis tipificado	4	23	1	0	
Valores atípicos	1	4	0	1	
Estadísticos de orden: Cuartiles y Percentiles	11	21	28	35	
Frecuencias: absolutas, relativas, acumuladas, acumuladas relativas	2	11	1	0	
Validativos					
Comprobación de propiedades	2	11	3	0	
Aplicación de propiedades	20	38	2	10	
Análisis	6	33	1	10	
Representación gráfica	9	17	5	12	
Síntesis	3	22	0	9	

Número de elementos de significado específicos de la distribución normal y relacionados con otros conceptos

Con los resultados presentados en las tablas 8.3.2.5 y 8.3.2.6 podemos confirmar lo que hemos expresado antes. Es decir, vemos que los alumnos del segundo curso presentan una leve

mejora con respecto a los del primero, lo cual nos conduce a pensar que las modificaciones realizadas en la enseñanza han sido significativamente positivas.

La mayor diferencia se presenta especialmente en los elementos intensivos específicos de la distribución normal y también, en los ostensivos, intensivos y validativos de los elementos relacionados con otros conceptos.

Tabla 8.3.2.5. Números de elementos de significado específicos de la distribución normal usados por los alumnos en las preguntas 2, 3 y 4 discriminados por curso

Elementos de significado		Media		Desviación típica		T	Significación
		1999	2000	1999	2000		
Ostensivos	Correctos	1,52	1,79	1,17	1,43	1,13	0,258
	Incorrectos	0,10	0,06	0,70	0,50	0,344	0,734
Actuativos	Correctos	1,13	1,54	1,11	1,50	-1,712	0,090
	Incorrectos	1,20	1,16	0,90	0,92	0,193	0,847
Intensivos	Correctos	1,64	2,92	1,79	2,77	-2,979	0,004
	Incorrectos	0,55	0,69	0,99	1,19	-0,669	0,505
Validativos	Correctos	1,11	1,80	1,33	1,99	-2,240	0,027
	Incorrectos	0,45	0,49	0,57	0,89	-0,332	0,741

Al realizar la prueba T de diferencias de medias entre muestras relacionadas, cuyos resultados se incluyen en la tabla, vemos que la diferencia no es siempre significativa, aunque siempre se produce en sentido positivo (anteriormente hicimos una prueba de análisis de varianza de medida repetida para estudiar la significación global de la diferencia entre elementos usados correcta e incorrectamente y evitar el problema de las comparaciones múltiples, obteniendo una significación $p < 0,001$). Las diferencias mayores se producen en los elementos intensivos y validativos aplicados correctamente.

Tabla 8.3.2.6. Números de elementos de significado relacionados con otros conceptos usados por los alumnos en las preguntas 2, 3 y 4 y discriminados por curso

Elementos de significado		Media		Desviación típica		T	Significación
		1999	2000	1999	2000		
Ostensivos	Correctos	0,84	1,70	0,78	1,06	5,089	0,000
	Incorrectos	0,42	0,54	0,00	0,36	-1,167	0,246
Actuativos	Correctos	0,20	0,89	0,55	1,07	-4,437	0,000
	Incorrectos	0,11	0,05	0,31	0,22	1,155	0,251
Intensivos	Correctos	1,36	3,15	1,37	2,77	-4,483	0,000
	Incorrectos	1,39	1,39	1,06	1,37	-0,003	0,998
Validativos	Correctos	0,71	1,98	1,04	1,79	-4,730	0,000
	Incorrectos	0,20	0,67	0,52	1,12	-2,983	0,004

8.3.3. DIFERENCIAS ENTRE TIPOS DE ALUMNOS

En esta sección analizaremos las diferencias entre los dos tipos de alumnos. Recordemos que hemos trabajado con dos grupos diferentes, aquellos que tenían conocimientos previos de estadística (tipo 1) y los que no poseían conocimientos previos (tipo 2). En el primer grupo había 59 alumnos mientras que el segundo estaba compuesto por 58.

En la tabla 8.3.3.1 se presentan los resultados en relación con la pregunta de simetría, en la 8.3.3.4, los resultados en relación con la variable seleccionada en la pregunta 2 y en las tablas 8.3.3.5 y 8.3.3.6, los resultados sobre el cálculo de los parámetros de la distribución normal, mediana y cuartiles. En las tablas 8.3.3.2, 8.3.3.7 y 8.3.3.8 se muestran las frecuencias de aplicación de los elementos de significado utilizados por los alumnos de los dos grupos en las cuatro preguntas de la prueba. Por último, en las tablas 8.3.3.3, 8.3.3.9 y 8.3.3.10, se presentan los estadísticos correspondientes a la prueba de diferencias T en relación con los elementos de significado personal aplicado en las cuatro preguntas.

Elementos de significado puestos en juego en la evaluación de la simetría y valores atípicos

En primer lugar, observamos que en ambos grupos, el mayor porcentaje de alumnos ha contestado que la variable PESO es asimétrica pero, sin especificar el tipo de asimetría, con lo

cual se pone una vez más de manifiesto el problema que hemos mencionado en secciones anteriores, con respecto a la dificultad semiótica y visual de determinar correctamente el tipo de asimetría.

Si observamos el porcentaje de respuestas correctas en ambos grupos, vemos que en general, los alumnos con estudios previos (tipo 1) han contestado correctamente en un porcentaje notablemente mayor (considerando correctas si respondían: asimétrica o asimétrica a la derecha: 86,4% del tipo 1 y 65,5% del tipo 2). Asimismo, el porcentaje de errores ha sido menor en el primer grupo (11,9% para los alumnos del tipo 1 y 32,8% para los alumnos del tipo 2).

Igualmente, consideramos que el porcentaje de respuestas correctas obtenidas por los alumnos del tipo 2 ha sido bastante aceptable, considerando que no tenían conocimientos previos de estadística y que en la mayoría de los casos no conocían el manejo de la herramienta informática. En los resultados mostrados en la Tabla 8.3.3.2 también se puede ver que los alumnos del tipo 1 han tenido un desempeño mucho mejor que los del tipo 2, como era de esperar. A continuación detallamos las diferencias encontradas en los diversos elementos de significado.

Tabla 8.3.3.1. Frecuencia y porcentaje de respuestas sobre la simetría de la distribución

Respuesta	Tipo 1 n=59	Tipo 2 n=58	Total
Asimétrica a la derecha (Correcta)	24 (40,7)	5 (8,6)	29 (24,8)
Asimétrica a la izquierda	2 (3,4)	5 (8,6)	7 (5,9)
Asimétrica (sin especificar)	27 (45,7)	33 (56,9)	60 (51,4)
Simétrica	5 (8,5)	14 (24,2)	19 (16,2)
No responde	1 (1,7)	1 (1,7)	2 (1,7)
Total	59 (100,0)	58 (100,0)	117 (100,0)

Elementos ostensivos

Las diferencias más significativas se presentan en la aplicación del polígono de frecuencias, el gráfico de la caja, el diagrama de tronco y la función de densidad, mientras que no hay diferencia para el histograma o el SYMMETRY PLOT.

Creemos que esto puede ser consecuencia de que la interpretación de los dos últimos gráficos mencionados puede llegar a ser más intuitiva, es decir, cuando se pide analizar la simetría o asimetría de una distribución, es más fácil de ver a “simple vista” esta característica en uno de dichos gráficos. Para analizar esa característica en un diagrama de caja o de tronco es preciso *relacionar* otras cuestiones o propiedades, tales como por ejemplo, la posición de media y mediana en el primero, o saber interpretar en el diagrama de tronco cuáles son los valores atípicos. Además el polígono de frecuencias se encuentra en un menú secundario del programa, por lo que es más difícil de localizar.

Otro elemento ostensivo en el que se presenta mucha diferencia en el número de aplicaciones es el SUMMARY STATISTICS (49,1% para el tipo 1 y 31,0% para el tipo 2). Por medio de dicho resumen, los alumnos podían calcular los coeficientes de asimetría o los valores de media, mediana y moda. La aplicación de este resumen lleva también implícito el conocimiento de las opciones de segundo orden dentro del menú correspondiente, con lo cual puede ser algo más complicado obtener los valores buscados por medio de él.

Elementos actuativos

Los alumnos de tipo 1 aplican mayor número en todos los elementos actuativos, particularmente en el cálculo de valores atípicos (67,8% para los alumnos del tipo 1 y 22,4% para los alumnos del tipo 2) y en el estudio descriptivo de una variable (67,8% para el tipo 1 y 32,7% para el tipo 2). Pensamos que estas diferencias se deben a que en ambos casos hay que tener en cuenta una serie de convenios de lectura de gráficos por ejemplo, para el cálculo de los valores atípicos, se los debe saber reconocer en el diagrama de tronco o se debe saber cómo obtenerlos a partir del diagrama de la caja, lo cual requiere conocer las opciones del programa en dicho diagrama, para poder determinarlos o identificar los valores en el diagrama de tronco. Además se requiere la *integración de un número de conocimientos previos* sobre distribución,

valor atípico y resúmenes estadísticos que los alumnos con estudios previos conocían antes de comenzar el curso, mientras que eran nuevos para los del segundo grupo.

En la comparación visual presentan porcentajes de aplicación similares (84,7% para el tipo 1 y 68,9% para el tipo 2), debido a que es un procedimiento intuitivo, que era nuevo para ambos tipos de alumnos y que los alumnos sin estudios previos han logrado adquirir.

Tabla 8.3.3.2. Elementos de significado puestos en juego por los alumnos en la resolución de la tarea 1 discriminados de acuerdo a los estudios previos

Elementos de significado	Correcto		Incorrecto		
	Est. Prev.		Est. Prev.		
	1 n=59	2 n=58	1 n=59	2 n=58	
Ostensivos					
Representaciones gráficas					
Histograma	29	28	0	0	
Polígono de frecuencias	19	11	0	0	
Gráfico de la caja	28	15	0	0	
Symmetry plot	1	4	0	0	
Curva de densidad	22	15	0	0	
Scatterplot	0	0	0	3	
Representaciones numéricas					
Diagrama de tronco	32	10	0	0	
Tabla de frecuencias	13	13	0	0	
SUMMARY STATISTICS	29	18	0	0	
Actuativos					
Cálculo de valores atípicos	40	13	7	20	
Estudio descriptivo de una variable	40	19	2	4	
Comparación visual	50	40	5	10	
Intensivos					
Simetría y asimetría	52	44	6	12	
Tipo de asimetría	23	11	2	4	
Medidas de tendencia central: media, moda y mediana. Posición relativa	17	13	3	4	
Coeficiente de asimetría	25	12	0	2	
Coeficiente de asimetría tipificado	19	6	0	2	
Valores atípicos	51	34	3	11	
Validativos					
Comprobación de propiedades	18	5	0	0	
Aplicación de propiedades	24	14	3	4	
Análisis	41	20	1	3	
Representación gráfica	50	40	5	10	
Síntesis	51	36	5	10	

Elementos intensivos

En estos elementos se ve una gran diferencia en la interpretación del tipo de asimetría y de los coeficientes de asimetría, hecho que hemos comentado al referirnos a la tabla 8.3.3.1. Este es un concepto abstracto, que se relaciona con la capacidad geométrica y que los alumnos con estudios previos ya conocían de cursos anteriores.

Es también destacable la diferencia en la interpretación de los valores atípicos (86,4% para el tipo 1 y 58,6% para el tipo 2). La mayoría de los alumnos que han determinado correctamente que existen valores atípicos, pero muchos de ellos no logra determinar exactamente cuántos y cuáles son. *La percepción de los valores atípicos se relaciona con la comparación visual* (elemento actuativo), y muchos han observado en el histograma, polígono de frecuencias, o algún otro gráfico que, existían valores que estaban muy alejados de los valores centrales de la distribución. No obstante los alumnos del grupo 2 no logran determinar su valor ya sea porque no conocían la opción del programa que les ayudaba a determinarlos (como en el caso del gráfico de la caja) o porque no conocían el convenio de lectura para el diagrama de tronco.

Elementos validativos

Los alumnos del primer grupo usan más elementos validativos que los del segundo y cometen menos errores. Destacan las diferencias en la aplicación (40,7% para el tipo 1 y 24,1% para el tipo 2) y comprobación de propiedades (30,5% para el tipo 1 y 8,6% para el tipo 2) y el análisis (69,5% para los alumnos del tipo 1 y 34,5% para los del tipo 2). En este último elemento es en el que se presenta la diferencia más marcada, debido a que muchos alumnos del primer grupo han realizado un análisis detallado de cada una de las propiedades que podían darles información sobre la asimetría y su tipo. Por ejemplo, muchos alumnos analizaban los coeficientes de asimetría, la propiedad de media, mediana y moda, observaban la forma de los gráficos, la posición de los valores atípicos y por último daban una conclusión.

Los alumnos del tipo 2, generalmente, utilizaban propiedades aisladas o se basaban exclusivamente en la observación de los gráficos para extraer sus conclusiones, son capaces de usar la representación gráfica como validación e incluso de realizar una síntesis en una proporción importante. Sin embargo fallan al confundir la condición necesaria con condición necesaria y suficiente y por ello no llegan a la fase de análisis.

Número de elementos de significado específicos de la simetría puestos en juego por tipo de alumnos

Por medio de los resultados presentados en la tabla 8.3.3.2 podemos corroborar lo que hemos afirmado anteriormente, ya que vemos que en promedio, los alumnos del tipo 1 han tenido un rendimiento significativamente superior en todos los elementos de significado, siendo especialmente notoria esa diferencia en los elementos validativos.

Tabla 8.3.3.3. Número de elementos de significado puestos en juego para evaluar la simetría discriminados por tipo de alumnos

Elementos de significado		Media		Desviación típica		T	Significación
		Tipo 1	Tipo 2	Tipo 1	Tipo 2		
Ostensivos	Correctos	2,93	2,02	1,30	1,25	3,885	0,000
	Incorrectos	0	0	0	0		
Actuativos	Correctos	2,20	1,24	0,94	1,01	5,312	0,000
	Incorrectos	0,24	0,59	0,54	0,77	-2,832	0,006
Intensivos	Correctos	3,17	2,07	1,60	1,62	3,697	0,000
	Incorrectos	0,24	0,60	0,57	0,97	-2,482	0,015
Validativos	Correctos	3,12	1,98	1,49	1,61	3,969	0,000
	Incorrectos	0,24	0,47	0,65	0,92	-1,544	0,126

Esto se confirma mediante la prueba T de diferencias de medias entre muestras relacionadas, cuyos resultados se incluyen en la tabla (anteriormente hicimos una prueba de análisis de varianza de medida repetida para estudiar la significación global de la diferencia entre elementos usados correcta e incorrectamente y evitar el problema de las comparaciones múltiples, obteniendo una significación $p < 0.001$). Todas las diferencias son en este caso estadísticamente significativa excepto el número de errores en elementos ostensivos (pues ningún grupo tiene errores) y el número en las validaciones que es similar en los dos grupos.

Número de elementos de significado específicos de la distribución normal y los relacionados con otros conceptos puestos en juego en la resolución de las tareas 2, 3 y 4

Si consideramos que las respuestas correctas, al seleccionar una de las variables (pregunta 2), eran PULS_DESP o por TIEMPO_DIC, observamos que los alumnos del tipo 1 (44,1%) han contestado en forma correcta en un porcentaje algo superior que los alumnos del tipo 2 (39,7%). Sin embargo, debemos destacar el bajo porcentaje de selección en ambos grupos de la variable TIEMPO_DIC que era la que más se ajustaba a la distribución normal. También es destacable que en este caso, los alumnos del tipo 2 han dado mayor cantidad de respuestas correctas que los del tipo 1, aunque al ser las diferencias tan bajas en ambos casos, no podemos considerarlas como significativas.

Tabla 8.3.3.4. Tipo de variable seleccionadas discriminadas por tipos de alumnos

Variable	Estudiantes que seleccionaron cada variable		Total
	Tipo 1 n = 59	Tipo 2 n = 58	
PULS_REP	2 (3,4)	4 (6,9)	6 (5,2)
*PULS_DESP	21 (35,6)	16 (27,6)	37 (31,6)
TIEMPO_SEP	3 (5,1)	1 (1,7)	4 (3,4)
*TIEMPO_DIC	5 (8,5)	7 (12,1)	12 (10,3)
PESO	0 (0,0)	4 (6,9)	4 (3,4)
TALLA	15 (25,4)	11 (18,9)	26 (22,2)
SEXO	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)
DEPORTE	0 (0,0)	1 (1,7)	1 (0,8)
EDAD	13 (22,0)	14 (24,2)	27 (23,1)
Total	59 (100,0)	58 (100,0)	117 (100,0)

En relación con las variables que han sido seleccionadas incorrectamente no ha habido diferencias destacables, observándose además que en determinados casos los alumnos del tipo 1 contestan incorrectamente en mayor porcentaje que los del tipo 2 (variables TIEMPO_SEP y TALLA), y en otros casos, el porcentaje de respuestas ha sido bastante similar.

Estos resultados nos muestran que en muchos casos, los alumnos con conocimientos previos están influidos por éstos, lo cual se puede ver en el porcentaje de alumnos que seleccionan variables que generalmente se toman como aproximadamente normales, tales como la edad o la talla.

Tabla 8.3.3.5. Frecuencia de distribución usada y parámetros calculados (pregunta 3)

	Distribución usada							
	Teórica		Empírica		Ninguna		Total	
	Tipo 1 n=59	Tipo 2 n=58	Tipo 1 n=59	Tipo 2 n=58	Tipo 1 n=59	Tipo 2 n=58	Tipo 1 n=59	Tipo 2 n=58
Parámetros correctos	33 (55,9)	15 (25,9)	7 (11,9)	5 (8,6)			40 (67,8)	20 (34,5)
Añade estadísticos incorrectos			6 (10,2)	11 (18,9)			6 (10,2)	12 (20,7)
No responde		1 (1,7)			13 (22,0)	26 (44,8)	13 (22,0)	26 (44,8)
Total	33 (55,9)	16 (27,6)	13 (22,1)	16 (27,5)	13 (22,0)	26 (44,8)	59 (100,0)	58 (100,0)

En relación con el cálculo de los parámetros de la distribución normal ajustada (pregunta 3), vemos que en general, los alumnos del tipo 2 han tenido más dificultades para responder correctamente a esta pregunta. En general, destaca el alto porcentaje de alumnos del segundo grupo que no responden a dicha pregunta (44, 8%). Por otra parte, los alumnos del tipo 1 han tenido un rendimiento claramente superior en el sentido que, la mayoría de ellos ha obtenido los parámetros correctos de la distribución teórica, distinguiendo entre ésta y la empírica y diferenciando además, las opciones correctas del programa con la cual los obtendrían.

Lo mismo sucede cuando deben obtener la mediana y los cuartiles de la distribución normal ajustada. En general, los alumnos del tipo 1 obtienen un mayor porcentaje de respuestas correctas, aunque en este caso se observa una mayor dificultad para diferenciar las medidas correspondiente a la distribución teórica y a la empírica. Esto puede ser consecuencia de una confusión en las opciones del programa que deben utilizar.

En general, podemos determinar que la diferencia entre ambos tipos de alumnos se presentan cuando se les plantea actividades más complejas como éstas en las que se requiere un razonamiento menos intuitivo. Es aquí en donde se observa mayor diferencia entre los dos tipos

de alumnos. En las tablas 8.3.3.7 y 8.3.3.8 se presentan los resultados en relación con los elementos de significado puestos en juego en las preguntas 2, 3 y 4, en las que se puede apreciar la diferencia de aplicaciones correctas entre los dos grupos.

Tabla 8.3.3.6. Respuestas dadas en relación con el cálculo de mediana y cuartiles (pregunta 4)

	Distribución usada							
	Teórica		Empírica		No especifica		Total	
	Tipo 1 n=59	Tipo 2 n=58	Tipo 1 n=59	Tipo 2 n=58	Tipo 1 n=59	Tipo 2 n=58	Tipo 1 n=59	Tipo 2 n=58
Correctos	16 (27,1)	5 (8,6)	21 (35,6)	8 (13,7)			37 (62,7)	13 (22,4)
Parcialmente correctos	8 (13,5)	1 (1,7)	5 (8,5)	9 (15,5)	1 (1,7)	13 (22,0)	11 (18,9)	
Incorrectos		2 (3,4)	3 (5,1)	14 (24,1)	4 (6,9)	3 (5,1)	20 (34,5)	
No resuelve					6 (10,2)	14 (24,1)	6 (10,2)	14 (24,2)
Total	24 (40,6)	8 (13,7)	29 (49,2)	31 (53,3)	6 (10,2)	19 (32,7)	59 (100,0)	58 (100,0)

Elementos ostensivos

Dentro de las representaciones gráficas, los alumnos de tipo 1 han aplicado con mayor frecuencia los dos gráficos siguientes: la gráfica de la función de densidad normal y la curva de densidad superpuesta al histograma, lo que muestra más dominio de los programas de graficación.

En relación con las representaciones numéricas, destaca el elevado porcentaje de aplicación de DISTRIBUTION FITTING y CRITICAL VALUES, especialmente en los alumnos del tipo 1, que son opciones más abstractas, en las que los alumnos deben comprender la idea de distribución, ajuste, valor crítico, así como el uso de las mismas. Esto coincide con lo expresado antes (Tablas 8.3.3.5 y 8.3.3.6) en relación con el mayor porcentaje de respuestas correctas al calcular parámetros y mediana y cuartiles. En general, se observa que los alumnos del tipo 1 han diferenciado claramente estos dos elementos ostensivos como representativos de la distribución teórica.

También debemos decir que es destacable el bajo porcentaje de aplicación de representaciones numéricas por parte de los alumnos del segundo grupo, lo cual demuestra la dificultad en la interpretación de dichos elementos comparada con las representaciones gráficas que por lo general son mucho más intuitivas.

Dentro de los elementos relacionados con otros conceptos estadísticos (Tabla 8.3.3.8) destacamos el uso de SUMMARY STATISTICS que ha sido aplicado correctamente en el cálculo de los coeficientes de asimetría y curtosis y para obtener media, mediana y moda de la distribución empírica. Los alumnos del primer grupo han llegado en mayor número al cálculo de estos estadísticos.

Elementos actuativos

En concordancia con lo expresado para los elementos ostensivos, destaca el cálculo correcto de parámetros en la distribución normal en el primer grupo, siendo el porcentaje de aplicación correcta mayor para los alumnos del primer grupo (61% para el tipo 1 y 24,1% para el tipo 2). Ello implica, por un lado, mayor dominio de los programas y también la mejor comprensión de la idea de parámetro, así como su diferenciación con la de estadístico.

La comparación visual es otro de los elementos actuativos más empleado por los dos tipos de alumnos, aumentando el porcentaje de aplicación en el segundo grupo, ya que ellos se apoyan predominantemente en lo visual y no en lo numérico.

En el cálculo de valores críticos hay una gran diferencia en el porcentaje de aplicación correcta entre ambos grupos (40,7% para los alumnos del primer grupo y 6,9% para los del segundo grupo). En este caso además, hay un gran número de errores en ambos grupos, por la misma dificultad de la idea de valor crítico, así como porque es necesario usar una opción

secundaria de los programas.

Otro punto a destacar es el cálculo de probabilidades en intervalos de la distribución normal, lo cual corresponde a la aplicación de la propiedad de los intervalos centrales (elemento intensivo). En este caso hay una gran diferencia entre el porcentaje de aplicación en cada grupo (16,9% para el tipo 1 y 5,2% para el tipo 2). También esto puede ser consecuencia de que la aplicación de dicha *propiedad requiere relacionar diversos elementos de significado*, lo cual hace que la tarea presente una complejidad semiótica superior.

El elemento mencionado en el párrafo anterior está en estrecha relación con el cálculo de porcentajes en tablas con Statgraphics y con la obtención de límites en intervalos centrales, en los que ha habido un mayor porcentaje de aplicación en los alumnos del primer grupo (ver Tabla 8.3.3.8).

Tabla 8.3.3.7. Elementos de significado específicos de la distribución normal puestos en juego en la resolución de las preguntas 2, 3 y 4 discriminados por estudios previos

Elementos de significado	Correcto		Incorrecto	
	Est. Prev.		Est. Prev.	
	1 n=59	2 n=58	1 n=59	2 n=58
Ostensivos				
Representaciones gráficas				
Gráfica de la función de densidad normal	44	31	1	0
Curva de densidad e histograma superpuestos	18	12	0	0
Normal Probability Plot	3	3	0	0
CDF (Curva de densidad acumulada)	2	0	0	0
Representaciones numéricas				
CRITICAL VALUES	22	4	1	0
INVERSE CDF	2	1	1	1
TAIL AREAS	2	1	3	2
DISTRIBUTION FITTING (Media y desviación típica)	34	14	2	1
GOODNESS OF FIT TESTS	1	1	1	1
Actuativos				
Cálculo de parámetros de la distribución normal	36	14	11	7
Cambio de parámetros de la distribución normal	7	3	2	0
Comparación visual	35	21	20	29
Cálculo de probabilidades de valores en intervalos de la distribución normal	10	3	0	1
Cálculo de valores críticos (para cuartiles y mediana)	24	4	31	37
Estudio descriptivo de datos	27	12	5	3
Intensivos				
Simetría en la distribución normal	26	14	1	14
Unimodalidad en la distribución normal	12	0	2	3
Parámetros de la distribución normal	34	15	11	5
Propiedades estadísticas de la distribución normal	19	8	1	2
Media (como parámetro)	36	15	10	6
Desviación típica (como parámetro)	36	15	10	6
Proporción de casos en los intervalos centrales de la distribución normal	11	2	0	1
Distribución teórica	34	14	20	30
Curtosis en la distribución normal	21	6	1	0
Validativos				
Comprobación de propiedades	14	4	2	1
Aplicación de propiedades	25	13	4	3
Análisis	23	9	2	3
Representación gráfica	36	22	14	22
Síntesis	18	8	2	2

Elementos intensivos

Las principales diferencias aparecen en aquellos elementos intensivos relacionados con la distinción entre los elementos de una distribución teórica y una empírica, tales como los

parámetros de la distribución teórica y las medidas de posición de ésta. Lo anterior explica la consecuente aplicación correcta de diversos elementos ostensivos y actuativos, como por ejemplo, la utilización del resumen CRITICAL VALUES para el cálculo de la mediana y los cuartiles de la distribución teórica en vez del SUMMARY STATISTICS que serviría para el cálculo de las medidas mencionadas en la distribución empírica.

Tabla 8.3.3.8. Elementos de significado relacionados con otros conceptos puestos en juego por los alumnos en la resolución de las preguntas 2 y 3 discriminados por estudios previos

Elementos de significado	Correcto		Incorrecto	
	Est. Prev.		Est. Prev.	
	1 n=59	2 n=58	1 n=59	2 n=58
Ostensivos				
	Representaciones gráficas			
Histograma	20	17	0	0
Polígono de frecuencias relativas	8	4	0	0
Diagrama de la caja	1	1	0	0
Symmetry Plot	0	1	0	0
	Representaciones numéricas			
Diagrama de tronco	3	2	0	0
SUMMARY STATISTICS	34	25	1	1
SUMMARY STATISTICS (Cálculo de la mediana y los cuartiles)	0	0	18	29
Tabla de frecuencias	14	12	0	0
Percentiles	5	4	4	5
Stat Advisor	1	0	0	0
Actuativos				
Obtención de los límites en los intervalos centrales	10	4	0	0
Cálculo de los porcentajes en tablas con Statgraphics	10	2	0	1
Estudio descriptivo de una variable	27	12	5	3
Intensivos				
Tipo de variable	31	19	28	37
Simetría y Asimetría	33	19	3	10
Moda, Unimodalidad, Multimodalidad	16	4	4	9
Medidas de tendencia central: media, mediana y moda. Posiciones relativas	21	14	2	3
Coeficiente de Asimetría, coef. de asimetría tipificado	25	9	1	0
Coeficiente de curtosis, coef. de curtosis tipificado	21	6	1	0
Valores atípicos	3	2	0	1
Estadísticos de orden: Cuartiles y Percentiles	27	5	27	36
Frecuencias: absolutas, relativas, acumuladas, acumuladas relativas	11	2	0	1
Validativos				
Comprobación de propiedades	9	4	2	1
Aplicación de propiedades	38	20	5	7
Ánalisis	28	11	6	5
Representación gráfica	18	8	6	11
Síntesis	18	7	3	6

También se puede apreciar una diferencia en el cálculo de porcentajes en los intervalos centrales, lo cual conlleva la aplicación correcta de una serie de elementos actuativos, ostensivos e intensivos. Además, los alumnos que aplican esta propiedad generalmente, presentan un informe más completo en su resolución, *integrando más elementos de significado*, ya que la mayoría de ellos aplican esta propiedad para cerciorarse de que los resultados obtenidos antes los conducen a una conclusión correcta validando su conjectura. Con esto, podemos decir que estos alumnos del tipo 1 muestran una mayor madurez en el manejo de los diversos conceptos y elementos.

Con respecto a los elementos relacionados con otros conceptos podemos observar que (Tabla 8.3.3.8) sigue habiendo un mayor porcentaje de aplicación correcta en los alumnos del primer grupo, destacando la interpretación de los coeficientes de asimetría y curtosis, la

interpretación de los diversos tipos de frecuencias en una tabla y la diferenciación de los estadísticos de orden en una distribución teórica y en una empírica.

Elementos validativos

El elemento validativo aplicado en mayor proporción por ambos tipos de alumnos ha sido la representación gráfica, destacando principalmente en el segundo grupo. También en este caso es donde se han producido la mayor cantidad de errores, es decir, usan la gráfica como validación, pero a veces dan argumentos incorrectos.

La aplicación de propiedades es el otro elemento más aplicado por ambos grupos, habiendo una mayor diferencia en el porcentaje de aplicación correcta para el grupo 1.

En general, los alumnos del tipo 1, han aplicado correctamente un mayor número de elementos validativos, observándose argumentaciones en las que se relacionan diversos elementos de significado, es decir, el análisis y la síntesis.

Elementos de significado específicos de la distribución normal y de conceptos relacionados discriminados por tipo de alumnos

En las tablas 8.3.3.5 y 8.3.3.6 se presentan los estadísticos del número de aplicación correcta o incorrecta de los diversos elementos de significado en las tareas 2, 3 y 4, discriminados por el tipo de alumnos. Estos resultados muestran con mayor claridad que los alumnos del tipo 1 han hecho un uso más completo y correcto de los diversos elementos de significado, ya que en todos los casos, el número de elementos correctamente empleados es mayor. Esto parece sugerir que los primeros alumnos presentan una mejor comprensión de los diversos elementos de significado de la distribución normal, su significado se acerca más al significado institucional local pretendido en la enseñanza.

Sin embargo, en los dos grupos hay un número de errores similares, por lo que vemos que las dificultades persisten, incluso después de la enseñanza. Esto se confirma mediante la prueba T de diferencias de medias entre muestras relacionadas, cuyos resultados se incluyen en la tabla (anteriormente hicimos una prueba de análisis de varianza de medida repetida para estudiar la significación global de la diferencia entre elementos usados correcta e incorrectamente y evitar el problema de las comparaciones múltiples, obteniendo una significación $p < 0.001$).

Tabla 8.3.3.9. Número de elementos de significado de la distribución normal aplicados en las preguntas 2, 3 y 4 discriminados por tipo de alumnos

Elementos de significado		Media		Desviación típica		T	Significación
		Tipo 1	Tipo 2	Tipo 1	Tipo 2		
Ostensivos	Correctos	2,17	1,16	1,36	1,09	4,430	0,000
	Incorrectos	0,15	0,08	0,60	0,62	0,616	0,541
Actuativos	Correctos	1,90	0,78	1,39	1,03	4,984	0,000
	Incorrectos	1,08	1,28	0,92	0,89	-1,142	0,256
Intensivos	Correctos	3,31	1,29	2,55	1,83	4,916	0,000
	Incorrectos	0,61	0,64	1,14	1,05	-0,136	0,892
Validativos	Correctos	1,97	0,97	1,87	1,44	3,252	0,002
	Incorrectos	0,41	0,53	0,70	0,80	-0,920	0,360

Tabla 8.3.3.10. Números de elementos de significado relacionados con otros conceptos aplicados en las preguntas 2, 3 y 4, discriminados por tipo de alumnos

Elementos de significado		Media		Desviación típica		T	Significación
		Tipo 1	Tipo 2	Tipo 1	Tipo 2		
Ostensivos	Correctos	1,46	1,14	0,98	0,92	1,867	0,061
	Incorrectos	0,39	0,60	0,25	0,28	0,431	0,667
Actuativos	Correctos	0,80	0,31	1,06	0,68	2,951	0,004
	Incorrectos	0,085	0,069	0,28	0,26	0,318	0,751
Intensivos	Correctos	3,19	1,38	2,61	1,72	4,434	0,000
	Incorrectos	1,12	1,67	1,02	1,36	-2,495	0,014
Validativos	Correctos	1,88	0,86	1,70	1,33	3,611	0,000
	Incorrectos	0,37	0,52	0,74	1,06	-0,851	0,397

En todos los elementos se ve un mayor rendimiento en los alumnos del tipo 1, lo cual es una prueba de que los alumnos del tipo 2 relacionan y aplican menos elementos de significado y trabajan de una forma mucho más intuitiva que del tipo 1. De todos modos, los resultados son razonables para este tipo de alumnos y apoyan la idea de que es posible introducir de manera básica ciertos conceptos estadísticos, ya que aunque estos alumnos presenten un rendimiento menor, debemos destacar que es notable la cantidad de elementos de significado que han manejado correctamente.

8.4. CONCLUSIONES SOBRE LAS CARACTERÍSTICAS DEL SIGNIFICADO PERSONAL APLICADO POR LOS ALUMNOS EN LA PRUEBA CON ORDENADOR

El cuarto objetivo general de nuestra investigación, expuesto en la sección 1.6, era describir los elementos de significado puestos en juego por los alumnos y evaluar su conocimiento en relación con la distribución normal al finalizar la enseñanza. En este capítulo completamos los resultados obtenidos por medio del cuestionario, con las conclusiones extraídas del análisis de los resultados en la prueba con ordenador para cumplir estos objetivos.

Hemos elaborado un instrumento de evaluación que, junto con el cuestionario, contempla todos los elementos de significado presentados en la secuencia de enseñanza observada. Esta prueba, en la que los alumnos tuvieron amplia libertad para trabajar, nos ha permitido observar las características que presentan nuestros alumnos en relación con los elementos de significado que utilizan y los tipos de razonamientos que aplican para resolver una tarea abierta de análisis de datos.

En consecuencia, esto nos ha permitido realizar una evaluación de los elementos de significado que los alumnos han aplicado para resolver las tareas planteadas y de esta manera poder determinar, al menos en forma aproximada, las características en el significado personal construido por ellos sobre la distribución normal y los conceptos relacionados con ella. A partir de esto, analizamos las conclusiones principales en relación con los elementos de significado y las diferencias entre cursos y tipos de alumnos que pasamos a describir a continuación.

Concordancia entre el significado institucional local previsto y las características en el significado personal de los alumnos del grupo

Al ser una prueba con tareas abiertas, los alumnos han podido aplicar otros elementos que no podían considerar en la resolución del cuestionario, con lo cual podemos observar que han logrado adquirir significativamente determinados elementos que forman parte del análisis exploratorio de datos. En cuanto a los elementos de significado que han sido puestos en juego por los alumnos, podemos decir que ha habido una gran variedad. A continuación describimos los elementos más característicos que han utilizado en forma correcta los alumnos.

Elementos extensivos

Podemos considerar como un elemento extensivo, la búsqueda de ejemplos de distribuciones empíricas que puedan ser adecuadamente ajustadas por el modelo normal. Es decir, en la variable que el alumno elige como respuesta a la tarea 2, podemos ver su “imagen” de la distribución normal, o lo que es lo mismo, el significado que se le asigna.

Un cuarenta por ciento, aproximadamente, de los alumnos seleccionan una variable aceptable, es decir, PULS_DESP y TIEMPO_DIC, las cuales eran cuantitativas, en el primer caso discreta con muchos valores y en el segundo, continua. En consecuencia, los elementos extensivos trabajados correctamente por estos alumnos han sido el ajuste de un modelo por medio de la aproximación al histograma y la aproximación de distribuciones discretas.

Elementos ostensivos

Estos son los elementos que los alumnos aplican en forma más diversa y, en general, correctamente. Especialmente ha habido un mayor número de aplicación del histograma, gráfico de la curva de densidad, diagrama de tronco y el resumen SUMMARY STATISTICS. Este hecho nos conduce a pensar que, en muchos casos, los alumnos han optado por aquellos elementos que les resultaban más fáciles de interpretar por mostrar resultados sencillos y visualizar los casos atípicos, coincidiendo con lo que plantean Ben-Zvi y Friedlander (1997).

Los alumnos reconocen la forma gráfica de la distribución normal y saben diferenciar

cuando un histograma o gráfico del tronco en un conjunto de datos empírico se aproxima a este tipo de distribución teórica. Asimismo hay un porcentaje amplio de alumnos que llega a usar el resumen proporcionado por DISTRIBUTION FITTING, a pesar de ser un tema nuevo para todos los alumnos.

Elementos actuativos

Los alumnos muestran un conocimiento suficiente del manejo de las opciones del software y *logran integrar los resultados producidos* en un fichero de texto, elaborando un informe escrito. Esta es una habilidad prevista en la enseñanza y creemos que fue suficientemente conseguida incluso en los alumnos que por primera vez manejaban la herramienta informática.

Aproximadamente la mitad de los alumnos realizan un estudio descriptivo correcto de las variables en el estudio de la simetría y una tercera parte en el resto de las tareas. En consecuencia, la enseñanza ha capacitado a una proporción importante de alumnos para llevar a cabo en forma correcta este tipo de análisis.

Es también notable la proporción de alumnos que calculan correctamente los parámetros de la distribución normal y alrededor de la cuarta parte llegan a calcular correctamente los valores críticos.

Elementos intensivos

En la resolución de todas las tareas, los alumnos aplican diversos elementos de este tipo, la mayor parte de las veces en forma correcta, destacando el uso correcto de la idea de simetría y valores atípicos en la primera pregunta.

Es también importante la proporción de alumnos (alrededor de la mitad) que comprenden que la media y desviación típica actúan como parámetros de la distribución normal. Las ideas de distribución teórica es aplicada correctamente por un 48% de alumnos.

Elementos validativos

Son bastantes los alumnos que usan como complemento de la representación gráfica otros tipos de validaciones, especialmente cuando resuelven la tarea sobre simetría, sucede lo contrario en las tareas específicas de la distribución normal. Por ejemplo, el 52% de los alumnos hace un análisis y el 75% llega a la síntesis, *relacionando diferentes elementos intensivos, actuativos y ostensivos* al estudiar la simetría en la tarea 1. El 26% llega a una síntesis , *relacionando diferentes elementos intensivos, actuativos y ostensivos* en la tarea 2.

Diferencias entre el significado institucional local previsto y las características en el significado personal de los alumnos del grupo

Es claro que esta prueba ha resultado más difícil que el cuestionario, como consecuencia de que *el alumno debía integrar mayor número de elementos de significado estableciendo relaciones de muy diversos tipos*. Aunque *la mayoría de los alumnos aplica más de un elemento para resolver las tareas, siendo capaces de relacionar los problemas planteados (elementos extensivos) con una serie de elementos ostensivos, actuativos, intensivos y validativos*, no siempre los emplean correctamente. Esto sugiere un cierto desajuste entre los significados personales construidos por los alumnos y el significado institucional local observado. A continuación describimos los elementos más característicos que han utilizado los alumnos y destacaremos también las dificultades más marcadas que se han presentado.

Elementos extensivos

Como hemos indicado, sólo un 40% de los alumnos seleccionan una variable aceptable, considerando el resto como distribuciones normales algunas con valores altos de los coeficientes de asimetría o curtosis e incluso una variable discreta con sólo tres valores diferentes. Esto indica que no se conectan bien los casos en que puede y no puede aplicarse la distribución normal como aproximación de un conjunto de datos.

Elementos ostensivos

La mayor dificultad que se plantea en este tipo de elementos es en la aplicación e interpretación de las representaciones numéricas, siendo el porcentaje de aplicación de éstas muy inferior que el de las aplicaciones de las representaciones gráficas. Esto coincide con el enfoque intuitivo proporcionado en la enseñanza, pero también demuestra que en general, los

alumnos han logrado interpretar mejor aquellos elementos que les brindan una información más obvia. Además en estas representaciones numéricas, la dificultad no sólo radica en el tipo de interpretación que se debe hacer de ellas sino que también requieren del conocimiento de opciones del programa que no aparecen por defecto.

Elementos actuativos

En concordancia con lo anterior, en la resolución de todas las tareas plantadas en la prueba, vemos que el elemento predominante es la comparación visual que permite reconocer la simetría, valores atípicos y la forma de campana típica de la curva de densidad normal. Aunque la comparación visual es un elemento intuitivo para los alumnos y puede aceptarse en un primer paso para acercarse progresivamente al significado institucional local, este procedimiento es claramente insuficiente.

Vemos aquí, de nuevo una diferencia entre el significado institucional local observado y el significado personal construido por los estudiantes, ya que si bien en la enseñanza se mostraron de manera poco formal o “intuitiva” algunas propiedades, también se aplicaron elementos más formales que no siempre han sido puestos en juego por los alumnos.

Mientras que el profesor espera que, una vez hecha la comparación visual, el alumno realice un estudio descriptivo de los datos, estudie los diversos coeficientes y propiedades y compare la proporción de casos en los intervalos centrales con los teóricos en una distribución normal, en general, fueron muy pocos los alumnos que realizaron el cálculo de porcentajes en los intervalos centrales. Esto es en parte, debido a la dificultad en el uso de las opciones no estándares del programa, lo cual impidió la aplicación de esta propiedad de la distribución normal para realizar el ajuste analítico. Pero, en parte es debido al desajuste entre los significados personal e institucional.

En relación con el manejo y aplicación de las opciones informáticas, podemos observar que los alumnos trabajan en un nivel predominantemente intuitivo, en el que logran trabajar con menús u opciones que les brindan información relacionada con lo que desean obtener. Pero a un nivel más profundo o formal, podemos ver que se presentan mayores dificultades y aún aquellos alumnos con conocimientos previos en estadística, en muchos casos, hacen un uso crítico del programa sin detectar errores en la aplicación de algunas opciones. Lo anterior coincide con algunas apreciaciones que realizan Ben-Zvi y Friedlander (1997) en su trabajo.

Elementos intensivos

Los principales problemas se han planteado en la interpretación del tipo de asimetría y en la determinación de los valores exactos de los valores atípicos. Muchos alumnos observan en el histograma, por ejemplo, que la distribución es asimétrica o que tiene valores atípicos, pero no llegan a la determinación exacta de ellos.

Respecto a la simetría, el hecho de manejar dos sistemas de referencia diferentes hace que el alumno confunda su izquierda con la izquierda de la gráfica y en consecuencia, confunda los dos tipos de asimetría. Hay aquí una contradicción con el significado que el alumno atribuye a los términos “derecha e izquierda” en el lenguaje coloquial y el significado dado por convenio a los mismos en el campo de la Estadística.

Por otro lado, puesto que el alumno se siente inseguro en la interpretación de los coeficientes de asimetría, no puede apoyarse en sus valores para hacer una determinación correcta del tipo de simetría. Problemas parecidos encontramos en la determinación de la curtosis. Los problemas relacionados con la dificultad en la interpretación de los coeficientes de asimetría y curtosis ya habían sido observados en las diversas actividades planteadas en la enseñanza, tanto teóricas como prácticas. Como consecuencia de lo observado, la profesora hizo énfasis en la interpretación de estos elementos pero parece que las dificultades no han sido salvadas completamente.

Respecto a los valores atípicos, el problema se presenta tanto por escaso dominio de algunas opciones del software, como por no interpretar adecuadamente el diagrama de tronco o el gráfico de la caja.

También se detectaron problemas en la diferenciación o identificación de la distribución teórica y la empírica. Esto se pone de manifiesto en que muchos alumnos utilizaron opciones que son propias del cálculo de medidas de la distribución empírica para calcular la mediana y

los cuartiles de la distribución teórica. Esto concuerda con los resultados obtenidos por Vallecillos (1995) y Schuyten (1991), quienes indican que éste es uno de los puntos difíciles en el estudio de la inferencia.

Fueron pocos los alumnos que aplicaron la propiedad de los intervalos centrales en una distribución normal, mientras que muchos se conformaron con aplicar solamente la propiedad de la posición relativa de media, mediana y moda, la cual es una condición necesaria pero no suficiente para que una distribución que es simétrica sea normal. Esto nos lleva a pensar que algunos alumnos necesitan más tiempo para madurar estos conceptos de tal manera que puedan hacer uso crítico de ellos, identificando las ocasiones en que sería pertinente aplicarlos. Este problema también fue detectado por Biehler (1997). Además, nos muestra otra diferencia entre el significado institucional local y el personal: confusión de condición necesaria con condición suficiente.

También la confusión entre distribución teórica y empírica había sido observada y tenida en cuenta en la enseñanza, planteándose ejemplos adicionales, visualizándolos por medio del ordenador con el fin de poner de manifiesto esta diferencia. Por lo que se observa la gran dificultad semiótica que presenta este tipo de tarea, que es consecuencia de la complejidad sistemática debido a que *se deben integrar una serie de elementos de significado de todos los tipos* para lograr adquirir significativamente estos conceptos y lograr la diferenciación entre ellos.

Elementos validativos

En coincidencia con los resultados y las conclusiones obtenidos para los otros elementos de significado, el elemento validativo más utilizado es la representación gráfica. Es decir, la mayoría de los alumnos se han valido de ella para justificar sus respuestas, lo que demuestra la dificultad de expresar sus ideas por medio de otros tipos de argumentaciones.

Además, el porcentaje de los que llegan a la síntesis o análisis se reduce considerablemente en las tareas 2, 3 y 4, donde es aproximadamente la cuarta parte de los alumnos los que realizan algún tipo de análisis o síntesis. Sin duda la mayor complejidad semiótica de dichas tareas incide en este menor uso de elementos validativos de alto nivel, lo que también ha influido en que los alumnos lleguen a una solución incorrecta de estas tareas.

Los resultados obtenidos ponen de manifiesto la gran diversidad de elementos que el alumno debe usar para resolver las tareas planteadas y la diferencia con las tareas tradicionales incluidas en los libros de texto.

El alumno debe ser capaz de elegir unos elementos ostensivos adecuados para representar sus datos, y operar con ellos mediante una serie de elementos actuatorios que le producen nuevos ostensivos gráficos y numéricos. Cada uno de ellos debe ser interpretado adecuadamente, estableciendo correspondencias semióticas pertinentes entre los mismos y las propiedades (elementos intensivos) características de la distribución normal, comparando si se cumplen o no en el conjunto de datos.

Finalmente, *debe ser capaz de ligar* todos estos resultados (ostensivos e intensivos principalmente) por medio de una validación pertinente en la que precisa hacer uso, tanto de la representación gráfica y comprobación de propiedades, como del análisis y la síntesis. Es muy importante a la hora de planificar una enseñanza, tener en cuenta todos los elementos previos que el alumno deberá *conocer y relacionar* para poder adquirir de manera coherente el significado global de la distribución normal.

Conclusiones respecto a las diferencias en el significado personal en los dos cursos

Los otros dos objetivos generales planteados al comenzar el capítulo estaban relacionados con la observación de posibles diferencias entre los alumnos de los dos cursos participantes y de las tipologías que habíamos definido (con o sin estudios previos en estadística).

En relación con las diferencias entre cursos, hemos encontrado algunas leves diferencias positivas en los alumnos del segundo año, que han sido consecuencia de los cambios introducidos en la planificación de la enseñanza, lo cual nos anima a pensar que es posible seguir revisando los objetivos y la planificación de nuestro curso para continuar mejorando en el futuro. Además, puesto que se mantienen los tipos de respuestas, dificultades y logros de los alumnos, nos indica que nuestros resultados tienen una gran posibilidad de ser generalizados a otros cursos, siempre que se trabaje con alumnos de características similares.

Conclusiones respecto a las diferencias en el significado personal en alumnos con y sin instrucción previa

En cuanto a las diferencias entre los tipos de alumnos, hemos podido apreciar que aunque en general, los alumnos que poseen conocimientos previos de estadística tienen un mejor rendimiento, los alumnos sin conocimientos previos han mostrado un buen manejo de los diversos elementos presentados en la experiencia de enseñanza. Somos conscientes de que el desempeño mostrado por estos alumnos es mucho más intuitivo, pero de todos modos, han mostrado un aprendizaje suficiente de un gran número de conceptos y procedimientos estadísticos, no sólo en relación a la distribución normal, sino también sobre temas anteriores. Asimismo muestran un dominio razonable del software.

En consecuencia, nuestros resultados muestran, entonces, que es posible organizar una enseñanza de conceptos estadísticos básicos con un tratamiento menos formal que pueda ser adquirida por un número mayor de alumnos sin necesidad de poseer demasiados conocimientos de estadística y probabilidad y en un tiempo limitado. Es claro que la profundidad de los conocimientos no podrá compararse a la de los alumnos que han estudiado estadística con anterioridad, pero al menos les dotará de una cultura suficiente para consultar con un estadístico que le ayude en el futuro a resolver sus problemas de análisis de datos.

CAPÍTULO IX

CONCLUSIONES

9.1. INTRODUCCION

Para finalizar esta Memoria, presentamos en este capítulo las conclusiones más importantes de nuestro estudio respecto a cada uno de los objetivos específicos que se plantearon en el Capítulo III.

Seguidamente, analizamos las aportaciones de este estudio y realizamos una valoración global de su alcance y limitaciones, respecto a sus posibilidades de ser generalizado a otras muestras de estudiantes o a otros cursos de estadística.

Finalizamos este capítulo con la descripción de algunos puntos sobre los que otros investigadores podrían continuar en la línea de investigación iniciada y con algunas sugerencias que se deducen de nuestras conclusiones y que creemos pueden mejorar la enseñanza del tema y, por tanto, la comprensión de los estudiantes y también pueden servir de base a investigaciones futuras sobre la comprensión de conceptos estadísticos.

9.2. CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

En el Capítulo I se describieron unos objetivos iniciales generales para nuestra investigación, que luego se desarrollan y concretan en el Capítulo III por medio de una serie de objetivos específicos. A continuación describimos las principales conclusiones alcanzadas en función de dichos objetivos específicos.

Determinación del significado institucional de referencia

O1: Caracterizar los significados más comunes que se presentan en una muestra de libros de texto sobre la distribución normal (para fijar el Significado institucional de referencia).

Para cumplir este objetivo, se ha realizado el análisis epistémico sobre una muestra de libros de texto universitarios, elegidos con los criterios que se describen en el Capítulo IV y que están dirigidos a alumnos de características similares a los que participaron en nuestro estudio. En este análisis, hemos identificado los diferentes campos de problemas, elementos actuativos, ostensivos, intensivos y validativos presentados en estos libros en relación con la distribución normal y otros conceptos relacionados con ella, que constituyen el significado institucional de referencia en nuestra investigación.

Una primera conclusión de este estudio es la complejidad del significado de la distribución normal, que se apoya en muchos otros conceptos previos, como los de variable estadística y aleatoria, distribución estadística, medidas de posición central y dispersión, simetría, curtosis, probabilidad, etc. El alumno debiera tener estos conceptos afianzados al iniciar la enseñanza del tema, lo cual es poco probable, en las condiciones actuales de la enseñanza de la estadística, debido a que muchos de estos alumnos no han estudiado estadística durante la educación secundaria o el Bachillerato.

Los elementos *extensivos* o campos de problemas incluidos en los libros sobre la distribución normal son todos muy relevantes, bien desde el punto de vista teórico o práctico.

Desde el punto de vista teórico porque algunos de los teoremas más importantes del cálculo de probabilidades (teoremas de límite) y algunos de los resultados más útiles de la inferencia

(obtención de distribuciones exactas y asintóticas en el muestreo) se han obtenido precisamente al tratar de resolver estos campos de problemas. Por consiguiente, estos campos de problemas han contribuido en gran medida al desarrollo de la estadística como ciencia.

Desde el punto de vista práctico, porque en el análisis de datos con fines inferenciales se presentan todos los campos de problemas identificados, tanto en el ajuste de modelos a los datos, la aproximación de modelos para variables discretas, la obtención de distribuciones muestrales exactas y aproximadas, estimación y contraste. Es desde este último punto de vista que pensamos que estos campos de problemas justifican el interés del estudio de la distribución normal para nuestros estudiantes, porque constituyen situaciones problemáticas que con frecuencia encontrará el alumno en su futuro trabajo profesional.

Sin embargo, los ejemplos y ejercicios presentados en los libros analizados no corresponden al análisis de conjuntos de datos reales sino que, por lo general, consisten en ejemplos expresamente preparados para que el cálculo sea sencillo. Pero, si queremos que el futuro profesional se interese realmente por la estadística y vea sus posibilidades, es preciso que pueda apreciar la utilidad en el análisis de colecciones de datos amplias, preferiblemente, colecciones de datos recogidas por el mismo alumno o procedentes de investigaciones que el alumno pueda comprender. Esto es lo que nos llevó a la decisión del trabajo con ordenador, que hace posible el cálculo y la graficación de una manera sencilla.

El estudio de la distribución normal requiere una gran variedad de *elementos ostensivos* de tipo gráfico, numérico, simbólico y algebraico. En realidad en este tema se podrían usar todas las representaciones numéricas y gráficas que el alumno ya conoce y que ha estudiado en los temas introductorios, aunque en los libros de texto no se suele conectar el tema con los anteriores. Es decir, no se hace una conexión entre el estudio del modelo probabilístico y el análisis de datos empíricos.

Consideramos que esto es una contradicción, puesto que es precisamente porque existen datos empíricos que deben ser analizados por lo que recurrimos a los modelos matemáticos, que pierden su razón de ser si no se relacionan con los datos que se quieren modelizar. Los libros de texto enfatizan sobre todo en los elementos simbólicos, algebraicos y numéricos, particularmente las tablas de la distribución que actualmente pierden relevancia, debido a la introducción del ordenador. En nuestro trabajo concedemos mayor importancia a la representación gráfica y *conectaremos* los gráficos que los alumnos han estudiado en el estudio descriptivo, en este tema.

Respecto a los *elementos actuativos*, los que más importancia tienen en los textos son el cálculo de probabilidades a partir de la tabla de la distribución normal y la tipificación requerida, a lo que se dedica gran cantidad de espacio y que también es actualmente innecesarios por la presencia de calculadoras y ordenadores que reemplazan la utilización de dichas tablas.

No se contemplan dentro de este tema otros posibles procedimientos, como es el estudio descriptivo de datos, la estimación de probabilidades a partir de tablas de frecuencia para luego comparar con las obtenidas en los modelos teóricos, etc. Se pide a los alumnos calcular probabilidades en poblaciones normales con media y desviación típica conocidas, pero la forma en que se ha obtenido estos parámetros y el carácter aproximado de los mismos no se llega a mencionar hasta mucho más tarde en el tema de la inferencia y aún allí los casos presentados son totalmente artificiales. Nosotros hemos utilizado una variedad de elementos actuativos, que se describen en el Capítulo V.

Respecto a los elementos *intensivos* observamos que en el tema se usan e integran gran cantidad de conceptos y propiedades que el alumno debe haber adquirido anteriormente, lo que sin duda influye en su complejidad. Es en realidad el estudio de la distribución normal el que justificaría muchos de los conceptos teóricos anteriores, como por ejemplo, el estudio de la simetría y curtosis. Pensamos que sería necesario hacer una conexión más directa entre los diferentes temas, de modo que el alumno comprenda su necesidad y utilidad. Por ello, en el diseño de nuestra enseñanza hemos tratado de llevar a cabo esta conexión.

Sobre los elementos *validativos* la principal conclusión es que en pocos casos se usan demostraciones deductivas, que son sustituidas por argumentaciones más informales, como la representación gráfica, la comprobación de casos y la generalización. Es por ello que en nuestro estudio usaremos este tipo de demostraciones y las potenciaremos mediante el recurso a la simulación y graficación con ordenador.

Determinación del significado institucional local previsto y diseño de una secuencia didáctica

O2: Seleccionar una muestra de elementos de significado que constituya la base del significado institucional local específico a presentar al alumno, justificando dicha elección, añadiendo los que sean necesarios y diseñando una trayectoria didáctica particular que tenga en cuenta los elementos anteriormente citados, su puesta en relación, el tiempo disponible, y el tipo de alumnos.

A partir del significado de referencia, en el Capítulo V describimos la selección que hemos hecho de los campos de problemas y tareas, elementos ostensivos, actuativos, intensivos, y validativos, a los que hemos añadido otros que no se encuentran en los textos, pero que son necesarios por el uso del recurso informático. Los principales criterios de selección han sido los siguientes:

- Respecto a los *elementos extensivos*, se han seleccionado dos de los campos de problemas descritos en el significado de referencia. Su elección estuvo de acuerdo con el tratamiento que se pretendía dar al tema, con los conocimientos previos de la mayoría de los alumnos y con el tiempo disponible para desarrollarlo. La principal conclusión del análisis es que, incluso cuando estos elementos están presentes en la enseñanza tradicional, el hecho de trabajar con datos reales y el ordenador y el dar libertad a los alumnos en su trabajo al plantearles tareas abiertas cambió sustancialmente el significado institucional local previsto, respecto al significado institucional de referencia.
- *Conectar en todo momento los elementos intensivos, con los correspondientes campos de problemas y aplicaciones* (elementos extensivos), porque hemos querido resaltar la aplicabilidad de la estadística. Por este mismo motivo se ha trabajado con conjuntos de datos reales recogidos por el alumno o proporcionados por el profesor.
- Suprimir aquellos elementos que la presencia del ordenador hace innecesarios, añadiendo otros que se introducen precisamente por trabajar con esa herramienta. En particular, hay un cambio importante cuanto a los elementos actuativos, ya que el uso de las tablas se sustituye por el manejo de los programas de cálculo y la tipificación cambia el papel. Por otro lado, se añade el aprendizaje de la herramienta informática, incluyendo el paquete estadístico, sistema operativo y procesador de texto.
- Sustituimos las demostraciones formales por elementos validativos variados como el análisis y síntesis, la representación gráfica y simulación que., aunque no tienen el carácter deductivo que sería necesario para una demostración completa de las propiedades, al menos sirve para aumentar la comprensión de los alumnos y llevarles al descubrimiento de las propiedades que queremos introducir.

A partir de aquí se diseñó una secuencia de enseñanza de la distribución normal en la que se toma al ordenador como una herramienta didáctica y que se analiza con detalle en el Capítulo V. Todo ello define el *significado institucional local previsto* para la experiencia de enseñanza. El diseño de la enseñanza es de por sí novedosa, ya que se integra el tema de la distribución normal a partir del análisis de datos, y diseñan una serie de actividades teóricas y prácticas no tradicionales en las que el alumno ha de relacionar los diferentes elementos de significado, preparando también unos ficheros de datos y un material para el alumno.

En la trayectoria didáctica diseñada procuramos combinar actividades de reinención guiadas y el trabajo en grupo de los alumnos, con las exposiciones del profesor y la lectura guiada del material proporcionado. Todas las actividades se analizan a priori para asegurarnos que los diferentes elementos de significado se tendrán en cuenta y relacionarán a lo largo de la enseñanza y para prever las posibles dificultades de los alumnos y la forma en que podrían ser resueltas. Nuestra fin al organizar esta secuencia de enseñanza fue realizar un estudio sistemático del significado de la distribución normal en este nivel educativo y diseñar una posible forma llevarlo a la práctica, ya que en las investigaciones no contienen un análisis de este tipo ni del tipo de actividades necesitadas para lograr un aprendizaje significativo. En nuestro marco teórico, este aprendizaje sólo puede lograrse si el alumno tiene la posibilidad de enfrentarse a situaciones problemáticas adecuadas (elementos extensivos) a partir de las cuales sea necesario el uso y reflexión sobre el resto de elementos de significado (ostensivos, actuativos, intensivos y validativos) y su puesta en relación. Es a partir del trabajo con los

diferentes elementos de significado como progresivamente se construye el significado de la distribución normal (u otro objeto matemático).

O3: Analizar los elementos de significado implicados en la enseñanza y aprendizaje de la distribución normal en la que se introduce un paquete estadístico con el que los alumnos trabajarán en la resolución de problemas.

Un punto importante en nuestro estudio es comparar la trayectoria didáctica diseñada con otras posibles trayectorias mostradas en los libros de texto, para defender la conveniencia del enfoque presentado en nuestro estudio para la enseñanza. Para conseguir este objetivo y como hemos indicado, dentro del significado institucional de referencia fijado en el Capítulo IV, se seleccionaron determinados elementos de significado, que no siempre coinciden con el significado de referencia, y que se han considerado relevantes en el tipo de enseñanza prevista.

En el Capítulo V hemos analizado con detalle los recursos informáticos disponibles en el paquete STATGRAPHICS, incluyendo las representaciones e instrumentos de cálculo disponibles (elementos ostensivos), los conceptos subyacentes que el alumno debe emplear para manejarlos (elementos intensivos), los procedimientos informáticos empleados en las prácticas (elementos actuativos) y los nuevos tipos de "demostraciones" que proporciona por medio de la simulación (elementos validativos). Una vez diseñada la experiencia y preparado el material para los alumnos, se ha llevado a cabo la comparación, con las siguientes conclusiones:

- Aunque los dos campos de problemas seleccionados se encuentran en el significado de referencia, una diferencia muy importante es el trabajo con datos reales, que introduce una filosofía exploratoria y multivariante muy diferente al trabajo con ejercicios tipo en los cursos tradicionales;
- El ordenador introduce nuevos *elementos ostensivos*, especialmente gráficos y numéricos y proporciona la posibilidad de visualización dinámica y actuación sobre los parámetros de los gráficos producidos, superposición de diferentes gráficos y presencia simultánea de gráficos y tablas en la pantalla. Aumenta por tanto la diversidad y número de representaciones disponibles, mientras que disminuye el tiempo dedicado al cálculo y representación gráfica. Hay también un cambio importante en el papel de los elementos ostensivos, que se convierten en herramientas para la exploración de los datos y el descubrimiento de propiedades y hacen posible un enfoque exploratorio del análisis de datos.
- En los *elementos actuativos*, es donde se produce la mayor diferencia con el significado de referencia, ya que se introduce el manejo del ordenador y desaparece el uso de tablas y otros procedimientos de cálculo. Un punto importante a tener en cuenta es que algunas opciones se encuentran en menús de segundo o tercer nivel y podrían no ser muy accesibles para el alumno.
- Respecto a los *elementos validativos*, la principal aportación del ordenador es la simulación y representación gráfica que hacen posible "mostrar" ideas abstractas, como la convergencia del histograma hacia una distribución teórica o el efecto de los parámetros sobre la forma gráfica de la curva de densidad. Ello permite proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica difícil de conseguir por medios tradicionales (Godino, 1995).

Descripción del significado institucional local observado en el curso

O4: Describir los elementos de significado efectivamente observados en el desarrollo de la secuencia de enseñanza.

Un diseño cuidadoso de la enseñanza y un conocimiento didáctico por parte de los profesores no es suficiente para lograr que la enseñanza sea llevada a cabo tal y como se planificó. El trabajo en el aula depende de muchos factores, incluidos la atención y conocimientos previos de los alumnos y la forma en que el profesor resuelve los conflictos inesperados que surgen en el aula.

Para cumplir el objetivo de describir la enseñanza se llevó a cabo una experimentación y observación de la secuencia de enseñanza diseñada durante dos cursos consecutivos (1998-99 y 1999-2000) que se describe y analiza en el Capítulo VI. Al finalizar la experiencia del curso 1998-1999 y una vez analizados sus resultados, se hizo una ligera revisión del material entregado a los alumnos, manteniendo la misma secuencia de enseñanza (actividades, orden de actividades e introducción de elementos de significado), pero contemplando las explicaciones de la profesora en algunos puntos que se describen en el Capítulo VI. Todo ello nos permitió

comparar el significado institucional local efectivamente observado con el previsto y describir los puntos en que hubo concordancias o diferencias entre ambos significados.

El análisis del protocolo de observación muestra que, en general, se aplicaron todos los elementos de significado previstos en la planificación de la enseñanza, lo que indica la posibilidad de llevar a cabo este tipo de enseñanza, siempre que los grupos de alumnos no sean muy numerosos (cada grupo de clase estuvo limitado a 40 alumnos, aunque en el segundo año uno de los grupos era algo más numeroso) y se disponga de una sala de informática (un ordenador por cada 2-3 alumnos).

La observación puso también de manifiesto que no se trabajaron todos los elementos previstos con la misma intensidad o en el orden exacto que se habían planificado, porque la profesora a veces introduce ejemplos no previstos en función de las dudas planteadas por los alumnos. Éstos no siempre respondían de la manera prevista, y no siempre lograban dar los ejemplos que se les pedía o resolver las actividades previstas. La profesora tuvo en ocasiones que recordar conceptos que se suponían adquiridos, por lo que pensamos que es muy urgente que la estadística se comience a trabajar ya desde la secundaria, para que los conceptos básicos como los promedios, representaciones gráficas, etc., sean conocidos por los alumnos al ingresar a la universidad.

En otros casos la profesora necesita inventar ejemplos no previstos para tratar de solventar una dificultad o repetir alguna parte de la secuencia. Las principales modificaciones y dificultades que se produjeron en la implementación de la secuencia de enseñanza provinieron de la utilización de los ordenadores, ya que se presentaron muchos problemas de índole técnica que hicieron que se debiera modificar el desarrollo que se había previsto de las sesiones.

Como hemos indicado, en el segundo año se hizo una ligera revisión de la enseñanza. Se dispuso también de un nuevo dispositivo informático (ordenador con proyector), lo cual sirvió de apoyo al desarrollo de los conceptos introducidos en las clases teóricas. Esto tuvo una consecuencia positiva en la comprensión de determinados conceptos o propiedades, así como también en la visualización de los nuevos elementos ostensivos que se iban incorporando.

En general, la experiencia muestra la dificultad del profesor para trabajar con los alumnos en el aula de informática, que dificulta las actividades de institucionalización, debido a la disposición física de los ordenadores. Los fallos ocasionales e imprevistos en los ordenadores contribuyen a aumentar esta dificultad de gestionar la clase y ello explica que la progresión en el aprendizaje no sea tan clara en las clases prácticas como en las teóricas.

Evaluación de las características en el significado personal construido por los alumnos del grupo a lo largo de la experiencia de enseñanza y al finalizar la misma

O5: Describir los elementos de significado efectivamente puestos en juego por los alumnos del grupo a lo largo de la enseñanza.

Durante la observación en el aula se anotaron también las interacciones entre profesora y alumnos, para llevar a cabo un análisis de las dificultades planteadas respecto a los diferentes elementos de significado. Además, se llevó a cabo un análisis de las producciones escritas de los alumnos sobre tareas teóricas y prácticas (Capítulo VI). Los alumnos trabajaron por parejas o en pequeños grupos y aportaron sus soluciones en papel y lápiz en las actividades teóricas y en un informe grabado en procesador de texto en las clases prácticas.

A partir de estas producciones se realiza un análisis de contenido, identificando los elementos de significado usados explícitamente en las respuestas de los alumnos, comparando con el significado institucional local previsto y estudiando su evolución. Un análisis de las frecuencias de aplicación correcta e incorrecta en cada curso, permite extraer las siguientes conclusiones:

- Los alumnos han puesto en juego en general, los elementos de significado requeridos en cada tarea, aunque en algunos casos han mostrado dificultades en la aplicación de algunos de ellos. El uso de elementos es mucho mayor en las tareas realizadas en las clases prácticas, al ser más abiertas y por tanto estas tareas tienen una mayor complejidad semiótica en la que se necesita poner en relación mayor número de elementos de significado.
- Respecto a los *elementos ostensivos*, los alumnos se apoyan predominantemente en ellos y prefieren en general, las representaciones gráficas a las numéricas. Incluso los alumnos utilizan algunos elementos que no le han sido enseñados, pero que descubren en algunas de las opciones del programa. Las dificultades provinieron principalmente de la modificación

- de opciones por defecto en los menús del paquete estadístico, que no resultan evidentes al alumno.
- Como consecuencia de la problemática descrita en el párrafo anterior, también se presentaron problemas en relación con los *elementos actuativos*, resultando muy complicada la aplicación de la propiedad de los intervalos centrales, debido a que ésta *conlleva la relación de diversos elementos actuativos y de la interrelación de éstos con elementos de significado de otro tipo*. Hay también dificultades en el estudio descriptivo que los alumnos debieran conocer al comenzar el tema.
 - De todos modos los alumnos logran finalizar las actividades propuestas dando soluciones aceptables y la mayoría logra un dominio razonable de la herramienta informática, teniendo en cuenta que muchos era la primera vez que se acercaban al ordenador. Como indican Garfield y delMas (1989), hay que reconocer que el aprendizaje del software añade un coste cognitivo al alumno, ya que éste sólo puede procesar una cantidad dada de información en el espacio de tiempo de una clase.
 - En relación con los *elementos intensivos*, podemos decir que además de las dificultades con la propiedad de los intervalos centrales antes, también se presentaron problemas en todas las sesiones con la aplicación e interpretación de los coeficientes de asimetría y de curtosis. También pudieron observarse ciertas dificultades en la distinción de la distribución teórica y empírica.
 - Respecto a los *elementos validativos* habría que destacar que se realizaron validaciones solamente cuando se les pedía expresamente en la actividad planteada. En caso contrario, la mayoría de los alumnos sólo presentaban los resultados sin dar ningún tipo de justificación o explicación. Pensamos que ello es una costumbre de la clase de matemática en que tradicionalmente se da más peso al cálculo y desarrollo algebraico que a la argumentación por parte del alumno.
 - En general se observa una progresión del aprendizaje, al disminuir el número de errores y aumentar el número de elementos puestos en juego, sobre todo en las clases teóricas. En las clases prácticas el aprendizaje parece tener una menor progresión, aunque en este caso es más complicado valorar dicha progresión debido a la variedad de elementos que se aplicaban en cada práctica.

La observación de la secuencia de enseñanza y el análisis de las producciones escritas de los alumnos sienta un antecedente del cual se puede extraer información para posteriores trabajos. Consideramos importante la clasificación de elementos de significado que fueron usados correcta e incorrectamente por los alumnos. A partir de ello podemos ver cuáles son los elementos que brindan más problemas a los alumnos y de esta manera tratar de buscar otras formas de relacionar estos elementos problemáticos con otros para favorecer su comprensión.

O6: Analizar las características del significado personal efectivamente construido por los alumnos del grupo al finalizar la enseñanza.

Al final de la secuencia de enseñanza se llevó a cabo una evaluación individual de los alumnos para determinar el significado efectivamente construido sobre la distribución normal y comparar con el significado institucional local presentado en la enseñanza que se describe en los capítulos VII y VIII.

Dicha evaluación se realiza mediante el análisis de sus respuestas a dos instrumentos: un cuestionario escrito centrado especialmente en los elementos intensivos y ostensivos del significado (incluyendo su relación con los otros elementos), y basado en la capacidad de lectura de datos de nivel elemental y, una prueba individual de resolución de problemas abiertos, con apoyo del ordenador, que evalúa la capacidad de análisis de datos y el uso de la argumentación por parte del alumno.

El análisis de contenido realizado en las respuestas al cuestionario y en las producciones a partir de la prueba con ordenador nos ha permitido realizar una categorización de los elementos de significado que los alumnos han puesto en juego en ambos instrumentos de evaluación. Esta categorización nos ha permitido determinar las principales dificultades en cada elemento de significado, los *tipos de relaciones que realizan entre los diversos elementos de significado*, así como también detectar las características en la comprensión de los alumnos que participaron de la experiencia de enseñanza y describir las diferencias entre cursos y tipos de alumnos. Se han descrito de una forma detallada las concordancias y diferencias entre las características

identificadas en el significado personal construido por los estudiantes y el significado institucional local previsto en la enseñanza.

Nuestro análisis muestra que las tareas del cuestionario resultaron mucho más sencillas y que los alumnos muestran un grado de conocimiento alto (en torno al 70% de elementos) de los diversos elementos de significado evaluados en esta prueba en tareas de reconocimiento de elementos simples o bien de *puesta en correspondencia de un número pequeño de elementos de significado* (dos o tres elementos).

También, en la prueba con ordenador los alumnos en su mayoría muestran un dominio aceptable de la herramienta informática, así como un uso correcto y significativo de elementos aislados y *relación entre un número pequeño de elementos de significado*. Cuando se trata, sin embargo, de hacer una síntesis que requiera poner en relación un número mayor de diferentes elementos el índice de respuestas correctas baja considerablemente. Esto es particularmente visible cuando el alumno debe elegir una variable que se aproxime bien mediante la distribución normal o calcular correctamente los parámetros y cuartiles de la distribución teórica. En estos casos el alumno *aplica correctamente elementos o relaciones sencillas entre elementos pero falla en poner todos ellos en relación en una tarea de alto nivel*.

Enfrentado a una situación de análisis de datos reales (elementos extensivos), el estudiante debe identificar los conceptos pertinentes (elementos intensivos), representarlos de alguna forma adecuada (elementos ostensivos), manipularlos u obtener valores particulares para el conjunto de datos (elementos actuativos) y sacar una conclusión apropiada (elementos validativos). Si añadimos a la dificultad *de poner en relación en la misma tarea los cinco tipos de elementos*, la del uso adecuado de los programas, podemos comprender que sólo la tercera parte de los alumnos llegan a las soluciones correctas en la tarea aunque la mayoría de ellos utiliza correctamente cada elemento de significado aislado.

Como indican Batanero y Godino (1998), el análisis de datos reales es una actividad compleja y sería ingenuo esperar que podamos capacitar a los alumnos que estudian estadística por primera vez o con escasos conocimientos previos para esta tarea, que es propia de los estadísticos aplicados.

Sin embargo, ya que, principalmente en las resoluciones de la prueba con ordenador, los alumnos han puesto en juego una gran variedad de elementos de significado de manera correcta, podemos pensar que, la mayoría de los alumnos, logran una comprensión al menos básica de los conceptos y propiedades de la distribución normal y de algunos conceptos relacionados. Ello no les capacitará para ser autónomos en la aplicación de la estadística, pero sí al menos para ser “usuarios” de la misma, esto es, para leer información estadística en sus campos de aplicación, llevar a cabo por sí mismos cálculos estadísticos sencillos, ser capaces de plantear correctamente sus problemas a un estadístico y llegar a comprender los resultados que éste le proporciona.

El análisis de las resoluciones de estos dos instrumentos de evaluación también nos ha permitido comparar las características de alumnos con estudios previos en estadística y de alumnos sin estudios previos. al igual que en otras investigaciones (Wilensky, 1995 b, 1997, Méndez, 1991), hemos observado que no se producen grandes diferencias. Éstas sólo son considerables en aquellas tareas donde los alumnos deben realizar validaciones o argumentaciones, observando que los alumnos con estudios previos realizan argumentaciones en las que integran un mayor número de elementos de significado, mientras que los alumnos sin estudios previos, generalmente no logran hacer conexiones o relaciones entre diversas propiedades o conceptos.

También hemos podido comparar el aprendizaje realizado por dos cursos consecutivos de alumnos, a los que hemos aplicado la misma secuencia de enseñanza, sólo que la segunda vez se agregaron determinadas modificaciones que hemos especificado en el Capítulo VI. Esto nos ha permitido observar que las modificaciones realizadas han sido provechosas para los alumnos del segundo curso, lo cual nos anima a seguir trabajando en el tema para tratar de mejorar la enseñanza, especialmente en aquellos puntos que hemos observado que son difíciles para nuestros alumnos.

9.3. APORTACIONES DEL ESTUDIO

Este es un trabajo novedoso por su tema, por cuanto las investigaciones previas que hemos encontrado, después de una búsqueda exhaustiva en las revistas y congresos sobre educación estadística son muy escasas y se centran en aspectos puntuales. En nuestro caso, por el

contrario, hemos abordado un estudio sistemático de la distribución normal, tanto desde el punto de vista de la enseñanza como del aprendizaje.

Respecto a la enseñanza, una primera aportación es la descripción del *significado institucional* del tema en los libros de texto universitarios, sobre todo en un momento en el que la incorporación del ordenador hace necesario plantear una revisión de los textos. No hemos encontrado estudios previos sobre análisis del tema en los libros de texto. El estudio permite mostrar de forma estructurada los diversos elementos presentados, así como el énfasis que se hace en cada uno de ellos. El análisis puede servir de base para la construcción de secuencias de enseñanza o instrumentos de evaluación.

En segundo lugar, hemos diseñado una secuencia de enseñanza basada en el uso de ordenadores, que no se limita a seleccionar los elementos del significado institucional de referencia que son más adecuados a la misma. Por el contrario, ha sido necesario añadir otros nuevos, formulando problemas más realistas, incorporando los recursos gráficos y de cálculo que posibilita el ordenador y entremezclando actividades tradicionales, tales como exposición del profesor o resolución de problemas con papel y lápiz con otras basadas exclusivamente en el uso del ordenador. Esta secuencia de enseñanza puede ser útil para los profesores de los cursos universitarios de estadística y ser la base para el diseño de otras secuencias sobre contenidos estadísticos diferentes.

El análisis de la diferencia entre la secuencia diseñada y el significado institucional de referencia, así como el análisis de la secuencia de enseñanza, tal como fue observada proporciona también una información valiosa a los profesores, al permitirles prever las dificultades y posibilidades inducidas por la decisión de incorporar un ordenador en sus clases así como al proporcionarles información sobre formas plausibles de trabajo con este recurso didáctico.

Nuestro trabajo proporciona una información exhaustiva sobre los elementos de significado que usan correcta o incorrectamente en las actividades realizadas en clase como en la evaluación final estos alumnos. Describimos dificultades y errores en un tema en que la investigación previa es prácticamente inexistente.

Asimismo describimos las diferencias en la evaluación de dos tipos de alumnos: aquellos que tienen conocimientos previos de estadística, adquiridos en la educación secundaria o en cursos anteriores en la universidad y los que no los tienen. Esto es también importante al implementar objetivos realistas de aprendizaje para estos dos tipos de alumnos.

Los instrumentos de evaluación producidos para esta investigación son originales y podrían ser utilizados en otras investigaciones o en la enseñanza del tema. Estos instrumentos tienen una alta validez de contenido y fiabilidad, como hemos puesto de manifiesto en el análisis de los mismos.

Finalmente, el estado de la cuestión que se presenta en el Capítulo II constituye una nueva aportación para los investigadores que se interesen por el tema.

9.4. ALCANCES Y LIMITACIONES DEL ESTUDIO

Nuestro estudio ha sido llevado a cabo con alumnos con conocimientos diversos de estadística, lo cual podría haber variables concomitantes que afecten la comprensión de los alumnos y que no han sido controladas. Somos conscientes de este hecho, derivado de la decisión de trabajar con grupos naturales de alumnos que se inscriben en la asignatura, en lugar de seleccionar una muestra más heterogénea de estudiantes de una misma especialidad.

A pesar de esta heterogeneidad, las diferencias observadas no han sido tantas como se podía esperar, lo que confiere una mayor generalidad a nuestros resultados, que han mostrado que el número de elementos de significado adquirido, incluso por los alumnos con poca base previa es importante. Es también importante que los resultados hayan sido estables en dos cursos consecutivos con alumnos diferentes y que la muestra tenga un tamaño apreciable para este tipo de trabajo (91 alumnos en el cuestionario y 117 en la prueba con ordenador).

La asignatura donde se ha llevado a cabo la experiencia es un curso reglado, en el que se han debido aceptar unas limitaciones de tiempo, tamaño de grupo y horarios. También hay que tener en cuenta que al ser una asignatura de libre configuración, los alumnos participantes tienen unas actitudes positivas hacia la materia, reforzadas por la novedad que para ellos supone el uso de la tecnología que ellos saben es importante para su formación. Sería difícil extender nuestra conclusiones a clases muy numerosas o a alumnos poco motivados.

Por otro lado, no hemos avanzado en el uso de la distribución normal para la inferencia, por ejemplo en el trabajo con distribuciones muestrales o en contraste de hipótesis, que es un tema que deberá ser analizado por otros investigadores. El enfoque poco formal que hemos dado a nuestro trabajo hace que éste no sea aplicable a cursos más tradicionales o formales como los que se dan en carreras tales como ingeniería o matemáticas.

En cuanto a las tareas incluidas en los instrumentos de recogida de datos, podemos decir que hemos logrado construir un cuestionario bastante amplio, que cubre diversos conceptos relacionados con el tema. Por otra parte, las tareas utilizadas en las clases y en la prueba de ensayo, han permitido a los alumnos poder enfrentarse a situaciones reales de análisis de datos y pensamos que proporcionan pautas para otras experiencias de enseñanza basadas en el ordenador.

9.5. SUGERENCIAS SOBRE FUTURAS INVESTIGACIONES

La amplitud del tema de investigación abordado hace que sea necesario completar los resultados presentados en este trabajo, debido a que son diversas las líneas en las que se puede proseguir el estudio sobre la distribución normal. A continuación sugerimos posibles temas en que este trabajo puede ser extendido, con objeto de orientar la investigación futura sobre el tema.

Estudio sobre el significado de la distribución normal

Dentro de los elementos de significado considerados en el marco teórico adoptado en esta investigación, hemos realizado una clasificación correspondiente a los elementos específicos de la distribución normal y de algunos elementos correspondientes a conceptos relacionados, que muestran la complejidad sistémica del concepto que hemos estudiado. Sin embargo, puesto que el significado institucional puede variar de acuerdo al tratamiento que se dé al tema, una extensión de la presente investigación podría ir encaminada a analizar el significado de la distribución normal en otros niveles o enfoques de enseñanza, a los cursos de formación de licenciados en matemáticas o los cursos de formación de investigadores.

Estudio de la comprensión de la distribución normal dentro de la inferencia

En nuestro estudio solamente se trabajó con dos de los campos de problemas definidos en el significado de referencia. En consecuencia, es posible continuar este trabajo estudiando la problemática específica que se presenta en campos de problemas tales como los de muestreo e inferencia. Por tanto, sería posible diseñar una nueva secuencia de enseñanza donde se trabajaran los aspectos inferenciales, analizando tanto los elementos de significado como el aprendizaje de los alumnos.

Analizar el proceso de aprendizaje y el significado personal individual

La evaluación llevada a cabo se ha efectuado a partir del análisis de las respuestas escritas de los alumnos a tareas realizadas en clase y en las evaluaciones finales con un cuestionario y una prueba de ensayo. Aunque este método nos proporciona alguna información sobre el significado personal de un grupo de alumnos y su evolución, es claro que podemos obtener una visión más completa y un estudio de las diferencias en la comprensión de los alumnos por medio de técnicas cualitativas.

Sería necesario completar el estudio con el análisis de casos típicos, por medio de entrevistas y observación de su trabajo en la clase que complementara la información obtenida en esta memoria. En dicho estudio se podrían tratar de explicar de una forma más completa algunas de las dificultades encontradas en nuestro trabajo.

Replicaciones de la experiencia de enseñanza y adaptaciones de la misma a otros alumnos o niveles educativos.

La experiencia realizada tiene unas características particulares, al tratarse de una asignatura que los alumnos eligen libremente. Puesto que las actitudes de los alumnos es un factor que condiciona poderosamente su aprendizaje, sería de interés el repetir esta experiencia y analizar sus resultados en cursos de carácter obligatorio. Hay muchas variantes posibles que también sería importante analizar, como el hecho de disponer solamente de un ordenador y un cañón de proyección en el aula y no de la sala de informática. La adaptación de la enseñanza al curso

preuniversitario o Bachillerato es también necesaria, debido a que en estos niveles los currículos sugieren iniciar la enseñanza de la inferencia estadística.

9.6. IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL EN UN CURSO DE INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA

Nuestro trabajo sugiere que es posible diseñar una enseñanza efectiva de algunas nociones intuitivas, dirigida a alumnos que no tengan conocimientos previos en estadística. Puesto que el aprendizaje del cálculo no es el objetivo de un curso introductorio de estadística, esta dificultad no supone un obstáculo para introducir el aprendizaje de los conceptos básicos sobre la distribución normal, siempre que se elijan tareas que estén acordes con los conocimientos de los alumnos.

Somos conscientes que la enseñanza de conceptos estadísticos como la distribución normal reviste una gran complejidad, pero en la actualidad contamos con nuevos métodos de enseñanza, como por ejemplo, el apoyo de los ordenadores. La realización de experiencias de simulación con la ayuda de programas informáticos puede contribuir, como Biehler (1991) indica, a proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica difícil de alcanzar sin estos medios.

Nuestros resultados presentan claramente los puntos en que los alumnos pueden tener dificultades y que no siempre son específicos de la distribución normal. Entre otros, destacamos los siguientes:

- Interpretación de áreas en histogramas de frecuencia y problemas en el cálculo del área dentro de un intervalo, cuando ello implica el cambio de los extremos de los intervalos;
- Dificultad en discriminar los casos en que una variable cuantitativa discreta puede y no puede ser aproximada por una distribución continua y las implicaciones que esta aproximación tiene;
- Diferenciación entre los dos tipos de asimetría, debido a la ambigüedad del lenguaje y al doble sistema de referencia implícito;
- Dificultad en recordar y aplicar correctamente los convenios de interpretación de los coeficientes de asimetría y curtosis;
- Dificultad en recordar y aplicar correctamente los convenios de lectura de los elementos constitutivos de un gráfico estadístico;
- Problemas en el cálculo exacto de los valores atípicos;
- No diferenciación entre el modelo teórico y los datos empíricos y dificultad en distinguir cuando el programa de cálculo se refiere a una u otra distribución, así como no discriminación entre los estadísticos y parámetros;
- Dificultad de uso de las opciones del software que pertenecen a un menú secundario y que son, sin embargo esenciales para el análisis,
- Escasa capacidad de argumentación, sobre todo de alto nivel.

Algunos de estos puntos son específicos del tipo de enseñanza, pero otros corresponden a temas que deberían haber sido adquiridos durante la educación secundaria. Creemos que sería importante y necesario reforzar la enseñanza con tareas de tipo interpretativo que ayuden a resolver estos puntos, en especial cuando todo el proceso de cálculo se realiza con apoyo del ordenador.

Una restricción importante corresponde al escaso tiempo disponible y a la falta de formación estadística en la enseñanza secundaria. Como afirma Fischbein (1975), la intuición probabilística, y en consecuencia la estadística basada en aquella, no se adquiere espontáneamente, por lo que sería beneficioso tanto para los alumnos como para los profesores de universidad, que la iniciación del estudio de temas de estocástica se adelantara a cursos previos al ingreso a la universidad, y así sirvieran de base para lograr una mayor profundización de los temas estocásticos.

Afortunadamente, las nuevas orientaciones curriculares sugieren un cambio en las tendencias mencionadas, por lo que puede observarse la voluntad, por parte de las autoridades educativas, de introducir temas relacionados con la estocástica en la educación secundaria. En consecuencia, es necesario continuar con la investigación basada en estos temas, en el diseño de secuencias didácticas para la educación secundaria y en la evaluación de las mismas.

REFERENCIAS

- Ausubel, D. y Novak, J. (1983). *Psicología educativa*. México: Trillas.
- Batanero, C. (1998). Recursos en Internet para la educación estadística. *UNO*, 15, 13-26.
- Batanero, C. (2000 a). Controversies around significance tests. *Journal of Mathematics Thinking and Learning*, 2 (1-2), 75-98.
- Batanero, C. (2000 b). Significados de las medidas de tendencia central. *UNO*, 25, 41-58.
- Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1991a). Estrategias y argumentos en el estudio descriptivo de la asociación usando microordenadores. *Enseñanza de las Ciencias*, 9(2), 145-150.
- Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1991 b). Análisis exploratorio de datos: Sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, 9, 25-31.
- Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1997). Evolution of students' understanding of statistical association in a computer based teaching environment. En J. B. Garfield, y G. Burrill (Eds.), *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics* (pp. 191 – 205). Voorburg, Holanda: International Statistical Institute e International Association for Statistical Education.
- Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (2000). La construcción del significado de la asociación mediante actividades de análisis de datos. Reflexiones sobre el papel del ordenador en la enseñanza de la estadística. En E. Lacasta y J. R. Pascual (Eds.), *Actas de la II Reunión de la SEIEM* (pp. 155-174). Pamplona: SEIEM. Disponible en Internet (http://www.ugr.es/~seiem/Actas/Pamplona/ACTASII_Simposio.htm)
- Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. y Green D. R. (1996). Judgments of association in contingency tables: An empirical study of students' intuitive strategies and preconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 151 -169.
- Batanero, C. y Godino, J. (1994). A methodology to study the students' interaction with the computer. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 2, 15-25.
- Batanero, C. y Godino, J. (1998). Understanding graphical and numerical representations of statistical association in a computer environment. En L. Pereira-Mendoza y L. Seu Kea, T. Wee Kee, & W. K. Wong . (Eds.), *Proceedings of the V International Conference on Teaching Statistics* (v.2, pp. 905-912). Voorburg, Holanda: International Association for Statistical Education e International Statistical Institute.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A. (1987). Un paquete didáctico de programas para el laboratorio de estadística. En I. Brincones (Ed.), *Actas del I Simposio Internacional de Educación e Informática* (pp. 380-386). Madrid: I.C.E. de la Universidad Autónoma.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A. (1988). *Curso de estadística aplicada basado en el uso de ordenadores*. Jaén: Los autores.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa. A. (1998). Building the meaning of association through data analysis activities. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 221-236, con discusión en pp. 237-242). Stellenbosch, Sudáfrica: Universidad de Stellenbosch.

- Batanero, C., Godino, J., Green, D., Holmes, P. y Vallecillos, A. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics in Science and Technology*, 25(4), 527 – 547.
- Batanero, C., Serrano, L. y Garfield, J. (1996). Heuristics and biases in secondary students' reasoning about probability. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), Proceedings of the XX PME Conference,(v.2, pp. 43-50). Universidad de Valencia.
- Batanero, C. y Tauber, L. (1999). Contextos y campos de problemas relacionados con la distribución normal. En M. Berenguer, J. Cardeñoso y M. Toquero (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad* (pp. 173-178). Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemática.
- Batanero, C., Tauber, L. y Meyer, R. (1999). From data analysis to inference: A research project on the teaching of normal distributions. *Bulletin of the International Statistical Institute, Tome LVIII. 52nd Session of the International Statistical Institute* (pp. 57-58). Helsinki: International Statistical Institute.
- Batanero, C., Tauber, L. y Sánchez, V. (En prensa). Significado y comprensión de la distribución normal en un curso introductorio de análisis de datos. *Quadrante*.
- Bauersfeld, H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. En R. Biehler, R. Scholz, R. Strässer y B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 133-146). Dordrecht: Kluwer.
- Ben-Zvi, D. (2000). Toward understanding the role of technological tools in statistics learning. *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (1 y 2), 127 – 155.
- Ben-Zvi, D. y Friedlander, A.(1997). Statistical thinking in a technological environment. En Garfield, J. B. y Burrill, G. (Eds.), *Proceedings of the IASE 1996 Round Table Conference* (pp. 11 – 23). Voorburg, Holanda: International Statistical Institute e International Association for Statistical Education.
- Biehler, R. (1991). Computers in probability education. En R. Kapadia y M. Borovcnick (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 169-211). Dordrecht: Kluwer.
- Biehler, R. (1994). Software tools and mathematics education: the case of statistics. En C. Keitel y K. Ruthnen (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education & technology* (pp. 68-100). Berlin: Springer.
- Biehler, R. (1997 a). Students' difficulties in practicing computer supported data analysis. Some hypothetical generalizations from results of two exploratory studies. En Garfield, J. B. y Burrill, G. (Eds.), *Proceedings of the IASE 1996 Round Table Conference*. (pp. 163-181). Voorburg, Holanda: International Statistical Institute e International Association for Statistical Education.
- Biehler, R. (1997 b). Software for learning and for doing statistics. *International Statistical Review*, 65(2), 167-190.
- Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa*. Barcelona: P.P.U.
- Brennan, R. L. (1983). *Elements of generalizability theory*. Iowa: ACT Publications.
- Brent, E. E. (1989 a). *Data collection selection: An expert system to assist in the selection of appropriate data collection procedures*. Versión 1.0. Columbia, Missouri: The Idea Works, Inc.
- Brent, E. E. (1989 b). *Scaling strategist: An expert system to assist in design of questionnaires*. Versión 1.0. Columbia, Missouri: The Idea Works, Inc.
- Carmines, E. y Zeller, R. (1979). *Reliability and validity assessment*. Londres: Sage University Paper.
- Carro Ramos, J. (1994). *Psicoestadística descriptiva*. Salamanca: Amarú.
- Chance, B. L., Garfield, J. B. y del Mas R. C. y (1999). The role of assessment in research on teaching and learning statistics. Trabajo presentado en la *AERA Annual Meeting*. Montreal.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas, el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE Universidad Autónoma y Ed. Horsori.

Referencias bibliográficas

- Chevarney, N., Collier, R. y Fienberg, S. (1977). A framework for the development of measurement instruments for evaluating the introductory statistics course. *The American Statistician*, 31 (1), 17 – 23.
- Celeux, G., Diday, E., Govart, G. y Le Chevalier, Y. (1989). *Classification automatique des dones*. París: Dunod.
- Cohen, S. y Chechile, R. (1997). Overview of ConStatS and the ConStats assessment. En Garfield, J. B. y Burrill, G. (Eds.). *Proceedings of the IASE 1996 Round Table Conference*. (pp. 109 – 118). Voorburg: International Statistical Institute e International Association for Statistical Education.
- Cook, T. y Campbell, D. (1979). *Quasi-Experimentation. Design and analysis issues for field setting*. Chicago: Rand Mc Nally.
- Cruise, J., Dudley, R. y Thayer, J. (1984). *A resource guide for introductory statistics*. Dubuque, Iowa: Kendall/Hunt.
- Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematics relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 382-393.
- Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.
- Dane, F. C. (1990). *Research methods*. Pacific Grow, CA: Thompson.
- delMas, R. C. (1988). *The effect of activity based instruction and directed evaluation of prediction on misconceptions of probability*. Tesis Doctoral. Universidad de Minnesota.
- delMas, R. C., Garfield, J. B. y Chance, B. L. (1998). Exploring the role of computer simulations in developing understanding of sampling distributions. Trabajo presentado en el *AERA Annual Meeting*. Montreal.
- Dunn, O. J. y Clark,V. A. (1987). *Applied statistics: Analysis of variance and regression*. New York: John Wiley.
- Estepa, A. (1990). *Enseñanza de la estadística basada en el uso de ordenadores*. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.
- Estepa, A. (1993). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Estepa, A. y Batanero, C. (1994). Judgments of association in scatter plots: an empirical study of students' strategies and preconceptions. *Proceedings of International Conference on Teaching Statistics* (v.2, p. 587). Marrakesh: International Statistical Institute.
- Estepa, A. y Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las Ciencias*, 13(2), 155-170.
- Estepa, A. y Batanero, C. (1996). Judgments of correlation in scatter plots: students' intuitive strategies and preconceptions. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 4, 21-41.
- Estepa, A., Batanero, C. y Godino, J. (1990). Una metodología de análisis de la interacción alumno-ordenador en la investigación sobre informática educativa. *Epsilon*, 24, 23-30.
- Estepa, A., Batanero, C. y Sánchez, F. T. (1999). Judgments of association in the comparison of two samples: Students' intuitive strategies and preconceptions. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 7, 17-30.
- Estepa, A., Godino, J. y Batanero, C. (1989). Clases prácticas de estadística utilizando el paquete PRODEST. *Enseñanza de las Ciencias, Número Extraordinario*, Tomo II, 357-362.
- Estepa, A., Green, D., Batanero, C. y Godino, J. (1994). Judgments of association in contingency tables: an empirical study of intuitive strategies and preconceptions. En J. P. Matos y J. F. Ponte (Eds), *Proceedings of the PME XVIII*, (Vol. 2, pp. 312-319). Lisboa: Universidad de Lisboa.
- Feldt, L. S. y Brennan, R. L. (1991). Reliability. En R. L. Linn (Ed.), *Educational measurement*. (pp. 105-146). New York: MacMillan.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Fox, D. J. (1981). *El proceso de investigación en la educación*. Pamplona: Eunsa.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

- Gal, I (1997). Assessing students' interpretations of data: Conceptual and pragmatic issues. En B. Phillips (Ed.), *Papers on statistical education presented at ICME-8* (pp. 49-58). Swinburne University of Technology.
- Garfield, J. B. (1981). *An investigation of factors influencing student attainment of statistical competence*. Tesis Doctoral. Universidad de Minnesota. UMI 3058
- Garfield, J. B. (1995). How students learn statistics. *International Statistics Review*, 63 (1), 25-34.
- Garfield, J. B. y Burrill, G. (Eds.) (1997), *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics. Proceedings of the IASE 1996 Round Table Conference*. Voorburg: International Statistical Institute e International Association for Statistical Education.
- Garfield, J. B. y delMas, R. C. (1989). Reasoning about chance events: Assessing and changing students' conceptions of probability. En C. Maher, G. Golding y B. Davis (Eds.), *Proceedings of the XI Meeting of the PME-NA* (v.2, 184-195). Rutgers: Rutgers University Press.
- Garfield, J. B. y delMas, R. C. (1990). The use of multiple items to identify misconceptions in probabilistic reasoning. En D. Vere – Jones (Eds.), trabajo presentado en *The third International Conference on Teaching Statistics*. Dunedin, Australia: Universidad de Otago.
- Godino, J. D. (1995). ¿Qué aportan los ordenadores a la enseñanza y aprendizaje de la estadística? *UNO*, 5, 45 – 55.
- Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meaning, and understanding.. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20 th PME Conference* (Vol. 2, pp. 417 – 424). Universidad de Valencia.
- Godino, J. D. (1998). Un modelo semiótico para el análisis de la actividad y la instrucción matemática. Comunicación presentada en el *VIII Congreso Internacional de la Asociación Española de Semiótica*. Granada.
- Godino, J. D. (1999). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de la matemática. En T. Ortega (Ed.), *Actas del III Simposio de la SEIEM* (pp. 196-212). Valladolid.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1993). Ordenadores y enseñanza de la estadística. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*, 7, 173-186.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325 – 355.
- Godino, J. D., y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195).Dordrecht: Kluwer.
- Godino, J., Batanero, C. y Estepa, A. (1990). Estrategias y argumentos en el estudio descriptivo de la asociación usando microordenadores. *Proceedings of the XIV International Conference of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 157-164). Oaxtepec, México: Comité de Programa.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Estepa, A. (1991). Task variables in statistical problem solving using computers. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies. Research in contexts of practice*, (pp. 193-203). Berlín: Springer-Verlag.
- Godino, J. D. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, 12 (1), 70-92.
- Graham, A. (1994). *Statistics*. Lincolnwood, IL: NTC Publishing Group.
- Guilford, J. P. y Fruchter, B. (1978). *Fundamental statistics in psychology and education*. McGraw-Hill.
- Hacking, I. (1990). *La domesticación del azar*. Barcelona: Gedisa.
- Hawkins, A. (1997). Myth-Conceptions!. En Garfield, J. B. y Burrill, G. (Eds.). *Proceedings of the IASE 1996 Round Table Conference*. (pp. 11 – 23). Voorburg: International Statistical Institute e International Association for Statistical Education.
- Hawkins, A., Jolliffe, F. y Glickman, L. (1992). *Teaching statistical concepts*. Essex: Longman.

Referencias bibliográficas

- Huck, S., Cross, T. y Clark, S. (1986). Overcoming misconceptions about zscores. *Teaching Statistics*, 8, 38-40.
- Johnson, N. L. y Kotz, S. (1972). *Continuous univariate distributions*. Nueva York: Houghton.
- Jullien, M. y Nin, G. (1989). L'E.D.A. au secours de l'OG.D. ou quelques remarques concernant l'enseignement de la Statistique dans les collèges. *Petit X*, 19, 29-41.
- Kahnemann, D., Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.). (1982). *Judgment under uncertainty; Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.
- Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59-98.
- Konold, C. (1994). Teaching probability through modeling real problems. *Mathematics Teacher*, 87, 232 – 235.
- Konold, C. (1995). Confessions of a coin flipper and would-be instructor. *The American Statistician*, 49, 203 – 209.
- Konold, C., Pollatsek, A., Well, A. y Gagnon, A. (1997). Students analyzing data: Research of critical barriers. En J. B. Garfield, y G. Burrill, (Eds.), *Proceedings of the IASE 1996 Round Table Conference*. (pp. 199 – 215). Voorburg, Holanda: International Statistical Institute e International Association for Statistical Education.
- Lerman, I. (1981). *Classification et analyse ordinaire des données*. París: Dunod.
- Li, K. Y. y Shen, S. M. (1992). Students' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics*, 14 (1), 2 - 8.
- Lipson, K. (1997). What do students gain from computer simulation exercises?. En Garfield, J. B. y Burrill, G. (Eds.), *Proceedings of the IASE 1996 Round Table Conference*. (pp. 131 - 144). Voorburg, Holanda: International Statistical Institute e International Association for Statistical Education.
- Méndez, H. (1991). *Understanding the central limit theorem*. Tesis Doctoral. Universidad de California. UMI 6369
- Miller, I., Freund, J. y Johnson, R. (1992). *Probabilidad y estadística para ingenieros*. Cuarta edición. México: Prentice Hall.
- Moore, D. S. (1995). *The basic practice of statistics*. New York: Freeman.
- Moore, D. S. (1997). New pedagogy and new content: the case of statistics. *International Statistical Review*, 65 (2), 123-137.
- Morris, E. (1999). *Another look at psychology students'understanding of correlation*. CITE reporte Nº 246. Institute of Educational Technology. The Open University.
- Morris, E. y Scanlon, E. (1999). *Students using ActivStats: a pilot study*. CALRG reporte técnico Nº 185. Institute of Educational Technology. The Open University.
- Moses, L. E. (1992). The reasoning of statistical inference. En D. C. Hoaglin y D. S. Moore (Eds.), *Perspectives on contemporary statistics* (pp. 107-122). Washington: Mathematical Association of America.
- Muñiz, J. (1994). *Teoría clásica de los tests*. Madrid: Pirámide.
- Ortiz, J. J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los libros de texto de Bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Orton, A. (1988). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Ediciones Morata y M.E.C.
- Osterlind, S. (1989). *Constructing test ítem*. Boston: Kluwer.
- Peña, D. y Romo, J. (1997). *Introducción a la estadística para las ciencias sociales*. Madrid: McGraw Hill.
- Pereira-Mendoza, L., Seu Kea, T., Wee Kee y W. K. Wong (1998). (Eds.), *Proceedings of the V International Conference on Teaching Statistics*. Voorburg, Holanda: International Statistical Institute e International Association for Statistical Education.
- Pérez, C. (1998). *Métodos estadísticos con Statgraphics para Windows. Técnicas básicas*. Madrid: Ra-Ma.
- Pérez Echeverría, M. P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico*. Madrid: Universidad Autónoma.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

- Pollatsek, A., Konold, C., Well, A. D. y Lima, S. D. (1987). Beliefs underlying random sampling. *Memory and Cognition*, 12, 396-401.
- Quadling, D. (1987). *Statistics and probability*. New York: Cambridge University Press.
- Recio, A. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática*. Universidad de Granada.
- Rico, L., Sánchez, V. y Llinares, S. (1997). Concepto de currículo desde la educación matemática. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 211-264). Madrid: Síntesis.
- Ríos, S. (1991). *Iniciación estadística*. Séptima edición. Madrid: Paraninfo.
- Rosebery, A. y Rubin, A. (1989). Reasoning under uncertainty: Developing statistical reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 8, 205-219.
- Roth, W. y McGinn, M. (1997). Graphing: Cognitive ability or practice? *Science Education*, 81, 91 – 106.
- Runyon, R. y Haber, A. (1984). *Estadística para las ciencias sociales*. México: Fondo Educativo Interamericano.
- Sánchez, V. (1994). The socialization process of prospective elementary teachers: The case of mathematics. En N. Malara (Ed.), *Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education* (pp. 181-188). Universidad de Módena.
- Sánchez, V. (2000). Las representaciones de los profesores del contenido matemático. Ponencia invitada al *IV Simposio de la SEIEM*.
- Sánchez-Cobo, F. (1999). *Significado de la regresión y correlación para estudiantes universitarios*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Santisteban, C. (1990). *Psicometría. Teoría y práctica en la construcción de tests*. Madrid: Norma.
- Scholz, R. (1991). Psychological research in probabilistic understanding. En R. Kapadia y M. Borovcnick (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 213-254). Dordrecht: Kluwer.
- Schuyten, G. (1991). Statistical thinking in psychology and education. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the III International Conference on Teaching Statistics*. (v. 2, 486-489). Dunedin, Australia: Universidad de Otago.
- Schuyten, G. y Dekeyser, H. (1997). Computer-based and computer-aided learning of applied statistics at the department of psychology and educational sciences. En J. B. Garfield, y G. Burrill, (Eds.), *Proceedings of the IAStE 1996 Round Table Conference*. (v.2, pp. 486 – 489). Voorburg, Holanda: International Statistical Institute e International Association for Statistical Education.
- Scott, P. (1989). *Introducción a la investigación y evaluación educativa. Lecturas en educación matemática*. México: UNAM.
- Serrano, L. (1993). *Aproximación frecuencial a la enseñanza de la probabilidad y conceptos elementales sobre procesos estocásticos: Un estudio de concepciones iniciales*. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.
- Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la probabilidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J. y Cañizares, M. J. (1998). Un estudio componencial de heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los alumnos de secundaria. *Educación Matemática*, 10(1). 7-25.
- Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En Grouws (Ed.), *Handbook of teaching and learning mathematics* (pp. 465-494). Reston, Va: NCTM y Mc Millan.
- Spiegel, M. (1991). *Estadística*. Segunda edición. Madrid: Mc Graw Hill.
- Tauber, L. (1996 a). *Aprendizaje significativo y didáctica con software*. Tesina de Iniciación a la Investigación: Cientibeca '94. Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral.
- Tauber, L. (1996 b). Un ejemplo de informática educativa aplicada al proceso de enseñanza y aprendizaje de probabilidad en el Tercer Ciclo de la EGB. En P. Martínez, L. Tauber y G.

Referencias bibliográficas

- Peretti (Eds.), *Primer congreso internacional de formación de profesores*. (pp. 126-127). Santa Fe: Facultad de Formación Docente en Ciencias. Universidad Nacional del Litoral.
- Tauber, L. y Batanero, C. (1998). Una experiencia de uso de Statgraphics en la introducción de la distribución normal. En M. Berenguer, J. Cardeñoso y J. Sánchez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Los recursos*. (pp. 185 - 189). Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemática.
- Tauber, L. y Batanero, C. (1999). Sugerencias para introducir la distribución normal en Bachillerato y primeros cursos universitarios. En D. González, E. Hidalgo y J. Pérez (Eds.), *Innovación en la escuela y mejora de la calidad educativa. IX Jornadas LOGSE*. (pp. 75-79). Granada: Grupo Editorial Universitario.
- Tauber, L. y Batanero, C. (2000). Estimación de probabilidades a partir de tablas de frecuencias. Análisis de una tarea en un curso de introducción a la estadística. Trabajo presentado en las *Jornadas sobre Investigación en el aula de matemáticas. Retos de la educación matemática del siglo XXI*, en prensa.
- Tauber, L., Batanero, C. y Sánchez, V. (2000 a). Comprensión de la distribución normal en estudiantes universitarios. En C. Loureiro, F. Oliveira y L. Brunheira (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Estatística*. (pp. 117-130). Lisboa: Sociedad Portuguesa de Estadística, Asociación de Profesores de Matemática y Universidad de Lisboa.
- Tauber, L., Batanero, C. y Sánchez, V. (2000 b). La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos. Trabajo presentado en las *IV Jornadas de SEIEM*, en prensa.
- Tauber, L., Cravero, M., Martínez, P. y Meyer, R. (1995). La didáctica con software y el aprendizaje significativo. (pp. 59-61). *Actas del I Congreso Internacional de Informática Educativa*. Santa Fe: Universidad Tecnológica Nacional.
- Thorndike, R. L. (1989). *Psicometría aplicada*. México: Limusa.
- Tukey, J. W. (1977). *Exploratory data analysis*. Addison Wesley.
- Valeri, E. (1992). *Estadística para no estadísticos*. Barcelona: EADA.
- Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Vallecillos, A. (1995). Comprensión de la lógica del contraste de hipótesis en estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(3), 53-81.
- Vallecillos, A. (1996). *Inferencia estadística y enseñanza: Un análisis didáctico del contraste de hipótesis estadísticas*. Madrid: Comares.
- Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-second Session of the International Statistical Institute* (Tome 58, Book 2) (pp. 201-204). Helsinki, Finland: International Statistical Institute.
- Vere-Jones, D. (1995). The coming of age of statistical education. *International Statistical review*, 63, 3-23.
- Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher*, 21, 14-23.
- Walpole, R. y Myers, R. (1992). *Probabilidad y estadística*. Cuarta edición. México: Mc Millan.
- Well, A., Pollatsek, A. y Boyce, S. (1990). Understanding the effects of sample size on the variability of the mean. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 47, 289 – 312.
- Wilensky, U. (1991). Abstract mediations on the concrete and concrete implications for mathematics education. En Harel y S. Papert (Eds.). *Constructionism*. Norwood: Ablex.
- Wilensky, U. (1995 a). Learning probability through building computational models. En D. Carraher y L. Meira (Eds.), *Proceedings of the 19th PME Conference* (Vol. 3, pp. 152-159). Recife, Brasil: Comité organizador.
- Wilensky, U. (1995 b). Paradox, programming, and learning probability: A case study in a connected mathematics framework. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 253-280.

- Wilensky, U. (1997). What is normal anyway? Therapy for epistemological anxiety. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 171-202.